Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Кохась, Что не так с перестановкой слагаемых?, *Квант*, 2019, номер 6, 10–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:23:14

можно описать формулой

$$\sigma_T = \sigma_{T_0} \frac{T_{\text{крит}} - T}{T_{\text{крит}} - T_0}.$$

Здесь σ_{T_0} – коэффициент поверхностного натяжения при некоторой температуре T_0 , а T – текущая температура. Если устроить тепловой двигатель, работающий по циклу Карно с нагревателем и холодильником, имеющими близкие температуры $T + \Delta T$ и T , в котором в качестве рабочего тела будет выступать пленка поверхности жидкости, то КПД такого двигателя будет равен $\Delta t/T$ и можно написать такое соотношение:

$$S_0 \Delta \sigma = Q \frac{\Delta t}{T},$$

или

$$S_0 \sigma_{T_0} \frac{\Delta t}{T_{\text{крит}} - T_0} = S_0 \sigma_{T_0} \frac{T_{\text{крит}} - T}{T_{\text{крит}} - T_0} (k - 1) \frac{\Delta t}{T}.$$

Сократив на одинаковые множители, получаем

$$1 = \frac{T_{\text{крит}} - T}{T} (k - 1), \text{ или } k - 1 = \frac{T}{T_{\text{крит}} - T}.$$

Подставим полученное выражение в формулу для Q :

$$Q = S_0 \sigma_T \frac{T}{T_{\text{крит}} - T}.$$

Если добавить к этой энергии работу вне-

шних сил, то получится вклад во внутреннюю энергию жидкости при температуре T ее поверхности величиной S_0 (плоская поверхность с заданным периметром):

$$\Delta U = Q + A = S_0 \sigma_T \frac{T_{\text{крит}}}{T_{\text{крит}} - T}.$$

Ответ на поставленный вопрос получен.

Как видно из формулы для ΔU , в знаменателе стоит разность температур, которая при приближении T к $T_{\text{крит}}$ стремится к нулю. Но и сам коэффициент σ_T тоже стремится к нулю. Подставим в формулу значение σ_T , выраженное через значение при некоторой температуре T_0 :

$$\Delta U = Q + A = S_0 \sigma_{T_0} \frac{T_{\text{крит}}}{T_{\text{крит}} - T_0}.$$

Получилась удивительная вещь: добавок внутренней энергии, связанный с наличием свободной поверхности, не зависит от температуры!

Имеется отдаленная аналогия с известной задачей о запасе энергии теплового движения воздуха в комнате при разных температурах воздуха, но при фиксированном давлении. И там тоже запас энергии не зависит от температуры, а определяется только давлением воздуха и объемом комнаты.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Что не так с перестановкой слагаемых?

К. КОХАСЬ

— **З**ДРАВСТВУЙТЕ, УВАЖАЕМЫЕ ТЕЛЕЗРИТЕЛИ! Незаметно прошла неделя, и вы смотрите очередной потрясающий выпуск научно-популярной телепере-

дачи «Что не так?» Меня зовут Горгулий, в нашей передаче мы не боимся прямо и честно рассказывать о самых замысловатых сюжетах. Задавайте нам свои вопросы прямо на сайте телепередачи. Тема сегодняшнего выпуска, как обычно, предложена телезрителями.

Наш телезритель Пинот Хукк спрашивает: что не так с суммой, если мы переставляем слагаемые? Ответить на этот вопрос нам поможет наш постоянный эксперт по вопросам адекватности дятел Спятел.

– Привет, друзья! Вот и опять мы встретились по разные стороны телеэкрана!

– Скажите, пожалуйста, маэстро, откуда вообще у Пинота Хукка могло появиться беспокойство о сумме, в которой мы меняем порядок слагаемых? Неужели наш телезритель не знает элементарных фактов школьной программы?

– Видите ли, жизнь присутствует и за рамками школьной программы, – объяснил дятел Спятел. – Многочисленные примеры говорят нам, что порядок при суммировании важен. Вот, допустим, этот ваш Пинот Хукк пришел в магазин...

– Прошу прощения, не хотите ли вы сказать, что при покупке мороженого и шоколадки мы заплатим не столько же, сколько при покупке шоколадки и мороженого?

– Вы спортивный и энергичный, за словом в карман не лезете, да и вообще постоянно перебиваете и ведете себя нагло, к тому же речь идет о совсем небольшой покупке, поэтому, думаю, что если покупать будете вы, в обоих случаях цена

покупки будет одна и та же. Но представьте, что вы пришли в ювелирный магазин и хотите купить... ну скажем, коробочку для перстня. Коробочка стоит всего 100 рублей, однако в последний момент вы говорите: «так и быть, давайте я куплю еще и перстень за 100 000». Таким образом, всего за 100 тысяч 100 рублей вы становитесь счастливым обладателем перстня в коробочке. Если же вы станете покупать эти предметы в другом порядке – сперва выберете перстень, а потом согласитесь «да-да, упакуйте, пожалуйста», то цена покупки может оказаться больше, например 100 тысяч 500 рублей!

– Я думаю, такие аномалии случаются нечасто.

– Не скажите, очень даже часто. Вот вам еще пример: на рынке продаются яблоки и апельсины; те и другие по 100 рублей за килограмм. Вы берете одно яблоко (приблизительно 10 рублей за 100 граммов) и одну тонну апельсинов (100 тысяч рублей). Итого 100 010 рублей. Если же вы берете тонну апельсинов, да еще просите добавить туда одно яблоко, «они ведь по одной цене», то получите то же самое, скорее всего, «всего лишь» за 100 000 рублей.

– Я понял вас, по-видимому, мы имеем здесь дело с коммерческим сложением, которое имеет свои нюансы и не всегда подчиняется математическим законам. Но может ли сумма измениться, если речь идет о чистой математике?

– Вы, конечно, слышали о вакуумных квантовых флуктуациях? – неожиданно спросил дятел Спятел.

– Да, – без запинки ответил Горгулий, – сейчас это очень модная тема, все о них слышали. Но специально для нашего телезрителя Пинота Хукка стоит пояснить.

– Вот, есть у вас пустое пространство, полнейший вакуум. Короче, такой ноль-преноль. Неожиданно буквально из ниоткуда появляется, скажем, электрон в паре с позитроном. А через мгновение они тихомирно аннигилируют, вместо того чтобы разлететься в разные стороны.

– Да-да, удивительно и очень интересно, – согласился Горгулий, смачно зев-

нув. – Ненавижу физику. К чему же вы клоните?

– Просто зарисовочка из жизни. Она настраивает мысли на нужный лад. Вот что вы со своим телезрителем Пинотом Хукком можете сказать о сумме

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) + \\ + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + \dots?$$

– Хм... Ну... Да... Типичные вакуумные флуктуации. Она равна нулю!

– Не могу не согласиться. Но, кстати, если включить очень сильное магнитное поле, эти наши электроны-позитроны как раз-таки и разлетятся в разные стороны! Впрочем, это слишком художественно, к делу отношения не имеет. Давайте разберемся со слагаемыми в сумме. Самое крупное по модулю слагаемое тут одно: единица. Следующее по величине слагаемое $1/2$. Оно встречается три раза: два раза со знаком минус и один раз со знаком плюс. Итого $-1/2$. Следующее по величине слагаемое $1/4$ тоже встречается три раза: два раза со знаком минус и один раз со знаком плюс. Итого $-1/4$. То же самое можно сказать и про все остальные слагаемые. Получается, что наша сумма равна

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots$$

– Да ведь это все тот же 0! Только теперь это записано не самым очевидным способом. Получается, что вы переставили слагаемые и даже кое-что сократили, а сумма не изменилась. Значит, все так?

– Не торопитесь. Рассмотрим еще один пример «флуктуаций»:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + \\ + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\right) + \dots$$

Не правда ли, эта сумма тоже равна нулю. Упростим ее в стиле предыдущего рассуждения. Каждое слагаемое с четным знаменателем $2k$ встречается в сумме три раза: два раза со знаком минус в скобке

$\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k}\right)$ и один раз со знаком плюс в скобке $\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{4k} - \frac{1}{4k}\right)$. А каждое слагаемое с нечетным знаменателем $2k + 1$ встречается один раз со знаком плюс в скобке $\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+2}\right)$. Поэтому сумма равна

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

– Осмелюсь предположить, что это тоже ноль, только записанный еще менее очевидным способом.

– Ну что вы, какой же это ноль! Сумма, которую я написал, положительна, это совершенно очевидно:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

А вы, я вижу, плохо отличаете положительные числа от нулевых. Кажется, я зря предположил, что стоимость мороженого и шоколадки у вас будет всегда одна и та же! Да вы, наверно, и есть тот самый Пинот Хукк, который задал этот дурацкий вопрос! Признавайтесь!

– Нууу, ээээ... В последнее время телезрители проявляют мало активности на сайте нашей телепередачи... Они задают скучные и малоинтересные вопросы...

– Дорогие друзья, я дятел Спятел, эксперт великолепной инновационной программы «Что не так?» по вопросам адекватности. Сегодня мы обсуждали интереснейший вопрос о возможном неадекватном поведении суммы при перемене мест слагаемых. Вместо этого мы стали свидетелями неадекватного поведения нашего ведущего! Давайте поаплодируем ему за прекрасно поставленный вопрос. Прояснилось ли что-нибудь в результате нашей дискуссии? Думаю, не очень. Ну да и ладно. Берегите себя, сохраняйте ясность ума и трезвость мысли! Увидимся на следующей неделе!