Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Заславский, Об одной ортоцентрической четверке, *Квант*, 2019, номер 7, 20–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:06:46

Об одной ортоцентрической четверке

А. ЗАСЛАВСКИЙ

Эта статья посвящена геометрической конструкции из задачи М2553 «Задачника «Кванта» (эта задача также предлагалась на XXII Кубке памяти А.Н.Колмогорова). В процессе изучения этой конструкции, а также совместной работы над ней вместе с И.Богдановым и П.Кожевниковым обнаружилось довольно много интересных геометрических сюжетов, о которых мы и хотим рассказать читателям. Но начнем с самой исходной задачи.

Задача М2553*. Обозначим через I центр окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC , через A_1 , B_1 и C_1 – точки ее касания со сторонами BC , CA и AB соответственно, через K и L – центры окружностей, вписанных в четырехугольники AB_1IC_1 и BA_1IC_1 соответственно, через H – основание высоты,

Рис. 1

опущенной из точки C (рис.1). Биссектриса угла AHC пересекает прямую A_1C_1 в точке P , а биссектриса угла BHC пересекает прямую B_1C_1 в точке Q . Докажите, что Q – ортоцентр треугольника KLP .

Условие задачи, очевидно, означает, что каждая из точек K , L , P , Q является ортоцентром треугольника, образованного тремя остальными. Такая четверка точек называется *ортоцентрической*.

Ниже для краткости будем называть две фигуры *перпендикулярно подобными*, если они подобны, одинаково ориентированы и углы между соответствующими отрезками фигур равны 90° . Иными словами, называем фигуры перпендикулярно подобными, если одну из другой можно получить поворотной гомотетией (т.е. последовательным выполнением поворота и гомотетии) с углом поворота 90° .

Решение задачи. В случае $AC = BC$ точки P , Q и C_1 совпадают, а треугольник KC_1L – прямоугольный и равнобедренный, следовательно, утверждение задачи верно. Далее не умаляя общности считаем, что $AC < BC$.

Из симметрии четырехугольника BA_1IC_1 относительно BI (рис.2) легко видеть, что

Рис. 2

прямая C_1A_1 (на которой также лежит P) перпендикулярна прямой BI (на которой также лежит L). Аналогично, перпендикулярны прямые C_1QB_1 и AKI . Далее, поскольку C_1K и C_1L – биссектрисы прямых углов AC_1I и BC_1I , имеем $PH \parallel C_1K \perp C_1L \parallel QH$. Поэтому треугольники KIC_1 и QC_1H перпендикулярно подобны. Также перпендикулярно подобны треугольники LIC_1 и C_1PH , а значит, то же верно и для четырехугольников $KILC_1$ и QC_1PH , откуда PQ и KL перпендикулярны как соответствующие диагонали перпендикулярно подобных четырехугольников.

Теперь достаточно показать, что $PK \perp QL$. Пусть $X = HP \cap AI$ и $Y = HQ \cap BI$

Рис. 3

Рис. 4

$\cap BI$ — центры окружностей, вписанных в треугольники AHC , BHC (рис.3). Нетрудно показать, что $XC_1 \perp YC_1$ и $XC_1 = YC_1$. Действительно, если X' , Y' — проекции X , Y на AB , то $XX' = C_1Y'$ и $YY' = C_1X'$ (см. упражнение 1 ниже), а значит, прямоугольные треугольники $XX'C_1$ и $C_1Y'Y$ равны.

Упражнение 1. Докажите, что $XX' = C_1Y'$.

Указание. Из прямоугольного треугольника AHC получаем $XX' = X'H$, а $C_1Y' = BC_1 - BY'$. Далее отрезки $X'H$, BC_1 , BY' можно выразить как отрезки касательных до точки касания с вписанной окружностью в треугольниках AHC , BHC , ABC .

Из перпендикулярности XC_1 и YC_1 получаем, что треугольники PXC_1 и LC_1Y перпендикулярно подобны и даже равны (рис.4). Также перпендикулярно подобны треугольники KXC_1 и QC_1Y , а значит, то же верно и для четырехугольников (трапеций) $PXKC_1$ и LC_1QY , откуда $PK \perp LQ$, что завершает решение.

Итак, исходная задача решена. Однако рассматриваемая конфигурация обладает рядом других красивых свойств.

Укажем некоторые интересные описания оснований высот нашей ортоцентрической четверки K, L, P, Q ; назовем эти точки $D = KQ \cap LP$, $E = LQ \cap KP$, $F = KL \cap PQ$.

Точка F

Из ортоцентрической четверки K, L, P, Q имеем подобие $\triangle KFP \sim \triangle QFL$ (см. рис. 4), иначе говоря, F — центр поворотной гомотетии, переводящей вектор

$\overline{KP}$ в $\overline{QL}$. Эта поворотная гомотетия совмещает диагонали перпендикулярно подобных и равных трапеций $PXKC_1$ и LC_1QY . Значит, на самом деле эта поворотная гомотетия — просто поворот (на 90°), который, в частности, переводит $\overline{XC_1}$ в $\overline{C_1Y}$. Центр такого поворота — середина гипотенузы XY прямоугольного равнобедренного треугольника XC_1Y . Тем самым, F — середина XY .

Кроме того, мы поняли, что треугольники KFP и QFL не только подобны, но и равны, в частности $KP = QL$. Из этого же равенства треугольников вытекает, что треугольник PFL — равнобедренный, но, как мы знаем, он прямоугольный, откуда $\angle KLP = 45^\circ$.

Упражнения

2. Докажите, что для любой ортоцентрической четверки K, L, P, Q условие $KP = QL$ эквивалентно равенству 45° или $180^\circ + 45^\circ$ любого из углов (невыпуклого) четырехугольника $KLPQ$.

3. Докажите, что F лежит на серединном перпендикуляре к отрезку HC_1 .

Указание. Можно использовать равенство $X'H = Y'C_1$ (см. упражнение 1).

Точка E

Пользуясь нашей ортоцентрической четверкой, понимаем, что E — центр поворотной гомотетии, переводящей вектор $\overline{PQ}$ в $\overline{LK}$ (см. рис.2). Эта поворотная гомотетия совмещает диагонали перпендикулярно подобных четырехугольников QC_1PH и $KILC_1$. Значит, это поворотная гомотетия (с углом поворота 90°), которая пере-

Подведем итог, еще раз сформулировав основные свойства данной конфигурации.

1. Точки K, L, P, Q образуют ортоцентрическую четверку.

2. $KP = QL$; углы четырехугольника $KLPQ$ равны 45° или $180^\circ + 45^\circ$.

3. Точка $F = KL \cap PQ$ – середина отрезка XY .

4. Точка $E = LQ \cap KP$ – проекция C_1 на прямую IH .

5. Точка $D = KQ \cap LP$ лежит на прямой AB .

6. Прямая PQ проходит через C .

В завершение скажем, что на XXII Кубке памяти А.Н.Колмогорова одиннадцатиклассник Владимир Петров из Санкт-Петербурга придумал другое решение исходной задачи, позволяющее обнаружить еще ряд свойств. Приведем план этого решения.

Так же, как и ранее, заметим перпендикулярное подобие четырехугольников $KILC_1$ и QC_1PH , откуда $PQ \perp KL$.

Пусть E' – проекция C_1 на IH (по факту мы знаем, что $E' = E$), тогда E' – центр поворотной гомотетии (с углом поворота 90°), переводящей $\overline{HC_1}$ в $\overline{C_1I}$, а значит, QC_1PH в $KILC_1$. Из поворотной гомотетии $E'P \perp E'L$. Теперь достаточно доказать, что $\angle KE'L = 90^\circ$, т.е. точки K, C_1, E', L лежат на одной окружности.

При инверсии относительно вписанной окружности E' переходит в H . Отметим точку T на продолжении HC за точку C такую, что $CT = CB_1 = CA_1$. Тогда для завершения решения достаточно доказать, что образы K', L', H и C_1 точек K, L, E' и C_1 лежат на окружности с диаметром C_1T .

Упражнения

8. Докажите это.

9. Пусть окружность с центром S и радиусом $SA_1 = CB_1$ пересекает CH в точке G . Докажите, что F – середина GC_1 .

Юбилей теоремы Райского

(Начало см. на с. 10)

отмеченных шестиугольников, а расстояние $d_2 = 1$ не реализуется на множествах A_5 и A_6 одинаково отмеченных треугольников.

Ожидаемые продвижения

Вопрос о том, можно ли аналогичным образом разбить плоскость на 4 или 5 множеств, остается открытым. Но недавнее доказательство [3] теоремы о том, что при раскраске плоскости в четыре цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1, дает основание надеяться, что для четырех цветов утверждение теоремы Райского тоже верно. Достаточно найти дистанционный граф (т.е. граф, вершины которого – точки на плоскости, а ребрами соединены только пары вершин на расстоянии 1) из n вершин, для которого, если

выбрать не менее $n/4$ вершин, какая-то пара выбранных вершин обязательно будет соединена ребром. Предлагаю читателям убедиться, что если в качестве зонда выбрать такой граф, то конструкция Райского доказывает утверждение для четырех цветов, а математикам-программистам – заняться увлекательной задачей поиска подходящего графа. Сейчас известно много графов, доказывающих теорему о четырех цветах, но, возможно, не каждый граф, найденный для этой цели, обладает нужным нам свойством.

Литература

1. Д.Е.Райский. Реализация всех расстояний при разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на $n+1$ часть. – Математические заметки, т.7, №3, 1970, с.319–323.

2. Г.Хадвигер, Г.Дебруннер. Комбинаторная геометрия плоскости. – М., 1965.

3. А.Райгородский, В.Воронов, А.Савватеев, Прорыв в задаче о раскраске плоскости. – «Квант», 2018, №11.