Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Голубев, Алгоритм вычисления остатков, *Квант*, 2019, номер 2, 35–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:47:08

Алгоритм вычисления остатков

В. ГОЛУБЕВ

ВЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССКАЖЕМ О ПРОСТОМ и эффективном алгоритме нахождения остатков от деления натурального числа на простые числа.

Чтобы мгновенно овладеть вашим вниманием, покажем решение двух примеров. В обоих примерах надо найти остаток от деления на 7 некоторого довольно большого числа. Можно, конечно, взять и поделить уголком. Однако мы знаем, что, например, если мы вычисляем остаток от деления не на 7, а на 3 или на 9, то объем вычислений можно сократить, заменив исходное число на сумму его цифр. При делении на 11 работает та же идея, но суммировать нужно с переменной знака: цифры на четных местах прибавлять, на нечетных вычитать. Оказывается, для вычисления остатка при делении на 7 можно применить похожий метод – однако цифры исходного числа перед суммированием нужно домножить на числа из специально подобранной последовательности, которую мы назовем «ключом». О том, как найти ключ и почему предлагаемый алгоритм дает правильный ответ, мы расскажем чуть позже. Пока же просто посмотрите.

Пример 1. Найдите остаток от деления на 7 числа

$$n = 385034034.$$

Решение. Берем ключ $[-2; -3; -1; 2; 3; 1]$ и надписываем его над цифрами числа n **справа налево** столько раз, сколько нужно:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & 0 & 3 & 4 & 0 & 3 & 4. \end{array}$$

Умножаем цифры нашего числа на соответствующие числа ключа и находим сумму

полученных произведений:

$$3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 1 +$$

$$+ 0 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = \\ = 6 + 24 + 5 + 0 - 9 - 4 + 0 + 9 + 4 = 35.$$

Делим 35 на 7 и находим остаток. Он равен 0, следовательно, n делится на 7.

Проверяем результат стандартным способом – делением уголком:

$$\begin{array}{r} 385034034 \overline{) 7} \\ \underline{35} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 34 \\ \underline{28} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 43 \\ \underline{42} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: остаток равен 0.

Пример 2. Найдите остаток от деления на 7 числа

$$n = 19421948213546978.$$

Решение. Берем ключ $[-2; -3; -1; 2; 3; 1]$ и выстраиваем справа налево периодическую последовательность:

$$\dots -2; -3; -1; 2; 3; 1; -2; -3; -1; 2; 3; 1;$$

$$-2; -3; -1; 2; 3; 1. (*)$$

Надпишем эту последовательность – опять же справа налево – над цифрами нашего числа:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} -3 & -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 2 & 1 & 9 & 4 & 8 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 8. \end{array}$$

Находим сумму произведений цифр числа n на соответствующие им члены последовательности (*):

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (-3) + 9 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + \\ & + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 9 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + 8 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + \\ & + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + \\ & + 6 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1 = -3 - 9 + 8 + 6 + \\ & + 1 - 18 - 12 - 8 + 4 + 3 + 3 - 10 - 12 - \\ & - 6 + 18 + 21 + 8 = -6. \end{aligned}$$

Остаток от деления -6 на 7 равен 1.

Проверка делением уголком подтверждает правильность нашего решения.

Ответ: остаток равен 1.

Чтобы приступить к дальнейшему изложению, давайте познакомимся с признаками делимости из книги А.П.Рязановского «Математика. Подготовка к ОГЭ и ЕГЭ» (М.: Русский фонд содействия образованию и науке, 2015).

Если число $n < 1000$, то удобно использовать следующий признак делимости числа $n = 10a + b$ на 7 и 13, где число a получено отбрасыванием последней цифры числа n :

Число $n = 10a + b$ делится на 7 тогда и только тогда, когда сумма $3a + b$ делится на 7. Число $n = 10a + b$ делится на 13 тогда и только тогда, когда разность $3a - b$ делится на 13.

Доказательство каждого из указанных признаков следует из тождеств

$$\begin{aligned} n = 10a + b &= 7a + (3a + b) = \\ &= 13a - (3a - b). \end{aligned}$$

Для чисел $n > 1000$ удобно использовать такой признак:

Число $n = 1000a + b$ делится на 7 (на 13) тогда и только тогда, когда разность между числом a , представляющим число n без последних трех цифр, и числом b , записанным последними тремя цифрами числа n (в том же порядке), делится на 7 (соответственно, на 13).

Доказательство основано на том, что 1001 делится на 7, на 11, на 13, и на тождестве

$$n = 1000a + b = 1001a - (a - b).$$

Пример 3. Поместите вместо x такую цифру, чтобы число $\overline{1234x5}$ делилось на 7.

Решение. Составим разность $a - b$:

$$\begin{aligned} 123 - \overline{4x5} &= 123 - 405 - 10x = \\ &= -282 - 10x. \end{aligned}$$

Далее запишем:

$$282 + 10x = (280 + 7x) + (2 + 3x).$$

Число в первой скобке делится на 7 при любом x . Число во второй скобке делится на 7 только при $x = 4$. Итак, искомое число 123445.

А теперь посмотрите решение по предлагаемому алгоритму с использованием «ключа»:

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & x & 5 & : 7 \Leftrightarrow (1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + \end{array}$$

$$\begin{aligned} &+ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + x \cdot 3 + 5 \cdot 1) : 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-2 - 6 - 3 + 8 + 3x + 5) : 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2 + 3x) : 7 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Ответ: $x = 4$.

Согласитесь, что это решение веселее и быстрее.

Однако как узнать ключ и что делать, если вы его забыли?

Восстановить ключ довольно просто. Над первой справа цифрой данного числа пишем 1. Далее 1 умножаем на 10, делим на 7 и полученный остаток 3 пишем над второй справа цифрой. То же самое делаем дальше.

3 умножаем на 10, делим на 7 и остаток 2 пишем над третьей справа цифрой.

2 умножаем на 10, делим на 7 и остаток 6 пишем над четвертой справа цифрой. Если вам когда-нибудь объясняли, что остаток 6 — это то же самое, что и остаток (-1) (поскольку $6 = 7 + (-1)$), то можете писать и (-1) .

6 (или (-1)) умножаем на 10, делим на 7 и остаток 4 (или (-3)) пишем над пятой справа цифрой.

4 (или (-3)) умножаем на 10, делим на 7 и остаток 5 (или (-2)) пишем над шестой справа цифрой.

5 (или (-2)) умножаем на 10, делим на 7 и остаток 1 пишем над седьмой справа цифрой.

Круг замкнулся.

Вы прекрасно знаете, что при делении на 7 получается ровно 6 ненулевых остатков. Именно поэтому ключ уложился в 6 чисел.

Наконец, продемонстрируем читателю, каким образом возник обсуждаемый в статье алгоритм, на примере определения остатка от деления на 13 двенадцатизначного числа.

Во-первых, вычислим остатки от деления на 13 степеней числа 10:

$$10^1 = 13 + (-3);$$

$$10^2 = 13 \cdot K_2 + (-4);$$

$$10^3 = 13 \cdot K_3 + (-1);$$

$$10^4 = 13 \cdot K_4 + 3;$$

$$10^5 = 13 \cdot K_5 + 4;$$

$$10^6 = 13 \cdot K_6 + 1;$$

$$10^7 = 13 \cdot K_7 + (-3);$$

$$10^8 = 13 \cdot K_8 + (-4);$$

$$10^9 = 13 \cdot K_9 + (-1);$$

$$10^{10} = 13 \cdot K_{10} + 3;$$

$$10^{11} = 13 \cdot K_{11} + 4;$$

$$10^{12} = 13 \cdot K_{12} + 1.$$

Мы видим, что эти остатки образуют повторяющиеся числа. Это и есть ключ

Во-вторых, для двенадцатизначного числа имеем следующие тождества:

$$\begin{aligned} n &= a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 = \\ &= a_{11} \cdot 10^{11} + a_{10} \cdot 10^{10} + a_9 \cdot 10^9 + a_8 \cdot 10^8 + \\ &+ a_7 \cdot 10^7 + a_6 \cdot 10^6 + a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + \\ &+ a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = a_{11}(13 \cdot K_{11} + 4) + \\ &+ a_{10}(13 \cdot K_{10} + 3) + a_9(13 \cdot K_9 + (-1)) + \\ &+ a_8(13 \cdot K_8 + (-4)) + a_7(13 \cdot K_7 + (-3)) + \\ &+ a_6(13 \cdot K_6 + 1) + a_5(13 \cdot K_5 + 4) + \\ &+ a_4(13 \cdot K_4 + 3) + a_3(13 \cdot K_3 + (-1)) + \\ &+ a_2(13 \cdot K_2 + (-4)) + a_1(13 + (-3)) + a_0 = \\ &= 13(a_{11} \cdot K_{11} + a_{10} \cdot K_{10} + a_9 \cdot K_9 + \\ &+ a_8 \cdot K_8 + a_7 \cdot K_7 + a_6 \cdot K_6 + a_5 \cdot K_5 + \\ &+ a_4 \cdot K_4 + a_3 \cdot K_3 + a_2 \cdot K_2 + a_1) + \\ &+ (4a_{11} + 3a_{10} - a_9 - 4a_8 - 3a_7 + a_6 + 4a_5 + 3a_4 - \\ &- a_3 - 4a_2 - 3a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Первое слагаемое очевидно делится на 13. Следовательно, остаток от деления на 13 числа n равен остатку от деления на 13 второго слагаемого.

Отсюда получаем признак делимости на 13 двенадцатизначного числа:

Число $n = a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ делится на 13 тогда и только тогда, когда на 13 делится следующая сумма:

$$4a_{11} + 3a_{10} - a_9 - 4a_8 - 3a_7 + a_6 + 4a_5 + 3a_4 - a_3 - 4a_2 - 3a_1 + a_0.$$

Поскольку уже 10^6 дает при делении на 13 остаток 1, далее остатки «заключиваются», и можно получить алгоритм вычисления остатка при делении на 13 числа с произвольным количеством разрядов. Ключ этого алгоритма будет такой: $\boxed{1; 4; 3; -1; -4; -3}$. В примере для 12-значного числа ключ повторился два раза.

Изложенный в статье алгоритм обобщается до метода вычисления остатков при делении на произвольное простое число. О похожих признаках делимости более подробно рассказывалось в статье В.Абрамовича «Признаки делимости на l » («Квант» №10 за 1978 г.).

Автор выражает огромную благодарность Л.А.Емельянову, натолкнувшему его на возможность нахождения алгоритма, и С.Л.Кузнецову, который подсказал, как можно изложить материал существенно короче.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Изогональное сопряжение в четырехугольнике

А. УТКИН

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗОГОНАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ – важный инструмент в геометрии. Из недавних материалов в «Кванте» упомянем статьи [1], [2]. В этой статье мы расскажем об изогональном сопряжении в четырехугольнике и покажем, что оно может

оказаться полезным при решении задач. В частности, мы изложим решение задачи M2529 из «Задачника «Кванта».

Для начала дадим определение.

Определение. Говорят, что точки P и P' (отличные от A, B, C, D) изогонально сопряжены в четырехугольнике $ABCD$ (или относительно четырехугольника $ABCD$), если прямые, соединяющие любую вершину четырехугольника с точками P и P' , симметричны относительно соответствующей биссектрисы угла четырехугольника (т.е. AP и AP' симметричны относительно угла DAB , BP и BP' – относительно угла ABC , CP и CP' – относительно угла BCD , а DP и DP' – относительно угла CDA).

Мы видим, что изогонально сопряженные точки P и P' относительно четырехугольни-