Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Кохась, Составные лесенки, *Квант*, 2019, номер 8, 29–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:08:42

ности температур пластинки и окружающей среды. Поскольку пластинка тонкая, потоками тепла от ее боковых частей можно пренебречь. Тогда условие теплового равновесия дает

$$Q = k(t_1 - t_0) + k(t_2 - t_0).$$

Здесь коэффициент пропорциональности k зависит от геометрии пластинки и теплопроводности воздуха, но не зависит от температур пластинки и окружающего воздуха, а поскольку геометрия освещенной и теневой сторон одинакова, то этот коэффициент одинаков для обеих сторон пластинки.

С другой стороны, нагрев неосвещенной стороны пластинки связан с теплопроводностью вещества самой пластинки и то тепло, которое отдает ее неосвещенная часть, равно количеству теплоты, переданному от освещенной части неосвещенной. Применяя закон Фурье к теплопроводности самой пластинки, получаем

$$k(t_2 - t_0) = \frac{\lambda}{d}(t_1 - t_2),$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала пластинки, d – ее толщина.

Для пластинки удвоенной толщины полученные нами соотношения будут иметь вид

$$Q = k(t_1^* - t_0) + k(t_2^* - t_0),$$

$$k(t_2^* - t_0) = \frac{\lambda}{2d}(t_1^* - t_2^*),$$

где t_1^* и t_2^* – температуры освещенной и теневой сторон этой пластинки.

Из этих четырех соотношений, избавившись от Q и k , получим

$$t_1^* + t_2^* = t_1 + t_2,$$

$$-t_1^*(t_2 - t_0) + t_2^*(2t_1 - t_2 - t_0) = 2t_0(t_1 - t_2).$$

Решение этой системы уравнений дает

$$t_1^* = \frac{(t_1 + t_2)(2t_1 - t_0 - t_2) - 2t_0(t_1 - t_2)}{2(t_1 - t_0)} = 52^\circ\text{C},$$

$$t_2^* = \frac{(t_1 + t_2)(t_2 - t_0) + 2t_0(t_1 - t_2)}{2(t_1 - t_0)} = 28^\circ\text{C}.$$

Составные лесенки

К. КОХАСЬ

В этой небольшой статье мы расскажем об одном красивом сюжете – соответствии между разбиениями некоторых клетчатых фигур на доминошки (прямоугольники 1×2) и ... как ни удивительно, цепными дробями. Также мы применим это соответствие для решения задачи М2561 «Задача Кванта».

Назовем k -змейкой на клетчатой плоскости k -звенную ориентированную ломаную, звенья которой идут по сторонам клеток,

8-змейка и 8-лесенка

Рис. 1

имеют единичную длину и направлены попеременно то вправо, то вверх (первое звено может быть направлено вверх, а может и вправо). Отметим все клетки, у которых

хотя бы одна вершина принадлежит змейке и не является концевой точкой. Такую фигуру будем называть k -лесенкой. Например, на рисунке 1 красным цветом изображена 8-змейка, черным – ее 8-лесенка.

Не сразу бросается в глаза, что k -лесенка всегда содержит четное число клеток. Действительно, приглядевшись к картинке, мы видим, что лесенка в основном состоит из горизонтальных рядов по четыре клетки и лишь где-то по краям встречается два ряда из трех клеток (а у лесенок с четным k есть еще ряд из двух клеток). Так что общее число клеток в лесенке всегда четное.

Загадка. Сколькими способами k -лесенку можно разрезать на доминошки?

Чтобы не лишать читателя возможности решить эту загадку, ответ мы приведем немного ниже.

Будем говорить, что k -змейка $A_0 \dots A_k$ и l -змейка $B_0 \dots B_l$ нарисованы последовательно, если конец первой змейки совпадает с началом второй и направление последнего звена первой змейки совпадает с на-

правлением первого звена второй змейки (рис.2), т.е. $A_k = B_0$ и $\overline{A_{k-1}A_k} = \overline{B_0B_1}$.

Если несколько змеек нарисованы последовательно, то соответствующие лесенки не имеют общих клеток. Мы объединим их в одну клетчатую фигуру, которую будем называть *составной лесенкой* (рис.3).

Пусть дан набор натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Обозначим через S составную лесенку, являющуюся объединением a_1 -лесенки, a_2 -лесенки, ..., a_n -лесенки. Обозначим через D количество разбиений фигуры S на доминошки, т.е. на прямоугольники 1×2 . Если говорить более точно, вместо S стоило бы использовать обозначение $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$, а вместо D – обозначение $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Вопрос. Чему равно D ?

Прежде чем продолжать, отметим, что этот с виду «совершенно ясный» вопрос сформулирован совершенно непонятно. Действительно, а что мы хотим услышать в ответ на этот вопрос? Число D полностью определяется n параметрами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Вряд ли в качестве ответа мы хотели бы получить текст программы, которая позволяет вычислять D , скорее, нам хотелось бы получить «простую формулу», которая задает зависимость $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Но в каком смысле простую? Функция $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ на самом деле является многочленом степени n от n переменных! Много ли читателю известно «интересных» многочленов от n переменных с «несложной формулой»?

После этих замечаний вопрос уже не покажется очень простым. Недавно Ильке

Чанакчи и Ральф Шиффлер опубликовали (I.Canakci, R.Schiffler. Cluster algebras and continued fractions// Compositio Mathematica, v.154, is. 3, March 2018, p. 565) замечательную теорему, которая дает на него в некотором смысле ответ – совершенно непонятный, зато удивительно красивый.

Но сначала – отгадка.

Отгадка. k -лесенку можно разрезать на доминошки ровно k способами.

Действительно, пусть A – верхняя правая клетка лесенки. Если положить доминошку на клетку A так, чтобы она пересекала змейку, то оставшуюся фигуру можно разрезать на доминошки лишь одним

способом (рис.4).

Если же вырезать доминошку с клеткой A так, чтобы она не пересекала змейку, у нас останется $(k-1)$ -лесенка (рис.5).

Значит, общее рассуждение нужно оформлять по индукции. База индукции очевидна для лесенки, а индукционный переход мы фактически только что проверили: первый вариант расположения доминошки на клетке A дает один способ, а второй вариант приводит к предположению индукции и дает еще $k-1$ способов.

Отвлечемся немного. Напомним, что цепной (или непрерывной) дробью называется выражение вида

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}. \quad (1)$$

Такие выражения не слишком удобны при выполнении арифметических операций с рациональными числами, разве что рассматривать их как задачи с вопросом «упростить выражение» для школьного учеб-

ника. Например,

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{113} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}. \quad (2)$$

Предлагаем читателю проверить, рассматривая этот пример, что ни на каком шаге «упрощения» цепной дроби не появляются сократимые дроби.

Запишем цепную дробь, заданную формулой (1), в виде (автоматически несократимой) рациональной дроби P/Q :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(a_1, a_2, \dots, a_n)}{Q(a_1, a_2, \dots, a_n)} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}. \quad (3)$$

Теорема. *Количество разбиений на домино составной лесенки $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ равно числителю цепной дроби (3), т.е. $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_1, a_2, \dots, a_n)$.*

Знаменатель цепной дроби тоже имеет простое истолкование с помощью доминошек. Из арифметических соображений ясно, что знаменатель цепной дроби (3) равен числителю цепной дроби

$$a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$$

(посмотрите, как в примере (2) появился знаменатель 113). Кстати, то, что знаменатель цепной дроби не зависит от a_1 , очевидно. Значит, если верить в утверждение теоремы,

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_2, \dots, a_n) = D(a_2, \dots, a_n). \quad (4)$$

Доказательство теоремы состоит в индукционном рассуждении, столь же простым, как и в загадке выше. В этот раз индукция будет по n , т.е. по числу лесенок, из которых построена составная лесенка.

База индукции $n = 1$ — это в точности утверждение загадки.

Докажем индукционный переход. Если

мы уже установили справедливость утверждения теоремы для любой составной лесенки, построенной из $n - 1$ частей, то формула (4) верна по индукционному предположению. Рассмотрим место стыка a_1 -лесенки и составной лесенки $S(a_2, \dots, a_n)$, верхнюю правую клетку a_1 -лесенки обозначим через A (рис.6).

Рис. 6

Если доминошка, содержащая клетку A , не пересекает стык, дальнейшее разбиение a_1 -лесенки и составной лесенки $S(a_2, \dots, a_n)$ на домино можно строить независимо. И различные разбиения на домино всей фигуры получаются, если любое из a_1 разбиений a_1 -лесенки дополнить любым из $P(a_2, \dots, a_n)$ разбиений составной лесенки $S(a_2, \dots, a_n)$. Итого, имеется $a_1 P(a_2, \dots, a_n)$ вариантов разбиения на домино.

Если же доминошка, содержащая клетку A , пересекает стык, то в пределах a_1 -лесенки остается нечетное число незанятых клеток, поэтому рядом с рассматриваемой доминошкой должна находиться еще одна доминошка, пересекающая стык! Таким образом, и в a_1 -лесенке, и в соседней a_2 -лесенке обе клетки, прилегающие к стыку, уже заняты. Но тогда, как мы видели в загадке, незанятая часть a_1 -лесенки и незанятая часть a_2 -лесенки заполняются доминошками однозначно! Различные варианты могут появиться только при замощении составной лесенки $S(a_3, \dots, a_n)$; по предположению индукции их число равно $P(a_3, \dots, a_n)$ или, что то же самое, $Q(a_2, \dots, a_n)$ (рис.7).

Итак, мы получили формулу

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 P(a_2, \dots, a_n) + Q(a_2, \dots, a_n).$$

(Продолжение см. на с. 34)

Что же касается цепных дробей, для них это рекуррентное соотношение очевидно:

$$\begin{aligned} \frac{P(a_1, a_2, \dots, a_n)}{Q(a_1, a_2, \dots, a_n)} &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} = \\ &= a_1 + \frac{1}{\frac{P(a_2, \dots, a_n)}{Q(a_2, \dots, a_n)}} = a_1 + \frac{Q(a_2, \dots, a_n)}{P(a_2, \dots, a_n)} = \\ &= \frac{a_1 P(a_2, \dots, a_n) + Q(a_2, \dots, a_n)}{P(a_2, \dots, a_n)}. \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 P(a_2, \dots, a_n) + Q(a_2, \dots, a_n). \quad (5)$$

Таким образом, величины $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ совпадают, поскольку задаются одинаковыми рекуррентными соотношениями. Теорема доказана.

Итак, мы нашли ответ на вопрос, чему равно D , настолько же изящный, насколько далекий от явного вида. Это скорее программа для вычисления $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$, а не явная формула.

Теперь мы получили из этой теоремы следствие, которое хорошо известно тем, кто работал с цепными дробями, но совершенно неожиданно для неофитов.

Следствие. Числители цепных дробей

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} \text{ и } a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_1}}} \text{ сов-}$$

падают.

В завершение, как обещано, приведем решение задачи из «Задачника «Кванта».

Задача М2561*. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с нача-

лом в точке $(0;0)$ и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идет по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует червяк – фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $N > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших N и взаимно простых с N .

Заметим, что червяк из условия задачи – это в точности наша составная лесенка $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$, в которой $n \geq 3$ и $a_1 = a_n = 1$. Достаточно доказать **утверждение**: количество составных лесенок $S(1, a_2, \dots, 1)$, для которых $D = N$, равно количеству

несократимых дробей вида $\frac{N}{q}$, где $q > N/2$, т.е. количеству $\psi(N)$ натуральных чисел, больших $N/2$ и взаимно простых с N . Количество червяков из условия задачи на самом деле вдвое больше, так как соответствующая ломаная может начинаться из точки $(0;0)$ звеном вверх или вправо. А количество $\phi(N)$ натуральных чисел, меньших N и взаимно простых с N , вдвое больше, чем $\psi(N)$, поскольку числа, взаимно простые с N , разбиваются на пары вида $x \leftrightarrow N - x$.

Чтобы доказать утверждение, заметим следующее. Для каждого набора натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ числитель $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и знаменатель $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ цепной дроби (3) взаимно просты. Мы отмечали этот эффект в вычислении (2), а доказать его можно индукцией по n , пользуясь равенствами (4) и (5). Кроме того, при $n \geq 3$ и $a_1 = a_n = 1$ значение цепной дроби (3) находится между 1 и 2, т.е. для интересующих нас дробей (тех, для которых $D = N$) значение (3)

равно несократимой дроби вида $\frac{N}{q}$, где $q > N/2$. Наконец, каждая такая дробь раскладывается единственным образом в цепную дробь (3), для которой $n \geq 3$ и $a_1 = a_n = 1$.