Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Григорьев, О длине траектории баллистического движения,
Квант, 2019, номер 3, 23–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает,
что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 04:30:21

Рис. 5

довательно,

$$\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2, \text{ или}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_3 &= k \frac{q}{R} + \frac{2A_1}{q} - \left(k \frac{q}{R} + \frac{A_2}{q} \right) = \\ &= \frac{2A_1 - A_2}{q}. \end{aligned}$$

Полная энергия системы проводников в начальном состоянии равна

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot 3qk \frac{q}{R} = \frac{3}{2} k \frac{q^2}{R}.$$

Конечная энергия системы равна

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} \cdot 3 \left(q(\varphi_1 + 2\varphi_2) \right) = \\ &= \frac{3}{2} q \left(k \frac{q}{R} + \frac{2A_1}{q} + 2 \frac{2A_1 - A_2}{q} \right) = \\ &= \frac{3}{2} q \left(k \frac{q}{R} + \frac{6A_1 - 2A_2}{q} \right). \end{aligned}$$

Из закона сохранения энергии получаем

$$\begin{aligned} W_0 + A_3 &= W_1, \text{ или} \\ A_3 &= \frac{3}{2} q \left(k \frac{q}{R} + \frac{6A_1 - 2A_2}{q} \right) - \frac{3}{2} k \frac{q^2}{R} = \\ &= 9A_1 - 3A_2. \end{aligned}$$

А.Бычков

(Продолжение см. на с. 24)

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

О длине траектории баллистического движения

Ф.ГРИГОРЬЕВ

ПОСЛЕ ТОГО, КАК ГАЛИЛЕЙ УСТАНОВИЛ, что траектория баллистического движения вблизи поверхности Земли без учета сопротивления воздуха является параболой, естественно встал вопрос, как найти длину траектории этого движения. С практической точки зрения знать длину траектории полета полезно, например, в случае ее визуализации – в фейерверках, оставляющих след, при показательных выступлениях летательных аппаратов и т.д., так как при фиксированном расходе активного вещества яркость следа зависит от длины траектории.

Также по длине траектории можно выполнить приблизительный расчет работы силы сопротивления движению летящего тела.

Выражение для длины траектории параболического движения можно найти, например, в интернете (см. <http://sch1561uz.mskobr.ru/files/didactika2.pdf>). Здесь же кратко воспроизведем этот результат.

Чтобы вычислить длину траектории, разобьем ее на малые участки, каждый из которых можно считать прямым. Длина малого участка равна

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt.$$

Тогда искомая длина будет равна

$$\begin{aligned} L &= \int_0^T \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt = \\ &= \int_0^T \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} dt, \end{aligned}$$

где $T = 2v_0 \sin \alpha / g$ – время полета. Замена $a = v_0 \cos \alpha$ и $x = v_0 \sin \alpha - gt$ интеграл можно свести к табличному:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right). \end{aligned}$$

После взятия нашего интеграла получаем

$$\int \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt = -\frac{1}{g} \times \\ \times \left(\frac{v_0 \sin \alpha - gt}{2} \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{2} \ln \left(v_0 \sin \alpha - gt + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \right) \right).$$

Подставив верхний и нижний пределы интегрирования и упростив, находим искомую длину траектории:

$$L = \frac{v_0^2}{2g} \left(2 \sin \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \ln \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right).$$

Интересно определить, при каком угле броска α_0 при фиксированной скорости v_0 длина траектории максимальна, чему она равна и во сколько раз больше максимальной дальности броска. Возьмем производную от L по α , приравняем ее к нулю и получим уравнение для α_0 :

$$2 = \sin \alpha_0 \cdot \ln \frac{1 + \sin \alpha_0}{1 - \sin \alpha_0}.$$

Выразив отсюда множитель, содержащий логарифм, и подставив в уравнение для L , получим простое выражение для максимальной длины траектории тела:

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g \sin \alpha_0}.$$

(Начало см. на с. 16)

Ф2548. В простейшем «театральном» бинокле расстояние между окуляром и объективом равно 10 см, и оно не регулируется. Бинокль обеспечивает увеличение $\times 2$ при рассматривании далеких предметов. Каковы оптические силы (или фокусные расстояния) объектива и окуляра?

«Театральный» бинокль представляет собой трубу Галилея, поскольку наблюдатель видит через такой бинокль сцену и актеров, расположенными «правильно», т.е. головами вверх, а ногами вниз. Фокусы рассеивающих линз, т.е. окуляров,

Зависимость безразмерной длины траектории l от угла броска α (рад)

Уравнение для угла α_0 не имеет аналитического решения. Построим график зависимости безразмерной длины траектории $l = L/L_T$ от угла броска α в пределах от 0 до $\pi/2$ (см. рисунок). Из графика видно, что величина угла α_0 , соответствующего $l_{\max}$, близка к 1 рад $\approx 57,3^\circ$. Численное решение уравнения дает $\alpha_0 \approx 0,985$ рад $\approx 56,4^\circ$. Максимальная дальность броска по горизонтали

достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и равна $L_T = \frac{v_0^2}{g}$. Тогда $L_{\max} \approx 1,2L_T$. Так как $\alpha_0 > \pi/4$, траектория, имеющая максимальную длину, идет несколько круче траектории, которой отвечает максимальная дальность броска. Максимальная высота, достигаемая при α_0 , меньше дальности броска при том же угле.

располагающиеся с той же стороны, что и глаза зрителей, совпадают с фокусами собирающих линз, т.е. объективов, располагающихся по эту же сторону бинокля. Поскольку коэффициент увеличения равен 2, рассеивающая линза находится от собирающей на расстоянии, равном половине фокусного расстояния собирающей линзы. Расстояние между линзами задано – это 10 см. Поэтому оптическая сила объектива равна +5 дптр, а оптическая сила окуляра равна –10 дптр. Эти оптические силы соответствуют таким фокусным расстояниям линз: 20 см для объектива и 10 см для окуляра.

Д.Александров