Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Стасенко, Кофе с экспонентами, *Квант*, 2019, номер 7, 25–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:33:15

Кофе с экспонентами

А. СТАСЕНКО

ГОВОРЯТ, КОГДА ЗНАМЕНИТОГО ИТАЛЬЯНСКОГО ФИЗИКА ЭНРИКО ФЕРМИ англичане спрашивали, почему он не добавляет сливки в кофе, он отвечал нечто вроде того: как вы не понимаете – ведь при этом кофе больше!

Но дело не только в количестве, но и в качестве – полноте экстракции, которую удастся достичь за ограниченное время заварки t_* . А «экстракция» означает «вытяжка», «извлечение»... Тут само слово указывает, что нужно достать нечто полезное из какой-то потенциальной ямы. Энергетическую глубину этой ямы обозначим Q ($[Q] = \text{Дж}$). Но кто занимается этим извлечением? Конечно, тепловая энергия – энергия хаотического движения микрочастиц, характерное значение которой равно kT .

И вот тут вспоминается одна из величайших идей термодинамики: концентрация частиц, извлеченных из потенциальной ямы их тепловым движением, зависит от отношения упомянутых характерных энергий Q и kT . И зависит не как-нибудь, а экспоненциально:

$$f(T) \sim e^{-\frac{Q}{kT}} \equiv \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right). \quad (1)$$

Чтобы ярче осветить роль экспоненты, вместо e^x так и будем писать $\exp x$.

Эта идея связана с именами замечательных ученых – Гиббса, Больцмана, Аррениуса... (в частности, $k = 1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К называется постоянной Больцмана). Да и каждый школьник знает, что в изотермической атмосфере распределение концентрации молекул по высоте y оценивается формулой (1), где $Q = m_0 g y$ (m_0 – масса молекулы, g – ускорение свободного падения). Ученые различных разделов науки называют величину Q энергией активации химической ре-

акции, теплотой испарения или сублимации... Качественно вид этой зависимости показан на рисунке 1.

Рис. 1. С уменьшением температуры от начального значения T_0 до заданного T_* резко (экспоненциально) падает интенсивность экстракции; T_∞ – температура окружающей среды

Строго говоря, выражение (1) может быть дополнено еще предэкспоненциальным множителем – степенной зависимостью от температуры, которая гораздо «слабее» экспоненциальной, но это дополнение не существенно влияет на качественное описание рассматриваемого процесса.

Ясно, что значение экспоненты (1) тем больше, чем выше температура. Но ведь чашка с завариваемым молотым кофе постепенно остывает. Этот процесс относится к классу релаксационных, его интенсивность характеризуется так называемым временем релаксации τ . Опишем этот процесс подробнее.

Если масса остывающего тела m (кг), удельная теплоемкость c (Дж/(кг·К)), то изменение его температуры со временем за счет теплоотвода записывают в виде

$$d(m c T) = \alpha (T_\infty - T) dt,$$

где α – коэффициент теплообмена ($[\alpha] = \text{Дж}/\text{с} \cdot \text{К}$), T_∞ – температура окружающей среды. Предполагая, что m , c , α и T_∞ постоянны, можно переписать последнее уравнение так:

$$-\frac{d(T_\infty - T)}{dt} = \frac{T_\infty - T}{\tau},$$

где $\tau = \frac{mc}{\alpha}$ и есть время релаксации. Решение этого уравнения опять-таки содержит

экспоненту:

$$1 - \frac{T_0 - T(t)}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (2)$$

Качественный вид зависимости температуры от времени дан на рисунке 2.

Рис. 2. Со временем экспоненциально уменьшается температура; T_e — значение температуры, достигаемое по истечении характерного времени $t = \tau$ (времени релаксации)

Что же получается: температура T , входящая в показатель экспоненты (1), сама экспоненциально зависит от времени! Подставив (2) в (1), найдем выражение для скорости экстракции кофе, пропорциональное функции

$$\exp\left[-\frac{Q}{kT_0} \frac{1+a}{1+a \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right]. \quad (3)$$

где $a = \frac{T_0 - T_\infty}{T_\infty} = \frac{\Delta T_0}{T_\infty}$ — начальный перегрев, отнесенный к температуре в окружающем пространстве.

Более того, если заваривать кофе «при нормальных условиях» (как говорят настоящие физики) — температуре 0°C и давлении в одну атмосферу, то отношение $a = \frac{\Delta T_0}{T_\infty} = \frac{100\text{ K}}{273,15\text{ K}} \approx \frac{1}{e}$ и выражение (3) можно назвать трижды экспоненциальным:

$$\exp\left[-\frac{Q}{kT_0} \frac{\exp 1 + 1}{\exp 1 + \exp(-t/\tau)}\right], \quad (4)$$

а число $e = \exp 1$ — Фундаментальной Кофейной Постоянной. До чего же вездесущее основание натуральных логарифмов!

На рисунке 3 представлена качественная зависимость (4) скорости экстракции кофе от времени — следствие подстановки данных рисунка 2 в рисунок 1. Результат экстракции

Рис. 3. Зависимость от времени скорости экстракции, учитывающая и ее падение с уменьшающейся температурой (см. рис. 1), и падение самой температуры со временем (см. рис. 2); α — коэффициент теплообмена с окружающей средой. Интеграл по времени от $t = 0$ до заданного $t = t_*$ — количество экстрагированного вещества

— это интеграл за все отведенное для заварки время t_* , т.е. закрашенная площадь под кривой. Конечно, этот результат наиболее впечатляет, если $\alpha = 0$ (нет теплоотдачи в окружающее пространство). Не случайно джеззу с кофе ставят на раскаленный песок и даже некоторое время кипятят содержимое («варят»).

Вероятно, вдумчивый читатель уже понял, что не следует оставлять ложку в заварной чашке, класть на горку молотого кофе лепешку меда или сыпать сахар, которые «оттягивают» на себя часть теплоты кипятка, увеличивая теплоотдачу ($\alpha_2 > \alpha_1$), и что сливки нужно добавлять (если, конечно, нужно) при $t \geq t_*$, а не раньше. Может быть, этого не знала одна из героинь А.П.Чехова, которая «...кофий сегодня пила, и без всякого удовольствия». Но Вы-то всё поняли?

Приятного аппетита!