Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Черноуцан, Относительность движения в задачах кинематики,
Квант, 2019, номер 2, 43–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает,
что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:16:26

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КИНЕМАТИКИ

А. ЧЕРНОУЦАН

ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ПОЛЕЗНО владеть умением переходить в движущиеся системы отсчета (СО). Выбор удачной СО может привести к заметному упрощению решения, сделать трудные моменты наглядными и очевидными. В некоторых задачах условие сразу содержит данные, относящиеся к различным СО, и использование формул перехода от одной СО к другой становится неизбежным. Это относится, например, к движению летательных аппаратов (самолетов) при наличии ветра или к движению плавательных средств (лодок, катеров) при наличии течения. Летчик управляет скоростью самолета относительно воздуха (в СО, связанной с движущимся воздухом): в режиме прямолинейного движения она направлена вдоль линии корпуса самолета, а ее величина определяется выбранной летчиком мощностью. Точно так же капитан управляет движением катера относительно воды. Для расчета движения самолета относительно земли (в этой СО он должен лететь в заданном направлении, от пункта отправления к пункту назначения, а от модуля скорости относительно земли зависит время полета) или катера относительно берега нужно применить закон сложения скоростей.

Закон сложения скоростей связывает между собой скорость $\vec{v}_2$ тела относительно земли (неподвижной СО), его скорость $\vec{v}_{21}$ относительно движущегося тела (т.е. относительно поступательно движущейся СО, связанной с движущимся телом 1) и скорость $\vec{v}_1$ самой СО (скорость тела 1):

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{21} + \vec{v}_1. \quad (1)$$

(В задачах удобно применять не численные, а «говорящие» буквенные индексы.) Отметим, что поскольку речь пока идет о *поступательно* движущихся СО, то можно говорить о скорости СО, не указывая, о какой ее точке идет речь. В случае вращающихся СО под $\vec{v}_1$ будет подразумеваться скорость той точки СО, где в данный момент находится тело (ее называют *переносной* скоростью). Аналогично записываются формулы для сложения перемещений и сложения ускорений (для поступательно движущихся СО):

$$\vec{s}_2 = \vec{s}_{21} + \vec{s}_1, \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_{21} + \vec{a}_1. \quad (2)$$

Во многих задачах формулы (1), (2) удобно применять в виде, сразу выражающем относительную скорость (перемещение, ускорение) одного движущегося тела относительно другого (относительно поступательно движущейся СО, связанной с этим другим телом):

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \quad \vec{s}_{21} = \vec{s}_2 - \vec{s}_1, \quad \vec{a}_{21} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1. \quad (3)$$

(Формулы в таком виде удобны для запоминания ввиду повторения индексов в правой и левой частях).

При решении математических задач на движение, например катера по воде, формула (1) используется уже в младших классах в виде простого правила: при движении вниз по течению скорость течения надо прибавлять, против течения – вычитать. Объясняют это правило интуитивно просто: сначала катер перемещается относительно воды, а потом вместе с водой. Результат такой же, как если бы все происходило одновременно. Но такое же рассуждение годится для объяснения и общей векторной формулы (1): сначала тело 2 перемещается относительно СО₁ на $\vec{v}_{21}\Delta t$ (тело 1 при этом неподвижно), а затем вместе с телом 1 и СО₁ – на $\vec{v}_1\Delta t$. В итоге все на своих местах – и тело 2 и СО₁!

В случае движения всех тел вдоль одной прямой формулы (1)–(3) удобно сразу применять в проекции на выбранную ось.

Задача 1. Скорость мотоциклиста $v_m = 54$ км/ч, а скорость встречного ветра $v_b = 3$ км/с. Какова скорость ветра в системе отсчета, связанной с мотоциклистом? В ответе дайте модуль скорости.

Решение. Удобно воспользоваться формулой (3):

$$\vec{v}_{bm} = \vec{v}_b - \vec{v}_m$$

и записать ее в проекции на ось x , направленную вдоль скорости мотоциклиста:

$$v_{\text{BM},x} = v_{\text{B},x} - v_{\text{M},x} = (-v_{\text{B}}) - v_{\text{M}} = -18 \text{ м/с}.$$

Если выбрать ось «по ветру», то проекция получится положительной:

$$v_{\text{BM},x} = v_{\text{B}} - (-v_{\text{M}}) = 18 \text{ м/с}.$$

Следующие несколько задач относятся к упомянутым выше задачам навигации – управлением летательными или плавательными аппаратами в движущихся средах.

Задача 2. Катер, переправляясь через реку шириной $L = 800 \text{ м}$, двигался со скоростью $v_{\text{KB}} = 4 \text{ м/с}$ перпендикулярно течению реки в системе отсчета, связанной с водой. На сколько будет снесен катер течением, если скорость течения реки $v_{\text{B}} = 1,5 \text{ м/с}$?

Решение. Если векторы скоростей не параллельны, то надо начать с векторной записи закона сложения скоростей, затем сделать рисунок, соответствующий этому векторному равенству, и только потом, опираясь на этот рисунок, проводить вычисления. В данной задаче, согласно формуле (1),

$$\vec{v}_{\text{K}} = \vec{v}_{\text{KB}} + \vec{v}_{\text{B}}.$$

Соответствующий этому равенству векторный треугольник изображен на рисунке 1 с

Рис. 1

учетом того, что скорость воды $\vec{v}_{\text{B}}$ параллельна берегу, а скорость катера относительно воды $\vec{v}_{\text{KB}}$ перпендикулярна берегу. Угол α , который траектория катера составляет с берегом, равен углу в треугольнике скоростей. Для искомого расстояния s получаем

$$s = L \operatorname{ctg} \alpha = L \frac{v_{\text{B}}}{v_{\text{KB}}} = 300 \text{ м}.$$

Можно было не вводить угол α и воспользоваться подобием треугольников. А еще

можно, как при рассмотрении броска под углом, записать закон движения в проекциях на оси x и y . Из закона сложения скоростей следует, что $v_{\text{K},x} = v_{\text{B}}$, а $v_{\text{K},y} = v_{\text{KB}}$. Получаем два равномерных движения:

$$s = v_{\text{B}} t, \quad L = v_{\text{KB}} t.$$

Исключая t , находим s .

Задача 3. Самолет летел на север со скоростью $v_{\text{c1}} = 48 \text{ м/с}$ относительно земли. С какой скоростью относительно земли будет лететь самолет, если подует западный ветер со скоростью $v_{\text{B}} = 14 \text{ м/с}$?

Решение. Пока самолет летел в отсутствие ветра, его скорости относительно земли и относительно воздуха совпадали и были направлены на север: $\vec{v}_{\text{c1}} = \vec{v}_{\text{CB}}$. Что же изменилось после того, как подул западный ветер? Судя по условию задачи, летчик пока не знает, что подул ветер, и ничего не сделал для корректировки полета. Это значит, что корпус самолета все так же направлен на север и мотор работает с прежней мощностью. Это, в свою очередь, означает, что относительно воздуха самолет движется с той же скоростью $\vec{v}_{\text{CB}}$, равной 48 м/с и направленной на север. А вот новую скорость самолета относительно земли найдем из закона сложения скоростей:

$$\vec{v}_{\text{c2}} = \vec{v}_{\text{CB}} + \vec{v}_{\text{B}}.$$

Рис. 2

Изобразив треугольник скоростей (рис.2), для величины искомой скорости получим

$$v_{\text{c2}} = \sqrt{v_{\text{CB}}^2 + v_{\text{B}}^2} = 50 \text{ м/с}.$$

Нетрудно также найти угол отклонения самолета от курса на север:

$$\sin \alpha = \frac{v_{\text{B}}}{v_{\text{c2}}} = 0,28, \text{ и } \alpha \approx 16^\circ.$$

Задача 4. При переправе через реку шириной $L = 80 \text{ м}$ надо попасть в точку, лежащую на $s = 60 \text{ м}$ выше по течению, чем точка старта. Лодочник управляет моторной лодкой так, что она движется точно к цели со скоростью $v_{\text{Л}} = 4,5 \text{ м/с}$ относительно берега. Какова при этом скорость лодки относительно воды, если скорость течения реки $v_{\text{B}} = 2,1 \text{ м/с}$?

Решение. Скорость лодки относительно берега $\vec{v}_л$ направлена вдоль указанной в условии линии движения (рис.3), а скорость

Рис. 3

воды равна скорости течения и направлена параллельно берегу. Скорость лодки, которой управляет лодочник, относительно воды выражается формулой (3):

$$\vec{v}_{лв} = \vec{v}_л - \vec{v}_B = \vec{v}_л + (-\vec{v}_B).$$

Это векторное равенство изображено на рисунке 3. Величину этой относительной скорости найдем с помощью теоремы косинусов:

$$\begin{aligned} v_{лв} &= \sqrt{v_l^2 + v_B^2 - 2v_l v_B \cos(180^\circ - \alpha)} = \\ &= \sqrt{v_l^2 + v_B^2 + 2v_l v_B \cos \alpha}, \end{aligned}$$

где α – угол между траекторией лодки и берегом. Косинус этого угла найдем из треугольника расстояний:

$$\cos \alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2 + L^2}} = 0,6.$$

Подставляя числа, получаем

$$v_{лв} = 6 \text{ м/с}.$$

Можем также найти угол γ , на который лодочник должен отклонить нос лодки от заданной траектории. Для этого придется воспользоваться теоремой синусов:

$$\frac{\sin \gamma}{v_B} = \frac{\sin \alpha}{v_{лв}}, \text{ откуда } \sin \gamma = 0,28, \text{ и } \gamma \approx 16^\circ.$$

Задача 5. В безветренную погоду самолет затрачивает на перелет между городами $t_1 = 6$ ч. На сколько минут увеличится время полета, если будет дуть боковой ветер со скоростью $v_B = 20$ м/с перпендикулярно линии полета? Скорость самолета относительно воздуха равна $v_{св} = 328$ км/ч.

Решение. В первом случае самолет перемещается относительно земли со скоростью $\vec{v}_{св}$, т.е. расстояние между городами связано с временем полета формулой

$$s = v_{св} t_1.$$

Если дует боковой ветер, то, для того чтобы сохранить движение по прежней прямой линии, соединяющей города A и B, летчику надо отклонить нос самолета в сторону ветра (рис.4; вид сверху). Вдоль оси самолета

Рис. 4

будет направлена скорость самолета относительно воздуха, которая связана со скоростью самолета относительно земли и скоростью воздуха (ветра) формулой (3):

$$\vec{v}_{св} = \vec{v}_с - \vec{v}_B = \vec{v}_с + (-\vec{v}_B).$$

Из рисунка 4, на котором изображено это векторное равенство, находим величину скорости самолета относительно земли:

$$v_с = \sqrt{v_{св}^2 - v_B^2},$$

после чего получаем новое время полета:

$$t_2 = \frac{s}{v_с} = \frac{v_{св} t_1}{\sqrt{v_{св}^2 - v_B^2}} = 369 \text{ мин}.$$

Это на 9 минут больше, чем в отсутствие ветра. Напоследок поможем летчику вычислить необходимый угол α отклонения корпуса самолета от линии полета:

$$\sin \alpha = \frac{v_B}{v_{св}} = 0,22, \text{ и } \alpha = 12,7^\circ.$$

Следующая задача демонстрирует, как можно с помощью закона сложения скоростей графически решать задачи, связанные с нахождением экстремума.

Задача 6. Скорость течения реки $v_B = 5$ м/с, ее ширина $L = 32$ м. Переправляясь через реку на лодке, скорость которой относительно воды $v_{лв} = 4$ м/с, рулевой обеспечил наименьший возможный снос лодки течением. Чему равен этот снос?

Решение. Расширим рамки задачи – найдем минимальный снос для различных значений скорости лодки относительно воды.

Если $v_{\text{лв}} > v_{\text{в}}$, то лодочник может выбрать такой курс (т.е. так направить $\vec{v}_{\text{лв}}$), что снос лодки будет равен нулю. На рисунке 5,а изображен закон сложения скоростей

$$\vec{v}_{\text{л}} = \vec{v}_{\text{лв}} + \vec{v}_{\text{в}}$$

для случая, когда $\vec{v}_{\text{л}}$ перпендикулярна ли-

Рис. 5

нии берега. Корпус лодки должен при этом составлять с перпендикулярным направлением угол, синус которого равен

$$\sin \alpha = \frac{v_{\text{в}}}{v_{\text{лв}}}.$$

Если же $v_{\text{лв}} < v_{\text{в}}$ (как в нашем случае), то снос нельзя сделать равным нулю и надо выбрать такое направление скорости $\vec{v}_{\text{лв}}$, при котором скорость $\vec{v}_{\text{л}}$ будет составлять максимальный угол с линией берега. На рисунке 5,б изображен закон сложения скоростей для этого случая. К концу постоянного вектора $\vec{v}_{\text{в}}$ приставляется вектор меньшей длины $\vec{v}_{\text{лв}}$, который может принимать все возможные направления «от берега». Концы всех этих векторов описывают полуокружность радиусом $v_{\text{лв}}$, а наибольший угол α , который вектор $\vec{v}_{\text{л}}$ может составлять с линией берега, соответствует случаю, когда линия скорости $\vec{v}_{\text{л}}$ проходит по касательной к окружности. Из рисунка находим

$$\sin \alpha = \frac{v_{\text{лв}}}{v_{\text{в}}} = 0,8.$$

(Такой же угол составляет при этом $\vec{v}_{\text{лв}}$, т.е. направление корпуса лодки, с перпендикуляром к линии берега. Отметим, что корпус лодки при этом направлен перпендикулярно вектору $\vec{v}_{\text{л}}$, т.е. линии движения лодки.) Минимальный снос при этом равен

$$s = L \operatorname{ctg} \alpha = 24 \text{ м}.$$

В следующих двух задачах мы будем наблюдать за падением капель дождя.

Задача 7. Когда автобус стоит на остановке, капли дождя оставляют на боковом стекле вертикальные следы, а когда он едет со скоростью $v_{\text{а}} = 72 \text{ км/ч}$, следы капель наклонены к вертикали под углом $\alpha = 30^\circ$. С какой скоростью падают капли дождя?

Решение. Когда в задаче идет речь о падении капель, у учеников часто возникает вопрос: как можно говорить о скорости падения капель, когда все они падают с ускорением g и достигают земли с разной скоростью? Это не так. Каждая капля достигает поверхности земли уже в режиме установившегося движения, падая с такой скоростью, при которой сила сопротивления воздуха уравнивает силу тяжести (в отсутствие ветра). Как показывает анализ, крупные капли падают с большей скоростью, чем мелкие. В задачах обычно предполагается, что все капли данного дождя имеют одинаковую массу («монодождь»), т.е. падают с одной и той же скоростью.

Первая фраза условия означает, что ветер отсутствует (об учете ветра речь пойдет в следующей задаче). В СО, связанной с движущимся автобусом, капли дождя падают под углом α к вертикали. Запишем закон сложения скоростей в форме (3):

$$\vec{v}_{\text{ка}} = \vec{v}_{\text{к}} - \vec{v}_{\text{а}}$$

и учтем (рис.6), что скорость капель направлена вертикально, а скорость автобуса – горизонтально. Получим

$$v_{\text{к}} = v_{\text{а}} \operatorname{ctg} \alpha \approx 34 \text{ м/с}.$$

Рис. 6

Задача 8. При скорости ветра, равной $v_{\text{в1}} = 10 \text{ м/с}$, капли дождя падают под углом $\alpha_1 = 30^\circ$ к вертикали. При какой скорости ветра капли будут падать под углом $\alpha_2 = 60^\circ$ к вертикали?

Решение. В СО, движущейся со скоростью ветра, воздух неподвижен, т.е. капли дождя падают вертикально вниз. Скорость $v_{\text{кв}}$ падения капель в этой СО зависит только от размеров капель и не зависит от скорости ветра. Записав и нарисовав (рис.7) закон сложения скоростей для первого ветра:

$$\vec{v}_{\text{к1}} = \vec{v}_{\text{кв}} + \vec{v}_{\text{в1}},$$

Рис. 7

придем к соотношению

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_{B1}}{v_{KB}}.$$

Аналогичное соотношение получается для второго ветра. Исключив v_{KB} , получим

$$v_{B2} = v_{B1} \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = 30 \text{ м/с}.$$

В следующей задаче удастся учесть взаимодействие мяча с движущимся воздухом с помощью перехода в другую СО.

Задача 9. После удара футболиста мяч полетел в сторону ворот, находящихся на расстоянии $L = 32 \text{ м}$, со скоростью $v_0 = 25 \text{ м/с}$ под углом α к горизонту таким, что $\cos \alpha = 0,8$. Из-за бокового ветра, дующего вдоль ворот перпендикулярно начальной скорости мяча, горизонтальное смещение мяча в плоскости ворот оказалось равным $s = 2 \text{ м}$. Найдите время полета мяча до плоскости ворот. Мяч не вращается, скорость ветра $u = 10 \text{ м/с}$.

Решение. В СО земли траектория мяча – сложная пространственная кривая (рис.8,а; вид сверху; буква «Ц» обозначает центр ворот). В результате воздействия бокового

СО земли
Рис. 8

ветра место пересечения мячом линии ворот смещено на s вправо, в сторону ветра. Однако в СО, связанной с воздухом, сила сопротивления направлена против скорости и движение происходит в вертикальной плоскости, направление которой задается горизонтальной составляющей начальной относительной скорости (рис.8,б; вид сверху)

$$\vec{v}_{0\Gamma} = \vec{v}_0 - \vec{u} = \vec{v}_{0\Gamma} + (-\vec{u}).$$

Перемещаясь в этой плоскости, мяч сместится влево на

$$L \operatorname{tg} \beta = L \frac{u}{v_{0\Gamma}} = L \frac{u}{v_0 \cos \alpha}.$$

Все время полета центр ворот двигался в этой СО влево со скоростью u , переместившись на расстояние ut . Однако в момент пересечения мячом линии ворот он должен находиться на s правее центра ворот (см. рис.8,а). Получаем

$$s = ut - \frac{Lu}{v_0 \cos \alpha},$$

откуда

$$t = \frac{s}{u} + \frac{L}{v_0 \cos \alpha} = 1,8 \text{ с}.$$

В рамках кинематики можно на равных правах использовать СО, движущиеся не только равномерно, но и ускоренно (в динамике необходимо различать инерциальные и неинерциальные СО). Проиллюстрируем это следующим примером.

Задача 10. Скоростной лифт опускается с ускорением $a = 5 \text{ м/с}^2$ относительно земли. В некоторый момент времени с потолка лифта начинает падать болт. Высота лифта $h = 2,5 \text{ м}$. Определите время падения болта.

Решение. Можно, конечно, решать эту задачу в СО земли. Надо записать законы движения болта и дна лифта (с учетом их скорости в момент отрыва) и приравнять их координаты (условие падения). Однако в СО лифта болт падает с нулевой начальной скоростью с ускорением

$$a_{6\Gamma} = a_6 - a_{\Gamma} = g - a$$

(ось направлена вниз) и пролетает расстояние h . Получаем

$$h = \frac{(g - a)t^2}{2}, \text{ и } t = \sqrt{\frac{2h}{g - a}} = 1 \text{ с}.$$

Следующую задачу удобно решать переходом в СО одного из тел, которое движется с ускорением.

Задача 11. Два тела начинают одновременно двигаться по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями $v_{10} = 10 \text{ м/с}$ и $v_{20} = 20 \text{ м/с}$ и с постоянными ускорениями $a_1 = 2 \text{ м/с}^2$ и $a_2 = 1 \text{ м/с}^2$, направленными противоположно соответствующим начальным скоростям. Начальное расстояние между телами $s_0 = 200 \text{ м}$. Определите минимальное расстояние между телами.

Решение. Стандартное решение этой задачи выглядит несложно: надо записать законы движения двух тел, выразить расстояние между ними в зависимости от времени и найти минимум полученного выражения. Однако если перейти в СО одного из тел, то другое тело будет приближаться к нему с начальной скоростью $v_0 = v_{10} + v_{20}$ и с постоянным ускорением $a = a_1 + a_2$, направленным против начальной скорости. Из стандартной формулы кинематики

$$0 - v_0^2 = -2as$$

находим, что это другое тело пройдет до разворота расстояние

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{(v_{10} + v_{20})^2}{2(a_1 + a_2)} = 150 \text{ м},$$

т.е. минимальное расстояние между телами составляет

$$l_{\min} = s_0 - s = 50 \text{ м}.$$

Следующие три задачи возвращают нас к теме графического нахождения экстремума.

Задача 12. На ленту транспортера, движущую со скоростью $v_{\text{л}} = 4 \text{ м/с}$, сбоку сталкивают коробку. Скорость коробки сразу после попадания на ленту равна $v_{\text{к}0} = 3 \text{ м/с}$ и перпендикулярна скорости ленты. Какую минимальную скорость относительно земли будет иметь коробка во время движения? Сила трения достаточна велика, так что коробка не соскальзывает с ленты.

Решение. В СО, связанной с землей, движение коробки выглядит сложно. Ясно, что начальная скорость коробки равна $v_{\text{к}}$, а конечная равна $v_{\text{л}}$. В процессе движения скорость изменяет величину и направление, поворачиваясь на 90° . Но как при этом меняется скорость коробки – непонятно. Однако в СО, связанной с движущейся лентой транспортера, движение коробки выглядит совсем просто. По неподвижной ленте начинает двигаться коробка с начальной скоростью

$$\vec{v}_{\text{кл}0} = \vec{v}_{\text{к}0} - \vec{v}_{\text{л}}$$

и продолжает двигаться по этой прямой с уменьшающейся (за счет трения) скоростью. Чтобы найти скорость коробки относительно земли в

Рис. 9

произвольный момент времени, надо еще раз применить закон сложения скоростей (рис.9):

$$\vec{v}_{\text{к}} = \vec{v}_{\text{кл}} + \vec{v}_{\text{л}}.$$

Как видно из рисунка, скорость коробки принимает наименьшее значение в тот момент, когда вектор $\vec{v}_{\text{к}}$ проходит по высоте треугольника скоростей. Получаем

$$v_{\text{к min}} = v_{\text{к}0} \sin \alpha = v_{\text{к}0} \frac{v_{\text{л}}}{\sqrt{v_{\text{к}0}^2 + v_{\text{л}}^2}} = 2,4 \text{ м/с}.$$

Задача 13. Автомобиль приближается к пункту А со скоростью $v_{\text{а}} = 80 \text{ км/ч}$. В тот момент, когда ему оставалось проехать $s_0 = 10 \text{ км}$, из пункта А в перпендикулярном направлении выезжает грузовик со скоростью $v_{\text{г}} = 60 \text{ км/ч}$. Чему равно наименьшее расстояние (в км) между автомобилем и грузовиком?

Решение. Конечно, эту задачу можно решить «в лоб» чисто алгебраически, не переходя в другую СО. Для этого надо выразить расстояние между автомобилем и грузовиком как функцию времени и исследовать полученное выражение на минимум. Прodelайте эти вычисления и сравните с тем решением, которое предлагаем мы.

Когда речь идет об изучении взаимного расположения двух движущихся тел, задача, как правило, существенно упрощается при переходе в СО, связанную с одним из этих тел. (В этой СО надо рассматривать только одно движущееся тело.) Перейдем в СО автомобиля. В этой СО грузовик движется с постоянной скоростью

$$\vec{v}_{\text{га}} = \vec{v}_{\text{г}} - \vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_{\text{г}} + (-\vec{v}_{\text{а}})$$

по прямой линии мимо неподвижного автомобиля (рис.10). Наименьшее расстояние

Рис. 10

между ними находится построением – оно равно длине перпендикуляра, опущенного на эту линию:

$$s_{\min} = s_0 \sin \alpha = s_0 \frac{v_{\text{г}}}{v_{\text{га}}} = s_0 \frac{v_{\text{г}}}{\sqrt{v_{\text{г}}^2 + v_{\text{а}}^2}} = 6 \text{ км}.$$

Аналогичные рассуждения проходят и в случае свободного движения двух тел в поле тяжести, хотя движение каждого тела в отдельности выглядит сложнее.

Задача 14. Два камня расположены на одной горизонтали на расстоянии $s_0 = 42$ м друг от друга. Один камень бросают вертикально вверх со скоростью $v_{10} = 5$ м/с, а второй одновременно бросают под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту по направлению к первому камню со скоростью $v_{20} = 8$ м/с. Чему равно наименьшее расстояние между камнями в процессе движения?

Решение. Перейдем в СО первого камня. Ускорение второго камня в этой СО находим по формуле (3):

$$\vec{a}_{21} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{g} - \vec{g} = 0.$$

Значит, движение второго камня в СО первого камня происходит равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} = \vec{v}_{20} + (-\vec{v}_{10}).$$

(Это свойство относительного движения иногда называют принципом барона Мюнхгаузена. Барон, как известно, любил кататься верхом на пушечном ядре.) Линия движения второго тела в СО первого тела построена на рисунке 11. Наименьшее расстояние между

Рис. 11

камнями равно, как и в предыдущей задаче, длине перпендикуляра:

$$s_{\min} = s_0 \sin \beta.$$

А вот с нахождением синуса угла β придется повозиться:

$$\sin \beta = \frac{|v_{10} - v_{20} \sin \alpha|}{\sqrt{(v_{10} - v_{20} \sin \alpha)^2 + (v_{20} \cos \alpha)^2}}.$$

Подставляя числа, получаем

$$\sin \beta = \frac{1}{7}, \text{ и } s_{\min} = 6 \text{ м.}$$

Принцип барона Мюнхгаузена используется и в следующей задаче.

Задача 15. Из некоторой точки одновременно бросают два камня: один в северном направлении под углом $\alpha_1 = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 18$ м/с, другой в южном направлении под углом $\alpha_2 = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $v_{20} = 48$ м/с. Найдите расстояние между камнями через $t = 1,5$ с.

Решение. Перейдем в СО первого камня. Поскольку относительное ускорение равно нулю:

$$\vec{a}_{21} = \vec{g} - \vec{g} = 0,$$

то в этой СО второй камень удаляется от первого равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10},$$

а расстояние между камнями через время t оказывается равным $s = v_{21}t$. Модуль относительной скорости найдем с помощью теоремы косинусов (против относительной скорости лежит угол $\beta = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 = 60^\circ$;

Рис. 12

рис.12):

$$v_{21} = \sqrt{v_{20}^2 + v_{10}^2 - 2v_{20}v_{10} \cos \beta} = 42 \text{ м/с.}$$

Тогда

$$s = v_{21}t = 63 \text{ м.}$$

Конечно, эту задачу можно решить «в лоб», записав координаты камней через время t и найдя расстояние между этими точками. Но в нашем подходе важно понимание, что ответ зависит не от углов α_1 и α_2 , а от угла β . Если изменить условие, задав, например, $\alpha_1 = 50^\circ$ и $\alpha_2 = 70^\circ$, то решение «в лоб» сильно усложнится (придется повозиться с тригонометрией), а в нашем подходе сразу видно, что ответ не изменится.

Упражнения

1. Эскалатор метрополитена, двигаясь равномерно, поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение одной минуты. По неподвижному эскалатору пассажир, двигаясь равномерно, поднимается за три минуты. Сколько секунд будет подниматься пассажир по движущемуся вверх эскалатору?

2. В безветренную погоду для перелета из города *A* в город *B* и обратно самолет затрачивает 8 часов полетного времени. На сколько минут увеличится это время, если во время полета будет дуть ветер со скоростью 20 м/с в направлении от *A* к *B*? Скорость самолета относительно воздуха 312 км/ч.

3. Из пункта *A* по взаимно перпендикулярным дорогам одновременно выехали два автомобиля: один со скоростью 80 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. С какой скоростью (в км/ч) они удаляются друг от друга?

4. При скорости ветра 20 м/с скорость капель дождя 40 м/с. Какой будет скорость капель при скорости ветра 5 м/с?

5. Самолет, совершающий перелеты из города *A* в город *B* и обратно, развивает в полете скорость 328 км/ч относительно воздуха. При боковом ветре, перпендикулярном линии полета, перелет туда и обратно занял 6 часов полетного времени. На сколько минут больше займет этот перелет, если ветер будет все время дуть в направлении от *A* к *B*? Скорость ветра в обоих случаях 20 м/с.

6. При переправе через реку шириной 60 м надо попасть в точку, лежащую на 80 м ниже по течению, чем точка старта. Лодочник управляет моторной лодкой так, что она движется

точно к цели со скоростью 8 м/с относительно берега. Какова при этом скорость лодки относительно воды, если скорость течения реки 2,8 м/с?

7. Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона 25 м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$. Пассажир побежал с постоянной скоростью. При какой минимальной скорости он догонит свой вагон?

8. Из одной точки одновременно бросают два тела: одно горизонтально со скоростью 6 м/с, другое вертикально со скоростью 8 м/с. На каком расстоянии друг от друга будут находиться тела через 2 с?

9. Два камня расположены на одной горизонтали на расстоянии 30 м друг от друга. Один камень бросают вертикально вверх со скоростью 9 м/с, а второй одновременно бросают горизонтально по направлению к первому камню со скоростью 12 м/с. Чему равно наименьшее расстояние между камнями в процессе движения?

10. Через блок перекинули нерастяжимую нить, к концам которой прикрепили два груза. В некоторый момент ось блока поднимается вертикально вверх со скоростью 2 м/с, а один из грузов опускается со скоростью 3 м/с. С какой скоростью движется в этот момент другой груз?

ОЛИМПИАДЫ

Муниципальный этап LIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

7 класс

Задача 1. Забывчивый Баг

Теоретик Баг измерил массу и объем кирпича. Они оказались равны, соответственно, $m = 5400$ (...) и $V = 1800$ (...). Затем он вычислил плотность кирпича $\rho = 0,000000003$ (...). Однако Баг забыл указать, в каких единицах записаны эти величины. Приведя рассуждения, основанные на вашем жизненном опыте, восстановите единицы, в которых выражены масса, объем и плотность кирпича. Известно, что масса измеряется в граммах, килограммах

или тоннах, объем измеряется в мм^3 , см^3 , дм^3 или м^3 .

С.Кармазин

Задача 2. Два участка пути

На первом участке дороги автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 45$ км/ч, на втором – со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Средняя скорость движения на всем пути оказалась равной $v_{\text{ср}} = 50$ км/ч. Какой из участков длиннее и во сколько раз?

В.Слободянин

Задача 3. На карусели

Экспериментатор Глюк установил, что он совершает полный круг, проходя по краю