Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Копылов, Где спрятался Ним?, *Квант*, 2019, номер 4, 31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:09:48

Где спрятался Ним?

И. КОПЫЛОВ

В СТАТЬЕ «ПЛЮСЫ–МИНУСЫ И ИГРА НИМ» (см. «Квант» №7, 8 за 2018 г.) была рассказана стратегия игры Ним, которая играет особую роль в теории игр. Игра Ним состоит в следующем. Имеется m кучек, количество камней в которых равно $a_1, a_2, \dots, a_m$. Двое ходят по очереди; каждый игрок при своем ходе выбирает одну из кучек и берет из нее любое ненулевое число камней. Побеждает тот, кто забрал последний камень.

Многие игры сводятся к Ниму. Если в игре удастся распознать Ним, то для нее сразу же появляется стратегия, заимствованная из Нима. В данной статье сведем к Ниму несколько разнообразных игр.

Игра 1. Пять фишек находятся на клетках горизонтальной полосы из 25 клеток. За каждый ход необходимо передвинуть одну из фишек влево на любую клетку, перепрыгивать через другие фишки разрешается, на одной клетке могут находиться несколько фишек. Выигрывает игрок, после хода которого все 5 фишек окажутся на крайней левой клетке полосы.

Игра очевидным образом сводится к Ниму с 5 кучками камней. Занумеруем клетки полосы, начиная с 0, слева направо (рис. 1). Тогда фишку, стоящую на клетке с номером n , за 1 ход можно передвинуть на любую из клеток $0, 1, \dots, n-1$ вне зависимости от расположения остальных фишек. Аналогично и в игре Ним количество камней в одной из кучек за ход уменьшается вплоть до 0. Поэтому для сведения к Ниму фишку на клетке n следует заменить кучкой с n камнями. Тогда фишка на самой левой клетке

равносильна пустой кучке. Игра заканчивается, когда все кучки пусты, т.е. все фишки собраны на клетке с номером 0.

Итак, если 5 фишек расположены на клетках с номерами a, b, c, d и e , то для чисел a, b, c, d и e составляется Ним-сумма. Напомним, что Ним-сумма вычисляется поразрядно следующим образом: Ним-суммируемые числа записываются в двоичной системе исчисления, и если в данном разряде оказалось нечетное число единиц, то в результирующей сумме в соответствующем разряде ставим 1, если четное – 0. Ним-сумма чисел a, b, c, d, e обозначается $a \oplus b \oplus c \oplus d \oplus e$. Своим ходом игрок должен обнулить Ним-сумму.

Рассмотрим пример. Пусть фишки стоят на клетках 5, 10, 14, 16 и 22 полосы (см. рис. 1). Вычисление соответствующей Ним-суммы приведено на рисунке 2.

Кучка 1	5:	1	0	1				
Кучка 2	10:	1	0	1	0			
Кучка 3	14:	1	1	1	0			
Кучка 4	16:	1	0	0	0	0		
Кучка 5	22:	1	0	1	1	0		
Ним-сумма:		0	0	1	1	1		

Рис. 2. Вычисление Ним-суммы для определения хода в игре 1

Итак,

$$\begin{aligned}
 5 \oplus 10 \oplus 14 \oplus 16 \oplus 22 &= \\
 &= 101_2 \oplus 1010_2 \oplus 1110_2 \oplus 10000_2 \oplus 10110_2 = \\
 &= 111_2 = 7.
 \end{aligned}$$

Ним-сумма отлична от 0. Игрок, делающий ход, должен ее обнулить. Старшая единица в Ним-сумме находится во 2-м двоичном разряде, если считать разряды справа налево, начиная с нулевого. Единицы во втором разряде присутствуют в записи количеств камней в 1, 3 и 5 кучках. Поэтому в рассматриваемом примере у игрока есть 3 варианта хода: либо в первой кучке оставить $10_2 = 2$ камня, т.е. передвинуть фишку с

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Рис. 1. Нумерация клеток полосы и расположение фишек в примере

клетки 5 на клетку 2, либо в третьей кучке оставить $1001_2 = 9$ камней, т. е. передвинуть фишку с клетки 14 на клетку 9, либо в пятой кучке оставить $10001_2 = 17$ камней, что означает перестановку фишки с клетки 22 на клетку 17.

Игра 2. Гусеница состоит из 20 звеньев. Некоторые звенья гусеницы окрашены в зеленый цвет, остальные – белые. Два игрока по очереди перекрашивают звенья: зеленое звено делают белым, а белое – зеленым. Своим ходом игрок должен перекрасить одно из зеленых звеньев в белый цвет и может перекрасить еще одно звено, расположенное ближе к хвосту относительно перекрашенного. Выигрывает игрок, после хода которого все звенья гусеницы станут белыми.

Данная игра представляет собой скрытый Ним. Пронумеруем звенья гусеницы, начиная с хвоста. Хвостовое звено получит номер 1, головное – 20 (рис.3). Зеленое звено

Рис. 3. Нумерация звеньев гусеницы

гусеницы с номером k заменим кучкой с k камнями.

Игрок при своем ходе перекрашивает зеленое звено с некоторым номером k и может перекрасить еще одно звено с номером, меньшим k . Если игрок перекрашивает только одно звено, то считаем, что он опустошил кучку с k камнями. Если второе перекрашенное звено имеет номер t ($t < k$) и до хода игрока было белым, то считаем, что игрок из кучки с k камнями забрал $k - t$ камней и оставил в ней t камней. А в том случае, когда второе перекрашенное звено с номером t было зеленым, а стало белым, то будем считать, что игрок в кучке с k камнями оставил t камней. Так как до этого уже была кучка с t камнями, то их стало уже две. А две одинаковые кучки вклад в Ним-сумму дают нулевой. Поэтому далее в игре Ним их можно не рассматривать и исключить из игры. Таким образом, данная игра сводится к Ниму с количеством кучек, равным количеству зеленых звеньев гусеницы. Количество камней в кучке совпадает с номером соответствующего зеленого звена.

Например, на рисунке 3 игра с перекрашиванием звеньев гусеницы эквивалентна Ниму

Кучка 1	2:					1	0
Кучка 2	5:				1	0	1
Кучка 3	6:				1	1	0
Кучка 4	9:			1	0	0	1
Кучка 5	14:			1	1	1	0
Кучка 6	16:	1	0	0	0	0	0
Кучка 7	19:	1	0	0	1	1	
Ним-сумма:		0	0	1	0	1	

Рис. 4. Вычисление Ним-суммы для определения хода в игре 2

с 7 кучками с 2, 5, 6, 9, 14, 16 и 19 камнями. Так как соответствующая Ним-сумма равна (рис.4)

$$2 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 9 \oplus 14 \oplus 16 \oplus 19 = \\ = 10_2 \oplus 101_2 \oplus 110_2 \oplus 1001_2 \oplus 1110_2 \oplus \\ 10000_2 \oplus 10011_2 \oplus 101_2 = 5$$

и есть кучка с 5 камнями, то игроку, делая-

щему ход, достаточно обнулить кучку из 5 камней, и Ним-сумма оставшихся кучек станет равной 0. Следовательно, выигрышный ход из состояния на рисунке 3 – перекрасить зеленое звено 5 в белый цвет.

Игра 3. Два игрока по очереди разламывают плитку шоколада, разделенную бороздками на 8×12 частей. Одна из частичек плитки помечена крестом. Игрок при каждом своем ходе разламывает плитку вдоль одной из бороздок и съедает ту часть плитки, которая не содержит частички с крестом. Побеждает игрок, после хода которого от плитки шоколада остается всего лишь одна частичка с крестом.

Эта игра – тоже завуалированный Ним. У игрока существует 4 варианта хода: разломить плитку по бороздке выше частички с крестом, правее частички с крестом, ниже ее либо левее ее. Если в начале игры частичка с крестом расположена, например, так, как показано на рисунке 5, то над частичкой с крестом расположено 4 ряда, правее ее – 5 рядов, ниже – 3 ряда, левее – 6 рядов. Ход в каждом из четырех вариантов уменьшает количество рядов соответствующего направления.

Рис. 5. Вид плитки шоколада с выделенной крестом частичкой

Поэтому игра эквивалентна Ниму с 4 кучками камней. В первой кучке количество камней совпадает, например, с количеством рядов над частичкой с крестом, во второй – с количеством рядов правее частички с крестом, в третьей – ниже и в четвертой – левее ее. В примере на рисунке 5 в начале игры в кучках находится 4, 5, 3 и 6 камней. Игрок при своем ходе выбирает кучку и уменьшает в ней количество камней.

Для определения хода составляем Ним-сумму. В рассматриваемом примере вычисление Ним-суммы проведено на рисунке 6. Получим

$$4 \oplus 5 \oplus 3 \oplus 6 = 100_2 \oplus 101_2 \oplus 11_2 \oplus 110_2 = 100_2 = 4.$$

Как видно из рисунка 6, Ним-сумма отлична от 0. Для ее обнуления необходимо удалить

Кучка 1	4:	1	0	0
Кучка 2	5:	1	0	1
Кучка 3	3:		1	1
Кучка 4	6:	1	1	0
Ним-сумма:		1	0	0

Рис. 6. Составление Ним-суммы для определения хода в игре 3

одну единицу в старшем двоичном разряде, т.е. удалить 4 камня в одной из кучек 1, 2 или 4. В рассматриваемой игре игрок должен удалить 4 ряда либо над, либо справа, либо слева от клетки с крестом.

Игра 4. На пяти клетках горизонтальной полосы из 25 клеток находится по фишке. За каждый ход разрешается передвинуть любую фишку влево на свободную клетку, не перепрыгивая через другие фишки. Проигрывает игрок, который не может сделать ход.

Занумеруем клетки полосы слева направо числами от 1 до 25. Фишки на полоске тоже будем нумеровать слева направо. Игрок не

может сделать ход, когда пять фишек занимают клетки с номерами от 1 до 5.

Для поиска стратегии сначала упростим игру. Пусть на полоске находится всего одна фишка. Тогда выигрывает начинающий, поставив фишку на клетку 1.

Если фишек на полоске две, то стратегия определяется без особых усилий. Игроку следует разместить фишки на соседних клетках. Соперник сможет сделать ход только фишкой 1. Игрок своим очередным ходом перемещает влево фишку 2 так, чтобы фишки опять оказались на соседних клетках. В итоге после нескольких ходов фишки окажутся на клетках 1 и 2, и соперник не сможет сделать ход.

Далее рассмотрим случай игры с тремя фишками на полоске. Для построения стратегии воспользуемся правилами расстановки знаков «+» и «-», приведенными в статье «Плюсы-минусы и игра Ним». Состояние игры задают 3 числа – номера клеток с фишками. Поэтому расставлять знаки необходимо в клетках трехмерной таблицы. Координаты клеток (a_1, a_2, a_3) удовлетворяют соотношениям

$$0 < a_1 < a_2 < a_3, \quad (1)$$

где a_1 – номер клетки с фишкой 1, a_2 – с фишкой 2, a_3 – с фишкой 3. В результате хода одного из игроков одна из трех координат уменьшается, причем соотношение (1) остается в силе.

Заполнять знаками таблицу будем по слоям. В нижнем слое, где $a_1 = 1$, фишка 1 ходить не может. А для двух фишек мы уже установили, что в минусовом состоянии фишки размещаются в соседних клетках полосы. Значит, $a_2 + 1 = a_3$, и во всех клетках с координатами $(1, a_2, a_2 + 1)$, $1 < a_2$, стоит знак «-», а во всех остальных клетках первого слоя – знак «+».

В клетках второго слоя таблицы, где $a_1 = 2$, минусы находятся в клетках с координатами $(2, 3, 5)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 5, 7)$, ..., т.е. в клетках вида $(2, a_2, a_2 + 2)$, $2 < a_2$.

Заполняя знаками «+» и «-» клетки третьего слоя, замечаем, что минусы оказываются в клетках с координатами вида $(3, a_2, a_2 + 3)$, $3 < a_2$.

Глядя на заполнение минусами первых трех слоев таблицы, можно предположить, что знаки «-» находятся в клетках с коорди-

натами $(a_1, a_2, a_2 + a_1)$, $0 < a_1 < a_2$. Или, в другом виде, координаты (a_1, a_2, a_3) минусовых клеток связаны соотношением

$$a_1 = a_3 - a_2. \quad (2)$$

Эта гипотеза доказывается методом математической индукции по a_1 .

Перепишем соотношение (2) в виде

$$a_1 - 0 = a_3 - a_2 \quad (3)$$

и предположим, что к полоске добавили слева еще одну клетку с номером 0, на которой стоит нулевая условная фишка. Тогда расстояние в клетках между первой и нулевой фишками совпадает с расстоянием в клетках между третьей и второй фишками. Если расстановка фишек удовлетворяет соотношению (3), то любой ход соперника

Рис. 7. Пример определения количеств камней в игре 4

приведет к его нарушению, и игрок своим ответным ходом должен восстановить выполнение соотношения (3). Наблюдается соответствие Ниму с двумя кучками камней. Количество камней в первой кучке совпадает с количеством свободных клеток между нулевой и первой фишками, а во второй кучке — между второй и третьей фишками. В Ниме с двумя кучками игрок должен каждым своим ходом уравнивать количества камней в кучках. В отличие от Нима в данной игре соперник может, передвинув фишку 2, увеличить количество свободных клеток между фишками 2 и 3, что в игре Ним соответствует увеличению числа камней во второй кучке. В этом случае игрок должен ответным ходом передвинуть фишку 3 влево, вернув прежнее число свободных клеток между второй и третьей фишками. Случай с 3 фишками на полоске разобран.

Пусть теперь игра проводится с 4 фишками на полоске. Тогда условная фишка, введенная при рассмотрении предыдущего случая, получает воплощение. Обозначим через a_i номер клетки, на которой стоит i -я фишка ($i = 1, 2, 3, 4$). По аналогии с предыдущим случаем номера клеток с фишками для минусового состояния удовлетво-

ряют соотношению

$$a_2 - a_1 = a_4 - a_3.$$

И, наконец, для 5 фишек на полоске введем опять условную неподвижную нулевую фишку, которую поместим на условную нулевую клетку, присоединенную к полоске слева. Игра сводится к Ниму с 3 кучками камней. Количество камней в первой кучке полагаем равным количеству свободных клеток между фишками 0 и 1. Размер второй кучки определяется количеством свободных клеток полоски между фишками 2 и 3. Камней в третьей кучке ровно столько, сколько свободных клеток полоски между 4-й и 5-й фишками.

На рисунке 7 показан пример определения размеров трех кучек в эквивалентном Ниме.

В примере количества камней в кучках равны 4, 1 и 5.

Для победы игрок должен каждым своим ходом обнулять соответствующую Ним-сумму для трех кучек. Перемещения фишек с нечетными номерами уменьшают количество камней в одной из кучек. Если соперник перемещает фишку 2 или 4, скажем, на k клеток влево, то в кучке 2 или 3 соответственно количество камней увеличивается. В этом случае игрок должен своим ходом восстановить количество камней в кучке, переместив соответствующую фишку с нечетным номером на k клеток влево.

В рассматриваемом примере Ним-сумма равна 0 (рис.8). Следовательно, игрок, чья очередь делать ход, проигрывает.

Кучка 1	4:	1	0	0
Кучка 2	1:			1
Кучка 3	5:	1	0	1
Ним-сумма:		0	0	0

Рис. 8. Вычисление Ним-суммы для 3 кучек в игре 4

Игра 5. Клетки полоски из 10 клеток пронумерованы от 1 до 10. На каждой

клетке в начале игры может находиться от 0 до 5 фишек. Игрок при своем ходе выбирает клетку и ненулевое количество фишек с нее перекладывает на соседнюю клетку с меньшим номером. Фишки с клетки 1 перемещаются в мешок. Выигрывает игрок, после хода которого все фишки оказываются в мешке.

В данной игре Ним также хорошо «замаскировался». Чтобы его увидеть, сначала упростим игру. Будем считать, что полоска состоит не из 10, а только из одной клетки. Тогда выигрывает начинающий: первым ходом он все фишки с клетки 1 перемещает в мешок.

Пусть теперь полоска состоит из двух клеток. Начинающий снова выигрывает. Своим первым ходом он также перемещает в мешок все фишки с клетки 1. У второго игрока есть только одна возможность – переместить несколько фишек со второй клетки на первую. Начинающий своим ходом все фишки, оказавшиеся на клетке 1, перемещает в мешок. И опять фишки могут присутствовать только на второй клетке полоски. После возможного следующего хода второго игрока начинающему следует снова обнулить количество фишек на клетке 1. Таким образом, последний ход в игре останется за начинающим.

Рассмотрим теперь случай, когда полоска состоит из трех клеток. Отметим ключевой момент – фишки на второй клетке не влияют на состояние и результат игры. Действительно, если соперник переместит, скажем, k фишек со второй клетки на первую, то игроку следует ответным ходом переместить те же k фишек с первой клетки в мешок. И ход снова переходит к сопернику. Поэтому можно считать, что вторая клетка равносильна мешку. И игроку достаточно следить за количеством фишек на клетках 1 и 3. Получаем игру Ним с двумя кучками. Одну кучку образуют фишки на клетке 1, вторую – фишки на клетке 3. Для победы в соответствии со стратегией Нима с 2 кучками игрок каждым своим ходом должен уравнивать количество фишек на первой и третьей клетках.

Если к полоске добавить четвертую клетку, количество фишек на ней никак не ока-

жет влияние на результат игры. Игрок опять должен отслеживать количество фишек только на первой и третьей клетках и после своего хода оставлять одинаковое количество фишек на клетках 1 и 3. Если соперник переместит несколько фишек с четвертой клетки на третью, то игроку следует ответным ходом перенести те же фишки дальше с третьей клетки на вторую. Можно считать, что вторая и четвертая клетки полоски равносильны мешку: при перемещении соперником фишек с них на клетки с нечетными номерами 1 и 3 игрок ответным ходом перемещает те же фишки далее на соседнюю клетку с четным номером или в мешок (мешок – условная клетка с четным номером 0).

Проведенные рассуждения переносятся на случай полоски с произвольным числом клеток, в частности, на полоску с 10 клетками. Игрок должен следить за количеством фишек на клетках с нечетными номерами. Каждая клетка с нечетным номером – это кучка, в которой количество камней совпадает с числом камней на данной клетке. Небольшое отличие от Нима состоит в том, что после хода соперника количество камней в кучке может увеличиться. Соперник с клетки с четным номером $2n$ может перенести некоторое количество k фишек на клетку с нечетным номером $2n - 1$. Тогда игрок должен ответным ходом эти k фишек переместить на клетку с четным номером $2n - 2$.

Игроку для победы следует каждым своим ходом обнулять Ним-сумму, составленную для количеств фишек на клетках с нечетными номерами.

Рассмотрим пример. Пусть распределение фишек по клеткам такое, как показано на рисунке 9.

Номер клетки полоски	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество камней в клетке	2	4	3	1	3	3	1	2	4	3

Рис. 9. Распределение фишек по клеткам полоски в игре 5

В клетках с нечетными номерами находится 2, 3, 3, 1 и 4 фишек. Составим для данных 5 чисел Ним-сумму (рис.10). Ним-сумма отлична от 0. Обнулить ее можно только изменением количества камней в кучке 5, т.е. перемещением фишек с клетки 9 на соседнюю клетку с четным номером 8. Игроку

Кучка 1	2:	1 0
Кучка 2	3:	1 1
Кучка 3	3:	1 1
Кучка 4	1:	1
Кучка 5	4:	1 0 0
Ним-сумма:		1 1 1

Рис. 10. Составление Ним-суммы для чисел в игре 5

следует передвинуть из клетки 9 одну фишку, оставив на ней три фишки. Ним-сумма после такого хода станет нулевой.

Игра 6. Игра происходит с 4 ломаными. Количество звеньев у ломаной не превышает 20. Три ломаные прикреплены к неподвижному основанию одним концом, а четвертая – обоими концами (рис. 11). За

Рис. 11. Пример начального состояния игры

каждый ход разрешается удалить одно звено у любой ломаной. Если после хода оказались звенья, оторванные от основания, то все они также удаляются. Выигрывает игрок, после хода которого звенья всех ломаных будут удалены.

Сведем игру к Ниму с 4 кучками камней. Пусть ломаные A , B и C прикреплены к основанию одним концом, а ломаная D – двумя. Последовательно занумеруем звенья каждой ломаной. У ломаных A , B и C номер 1 получит звено, прикрепленное к основанию (рис.11).

Покажем, что каждую из ломаных A , B и C можно заменить кучкой, количество камней в которой равно количеству звеньев в соответствующей ломаной. Пусть ломаная A , например, содержит k звеньев. При удалении i -го звена ломаной A , $1 \leq i \leq k$, у нее остается $i-1$ звено с номерами от 1 до $i-1$. Тем самым, удаление i -го звена равносильно оставлению в кучке $i-1$ камня.

Ломаную D также заменим на некоторую обобщенную кучку камней. Пусть ломаная

D вначале содержит m звеньев. После удаления одного из ее звеньев, скажем звена i , $1 \leq i \leq m$, ломаная распадается на 2 ломаные с $i-1$ и $m-i$ звеньями, каждая из которых прикреплена к основанию одним концом. Покажем, что 2 новые ломаные в игре можно заменить одной кучкой камней в Ниме.

Если в ломаной D четное количество звеньев, то после удаления одного звена в полученных двух ломаных будет неравное количество звеньев, и у соперника есть возможность своим ходом уравнять количество звеньев в новых ломаных. Две одинаковые кучки имеют одинаковое двоичное представление и дают нулевой вклад в Ним-сумму. Получаем, что и обобщенная кучка, которой мы хотим заменить ломаную D , дает нулевой вклад в Ним-сумму, т.е. является пустой. Отличие обобщенной кучки камней от простой при игре в Ним заключается в том, что даже когда обобщенная кучка является пустой, то возможен ход игрока, переводящий ее в непустую кучку. При этом соперник своим ходом обнуляет ее. И снова игрок должен делать ход, а обобщенная кучка – пуста. Вернулись к состоянию, которое уже было. После каждого хода суммарное количество звеньев у ломаных уменьшается, поэтому бесконечное количество раз возвращаться к одному и тому же состоянию обобщенной кучки невозможно.

Рассмотрим теперь случай, когда у ломаной D нечетное количество звеньев. Тогда игрок удалением среднего звена может получить две ломаные с одинаковым числом звеньев, которые дают нулевой вклад в Ним-сумму. Покажем, что при удалении любого другого звена ломаной D соперник может после своего последующего хода оставить две ломаные, вклад которых в Ним-сумму такой же, как и от кучки с одним камнем.

Ломаная D после удаления одного звена не может распасться на две ломаные, количество звеньев в которых отличается ровно на 1. Но тогда соперник, уменьшая своим ходом количество звеньев у ломаной с большим числом звеньев, может получить в новых ломаных количества звеньев, являющиеся двумя последовательными числами, допустим $2n$ и $2n+1$, где наименьшее число $2n$ является четным. Вклад двух таких чисел в

Ним-сумму совпадает с вкладом от кучки с одним камнем.

Последующим ходом игрок либо уравнивает количество звеньев в двух новых ломаных, получая от них нулевой вклад в Ним-сумму, либо оставляет в них такие количества звеньев, которые ходом соперника могут быть сведены к ломаным с количествами звеньев, совпадающими опять с двумя последовательными числами, и меньшее из них четно. Получаем, что ломаная D с нечетным числом звеньев эквивалентна обобщенной кучке с одним камнем.

Итак, игра свелась к Ниму с четырьмя кучками, причем в четвертой кучке камней либо 0, когда ломаная D состоит из четного количества звеньев, либо 1, если ломаная D содержит нечетное количество звеньев. Игрок для победы должен обнулять Ним-сумму для соответствующих 4 кучек.

В примере на рисунке 11 при сведении игры к Ниму количество камней в кучках равно 6, 5, 8 и 0. В ломаной D четное число звеньев, что равносильно пустой обобщенной кучке.

На рисунке 12 показано вычисление Ним-суммы для рассматриваемого примера. Ним-сумма отлична от 0. Обнуляет ее единствен-

Кучка 1	6:	1	1	0
Кучка 2	5:	1	0	1
Кучка 3	8:	1	0	0
Кучка 4	0:			0
Ним-сумма:		1	0	1

Рис. 12. Составление Ним-суммы для чисел в игре 6

ный ход: в третьей кучке с 8 камнями следует оставить $11_2 = 3$ камня. Следовательно, игрок должен удалить звено 4 у ломаной S .

Предлагаем читателям в следующих упражнениях свести игры к Ниму.

Упражнения

1. Четыре фишки находятся на клетках горизонтальной полосы из 25 клеток. За каждый ход необходимо передвинуть одну из фишек влево на любую свободную клетку, перепрыгивая через другие фишки разрешается, на одной клетке не могут находиться несколько фишек. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

2. На пяти клетках горизонтальной полосы из 25 клеток находится по фишке. За каждый ход разрешается передвинуть любую фишку влево на любое количество клеток, не перепрыгивая через другие фишки. Ставить фишку на уже занятую другой фишкой клетку допускается только для самой левой клетки полосы. Выигрывает игрок, после хода которого все фишки соберутся на крайней левой клетке полосы.

3. На пяти клетках горизонтальной полосы из 25 клеток находится по фишке. Средняя из них выделена цветом. За каждый ход разрешается передвинуть любую фишку влево на любое количество клеток, не перепрыгивая через другие фишки. Ставить фишку на уже занятую другой фишкой клетку допускается только для самой левой клетки полосы. Выигрывает игрок, который поставит выделенную цветом фишку на крайнюю левую клетку полосы.

4. Имеется 3 пустых корзины вместимостью N_1 , N_2 и N_3 мячей ($N_1, N_2, N_3 < 15$). Два игрока по очереди раскладывают ($N_1 + N_2 + N_3 - 1$) мячей в 3 корзины. За один ход игрок может положить любое количество мячей в одну из корзин. Выигрывает игрок, который положит в корзины последний мяч.

5. Гусеница состоит из двадцати звеньев. Некоторые звенья гусеницы окрашены в зеленый цвет, остальные – белые. Два игрока по очереди перекрашивают звенья: зеленое звено делают белым, а белое – зеленым. Своим ходом игрок должен перекрасить два звена, причем звено из двух перекрашиваемых, ближе к голове гусеницы, должно перекрашиваться из зеленого в белый цвет. Проигрывает игрок, который не может сделать ход.

6. На столе – три кучки камней. В каждой кучке не более 25 камней. Каждый из двух игроков при своем ходе может взять любое ненулевое количество камней из одной из кучек либо положить на стол несколько камней из числа взятых им ранее в игре. Камни можно добавить в одну из имеющихся кучек или образовать из них новую кучку. Выигрывает игрок, взявший со стола последний камень.

Стратегии всех игр из упражнений приведены в недавно вышедшей книге: И.А.Копылов. Логические игры: Разрабатываем стратегию парных игр. – М.: ЛЕНАНД, 2019.