Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Дроздов, Треугольник и классические неравенства,
Квант, 2019, номер 8, 40–41

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:42:44

Треугольник и классические неравенства

В. ДРОЗДОВ

Вычисление сторон треугольника

Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух его других сторон, называется вневписанной. Пусть в треугольнике ABC длины сторон соответственно равны: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Чтобы избежать индексов, обозначим через x , y , z радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон a , b , c соответственно (см. рисунок).

Поскольку в школьном курсе математики повышенного уровня формулы для этих радиусов выводятся, то приведем сразу готовые формулы:

$$\begin{cases} x = \frac{S}{p-a}, \\ y = \frac{S}{p-b}, \\ z = \frac{S}{p-c}, \end{cases} \quad (1)$$

где S – площадь треугольника ABC , а $p = \frac{a+b+c}{2}$ – его полупериметр. Очевидно,

но, что

$$x = y = z \Leftrightarrow a = b = c.$$

По формулам (1) имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{c}{S}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{b}{S}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{S}. \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда находим отношения сторон a , b , c треугольника:

$$a : b : c = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right),$$

т.е.

$$\begin{cases} a = \left(\frac{xz + xy}{xz + yz} \right) \cdot c, \\ b = \left(\frac{xy + yz}{xz + yz} \right) \cdot c. \end{cases} \quad (3)$$

Из формул (1) выразим сумму попарных произведений (по пути используем формулу Герона):

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &= S^2 \left(\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-a)(p-c)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} \right) = \\ &= \frac{S^2(p-c+p-b+p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \frac{S^2 p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p^2. \end{aligned}$$

Значит, периметр треугольника равен

$$a + b + c = 2p = 2\sqrt{xy + xz + yz}. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) можно выразить c через x , y и z (проделайте это!) и получить аналогичные выражения для a и b :

$$\begin{cases} a = \frac{x(y+z)}{\sqrt{xy+xz+yz}}, \\ b = \frac{y(x+z)}{\sqrt{xy+xz+yz}}, \\ c = \frac{z(x+y)}{\sqrt{xy+xz+yz}}. \end{cases} \quad (5)$$

Эти формулы свидетельствуют о том, что

треугольник однозначно определяется заданием трех радиусов вневписанных окружностей и что любые три положительных числа могут быть равны этим радиусам. Действительно, очевидно, что из формул (5) вытекают неравенства $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$ при любых x, y, z .

Нахождение иных элементов треугольника

Продолжим выкладки. Из формул (1), (4), (5) выводим

$$S = \frac{xyz}{\sqrt{xy + xz + yz}}. \quad (6)$$

Из формул (4), (6) выражаем через x, y, z радиус r вписанной окружности:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{xyz}{xy + xz + yz}. \quad (7)$$

Из формул (5) и (6) находим радиус R описанной окружности и длины высот треугольника h_a, h_b, h_c :

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4(xy + xz + yz)},$$

$$h_a = \frac{2yz}{y+z}, \quad h_b = \frac{2xz}{x+z}, \quad h_c = \frac{2xy}{x+y}.$$

Согласно известным формулам

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} = \frac{r}{p-c},$$

применяя (7), (1) и (4), получим

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} = \frac{x}{\sqrt{xy + xz + yz}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{y}{\sqrt{xy + xz + yz}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} = \frac{z}{\sqrt{xy + xz + yz}}.$$

Отсюда не составит труда вывести

$$\sin \frac{\angle A}{2} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}},$$

$$\sin \frac{\angle B}{2} = \frac{y}{\sqrt{(y+x)(y+z)}},$$

$$\sin \frac{\angle C}{2} = \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}.$$

Быстрое доказательство геометрических неравенств

Найденные в предыдущем разделе формулы позволяют очень просто доказать ряд неравенств, относящихся к геометрии треугольника (отметим, что во всех неравенствах равенство достигается только для равносностороннего треугольника). Так, неравенства

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} + \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} \geq \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\angle A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\angle C}{2} \geq 1,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \leq x+y+z$$

сразу и без каких-либо искусственных действий сводятся к неравенству

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0.$$

Неравенства

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} \geq 3, \quad \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{3R}{2}$$

сводятся к неравенствам

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2.$$

Неравенства

$$\sin \frac{\angle A}{2} \sin \frac{\angle B}{2} \sin \frac{\angle C}{2} \leq 1, \quad R \geq 2r$$

могут быть сведены к неравенствам

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad \frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz}, \quad \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}.$$

А неравенства

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}, \quad S \geq 3\sqrt{3} \cdot r^2, \quad 2\sqrt{3} \cdot r \leq \frac{a+b+c}{3},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

трансформируются в неравенство

$$\frac{xy + xz + yz}{3} \geq \sqrt[3]{xy \cdot xz \cdot yz}$$

(неравенство о средних для величин xy, yz, zx).

Читатель может самостоятельно провести описанные выше вычисления и убедиться в «высокой эффективности» переменных x, y, z в этих задачах.