Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Сергеев, А. Савельева, Вокруг ортотреугольника, *Квант*,
2019, номер 6, 26–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 09:32:33

Вокруг ортоотреугольника

П. СЕРГЕЕВ, А. САВЕЛЬЕВА

АВТОРЫ ПОСВЯЩАЮТ ЭТУ СТАТЬЮ СВОЕМУ ОБЩЕМУ УЧИТЕЛЮ – ВЕЛИКОМУ ЗНАТОКУ ГЕОМЕТРИИ РАФАИЛУ КАЛМАНОВИЧУ ГОРДИНУ, КОТОРОМУ В ЭТОМ ГОДУ ИСПОЛНИЛОСЬ 70 ЛЕТ.

Посмотрите внимательно на рисунок 1. Этот чертеж придуман Р.К.Гординым. На

Рис. 1

нем отображено много интересных геометрических утверждений. Если вы сходу можете назвать 5–6 верных утверждений, которые вы узнаете на этом чертеже, то эту статью вам можно не читать. Наше послание адресовано тем, кто уже почувствовал красоту геометрии, но сталкивается с трудностями при решении творческих геометрических задач. Дело в том, что, приступая к таким задачам, полезно обладать некоторым багажом геометрических знаний, умением узнавать некоторые геометрические конструкции. Для этого, конечно, надо знать эти конструкции. Наш рассказ как раз и посвящен тем фактам, не зная которых, можно столкнуться со сложностями при решении даже довольно простых задач. Напротив, разобравшись в нашем чертеже – будем называть его здесь *главным* чертежом, – как мы сейчас убедимся, можно справиться уже и с относительно сложными задачами. Мы

принципиально в нашем изложении ограничимся только методами и фактами, присутствующими в любом школьном учебнике геометрии.

Приступим к делу. Точками A_1 , B_1 и C_1 на главном чертеже обозначены основания высот, проведенных из вершин A , B и C соответственно, точкой H – пересечение этих высот (*ортоцентр*), точкой O – центр описанной окружности. Для начала давайте заметим очень полезное равенство: $\angle C_1B_1A = \angle CBA$ (конечно же, тогда и $\angle B_1C_1A = \angle BCA$). Проще всего это доказать с помощью *метода вспомогательной окружности* (рис.2). Действительно, из то-

Рис. 2

чек C_1 и B_1 отрезок BC виден под прямым углом, значит, C_1 и B_1 лежат на окружности, построенной на BC как на диаметре. Следовательно, точки B , C_1 , B_1 , C лежат на одной окружности. Тогда $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$.

Тем самым, $\triangle AB_1C_1$ подобен $\triangle ABC$. Но с каким коэффициентом? Здесь нам поможет совсем другое рассуждение, которое, кстати, еще раз доказывает равенство указанных выше углов.

Коэффициент подобия – это отношение соответствующих сторон. Треугольник BAB_1 – прямоугольный, следовательно, $\frac{AB_1}{AB} = |\cos \angle BAC|$ – коэффициент подобия. Если провести аналогичное рассуждение для $\triangle SAC_1$, получим другое доказательство подобия $\triangle BAC$ и $\triangle B_1A_1C_1$.

Итак, мы доказали важное утверждение, которое очень часто используется при решении геометрических задач:

Теорема 1. Пусть C_1 и B_1 – основания высот, опущенных из вершин C и B треугольника ABC соответственно. Тогда $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle ACB$ с коэффициентом $|\cos \angle CAB|$.

ний: $\frac{CK}{CL} = \frac{CB_1}{CB}$. По условию, $\frac{CK}{CL} = \frac{1}{2}$. По теореме 1, $\frac{CB_1}{CB} = |\cos \angle ACB|$ как коэффициент подобия $\triangle CB_1A_1$ и $\triangle CBA$. Следовательно, $|\cos \angle ACB| = \frac{1}{2}$, откуда $\angle ACB = 60^\circ$ (так как по условию этот угол острый).

Примените теперь самостоятельно теорему 1 в следующей задаче.

Задача 3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки E и F , причем $\angle EAF = 45^\circ$. Отрезки AE и AF пересекают диагональ BD в точках P и Q . Докажите, что $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle APQ}} = 2$.

Нельзя не отметить, что чаще, конечно, теорема 1 служит лишь одним из необходимых шагов решения, а не является ключевой идеей задачи. Вернемся к основному чертежу. Легко заметить следующее.

Теорема 3. Касательная к окружности, описанной около треугольника ABC , проведенная в точке A , параллельна прямой B_1C_1 .

Доказательство получается из теоремы 1 простым подсчетом углов. Действительно, пусть F – точка на касательной, лежащая в другой полуплоскости относительно AB , чем точка C (рис.7). Тогда $\angle BAF$ равен $\angle ACB$

Рис. 7

как угол между касательной и хордой, а тот, в свою очередь, равен $\angle AC_1B_1$. Отсюда $AF \parallel C_1B_1$, так как накрест-лежащие углы равны.

Решите теперь следующую задачу самостоятельно.

Задача 4. Точки касания вписанной в треугольник окружности соединены отрезками, и в полученном треугольнике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединя-

ющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

Кстати, заметим, что по ходу дела мы с вами доказали еще один факт.

Теорема 4. В обозначениях нашего главного чертежа $\angle BAN = \angle OAC$. Тем самым, прямые AA_1 и AO симметричны относительно биссектрисы $\angle A$.

В качестве примера применения теоремы 3 рассмотрим задачу из регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике (автор – Л.А.Емельянов).

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Окружность Ω , описанная около треугольника ABC , пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C' . Касательные к Ω , проведенные в точках A' и C' , пересекаются в точке B' . Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω .

Решение. Пусть O – центр Ω . Проведем отрезок OB' (рис.8). Он перпендикулярен

Рис. 8

$A'C'$ из соображений симметрии. Радиус OB перпендикулярен прямой l , где l – касательная к Ω в точке B . Прямая l параллельна $A'C'$ по теореме 3, следовательно, $OB \perp A'C'$. Так как перпендикуляр из O на $A'C'$ единственен, точки O , B и B' лежат на одной прямой.

Решите следующую задачу самостоятельно.

Задача 6. В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL . Точка X на стороне MK такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O – центр описанной окружности треугольника MKN).

Вернемся к нашему главному чертежу. Исходя из него, логично предположить, что точки A_2 , B_2 и C_2 (симметричные ортоцен-

тру H относительно сторон треугольника) лежат на описанной окружности треугольника ABC . И действительно, верна следующая теорема.

Теорема 5. Точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника ABC относительно прямых, содержащих его стороны, лежат на описанной окружности этого треугольника.

Доказать эту теорему несложно, но надо аккуратно следить за логикой рассуждений. В обозначениях главного чертежа, $\triangle BAA_1 \sim \triangle BCC_1$, так как $\angle ABC$ – общий, $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$. Следовательно, $\angle BAA_1 = \angle CC_1B$. Продлим AA_1 до пересечения с окружностью, описанной около $\triangle ABC$. Пусть A_2 – точка пересечения. Тогда $\angle BAA_2 = \angle A_2CB$ (как углы, опирающиеся на одну дугу). Значит, A_1C – биссектриса и высота, а следовательно, и медиана $\triangle A_2A_1C$. Таким образом, A_2 – образ H при отражении относительно BC .

Этот факт очень часто используется при решении геометрических задач. Давайте применим его в следующей не очень простой задаче из Московской математической олимпиады (автор – А.А.Заславский).

Задача 7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точки P и Q симметричны точке C относительно прямых AB и AD соответственно (рис.9). Докажите, что прямая PQ

Рис. 9

проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) H треугольника ABD .

Решим эту задачу вместе. Для большего интереса разберем, как будут выглядеть наши конструкции в случае тупого угла C (остроугольный случай рассматривается аналогично).

Решение. Пусть BB_1 – высота, опущенная из точки B на AD , H – точка пересечения BB_1 и PQ (рис.10). Пусть H' – точка H , отраженная относительно AD . Докажем, что

Рис. 10

H' лежит на окружности, описанной около $ABCD$. Пусть K – середина PC , L – середина CQ . Углы CDL и KCB равны по свойству вписанного четырехугольника. Поскольку $\angle DLC = \angle KCB = 90^\circ$, то $\triangle CDL \sim \triangle CBK$. Следовательно, $\angle DCL = \angle BCK$. Тогда $\angle DCL + \angle LCB = \angle LCB + \angle BCK$, откуда $\angle DCB = \angle LCK$. Также из подобия треугольников CDL и CBK следует равенство отношений:

$$\frac{CL}{CD} = \frac{CK}{CB} \Rightarrow \frac{2CL}{CD} = \frac{2CK}{CB} \Rightarrow \frac{CQ}{CD} = \frac{CP}{CB}.$$

Значит,

$$\triangle DCB \sim \triangle QCP$$

по отношению двух сторон и углу между ними. Следовательно, $\angle CDB = \angle CQH$. Прямые HH' и CQ параллельны, поэтому $\angle HH'Q = \angle HQC$ как накрест-лежащие углы при параллельных прямых и секущей HQ . Из симметрии относительно AD $LB_1QH'NC$ – равнобокая трапеция. Значит, хорда CB видна из точек H' и Q под одним углом: $\angle HH'C = \angle QHH' = \angle CDB$. Следовательно, H' лежит на окружности $ABCD$. Тогда H – точка на высоте BB_1 треугольника DBA , которая при отражении относительно AD попадает на описанную окружность треугольника ABD . Следовательно, H – ортоцентр.

Теперь можно решить следующую задачу самостоятельно.

Задача 8. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник ABC по точкам A_1 ,

B_1 и C_1 , симметричным точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно прямых BC , CA и AB .

Снова обратимся к главному чертежу. Легко заметить, что два желтых треугольника подобны: $\triangle OQP \sim \triangle HBA$, где P , Q – середины сторон BC и AC соответственно. По сути, мы это с вами уже почти доказали. Действительно, $AH \parallel OP$, $BH \parallel OQ$, $AB \parallel QP$.

Отсюда сразу следует очень важный факт: $AH = 2OP$. В виду очень частого использования, сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 6. Расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны.

Кстати, тем самым мы с вами доказали, что точки H , M и O лежат на одной прямой (которая называется *прямая Эйлера*), причем расположены в отношении $HM : MO = 2 : 1$. Но это уже отдельная, очень интересная тема. Тем, кто хочет дальше углубиться в исследование этого вопроса, мы советуем начать со статьи И.Шарыгина и А.Ягубьянца «Окружность девяти точек и прямая Эйлера» («Квант» №8 за 1981 г.).

Попробуем теперь увидеть и применить теорему 6 в задаче из старинного «Собрания геометрических теорем и задач» Е.Пржевальского (М.: Типография Г.Лисснера и Д.Собко, 1909).

Задача 9. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$; H_a , H_b , H_c и H_d – точки пересечения высот треугольников BCD , ACD , ABD и ABC соответственно. Докажите, что четырехугольник $H_aH_bH_cH_d$ равен четырехугольнику $ABCD$.

Решение. Докажем, что стороны четырехугольника $H_aH_bH_cH_d$ соответственно равны и параллельны сторонам четырехугольника $ABCD$.

Докажем, что $H_cH_d = CD$ и $H_cH_d \parallel CD$ (рис.11). Рассмотрим треугольники ADB и ACB . Сторона AB и описанная окружность треугольников общая, следовательно, по теореме 6, $CH_d = DH_c$. Так как они при этом еще и перпендикулярны AB , то CDH_cH_d – параллелограмм. Следовательно, отрезок CD равен и параллелен H_cH_d . Аналогичные рассуждения верны и для остальных трех отрезков, что и доказывает наше утверждение.

Рис. 11

В следующей задаче попробуйте разглядеть теорему 6 самостоятельно.

Задача 10. Найдите углы остроугольного треугольника ABC , если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH , где O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот треугольника ABC .

Наконец, докажем еще один (не отраженный на главном чертеже) метрический факт. Оказывается, что длину отрезка AH можно легко выразить через радиус описанной окружности и угол A .

Теорема 7. Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC , $\angle BAC = \alpha$, H – ортоцентр треугольника (рис.12). Тогда $AH = 2R|\cos \alpha|$.

Рис. 12

Доказательство. Пусть $\angle BAC \leq 90^\circ$. Пусть M_a – середина стороны BC , O – центр описанной окружности $\triangle ABC$. Угол BOC равен 2α , как центральный угол дуги BC . Так как OM_a – медиана равнобедренного треугольника BOC , то $\angle BOM_a = \frac{\angle BOC}{2} = \alpha$ (рис.13). Следовательно, $OM_a = BO \cos \alpha = R \cos \alpha$. По теореме 6, $AH = 2HM_a = 2R \cos \alpha$.

С тупоугольным треугольником аналогично, только $\angle BOM_a = 180^\circ - \alpha$. Поэтому в формулировке теоремы стоит $|\cos \alpha|$.

Рис. 13

Знание этого факта может очень помочь при решении задач. Например, рассмотрим задачу из Московской устной олимпиады по геометрии (автор – А.А.Заславский).

Задача 11. В остроугольном треугольнике ровно один из углов равен 60° . Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан треугольника, отсекает от него равносторонний треугольник (рис.14).

Рис. 14

Решение. По доказанному ранее, ортоцентр, точка пересечения медиан и центр описанной окружности лежат на одной прямой, поэтому прямая, данная в условии содержит точку пересечения высот. Обозначим вершины треугольника A , B и C , $\angle BAC = 60^\circ$. Пусть H – ортоцентр треугольника, O – центр его описанной окружности, K , L – точки пересечения OH с AB и

Рис. 15

AC соответственно (рис.15). Тогда, по теореме 7, $AH = 2R|\cos \angle BAC| = R = AO$. Следовательно, $\triangle OAH$ равнобедренный, откуда $\angle AOK = \angle AHL$. Так как, по доказанному ранее, $\angle BAO = \angle CAH$, то $\triangle AHL = \triangle AOK$ по стороне и двум углам. Значит, $AK = AL$. Следовательно, $\triangle KAL$ равнобедренный, а значит (так как $\angle A = 60^\circ$), и равносторонний.

Как всегда, теперь вам предстоит решить еще одну задачу уже самостоятельно.

Задача 12. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H , а R – радиус его описанной окружности. Докажите, что если $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$, то $AH + BH \geq 2R$.

В заключение приведем несколько задач для самостоятельного решения, ключевые идеи которых связаны с нашим главным чертежом.

Задача 13. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведенной из прямого угла.

Задача 14. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Пусть M – середина BC , H – ортоцентр. Докажите, что прямая MH проходит через середину дуги AB описанной окружности треугольника ABC .

Задача 15. В треугольнике ABC точка H_1 симметрична ортоцентру H относительно вершины C , а точка C_1 симметрична точке C относительно середины стороны AB . Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника ABC , является серединой отрезка H_1C_1 .

Задача 16. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Оказалось, что точка C' , симметричная точке C относительно середины отрезка A_1B_1 , лежит на прямой AB . Докажите, что описанная окружность треугольника A_1B_1C' касается прямой AB .

Задача 17. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BB_1 и CC_1 . Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K , отличной от A . Докажите, что прямая KH проходит через A_0 , где A_0 – середина BC , H – ортоцентр треугольника.