Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Григорьев, Период ангармонических колебаний, *Квант*,
2019, номер 8, 42–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:36:14

Период ангармонических колебаний

Ф. ГРИГОРЬЕВ

ГАРМОНИЧЕСКИМИ НАЗЫВАЮТ КОЛЕБАНИЯ, при которых ускорение тела после смещения из положения равновесия направлено к положению равновесия и прямо пропорционально величине смещения. Период гармонических колебаний не зависит от амплитуды и максимальной скорости колебаний.

В реальных колебательных системах закон прямой пропорциональности ускорения и смещения часто нарушается с ростом амплитуды колебаний. Например, колебания математического маятника становятся *ангармоническими*, если амплитуда колебаний сравнима с длиной нити или если угол отклонения нити от вертикали перестает быть малым по сравнению с единицей (величина угла выражается в радианах).

Если слагаемые в возвращающей силе, пропорциональные более высокой степени смещения, чем первая, много меньше линейного слагаемого, то ангармонизм колебаний может быть рассмотрен как малое возмущение, дающее поправку в зависимость смещения от времени и в период колебаний. Однако в некоторых случаях ангармонизм не может быть учтен таким образом. Рассмотрим пример такой системы.

Пусть гладкий шарик массой m лежит на горизонтальной поверхности и прикреплен к нижнему концу подвешенной недеформированной легкой резинки жесткостью k и длиной L (см. рисунок). Если отклонить шарик от положения равновесия на

малую величину $x \ll L$ и отпустить, то под действием силы упругости резинки F , горизонтальная составляющая которой направлена против смещения, возникнут колебания:

$$ma_x = -F \cos \alpha = -\frac{k\Delta L}{L}x, \quad (1)$$

где $\Delta L = L(x) - L$ — деформация резинки. На первый взгляд, в уравнении (1) ускорение прямо пропорционально смещению, как и в гармоническом законе, однако это не так. Дело в том, что деформация тоже зависит от смещения. Чтобы сделать эту зависимость более удобной для рассмотрения, преобразуем ΔL с учетом условия малости колебаний $x \ll L$:

$$\begin{aligned} \Delta L = L(x) - L &= \frac{L^2(x) - L^2}{L(x) + L} \approx \\ &\approx \frac{(L^2 + x^2) - L^2}{L(x) + L} \approx \frac{x^2}{2L}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в уравнение (1), получим

$$ma_x = -\gamma x^3, \quad (2)$$

где $\gamma = k/(2L^2)$. Мы видим, что ускорение пропорционально кубу смещения. Такие колебания не будут гармоническими, так как зависимость вида $x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$ не является решением уравнения (2) в произвольный момент времени, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

Интересно, что период таких колебаний, в отличие от периода гармонических колебаний, зависит от амплитуды колебаний A . Покажем это, исходя из соображений размерности. Период T может зависеть только от γ , m и A . Поскольку γ/m имеет размерность $m^{-2} \cdot c^{-2}$, есть только одна комбинация этих величин, имеющая размерность времени:

$$T \sim \left(\frac{1}{A}\right) \cdot \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{1/2},$$

откуда следует, что период колебаний описанной системы обратно пропорционален амплитуде.

Точно найти период можно, опираясь на закон сохранения механической энергии E при колебаниях с потенциальной энергией

$U(x)$:

$$\frac{mv_x^2}{2} + U(x) = E.$$

Выразим отсюда скорость, рассматривая движение на участке, на котором проекция скорости положительна:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2(E - U(x))}{m} \right)^{1/2}.$$

Разделим переменные:

$$dt = \frac{dx}{(2(E - U(x)))/m}^{1/2}.$$

Шарик проходит расстояние, равное амплитуде колебаний, за четверть периода. Возьмем интеграл от обеих частей последнего равенства:

$$\frac{T}{4} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}/m}.$$

Чтобы вычислить правую часть, необходимо знать зависимость потенциальной энергии упругой резинки от смещения. Учитывая связь проекции силы и потенциальной энергии: $F_x = -dU/dx$, а также равенство нулю потенциальной энергии в положении равновесия, найдем

$$U(x) = \frac{\gamma x^4}{4}.$$

Поскольку в крайних положениях скорость равна нулю, механическая энергия колебаний выражается через амплитуду следующим образом: $E = \gamma A^4/4$. Используя замену переменных $x = zA$, для периода колебаний получим

$$T = \left(\frac{4}{A} \right) \cdot \left(\frac{2m}{\gamma} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}.$$

Входящий в это выражение интеграл не зависит от характеристик колебательной системы. Он выражается через специальные функции (бета-функции) и приблизительно равен 1,3. Впрочем, его можно найти численно на компьютере. Учитывая, что $\gamma = k/(2L^2)$, период можно выразить через жесткость и длину резинки:

$$T \approx \left(\frac{10L}{A} \right) \cdot \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2}.$$

Интересно сравнить период ангармонических колебаний с периодом гармонических колебаний, возникающих, если в начальном состоянии резинка растянута на ΔL , а амплитуда колебаний $A \ll \Delta L$. Проекция второго закона Ньютона на направление смещения в этом случае имеет вид

$$ma_x = -\frac{k\Delta L}{L}x$$

и период колебаний равен

$$T = 2\pi \left(\frac{mL}{k\Delta L} \right)^{1/2}.$$

Теперь найдем отношение периодов ангармонических и гармонических колебаний:

$$\frac{T_{\text{анг}}}{T_{\text{г}}} = \left(\frac{5}{\pi} \right) \cdot \left(\frac{L\Delta L}{A^2} \right)^{1/2}.$$

Это отношение не зависит от жесткости резинки и массы шарика. Заметим также, что при условии примерного равенства амплитуд гармонических и ангармонических колебаний период последних будет существенно больше.

Зависимость периода колебания от амплитуды – типичная особенность ангармонических колебаний. Например, если возвращающая сила пропорциональна пятой степени смещения:

$$ma_x = -\beta x^5,$$

то период колебаний обратно пропорционален квадрату амплитуды:

$$T = \left(\frac{4}{A^2} \right) \cdot \left(\frac{3m}{\beta} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^6}},$$

где интеграл приблизительно равен 1,2.