Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Мукушев, А. Турдин, Исследуем сферу ЭКСПО-2017, *Квант*, 2019, номер 3, 34–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:06:27

Исследуем сферу ЭКСПО-2017

Б.МУКУШЕВ, А.ТУРДИН

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ поле в случае преодоления им какой-либо преграды является одним из заманчивых явлений в механике. Преграды могут быть различными, например забором, домом, пирамидой или конусообразным жилищем (чум) и тому подобное.

После проведения выставки ЭКСПО-2017 в городе Астане (Казахстан) нас заинтересовало огромное сферическое сооружение, построенное в центре района выставки и представляющее собой архитектурный символ выставки (рис.1). Это самое большое сферическое здание в мире имеет диаметр 80 метров. Величие рукотворного объекта под-

Рис. 1

толкнуло нас исследовать сферическое здание с позиции науки, в частности механики. Были проведены компьютерные эксперименты с помощью пакета прикладных про-

грамм (ППП) MathCAD для наглядного представления траекторий движения тел при преодолении ими сферического сооружения. Рисунки, которые представлены в статье, являются результатами компьютерных экспериментов.

Вот несколько конкретных задач.

Задача 1. Мячик был брошен с земли с минимальной скоростью так, чтобы он перелетел через сферическое сооружение ЭКСПО-2017, касаясь только вершины здания (рис.2). Найдите: значение скорости и угол броска; уравнение траектории, ко-

Рис. 2

ординаты точек броска и приземления, а также время полета мячика.

На основе закона сохранения энергии запишем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + 2mgR.$$

В самой верхней точке нормальное (центростремительное) ускорение обусловлено силой тяжести, поэтому

$$\frac{v_x^2}{R} = g, \text{ или } v_x^2 = gR.$$

Таким образом, скорость броска мячика равна

$$v = \sqrt{5gR} \approx 44,3 \text{ м/с},$$

а угол броска мячика равен

$$\alpha = \arccos \frac{v_x}{v} = \arccos \frac{\sqrt{gR}}{\sqrt{5gR}} \approx 64^\circ.$$

Рассмотрим движение мячика с момента, как он достиг вершины сферы. Дальнейший этап движения мячика равносителен тому, что он был брошен горизонтально со скоростью v_x с высоты $2R$. Уравнение траектории такого движения имеет вид

$$y = 2R - \frac{gx^2}{2v_x^2}, \text{ или } y = 80 - \frac{x^2}{80}.$$

Следовательно, точки броска и приземления имеют координаты $A(-80;0)$ и $A'(80;0)$, а время полета мячика равно

$$t = \frac{A'A}{v_x} = 8,1 \text{ с}.$$

Задача 2. Чтобы осуществить перелет мячика через сферическое сооружение ЭКС-ПО-2017, он был брошен с земли с минимальной скоростью. При полете мячик коснулся двух точек сферы. Найдите: скорость мячика в точках касания со зданием и координаты этих точек; координаты максимальной точки траектории мячика и его скорость в этой точке; значение минимальной скорости мячика, сообщенной на уровне земли, при которой он перелетит сферическое сооружение без отскоков, а также угол броска; уравнение траектории мячика и координаты точек броска и приземления, а также время полета мячика.

При перелете через здание мячик действительно может иметь со сферой две точки касания (рис.3). Радиусы, проведенные в

Рис. 3

точки касаний A' и A , образуют с вертикалью угол φ . Из соображений симметрии и обратимости траектории достаточно рассмотреть движение мячика только на участке CAF . Пусть скорость в точке касания v_A , а время движения от вершины до этой точки τ . При этом

$$v_x = v_A \cos \varphi, \quad v_y = v_A \sin \varphi = g\tau,$$

$$AB = R \sin \varphi = v_A \cos \varphi \cdot \tau.$$

Из последних двух равенств находим

$$v_A^2 = \frac{gR}{\cos \varphi}.$$

С помощью закона сохранения энергии запишем выражение для минимальной скоро-

сти мячика v на уровне земли:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgR(\cos \varphi + 1), \text{ или}$$

$$v^2 = 2gR \left(\frac{1}{2 \cos \varphi} + \cos \varphi + 1 \right).$$

Экстремальное значение последнего выражения в скобках определит искомую минимальную скорость. На основе неравенства Буняковского–Коши,

$$\frac{1}{2 \cos \varphi} + \cos \varphi \geq 2 \sqrt{\frac{\cos \varphi}{2 \cos \varphi}},$$

причем равенство определяет минимальное значение:

$$\left(\frac{1}{2 \cos \varphi} + \cos \varphi \right)_{\min} = \sqrt{2}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{и } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, скорость мячика в точках касания со зданием равна

$$v_A = \sqrt{\frac{gR}{\cos \varphi}} = \sqrt{\sqrt{2}gR} \approx 23,6 \text{ м/с}.$$

Поскольку $AB = R \sin \varphi \approx 28,2 \text{ м}$ и $OB = R(\cos \varphi + 1) \approx 68,2 \text{ м}$, то точки касания имеют следующие координаты:

$$A(28,2; 68,2) \text{ и } A'(-28,2; 68,2).$$

Теперь займемся максимальной точкой траектории мячика. Так как

$$\begin{aligned} CO = CB + BO &= \frac{v_y^2}{2g} + R(\cos \varphi + 1) = \\ &= \frac{v_A^2 \sin^2 \varphi}{2g} + R(\cos \varphi + 1) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 1 \right) R \approx 82,4 \text{ м},$$

то максимальная точка C траектории мячика имеет координаты $(0; 82,4)$. Скорость в этой точке равна

$$v_x = v_A \cos \varphi = \sqrt{gR \cos \varphi} = \sqrt{\frac{gR}{\sqrt{2}}} \approx 16,7 \text{ м/с}.$$

Далее, известно, что

$$v^2 = 2gR \left(\frac{1}{2 \cos \varphi} + \cos \varphi + 1 \right) = 2gR(\sqrt{2} + 1),$$

откуда находим

$$v \approx 43,5 \text{ м/с},$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{1}{\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}} \approx 0,39, \text{ и } \alpha \approx 68^\circ.$$

Таким образом, мячик брошен с земли с минимальной скоростью 43,5 м/с под углом к горизонту 68° .

Осталось написать уравнение траектории мячика:

$$y = OC - \frac{gx^2}{2v_x^2} = 82,4 - \frac{x^2}{40\sqrt{2}} \approx 82,4 - 0,018x^2,$$

найти координаты точек броска и приземления:

$$F'(-67,6; 0), F(67,6; 0)$$

и определить время полета мячика:

$$t = \frac{FF'}{v_x} = \frac{2 \cdot 67,6 \text{ м}}{16,7 \text{ м/с}} \approx 8,1 \text{ с}.$$

Задача 3. Необходимо поразить самую верхнюю точку сферического здания, изображенного на рисунке 4, бросив мячик с

Рис. 4

наименьшей возможной скоростью. До поражения цели отскоки мячика от здания не допускаются. Радиус сферического сооружения $R = 40$ м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Нужно найти следующие параметры: скорость мячика v_0 в момент поражения цели и наименьшую скорость v , с которой мячик был брошен с земли; координаты точки касания траектории мячика со сферой и расстояние между точкой касания и самой верхней точкой; угол падения мячика α в самой верхней точке сферы; координаты точки броска мячика и угол броска; время полета мячика, уравнение траектории мячика и координаты максимальной точки траектории.

Оптимальная траектория мячика касается поверхности сферы в какой-то боковой точке C здания, как показано на рисунке 4. Из соображений обратимости траектории рассмотрим ситуацию, когда мячик брошен с верхней точки здания с минимальной скоростью v_0 так, чтобы он не задел здание

Рис. 5

(пролетел бесконечно близко к нему) при падении на землю (рис.5). Нам нужно найти точку касания окружности и оптимальной траектории мячика. Запишем уравнения окружности:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

и траектории мячика:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + 2R, \text{ или}$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2R.$$

С помощью последнего уравнения невозможно найти координаты точки пересечения траектории с осью x , поскольку оно содержит четыре неизвестных: x , y , v_0 и α . Поэтому мы сначала исследуем уравнение поверхности границы простреливаемой области в условиях, когда из верхней точки сферы были брошены со скоростью v_0 одинаковые мячики под различными углами. Это уравнение известно (см., например, статью «Движение тел в гравитационном поле» в «Кванте» №9 за 2018 г.) и в нашем случае имеет такой вид:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R.$$

График данного уравнения (коричневая линия на рисунке 5) проходит через точку пересечения окружности и траектории мячика. Неизвестных кинематических параметров стало три: x , y и v_0 . Точка пересечения определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - R)^2 &= R^2, \\ y &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R. \end{aligned}$$

Подставив y в первое уравнение, получаем

биквадратное уравнение относительно x :

$$x^4 \left(\frac{g}{2v_0^2} \right)^2 + x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2} \right) + \left(\frac{v_0^2}{4g} + R \right) \frac{v_0^2}{g} = 0.$$

Его решение – это уравнение с двумя неизвестными x и v_0 :

$$x^2 = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right) \pm \sqrt{D}}{\frac{g^2}{2v_0^4}}.$$

Если дискриминант D равен нулю, то существует только одна траектория, обеспечивающая прохождения мячика через точку C :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{gR}{v_0^2} \right) = 0.$$

Теперь приступим к ответам на поставленные в задаче вопросы. Из последнего равенства найдем

$$v_0^2 = \frac{gR}{2}, \text{ или } v_0 \approx 14,0 \text{ м/с}.$$

В соответствии с законом сохранения энергии, на нулевом уровне (на земле) скорость мячика равна

$$v = \sqrt{v_0^2 + 4gR} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}} \approx 42,0 \text{ м/с}.$$

Таким образом, мы нашли значение наименьшей возможной скорости, необходимой для поражения самой верхней точки сферического здания, и скорость в момент поражения цели.

Далее, используя уравнение для x^2 , найдем координаты точки C :

$$x^2 = \frac{3R^2}{4}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} R \approx 34,6 \text{ м},$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R = \frac{3R}{2} = 60 \text{ м}.$$

Из теоремы Пифагора

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2} = R.$$

Из соображений симметрии $BC = R$. Таким образом, ABC – равносторонний треугольник.

Подставляя координаты точки C в уравнение траектории мячика, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Используя уравнение траектории мячика, находим точку на нулевом уровне, из которой был брошен мячик с наименьшей скоростью v :

$$y_0 = x_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx_0^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2R$$

Подставив $y_0 = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $v_0^2 = \frac{gR}{2}$, получим уравнение

$$\frac{4}{3R} x_0^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} x_0 - 2R = 0$$

и найдем

$$x_0 \approx 1,46R = 58,4 \text{ м}.$$

Теперь находим угол броска мячика с земли:

$$\begin{aligned} \beta &= \arccos \frac{v_x}{v} = \arccos \frac{v_0 \cos \alpha}{v} = \\ &= \arccos \frac{12,12 \text{ м/с}}{42 \text{ м/с}} \approx 73^\circ. \end{aligned}$$

Время полета мячика равно

$$t = \frac{x_0}{v_x} \approx \frac{58,4 \text{ м}}{12,12 \text{ м/с}} \approx 4,8 \text{ с}.$$

Уравнение траектории мячика имеет вид

$$y = 80 + \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{30}.$$

Исследуем его на экстремум:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{15} = 0$$

и найдем координаты максимальной точки траектории мячика: 8,7; 82,5.

Задача 4. Пластмассовая шайба была брошена с земли с минимальной скоростью в направлении сферы так, чтобы она преодолела верхнюю точку сферического сооружения. Часть траектории движения шайбы без отскока лежит на поверхности сферы. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая поверхность сферы гладкой, найдите: координаты шайбы в момент плавного перехода из состояния свободного параболического движения в состояние кругового движения по поверхности сферы, ее скорость в этой точке и угол к горизонту; значение минимальной скорости шайбы, сообщенной на уровне земли, угол броска шайбы и координаты точки броска; уравнения параболических траекторий шайбы.

Из соображений обратимости траектории будем считать, что шайба спущена с верхней точки сферы без начальной скорости. В

Рис. 6

точке отрыва C (рис.6) центростремительное (нормальное) ускорение шайбы $a_n = \frac{v^2}{R}$ является составляющей ускорения свободного падения:

$$\frac{v^2}{R} = g \cos \beta = g \frac{R-h}{R}, \text{ или } v^2 = (R-h)g.$$

Применяем закон сохранения механической энергии для движения шайбы по поверхности сферы:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \text{ или } v^2 = 2gh.$$

Из двух уравнений для v^2 находим $h = \frac{1}{3}R$. Тогда координаты точки C будут такими:

$$y_C = 2R - h = 66,67 \text{ м},$$

$$x_C = x_B = OB =$$

$$= \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}R \approx 29,81 \text{ м}.$$

Скорость шайбы в точке отрыва C равна

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \approx 16,2 \text{ м/с}.$$

Из формулы $\cos \beta = \frac{R-h}{R} = \frac{2}{3}$ находим $\beta \approx 48^\circ$.

Используя закон сохранения механической энергии для состояния параболического движения шайбы, находим ее скорость приземления (или скорость броска с земли):

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2g(2R-h)} = \sqrt{4gR} \approx 39,6 \text{ м/с}.$$

С момента отрыва шайбы от поверхности сферы горизонтальная составляющая ее скорости остается постоянной и равной

$v \cos \beta = v_0 \cos \alpha$. Отсюда находим

$$\cos \alpha = \frac{v \cos \beta}{v_0} = \sqrt{\frac{2}{27}} \approx 0,27, \text{ и } \alpha \approx 73^\circ.$$

Далее,

$$x_A = OA = OB + BA, \quad BA = vt \cos \beta,$$

$$v_0 \sin \alpha - v \sin \beta = gt,$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \approx 0,96,$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,74,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,55,$$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha - v \sin \beta}{g} = \frac{(10 - \sqrt{10})\sqrt{Rg}}{3\sqrt{3}g} \approx 2,65 \text{ с},$$

$$BA = \frac{2\sqrt{2}R}{27}(10 - \sqrt{10}) \approx 28,57 \text{ м},$$

$$x_A = OB + BA =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{27}(10 - \sqrt{10}) \right) R \approx 58,38 \text{ м}, y_A = 0.$$

Из соображений симметрии $|x_D| = |x_A|$.

Если шайба брошена со скоростью v_0 под углом к горизонту α из точки O , то уравнение ее траектории пишут в виде

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Поскольку наша шайба брошена из точки $D(-x_A; 0)$, то уравнение траектории параболического движения шайбы с левой стороны будет таким:

$$y_1 = (x + x_D) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(x + x_D)^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Найдем точки пересечения траектории с осью x , которые соответствуют точкам D и E . Для этого выражение для y_1 приравняем к нулю и получим

$$x_D \approx -58,38; \quad x_E \approx 25,83.$$

Аналогично, уравнение траектории параболического движения шайбы с правой стороны будет иметь вид

$$y_2 = (x + x_F) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(x + x_F)^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Задача 5. Мячик был отпущен без начальной скорости с верхней точки сферы.

Трение скольжения между мячиком и сферой велико. Сопротивлением воздуха и трением качения можно пренебречь. Мячик считайте однородным сплошным шаром, его момент инерции $I = \frac{2}{5}mr^2$, где m – масса мячика, r – его радиус. Найдите: координаты мячика в момент отрыва от сферы, его скорость в этой точке и угол ее наклона к горизонту; скорость приземления мячика и ее угол с горизонтом в этой точке, а также координату точки приземления; уравнение параболической траектории мячика.

В точке отрыва C (рис.7) центростремительное (нормальное) ускорение мячика

Рис. 7

$a_n = \frac{v^2}{R}$ является составляющей ускорения свободного падения: $\frac{v^2}{R} = g \cos \beta$, где $\cos \beta = \frac{R-h}{R}$. Отсюда $v^2 = (R-h)g$.

Применим закон сохранения механической энергии для движения мячика по поверхности сферы:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \text{ где } \omega = \frac{v}{r},$$

$$\text{или } mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = \frac{7mv^2}{10}.$$

Подставляя сюда $v^2 = (R-h)g$, находим $h = \frac{7}{17}R \approx 0,41R$. Тогда координаты точки C будут такими:

$$y_C = 2R - h = 63,6 \text{ м},$$

$$x_C = -OB = -\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = -32,3 \text{ м}.$$

Скорость мячика в точке отрыва равна

$$v = \sqrt{(R-h)g} = \sqrt{0,59gR} \approx 15,2 \text{ м/с}.$$

Из формулы $\cos \beta = \frac{R-h}{R} \approx 0,59$ находим $\beta \approx 54^\circ$.

Используя закон сохранения механической энергии для параболического движения мячика, находим его скорость приземления:

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2g(2R-h)} \approx 38,4 \text{ м/с}.$$

В момент отрыва мячика от поверхности сферы горизонтальная составляющая скорости мячика остается постоянной и равной $v \cos \beta = v_0 \cos \alpha$. Отсюда получаем

$$\cos \alpha = \frac{v \cos \beta}{v_0} \approx 0,23,$$

$$\alpha \approx 76,6^\circ, \quad \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \approx 4,23,$$

$$\sin \alpha \approx 0,97, \quad \sin \beta \approx 0,81.$$

Далее,

$$OD = OB + BD, \quad BD = vt \cos \beta,$$

$$v_0 \sin \alpha - v \sin \beta = gt,$$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha - v \sin \beta}{g} \approx 2,5 \text{ с}, \quad BD = 22,4 \text{ м},$$

$$OD = 54,7 \text{ м}, \quad x_D = -54,7 \text{ м}, \quad y_D = 0.$$

Из принципа обратимости параболической траектории считаем, что мячик был брошен из точки D со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Тогда уравнение траектории параболического движения мячика запишется так:

$$y = (x + x_D) \text{tg } \alpha - \frac{g(x + x_D)^2}{2v_0^2} (1 + \text{tg}^2 \alpha),$$

или

$$y = (x + 54,7) \cdot 4,23 - 0,062(x + 54,7)^2.$$

Заметим, что если мячик бросить из точки D со скоростью, равной скорости приземления (38,4 м/с), и под углом падения (76,6°), то выполняется принцип обратимости параболического движения тела, т.е. мячик может доходить до точки C за 2,5 с и иметь в этой точке скорость 15,5 м/с. Однако дальше принцип обратимости движения не работает, мячик не доходит до самой вершины сферы – ему не хватает энергии.