Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ашкинази, Численные значения: зачем и почему они нужны,
Квант, 2019, номер 4, 2–4

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190401>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает,
что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:29:41

Численные значения: зачем и почему они нужны

Л. АШКИНАЗИ

– Отрицательное значение для частоты?!

– Может, это в подвале? Ну то есть на минус первом этаже?

Диалог с не-физиком С.К.

ЧИСЛА НУЖНЫ НАМ ПО ТЕМ ЖЕ ДВУМ причинам, по которым нам нужно вообще все. Одна причина – числа сами по себе доставляют нам удовольствие. Это сложная материя, и мы поговорим об этом в конце статьи. А другая причина проста, понятна и многообразна: знание численных значений – это ключ. К успешной сдаче ЕГЭ, к решению задач, а иногда и к тому, чтобы не стать жертвой жуликов.

Начнем с ЕГЭ. Да и не только с него – на самых разных экзаменах бывают задачи, в которых требуется не только вывести формулу или выбрать ответ из списка, но и получить численное значение какой-то величины. Иными словами, получить не только формулу для скорости, но и само значение, не только формулу для объема сосуда или для количества вещества, но и соответствующие числа. Что вы скажете о таких ответах на ЕГЭ: скорость $3,1 \cdot 10^{10}$ м/с, объем сосуда 10^{-30} м³, количество вещества $0,99 \cdot 10^{-45}$ моль (все примеры в этой статье – реальные)? В этих трех случаях причина и «степень» невозможности разные. В первом случае надо бы уточнять, о какой скорости идет речь, потому что скорость света, а точнее – скорость распространения электромагнитной волны в вакууме, является ограничением не для всех скоростей, а только для движения материальных тел, передачи энергии и информации. Нематериальный объект, например точка пересечения двух

прямых, может двигаться с любой скоростью. Но в конкретной задаче речь шла, конечно, о скорости вполне материального тела. Что касается объема, то проблема в другом – чтобы куб, например, имел такой объем, какие линейные размеры должны быть у него? Вам это число ни о чем не говорит? Это же меньше межатомного расстояния в веществах. А насчет моля, это совсем просто – вспомните его определение. Моль – это сколько молекул или атомов?

Каждый из этих трех ответов дали на экзамене не один и не десять – тысячи человек! Механизм явления тривиален: где-то в преобразованиях делали простую ошибку (обычно какую-то величину писали не в числителе, а в знаменателе или наоборот), размерность и разумность ни промежуточных, ни конечных формул не проверяли и оставалась последняя надежда – осознать, что написано невозможное число. Но этого не происходило. Заметим, что за арифметическую ошибку снимается один тестовый балл, хотя очевидно непонимание принципиально важных вещей и оцениваться это должно было бы совсем иначе.

Приведем еще несколько примеров серьезных последствий простых арифметических ошибок. Для конкретики пусть это будут в математическом смысле родственные примеры.

Как, например, вы отнесетесь к такому ответу для сопротивления: $R = 4$ Ом и $R = -2$ Ом? Персонаж решил квадратное уравнение, получил два корня и радостно дал такой ответ. То, что он порушил своим ответом закон сохранения энергии, ему не важно. Сопротивление генерирует ему мощность из ничего! Тут, кстати, есть

тонкость – правильное решение не должно давать неправильных ответов. Распространенная фраза «один из корней не имеет физического смысла» некорректна, решение должно строиться так, чтобы не давать «не имеющих смысла» ответов, но в школе идут на упрощение. А как можно понять отрицательный ответ для давления: $p = -2,3$ Па? Нет, не в твердом теле и не в жидкости, где это вполне возможно, а в газе! И наконец, как следует понимать такой ответ для частоты колебаний: $f = -82 \cdot 10^{13}$ Гц? С частотой вообще все интересно, мы о ней еще поговорим.

Мораль такова: пытаясь понять, разумный ли вы ответ получили, надо вспомнить хотя бы три вещи – фундаментальные законы и ограничения, свойства материалов и определения величин и констант. Вот три примера глупостей с числами, для разнообразия из разных источников. Первый пример возьмем из книги по подготовке к ЕГЭ (!) – в условии задачи по оптике говорится, что коэффициент преломления воды равен $\frac{3}{4}$. Может такое быть? Вспомните определение. Второй пример – из материалов теста по физике в одном из престижных московских вузов. Задача была сформулирована так: «По проводу с сопротивлением $R = 10$ ТОм течет ток $I = 0,02$ мА. Найти напряжение на проводе. Ответ указать в гигавольтах». Понятно, почему физик или инженер, увидев такое, начнет неприлично смеяться? Третий пример – уже из работ ЕГЭ. В задаче, где нужно было определить частоту излучения в оптическом диапазоне, были получены в разных работах вот такие ответы: $3,5 \cdot 10^{-12}$ Гц, $12,76 \cdot 10^{-19}$ Гц, $15 \cdot 10^{-10}$ Гц. Стоит ли рассуждать о том, оптический ли это диапазон, если у нас одно колебание происходит в несколько тысяч лет?

Перейдем к рассмотрению более тонких случаев. Если речь идет о конкретных вещах, стоит представлять себе – очень-очень ориентировочно – их возможности. Может ли обычная батарейка отдавать в нагрузку мощность 154 кВт или 58 кВт?

Школьник, знающий про такое понятие, как внутреннее сопротивление (в школе стоило бы рассказать, что это такое и зачем существуют «эквивалентные схемы»), легко сообразит, что мощность не может быть больше $\varepsilon^2/(4r)$, а для обычных батареек это меньше 1 Вт!

Далее, если речь идет вроде бы не о конкретных вещах, то полезно понимать, что вообще бывает. Разумен ли, например, ответ для энергии $1,93 \cdot 10^{15}$ Дж? Этого хватит, чтобы довести до кипения несколько миллионов тонн воды. Ну конечно, если вы поклонник Станислава Лема, то в его романе «Непобедимый» есть такое: «Тысяча четыреста двадцать два рентгена в поле, значит, излучение пробilo силовой барьер, – понял Рохан. Он не знал, что такое возможно. Но, когда взглянул на шкалу мощности, понял, какой заряд использовал астрогатор. Этой энергии хватило бы, чтобы хорошенько вскипятить внутриконтинентальное море средней величины. Что ж, Хорпах предпочитал не рисковать повторными выстрелами. Может, он немного перехватил, но теперь они снова имели только одного противника».

Переведем дух и вернемся на Землю. Разумен ли ответ для частоты электромагнитного излучения $3,6 \cdot 10^{34}$ Гц? В школе спектр кончается примерно на $3 \cdot 10^{21}$ Гц, т.е. на 13 порядков раньше. Разумеется, в школе было бы полезно обсудить, какое вообще возможно электромагнитное излучение (по всем его параметрам – частоте, длине волны, энергии, мощности, поляризации...), но 13 порядков должны были бы насторожить самого отчаянного школьника.

В школьных задачах всегда используются какие-то идеализированные представления, сильно упрощенные модели. Это в принципе нормально – физика вся так устроена, хотя степень идеализации и упрощения в серьезной физике обычно отличается от школьной. Школьникам стоило бы объяснять это подробно, показывая на примерах, как происходит развитие модели, но это обычно не делается. Тем не менее,

составители задач в большинстве случаев дают для расчетов мало-мальски реальные величины и ждут в качестве ответа такие же. Задачи типа такой: «К батарейке от карманного фонарика, на которой написано 4,5 вольта, подсоединили лампочку, сопротивление которой при измерении оказалось 2 ома. Какой ток будет течь?» дают все-таки редко. Поэтому в задаче, в которой надо было определить энергию электрона при фотоэмиссии, а потом рассчитать длину его пробега в заданном тормозящем поле, школьники, получившие ответы типа $2,2 \cdot 10^{-40}$ м; $5,9 \cdot 10^{-36}$ м; $1,4 \cdot 10^{-22}$ м; $8,7 \cdot 10^{-16}$ м; $1,2 \cdot 10^{-11}$ м; $2,7 \cdot 10^7$ м; $2,3 \cdot 10^{27}$ м, должны были насторожиться. Потому что предпоследний ответ – это два диаметра Земли, а про малые расстояния вы в этой статье уже прочитали. Кстати, один из получивших фантастический ответ, насторожился – у последнего ответа стоял знак «?». Ответ, превышающий размер Вселенной (в одном из современных пониманий), все-таки вызвал сомнение. Или такой пример – персонаж получил мощность от батарейки $4 \cdot 10^{-19}$ Вт. Для обычной батарейки это соответствует току $2,5 \cdot 10^{-19}$ А, т.е. полтора электрона в секунду! В среднем, в среднем... Да просто по воздуху потечет больший на порядки ток – и подсоединять к ней ничего не надо.

Вот еще одна прелестная задача, в которой сделали некорректность изготовители и делали ошибку многие потребители. Дан объем, в него помещают сколько-то ^{210}Po , который с таким-то периодом полураспада испускает α -частицы и превращается в Рb. Каким будет давление в объеме через некоторое время? Существенная часть правильно вычисляла, сколько атомов Po распадется и сколько атомов Рb получится, а потом определяла давление по универсальному газовому закону. Уже хорошо... Но вообще-то задача некорректна – α -частицы вылетают из образца в объем только из 10-микронного приповерхностного слоя (да и то не все), т.е. большинство вообще не вылетит. Кстати, частицы эти – не совсем атомы гелия, но «не будем о

страшном на ночь», как говорит один мой знакомый физик.

Что делать на реальном экзамене – не вообще, а в аспекте этой статьи? Посмотреть на ответ и подумать, не противоречит ли он чему-то, известному из школы, например не получили ли вы энергию излучения меньше $h\nu$ или заряд меньше трети заряда электрона e (по модулю, по модулю!). Кроме того, полезно посмотреть просто на условие задачи. Школьник, который решал задачу о плавании объекта на границе двух жидкостей, плотности которых 900 кг/м^3 и 2700 кг/м^3 , и получил ответ для плотности объекта 100 кг/м^3 , зря этого не сделал. В качестве печального анекдота можно добавить, что сотни школьников радостно писали, что это масло и алюминий, хотя в задаче это не спрашивалось. Зачем было демонстрировать ужасающую абстрактность своего мышления?

Далее, внутри задачи часто приходится, как это ни странно, складывать. Получив в качестве промежуточного результата нечто вроде $(0,515 \cdot 10^{15} + 2,75)$, стоит насторожиться. Равно как и получив в качестве ответа на вопрос «во сколько раз» ответы «в $1,2 \cdot 10^{18}$ раза» или «в $0,4 \cdot 10^{26}$ раз». Если задачу составлял минимально разумный человек, такого не будет – складывать и вычитать в школе имеет смысл сравнимые величины (хотя бы из-за того, что разрешено пользоваться калькуляторами). Заметим, что в серьезной физике (и школьникам стоило бы это объяснять) ситуация сложнее – бывает, что сильно различающиеся величины приходится складывать. А чаще их приходится сравнивать – для выбора модели, для обоснования того, что мы учитываем, а чем в данном случае пока пренебрегаем.

Итак, численные оценки имеют большое значение в физике – причем еще задолго до получения ответа! Они позволяют построить модель и определить направление ее развития. Это – одна из причин важности численных оценок для физики. Для остальных людей они важны еще и потому, что в некоторых случаях предохраняют от

(Продолжение см. на с. 13)

либо одна из единиц может стать нулем. Существует ли способ закодировать сообщение таким образом, чтобы, даже несмотря на воздействие помех, исходное сообщение могло бы быть безошибочно восстановлено в пункте Б?

Конечно, Азат может просто трижды продублировать сообщение. Если одна из копий окажется испорченной помехами, то сообщение можно восстановить по двум другим копиям. Однако передача трех копий сообщения может быть слишком долгой и дорогой. Кроме того, может оказаться, что в столь длинной передаче помехи могут повлиять более чем на один символ. Есть ли более эффективный способ кодирования?

Оказывается, такой способ существует, и нам уже известна вся теория, необходимая для его реализации. Этот метод называется *кодированием Хэмминга* в честь его изобретателя, американского математика Ричарда Хэмминга.

Азат и Бахир выбирают многочлен $g(x)$ (*порождающий* многочлен), удовлетворяющий условиям теоремы 3.2, и вместо исходного сообщения $a(x)$ Азат передает из пункта А в пункт Б сообщение $u(x) = a(x) \cdot g(x)$. Теперь Бахир должен декодировать полученное сообщение $v(x)$, один из символов которого, возможно, искажен.

Для начала Бахир вычисляет *синдром* полученного сообщения

$$s(x) = v(x) \cdot h(x) \pmod{x^n + 1}.$$

Если сообщение не было изменено помехами, то

$$\begin{aligned} s(x) &= v(x) \cdot h(x) \pmod{x^n + 1} = \\ &= a(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \pmod{x^n + 1} = \\ &= a(x) \cdot (x^n + 1) \pmod{x^n + 1} = 0. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что в переданном сообщении символ с индексом k был изменен. Тогда

$$\begin{aligned} s(x) &= (u(x) + x^k) \cdot h(x) \pmod{x^n + 1} = \\ &= (a(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + \\ &\quad + x^k \cdot h(x)) \pmod{x^n + 1} = \\ &= (x^k \cdot h(x)) \pmod{x^n + 1}. \end{aligned}$$

Это циклический сдвиг многочлена $h(x)$ на k позиций.

Если синдром равен нулю, то Бахир знает, что переданное сообщение не было искажено, а значит, можно восстановить исходное сообщение по формуле

$$a(x) = v(x)/g(x).$$

Если же синдром представляет собой циклический сдвиг $h(x)$ на k позиций, то Бахир знает, что в переданном сообщении был испорчен символ с индексом k , а значит, исходное сообщение восстанавливается по формуле

$$a(x) = (v(x) + x^k)/g(x).$$

Численные значения: зачем и почему они нужны

(Начало см. на с. 2)

разного рода жуликов и от недобросовестной рекламы. Любим же мы численные оценки, как и вообще знание, именно потому, что знание помогает выживанию и при правильном его применении улучшает жизнь. Это все хорошо, а что делать сейчас? Ответ прост – взять учебник физики (за все классы) и, медленно листая его, про каждую встреченную величину поду-

мать, какие ее значения встречаются в жизни, какие могут встретиться в задачах. Интернет поможет вам найти ответы, а глядишь, и статью для «Кванта» напишете. А еще полезно посмотреть статьи А.А.Лукиянова про численные оценки – в интернете спросите «Лукиянов» и «в числах».

И последнее. Все ответы, приведенные в этой статье, реальные. Диалог в эпиграфе – тоже. Правда, тут же выяснилось, что собеседник шутил. А вот школьники, когда писали все эти ужасы, отнюдь не шутили.