Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Романов, Юбилей теоремы Райского, *Квант*, 2019, номер 7, 10–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:49:10

Юбилей теоремы Райского

А. РОМАНОВ

50 ЛЕТ НАЗАД В ЖУРНАЛ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ» была подана статья школьника Дмитрия Райского [1] с существенным продвижением в проблеме, поставленной Хадвигером [2]. Дмитрий доказал такую теорему:

При раскраске плоскости в три цвета (разбиении на три непересекающиеся множества) всегда можно выбрать цвет, в котором реализуются все расстояния, т.е. для любого положительного d найдутся две точки на расстоянии d , окрашенные в выбранный цвет.

Теорема Райского является заметным усилением доказанной в 1961 году братьями Мозерами теоремы о том, что при раскраске плоскости в три цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1. При подготовке статьи [1] к печати теорема была обобщена на N -мерное пространство и существенно отредактирована. В результате работа школьника оказалась трудночитаемой и недоступной для юных математиков. Здесь я постарался воспроизвести первоначальный вариант решения. Я благодарен Н.Н.Константинову, который в 1971 году рассказал мне доказательство теоремы Райского. Константинов помогал Дмитрию в подготовке статьи и без его участия публикация вряд ли была бы возможна.

Вспомогательные леммы

Пусть на плоскости задана фигура из n различных точек – n -точечник. Выберем одну из этих точек и назовем n -пучком набор векторов, выходящих из этой точки ко всем точкам n -точечника (один из векторов n -пучка – нуль-вектор). Определим произведение n -пучка и k -пучка как пучок векторов $a + c$, где вектор a берется из n -пучка, а c – из k -пучка.

Определенное таким образом произведение содержит не более чем $n \cdot k$ различных векторов, так как суммы векторов для разных пар могут и совпадать.

Лемма 1. *Если мы рассмотрим повороты k -пучка на произвольный угол, то лишь для конечного числа углов поворота произведение фиксированного n -пучка и повернутого k -пучка будет содержать менее чем $n \cdot k$ различных векторов.*

Действительно, выбрать два различных вектора a, b из n -пучка и два различных вектора c, d из k -пучка можно лишь конечным числом способов. Для каждой такой четверки векторов рассмотрим повороты k -пучка на угол α и сравним суммы векторов $a + c_\alpha$ и $b + d_\alpha$. Так как окружности пересекаются не более чем в двух точках, не более двух углов α могут дать равенство этих сумм, что и доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Если произведение n -пучка и k -пучка содержит $n \cdot k$ различных векторов, то $n \cdot k$ концов этих векторов образуют n фигур, полученных параллельным переносом k -точечника, и k фигур, полу-*

Рис. 1

ченных параллельным переносом n -точечника (рис. 1).

Доказательство теоремы

Предположим, что утверждение неверно и существует раскраска плоскости в три цвета, для которой нельзя выбрать цвет, в котором реализуются все расстояния. Тогда для этой раскраски у каждого цвета есть

расстояние, которого не может быть между двумя точками это цвета.

Рассмотрим 7-точечник, предложенный братьями Мозерами, который Райский назвал «зондом» (рис.2). Все нарисованные отрезки имеют длину 1. Простым перебором можно убедиться, что если из

Рис. 2

этих семи точек выбрать любые три, то найдутся две выбранные точки, соединенные отрезком. Из этого сразу следует теорема Мозерова.

У нас для каждого цвета будет свой 7-точечник-зонд, в котором вместо 1 будет отсутствующее в этом цвете расстояние. Выберем произвольную точку плоскости и все векторы пучков будем считать выходящими из этой точки. Пронумеруем цвета произвольно и рассмотрим зонд для цвета 1. В каждом из трех 7-точечников-зондов выберем одну из 7 точек, например A_4 . Тогда для каждого зонда определен свой 7-пучок. По лемме 1 повернем 7-точечник-зонд для цвета 2 на такой угол, чтобы произведение 7-пучков 1 и 2 содержало 7^2 различных векторов (было 49-пучком), а 7-точечник-зонд для цвета 3 повернем на такой угол, чтобы произведение 49-пучка и этого 7-пучка содержало 7^3 различных векторов. По лемме 2, концы этих 7^3 векторов – 7^3 различных точек на плоскости – образуют 49 зондов для цвета 3, они же образуют 49 зондов для цвета 2 и 49 зондов для цвета 1. Для завершения доказательства достаточно заметить, что в

любом зонде для цвета 1 из 7 точек не более двух цвета 1, в любом зонде для цвета 2 из 7 точек не более двух цвета 2, а в любом зонде для цвета 3 из 7 точек не более двух цвета 3.

Тем самым, не более $2 \cdot 7^2$ точек может быть окрашено в каждый цвет, всего не более $6 \cdot 7^2$ точек из 7^3 может быть окрашено.

Доказательство завершено.

Многомерный случай

В статье Райского приведено доказательство теоремы для n -мерного пространства:

Пусть множества $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ образуют покрытие n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$); тогда среди них найдется такое множество A_i , что для всякого $d > 0$ найдется пара точек из этого множества, расстояние между которыми равно d .

Для доказательства теоремы в таком виде не требуется новых идей, кроме конструирования зонда в $\mathbb{R}^n$ и доказательства леммы 1. Чтобы не жертвовать доступностью изложения, рассмотрим случай трехмерного пространства, для больших измерений трудности носят чисто технический характер. (Заметим, что в статье Райского доказательство существенно отредактировано, здесь я постарался воспроизвести первоначальный вариант.)

Построим зонд для $\mathbb{R}^3$. Веретеном Райский назвал 5-точечник из четырех вершин правильного тетраэдра со стороной d и еще одной точки b , симметричной одной из его вершин – вершине a – относительно грани (рис.3). Зондом он назвал 9-точечник, полученный из двух веретен, совмещенных вершинами a и повернутых так, чтобы расстояние между точками b этих веретен тоже было равно d (рис.4).

Рис. 3

Рис. 4

Очевидно, что такой поворот веретен существует.

Доказательство леммы 1 нуждается в незначительной модернизации. Для заданного n -точечника выберем плоскость в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы проекция n -точечника на эту плоскость содержала n различных точек. Выберем исходное положение (поворот) k -точечника относительно этой плоскости, чтобы его проекция содержала k различных точек. На плоскости получились n -пучок и k -пучок, для которых справедлива лемма 1. Рассмотрим поворот исходного k -пучка вокруг прямой, перпендикулярной выбранной плоскости. Проекция на плоскость содержит $n \cdot k$ различных векторов, что и доказывает лемму 1 для $\mathbb{R}^3$. Остальная часть доказательства проводится без изменений.

Оптимизация доказательства теоремы Райского

Предложенное доказательство не использует идей, отсутствующих в первоначальном варианте Райского. Оказывается, можно отказаться от рассмотрения поворотов, делающих точки не совпадающими (лемма 1). Вместо этого можно каждому вектору произведения n -пучка и k -пучка приписать кратность — количество вариантов выбора вектора из n -пучка и вектора из k -пучка, для которых суммы векторов совпадают.

Лемма 2 меняется незначительно. Произведение n -пучка и k -пучка содержит $n \cdot k$ векторов с учетом кратности, и $n \cdot k$ концов этих векторов образуют n фигур, полученных параллельным переносом k -точечника, и k фигур, полученных параллельным переносом n -точечника. Каждая точка произведения пучков встречается в этих фигурах столько раз, какова кратность точки.

При таком подходе многомерный случай отличается от двумерного только конструкцией зонда.

Оценка сверху

До публикации статьи Райского была известна раскраска плоскости в 7 цветов, в которой любые две точки на расстоянии 1 раскрашены в разные цвета. Эта раскраска основана на разбиении плоскости на равные правильные шестиугольники.

С.Б.Стечкин заметил (и с разрешения Райского вставил в статью), что плоскость можно разбить на 6 таких множеств, чтобы на каждом из них реализовались не все расстояния. Элемент конструкции состоит из 4 правильных шестиугольников и 8 правильных треугольников. Путем параллельных переносов этим элементом мостится вся плоскость, как показано на ри-

Рис. 5

сунке 5. Все треугольники являются открытыми, а нижние и правые вершины шестиугольников не принадлежат этим фигурам. Если принять сторону треугольника за 1, то расстояние $d_1 = 2$ не реализуется на множествах $A_1, \dots, A_4$ одинаково

(Продолжение см. на с. 23)

Подведем итог, еще раз сформулировав основные свойства данной конфигурации.

1. Точки K, L, P, Q образуют ортоцентрическую четверку.

2. $KP = QL$; углы четырехугольника $KLPQ$ равны 45° или $180^\circ + 45^\circ$.

3. Точка $F = KL \cap PQ$ – середина отрезка XY .

4. Точка $E = LQ \cap KP$ – проекция C_1 на прямую IH .

5. Точка $D = KQ \cap LP$ лежит на прямой AB .

6. Прямая PQ проходит через C .

В завершение скажем, что на XXII Кубке памяти А.Н.Колмогорова одиннадцатиклассник Владимир Петров из Санкт-Петербурга придумал другое решение исходной задачи, позволяющее обнаружить еще ряд свойств. Приведем план этого решения.

Так же, как и ранее, заметим перпендикулярное подобие четырехугольников $KILC_1$ и QC_1PH , откуда $PQ \perp KL$.

Пусть E' – проекция C_1 на IH (по факту мы знаем, что $E' = E$), тогда E' – центр поворотной гомотетии (с углом поворота 90°), переводящей $\overline{HC_1}$ в $\overline{C_1I}$, а значит, QC_1PH в $KILC_1$. Из поворотной гомотетии $E'P \perp E'L$. Теперь достаточно доказать, что $\angle KE'L = 90^\circ$, т.е. точки K, C_1, E', L лежат на одной окружности.

При инверсии относительно вписанной окружности E' переходит в H . Отметим точку T на продолжении HC за точку C такую, что $CT = CB_1 = CA_1$. Тогда для завершения решения достаточно доказать, что образы K', L', H и C_1 точек K, L, E' и C_1 лежат на окружности с диаметром C_1T .

Упражнения

8. Докажите это.

9. Пусть окружность с центром S и радиусом $SA_1 = SB_1$ пересекает CH в точке G . Докажите, что F – середина GC_1 .

Юбилей теоремы Райского

(Начало см. на с. 10)

отмеченных шестиугольников, а расстояние $d_2 = 1$ не реализуется на множествах A_5 и A_6 одинаково отмеченных треугольников.

Ожидаемые продвижения

Вопрос о том, можно ли аналогичным образом разбить плоскость на 4 или 5 множеств, остается открытым. Но недавнее доказательство [3] теоремы о том, что при раскраске плоскости в четыре цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1, дает основание надеяться, что для четырех цветов утверждение теоремы Райского тоже верно. Достаточно найти дистанционный граф (т.е. граф, вершины которого – точки на плоскости, а ребрами соединены только пары вершин на расстоянии 1) из n вершин, для которого, если

выбрать не менее $n/4$ вершин, какая-то пара выбранных вершин обязательно будет соединена ребром. Предлагаю читателям убедиться, что если в качестве зонда выбрать такой граф, то конструкция Райского доказывает утверждение для четырех цветов, а математикам-программистам – заняться увлекательной задачей поиска подходящего графа. Сейчас известно много графов, доказывающих теорему о четырех цветах, но, возможно, не каждый граф, найденный для этой цели, обладает нужным нам свойством.

Литература

1. Д.Е.Райский. Реализация всех расстояний при разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на $n+1$ часть. – Математические заметки, т.7, №3, 1970, с.319–323.

2. Г.Хадвигер, Г.Дебруннер. Комбинаторная геометрия плоскости. – М., 1965.

3. А.Райгородский, В.Воронов, А.Савватеев, Прорыв в задаче о раскраске плоскости. – «Квант», 2018, №11.