Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Черноуцан, Относительность движения в задачах динамики,
Квант, 2019, номер 4, 40–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает,
что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 03:06:29

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

А. ЧЕРНОУЦАН

ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ, В КОТОРЫХ УДОБНО (а иногда и необходимо) использовать разные системы отсчета – СО, можно условно разделить на две группы. В задачах первой группы переход в другую СО является удобным приемом для учета кинематических связей, накладываемых на поведение двух движущихся тел нитями, стержнями, твердыми поверхностями (одно из тел движется по поверхности другого). В задачах второй группы дополнительная СО, например СО центра масс, используется для упрощения записи уравнений движения и законов сохранения импульса и энергии.

Поскольку мы будем использовать только поступательно движущиеся СО, то формулы сложения скоростей и ускорений выглядят совершенно одинаково:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{СО}}, \quad (1)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{СО}}. \quad (2)$$

Приступим к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. К концам нити, перекинутой через легкий блок, прикрепili грузы массами $m_1 = 3 \text{ кг}$ и $m_2 = 10 \text{ кг}$. К оси блока приложили силу, направленную вертикально вверх и равную $F = 120 \text{ Н}$ (рис.1). С каким ускорением будет подниматься блок?

Решение. Поскольку блок идеальный (неве-

Рис. 1

сомый и вращается без трения), то силы натяжения нитей по обе стороны блока одинаковы (вращательный момент равен нулю). Второй закон Ньютона для невесомого блока имеет вид $F - 2T = 0$, откуда находим $T = 60 \text{ Н}$. Записав уравнения второго закона Ньютона для грузов:

$$T - m_1g = m_1a_{1x},$$

$$T - m_2g = m_2a_{2x},$$

(ось x направлена вверх), вычисляем $a_{1x} = 10 \text{ м/с}^2$, $a_{2x} = -4 \text{ м/с}^2$. Чтобы найти ускорение блока, надо записать кинематическую связь между тремя ускорениями, обусловленную нерастяжимостью нити. Это можно сделать разными способами, например выразив длину нити через координаты грузов и блока и затем дважды продифференцировав это соотношение. Попробуйте проделать это самостоятельно. Мы же отметим, что в СО, связанной с блоком, кинематическая связь очевидна – относительные ускорения грузов равны по модулю и противоположны по знаку:

$$(a_{16})_x + (a_{26})_x = 0.$$

Используя формулу (2) (закон сложения ускорений), получаем

$$(a_{1x} - a_{6x}) + (a_{2x} - a_{6x}) = 0,$$

откуда

$$a_{6x} = \frac{1}{2}(a_{1x} + a_{2x}) = \frac{F(m_1 + m_2)}{4m_1m_2} - g = 3 \text{ м/с}^2.$$

Задача 2. В центре верхней грани вертикального цилиндра, стоящего на гладкой горизонтальной поверхности, сделали полусферическую выемку (рис.2). С края выемки съезжает маленькая шайба. Найдите силу давления шайбы на поверхность выемки в нижней точке движения. Масса шайбы $m_1 = 0,2 \text{ кг}$, масса цилиндра $m_2 = 0,4 \text{ кг}$. Трением пренебречь.

Рис. 2

Решение. Искомая сила давления шайбы на поверхность выемки равна по величине силе реакции, которая входит во второй закон Ньютона, записанный для нижней точки траектории шайбы в проекции на вертикальную ось y . В СО земли траектория шайбы представляет собой сложную кривую (не окружность) за счет того, что цилиндр также движется, причем с переменной скоростью. Ускорение шайбы можно найти в СО, связанной с цилиндром, где шайба движется по окружности радиусом R : $a_{\text{отн}} = v_{\text{отн}}^2 / R$. Поскольку ускорение цилиндра в проекции на ось y в рассматриваемый момент равно нулю, то в соответствии с формулой (2) таким же будет ускорение шайбы относительно земли. Получаем

$$N - m_1 g = m_1 \frac{v_{\text{отн}}^2}{R}.$$

Закон сложения скоростей (1) в проекции на ось x дает

$$v_{\text{отн}} = v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2.$$

Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2,$$

$$m_1 g R = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Из закона сложения скоростей и закона сохранения импульса выразим v_1 и v_2 через $v_{\text{отн}}$:

$$v_1 = \frac{m_2 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{m_1 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2}$$

и подставим в закон сохранения энергии. Получим

$$m_1 g R = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_{\text{отн}}^2}{2},$$

откуда выражаем $v_{\text{отн}}^2$, подставляем во второй закон Ньютона и находим силу реакции:

$$N = m_1 g + m_1 \frac{v_{\text{отн}}^2}{R} = m_1 g \frac{3m_2 + 2m_1}{m_2} = 8 \text{ Н}.$$

Для проверки ответа можно m_2 устремить к бесконечности (неподвижный цилиндр) и мы получим известный результат $N = 3m_1 g$.

Задача 3. Маленькая шайба массой m_1 соскальзывает с вершины гладкой полусферы радиусом R и массой m_2 , которая стоит на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 3). Найдите, для случая $m_1 = m_2$, на

Рис. 3

какой высоте шайба оторвется от полусферы.

Решение. Поскольку в момент отрыва шайбы от поверхности полусферы ускорение полусферы обращается в ноль, то в соответствии с законом сложения ускорений (2) ускорение шайбы относительно земли равно ускорению шайбы относительно полусферы. В СО полусферы радиус кривизны траектории в момент отрыва все еще равен R и проекция ускорения на радиальное направление равна $v_{\text{отн}}^2 / R$. Второй закон Ньютона будет иметь вид

$$m_1 g \cos \alpha = m_1 \frac{v_{\text{отн}}^2}{R}.$$

Закон сложения скоростей (1) для данного случая

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_2$$

изображен на рисунке 4. С помощью теоремы косинусов выражаем v_1 :

$$v_1^2 = v_2^2 + v_{\text{отн}}^2 - 2v_2 v_{\text{отн}} \cos \alpha.$$

Закон сохранения импульса можно записать в СО земли (опираясь на рисунок 4), но проще всего сделать это в СО, движущейся влево со скоростью v_2 :

$$(m_1 + m_2) v_2 = m_1 v_{\text{отн}} \cos \alpha.$$

Выразим отсюда v_2 , подставим в закон сохранения энергии

$$m_1 g R (1 - \cos \alpha) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

и после преобразований придем к уравнению

$$m_1 g R (1 - \cos \alpha) = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{2} \left(1 - \frac{m_1 \cos^2 \alpha}{m_1 + m_2} \right).$$

Подставляя $v_{\text{отн}}^2$ из второго закона Ньютона, приходим к кубическому уравнению относительно $\cos \alpha$:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2 = 0.$$

Проверкой правильности полученного урав-

Рис. 4

нения может служить то, что в пределе $m_2 \rightarrow \infty$ (неподвижная полусфера) получается известный результат $\cos \alpha = 2/3$. В случае $m_1 = m_2$ уравнение

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

имеет простой корень $x = 2$. Разделив кубический многочлен на $x - 2$, приходим к квадратному уравнению относительно $x = \cos \alpha$:

$$x^2 + 2x - 2 = 0,$$

откуда $\cos \alpha = \sqrt{3} - 1$, а искомая высота отрыва шайбы

$$h = R \cos \alpha = R(\sqrt{3} - 1).$$

В следующих двух задачах ускорение СО не равно нулю и закон сложения ускорений работает в полную силу.

Задача 4. Маленькая шайба массой m_1 соскальзывает с вершины гладкого клина массой m_2 , стоящего на гладкой горизонтальной плоскости (рис.5). Найдите вре-

Рис. 5

мя соскальзывания шайбы, если высота клина h , а угол при основании клина α .

Решение. Чтобы определить время соскальзывания шайбы, надо найти ускорение $a_{\text{отн}}$ шайбы относительно клина:

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{a_{\text{отн}} t^2}{2}.$$

Закон сложения ускорений (2) связывает ускорение $\vec{a}_1$ шайбы относительно земли,

ускорение $\vec{a}_2$ клина (ускорение СО) и $\vec{a}_{\text{отн}}$ (рис.6):

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_2.$$

Опираясь на этот рисунок, запишем второй закон Ньютона для шайбы $\vec{N} + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1$ в проекциях на оси x и y :

$$m_1 g \sin \alpha = m_1 (a_{\text{отн}} - a_2 \cos \alpha),$$

$$N - m_1 g \cos \alpha = -m_2 a_2 \sin \alpha.$$

Проекция второго закона Ньютона для кли-

Рис. 6

на на горизонтальную ось имеет вид

$$N \sin \alpha = m_2 a_2.$$

Исключая N из последних двух уравнений, выражаем ускорение клина a_2 :

$$a_2 = \frac{m_1 g \cos \alpha \sin \alpha}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2},$$

после чего находим $a_{\text{отн}}$:

$$a_{\text{отн}} = g \sin \alpha \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2}.$$

(В пределе $m_2 \rightarrow \infty$, неподвижный клин, получаем правильный ответ $g \sin \alpha$.) Подставив $a_{\text{отн}}$ в самое первое кинематическое равенство, найдем время соскальзывания.

Задача 5. Брусок стоит на гладкой горизонтальной плоскости, на бруске закреплен штатив, к которому на легкой нити подвешен груз массой m_1 (рис.7). Масса

Рис. 7

бруска вместе со штативом равна m_2 . Вначале нить с грузом удерживают в горизонтальном положении, затем отпускают. Найдите силу натяжения нити в момент, когда нить составляет угол α с вертикалью.

Решение. Ускорение груза относительно земли выражается через ускорение бруска $\vec{a}_2$ и ускорение $\vec{a}_{\text{отн}}$ груза относительно СО, связанной с бруском (формула (2)):

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_2.$$

Это соотношение (точнее, два его «участника») изображено на рисунке 8, где $\vec{a}_{\text{отн}}$ разложено на две составляющие – нормальную $\vec{a}_n$ и тангенциальную $\vec{a}_\tau$. Поскольку в СО бруска груз движется по окружности радиусом l , то $a_n = v_{\text{отн}}^2 / l$. В проекции на ось, направленную вдоль нити к центру окружности, второй закон Ньютона для

Рис. 8

груза принимает вид

$$T - m_1 g \cos \alpha = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{l} - m_1 a_2 \sin \alpha.$$

Записав второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось:

$$T \sin \alpha = m_2 a_2$$

и исключив ускорение a_2 , получим уравнение

$$T \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \sin^2 \alpha \right) = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{l} + m_1 g \cos \alpha.$$

Чтобы найти $v_{\text{отн}}^2$, надо записать законы сохранения импульса и энергии. Закон сохранения импульса проще всего записать в СО, движущейся вправо со скоростью v_2 :

$$(m_1 + m_2) v_2 = m_1 v_{\text{отн}} \cos \alpha.$$

Это соотношение мы используем, чтобы выразить v_2 через $v_{\text{отн}}$. А чтобы избавиться от v_1^2 в законе сохранения энергии

$$m_1 g l \cos \alpha = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

Рис. 9

запишем закон сложения скоростей (1):

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_2,$$

изобразим его на рисунке 9 и воспользуемся теоремой косинусов:

$$v_1^2 = v_2^2 + v_{\text{отн}}^2 - 2v_2 v_{\text{отн}} \cos \alpha.$$

Подставив это выражение в закон сохранения энергии и выразив v_2 через $v_{\text{отн}}$, придем к уравнению

$$m_1 g l \cos \alpha = \frac{m_1}{2} \frac{m_1 \sin^2 \alpha + m_2}{m_1 + m_2} v_{\text{отн}}^2.$$

Выразив отсюда $m_1 v_{\text{отн}}^2 / l$ и подставив в уравнение для T , получим

$$T = \frac{m_1 m_2 g \cos \alpha}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2} \left(\frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2} + 1 \right).$$

Полученный ответ может быть проверен двумя способами. При $m_2 \rightarrow \infty$ (неподвижный брусок) это выражение переходит в известный результат $3m_1 g \cos \alpha$. При $\alpha = 0$ это выражение совпадает с результатом задачи 2.

Теперь рассмотрим несколько примеров того, как использование СО центра масс может существенно упростить задачу. Напомним, что координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по

формулам

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}, \dots,$$

а скорость центра масс — по формуле

$$\vec{v}_{\text{ц}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\vec{p}_{\text{сист}}}{m_{\text{сист}}}.$$

Ускорение центра масс равно отношению суммы всех внешних сил, действующих на тела системы, к массе системы:

$$\vec{a}_{\text{ц}} = \frac{\vec{F}_{\text{внеш}}}{m_{\text{сист}}}.$$

Из последних двух формул видно, что скорость центра масс замкнутой системы ($\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, $\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}$) постоянна, т.е. СО центра масс замкнутой системы является инерциальной.

Задача 6. Шар массой m , движущийся со скоростью v , сталкивается с шаром массой $2m$, движущимся ему навстречу со скоростью $2v$. Найдите скорости шаров после удара, считая его центральным и абсолютно упругим.

Решение. Задачу об упругом центральном ударе решают обычно через составление системы двух уравнений — законов сохранения импульса и энергии. Как правило, ограничиваются случаем, когда один из шаров вначале покоится, иначе система уравнений становится слишком громоздкой. Однако в СО центра масс конечные скорости определяются сразу, без составления системы уравнений. Импульс системы был и остается равным нулю, и достаточно изменить направление скоростей на противоположные, чтобы обеспечить и сохранение импульса и сохранение энергии.

Решение задачи состоит из нескольких шагов. Выберем положительное направление оси x вдоль начальной скорости первого шара. Скорости в СО земли будем обозначать буквами v , относительно центра масс — буквами u , скорости после удара будем писать со штрихом.

Шаг 1. Найдём скорость центра масс:

$$v_{\text{цх}} = \frac{mv - 2m \cdot 2v}{m + 2m} = -v.$$

Шаг 2. Определим скорости шаров в СО центра масс до удара (формула (1)):

$$u_{1x} = v_{1x} - v_{\text{цх}} = v - (-v) = 2v,$$

$$u_{2x} = v_{2x} - v_{\text{цх}} = -2v - (-v) = -v.$$

Шаг 3 (главный). Определим скорости шаров в СО центра масс после удара:

$$u'_{1x} = -u_{1x} = -2v, \quad u'_{2x} = -u_{2x} = v.$$

Шаг 4. Найдем конечные скорости шаров в изначальной СО с помощью закона сложения скоростей (1):

$$v'_{1x} = u'_{1x} + v_{цх} = (-2v) + (-v) = -3v,$$

$$v'_{2x} = u'_{2x} + v_{цх} = v + (-v) = 0.$$

Задача 7. Шар массой m_1 налетает на покоящийся шар массой $m_2 < m_1$. Найдите максимальный угол отклонения налетающего шара в результате косоугольного абсолютно упругого удара. Поверхности шаров гладкие.

Решение. Перейдем в СО центра масс, скорость которого

$$\vec{v}_{ц} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}.$$

Начальные скорости шаров в этой СО равны

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{ц} = \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{u}_2 = 0 - \vec{v}_{ц} = -\frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку импульс системы после соударения должен остаться равным нулю, а энергия должна сохраниться, то конечные скорости шаров равны начальным, а направлены в противоположных направлениях (рис.10):

$$u'_1 = u_1, \quad u'_2 = u_2,$$

причем $\vec{u}'_1$ может составлять любой угол (от нуля до 360°) с $\vec{u}_1$. Возвращаясь в изначальную СО, получаем

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_{ц} + \vec{u}'_1$$

Конец вектора $\vec{u}'_1$ описывает окружность (рис.11). Максимальный угол между $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}_1$ соответствует касательной к окруж-

Рис. 11

НОСТИ:

$$\sin \theta = \frac{u'_1}{v_{ц}} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Задача 8. Два шарика массами m и $3m$, соединенные нитью длиной l , движутся по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент один из шариков (массой m) неподвижен, а скорость другого равна v и направлена перпендикулярно нити. Чему равна сила натяжения нити?

Решение. В СО земли движение шариков выглядит сложно. Однако если перейти в СО центра масс, то каждый из шариков будет равномерно двигаться по окружности вокруг неподвижного центра масс. Центр масс находится между шариками на расстояниях

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{3}{4}l, \quad l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4}l$$

от первого и второго шариков соответственно. Скорость центра масс относительно земли равна (рис.12)

$$v_{ц} = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} = \frac{3}{4}v.$$

Скорости шариков относительно центра масс

Рис. 12

Рис. 13

равны (рис. 13)

$$u_1 = 0 - v_{ц} = -\frac{m_2 v}{m_1 + m_2} = -\frac{3}{4} v,$$

$$u_2 = v - v_{ц} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4} v.$$

Сила натяжения нити может быть найдена из второго закона Ньютона для любого из шариков:

$$T = \frac{m_1 u_1^2}{l_1} = \frac{m_2 u_2^2}{l_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v^2}{l} = \frac{3}{4} \frac{m v^2}{l}.$$

В рассмотренных выше задачах мы обошлись без привлечения неинерциальных систем отсчета – НСО и сил инерции. Однако умение работать в НСО в некоторых задачах может быть незаменимым. Мы ограничимся несколькими примерами использования сил инерции в поступательно движущихся СО.

Выразим ускорение произвольного тела во втором законе Ньютона с помощью формулы сложения ускорений (2):

$$\vec{F} = m(\vec{a}_{отн} + \vec{a}_{СО})$$

($\vec{F}$ – равнодействующая обычных сил) и перенесем $m\vec{a}_{СО}$ в левую часть равенства:

$$\vec{F} + (-m\vec{a}_{СО}) = m\vec{a}_{отн}.$$

Определяя силу инерции формулой

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_{СО},$$

получаем второй закон Ньютона в НСО:

$$\vec{F} + \vec{F}_{ин} = m\vec{a}_{отн}.$$

Как и сила тяжести, сила инерции пропорциональна массе тела. Равнодействующая сил инерции, как и сил тяжести, приложена к центру тяжести тела. Во многих случаях оказывается удобным присоединить силу инерции к силе тяжести и считать, что появление сил инерции привело к изменению ускорения свободного падения:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_{СО}.$$

Задача 9. Во сколько раз изменится циклическая частота колебаний математического маятника, если точка подвеса будет перемещаться с горизонтальным ускорением $a = 0,75g$?

Решение. Перейдем в СО, связанную с точкой подвеса маятника. В этой НСО действует горизонтальная сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение точки подвеса. В положе-

нии равновесия нить будет направлена вдоль нового ускорения свободного падения $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$ (рис. 14), т.е. будет отклонена назад под углом, тангенс которого равен a/g . Циклическая частота малых колебаний маятника около этого положения равновесия равна

$$\omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}} = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}}.$$

Отношение новой частоты колебаний к старой (с неподвижной точкой подвеса) равно

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{g}} = \sqrt{1,25} \approx 1,12.$$

Задача 10. Тело, плотность которого $\rho = 500 \text{ кг/м}^3$, плавает на поверхности воды в сосуде. Сосуд поднимается вертикально вверх с ускорением $a = g/2$. Какая часть объема тела (в процентах) погружена в воду?

Решение. Поскольку в уравнении

$$\rho V g = \rho_v g V_{погр},$$

выражающем условие плавания тела, ускорение g сокращается, а переход в НСО, связанную с сосудом, сводится к замене g на $g' = g + a$, то доля погруженного объема не меняется:

$$\frac{V_{погр}}{V} = \frac{\rho}{\rho_v} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Решая эту задачу в СО земли, часто делают ошибку, полагая, что поскольку сила Архимеда возрастает, то глубина погружения должна увеличиться. Чтобы избежать этой ошибки, надо разобраться, как меняется формула для силы Архимеда за счет движения сосуда с ускорением. В НСО же такой проблемы нет.

Задача 11. Два одинаковых тела лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Тела соединены прямой ненапрянутой нитью длиной l . Середину нити начинают перемещать горизонтально перпендикулярно нити с ускорением a . Найдите, на сколько нагрются тела при ударе, если считать удар абсолютно неупругим, а удельную теплоемкость равной c .

Рис. 14

Решение. В СО земли движение тел выглядит сложно. Однако в СО, в которой центр нити неподвижен, на каждое из тел действует постоянная сила инерции $F_{\text{ин}} = ma$, направленная перпендикулярно нити. Такая задача эквивалентна задаче о падении и столкновении двух тел, связанных нитью, середина которой неподвижна, но с заменой g на a . Закон сохранения энергии для такой задачи выглядит просто:

$$2 \cdot ma \frac{l}{2} = c \cdot 2m \cdot \Delta t, \text{ откуда } \Delta t = \frac{al}{2c}.$$

Напоследок – задача, в которой одно из действующих лиц имеет значительно большую массу, чем другое.

Задача 12. Санки съезжают с гладкой горки высотой h и приобретают скорость v . Начальная потенциальная энергия mgh равна конечной кинетической энергии $mv^2/2$. Однако в инерциальной СО, которая движется горизонтально со скоростью v , начальная энергия равна $mgh + mv^2/2$, а конечная равна нулю. Спасите закон сохранения энергии.

Решение. Чтобы понять, куда делась энергия, надо ввести в игру еще одного участника, энергия которого также будет меняться. Этим участником должно стать тело, с которым санки взаимодействуют при спуске. Этим телом является... земной шар! Оказывается, изменением энергии Земли (любого очень массивного тела) можно пренебречь только в СО, где это тело покоится. Изменение скорости Земли при скатывании санок можно найти из закона сохранения импульса

$$mv - M \cdot \Delta V = 0,$$

и изменение энергии Земли, равное

$$\frac{M(\Delta V)^2}{2} = \frac{m}{M} \frac{mv^2}{2},$$

оказывается ничтожно малым. Однако в СО, которая движется со скоростью v , изменение энергии Земли, равное

$$\begin{aligned} \frac{M(v + \Delta V)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} &= \\ &= Mv(\Delta V) + \frac{M(\Delta V)^2}{2} \approx mv^2, \end{aligned}$$

не только не является бесконечно малым, но в точности компенсирует потерянную нами в условии энергию.

Мораль этой задачи такова: изменением энергии очень массивного тела можно пренебрегать только в СО, где это тело покоится. Хорошо знакомый пример: упругий удар мяча о стенку. Если стенка неподвижна, то мяч отскакивает с такой же скоростью, энергия стенки не меняется. Если же стенка движется, то скорость после отскока не равна начальной – энергия стенки изменяется!

Упражнения

1. К потолку кабины лифта, поднимающегося с ускорением 2 м/с^2 , прикреплен динамометр. К динамометру подвешен блок, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами 1 кг и 3 кг . Определите показания динамометра.

2. Демонстрационная установка состоит из наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю» радиусом R . Установка закреплена на тележке, стоящей на горизонтальной плоскости. Груз массой $0,2 \text{ кг}$ съезжает с высоты $3R$, отсчитанной от нижней точки петли. Чему равна сила давления груза в верхней точке петли? Трением пренебречь. Масса установки вместе с тележкой в 4 раза больше массы груза.

3. Два шара движутся в одном направлении, первый со скоростью v , второй со скоростью $2v$. Масса второго шара в 4 раза больше массы первого. Найдите скорости шаров после абсолютно упругого центрального удара.

4. В маятниковых часах используется математический маятник с периодом колебаний 1 с . Часы помещают в ракету, которая начинает подниматься с постоянным ускорением. Чему равно это ускорение, если за 7 с подъема маятник часов совершает 8 полных колебаний? Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

5. Открытую цистерну в форме куба со стороной 2 м , стоящую на платформе, заполнили жидкостью наполовину. Платформа стала разгоняться с ускорением 2 м/с^2 . На сколько поднялся уровень жидкости у задней стенки платформы к тому моменту, когда жидкость и платформа стали двигаться как единое целое?

6. Пуля массой 20 г , летящая со скоростью 100 м/с , попадает в летящий ей навстречу очень массивный шар, скорость которого 10 м/с , и застревает в нем. Какое количество теплоты выделилось при ударе?

7. Для системы, описанной в задаче 3 статьи, найдите зависимость силы давления N шайбы от угла α .

Указание. Воспользуйтесь подходом, развитым в задаче 5 статьи.