Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Тайманов, Картография и кривизна, *Квант*, 2019, номер 9, 9–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:21:51

Европе при использовании в качестве накопителей литий-ионных батарей и эффективности цикла заряда/разряда в 85% для производства этих батарей требуется энергия, в 15 раз (!) превышающая нынешнее годовое потребление энергии в Европе.

В последнее время очень широко обсуждается переход к так называемой водородной энергетике. Само название намекает на новый способ *производства* энергии. Но фактически это один из вариантов *накопителя* (аккумулятора) энергии, в котором сначала получают водород из воды, затрачивая энергию, затем хранят ее (в баллонах или топливных ячейках) и, наконец, высвобождают по мере надобности (например, в автомобиле).

Применительно к мировой энергетике с большой долей ветро- и солнечной генерации этот способ оказывается не слишком эффективным. Действительно, КПД получения водорода из воды составляет 65–70%, а КПД получения электричества из водорода ~ 50%. Таким образом, суммарный КПД составляет всего 30–35%,

т.е. большая часть энергии выбрасывается на ветер. В то же время использование водорода как *вида топлива* (в транспорте) в принципе может стать реальной заменой нефти, запасы которой весьма ограничены.

* * *

В итоге развитию возобновляемых источников энергии сейчас придан большой импульс. Уровень затрат на ветро- и солнечную генерацию превысил один триллион долларов (!). По мере роста доли ВИЭ появились проблемы и факторы, сдерживающие ее развитие: дублирование мощностей, управляемость, сети и потери в сетях, ресурс оборудования, медленное развитие накопителей, КПД накопителей, низкий коэффициент использования мощности. Ближайшие 10–20 лет покажут, насколько реальны планы и амбиции, как удастся решить проблемы и каким окажется на деле уровень ВИЭ в мире.

При подготовке статьи использовались данные А.Анпилогова, С.Безгина и Д.Станкевича.

Картография и кривизна

И. ТАЙМАНОВ

ЗАДАЧА О ПОСТРОЕНИИ НАИБОЛЕЕ точной или удобной для использования карты земной поверхности известна с давних времен. Отображение земной поверхности (или части ее) на плоскость называется картографической проекцией (картой) и сопоставляет точке поверхности точку на плоскости.

Понятия долготы и широты ввел в начале II века нашей эры древнегреческий математик и географ Марин Тирский для

того, чтобы построить с их помощью карту, которая сохраняет масштаб длин вдоль экватора и всех меридианов. Эта прямоугольная карта строится очень просто: обозначим через λ долготу, а через φ широту; если точка с координатами (λ_0, φ_0) отображается в точку $(0, 0)$, то точка с координатами (λ, φ) отображается в точку плоскости с координатами $x = \lambda - \lambda_0$, $y = \varphi - \varphi_0$. Такая проекция (рис. 1) называется равнопромежуточной и до сих пор используется, например, в геоинформационных системах. При ней не сохраняются

Рис. 1. Равнопромежуточная проекция

ни масштабы длин, ни углы, но сохраняются масштабы вдоль параллелей и меридианов, причем масштабы вдоль различных параллелей (линий постоянной широты φ) отличаются друг от друга, а масштабы вдоль всех меридианов (линий, вдоль которых долгота λ постоянна) и экватора (параллели с $y = 0$) совпадают.

Заметим, что у Марина Тирского «экватор» $y = 0$ проходил через остров Родос в Эгейском море и за его длину была принята величина $R_e \approx 33300$ км, т.е. длина параллели, проходящей через Родос и лежащей на уровне 36° северной широты. Если в результате географических открытий экватор был зафиксирован однозначно, то до конца XIX века нулевые меридианы, от которых отсчитываются долготы, в разных странах были различными. Марин Тирский, а за ним Клавдий Птолемей и многие географы вплоть до XIX века использовали меридиан Ферро, проходящий через одноименный канарский остров, считавшийся самой западной точкой Старого света. Парижский меридиан проходил через центр Парижа, и до сих пор его метки можно найти на улицах. В России отсчет шел от Пулковского меридиана, проходившего через Пулковскую обсерваторию под Санкт-Петербургом. В Испании же было несколько различных меридианов, и возникшая коллизия лежит в основе романа А. Переса-Реверте «Карта небесной сферы, или Тайный меридиан». Герои романа обладают картой, на которой указано место затонувшего корабля, но не знают, по отношению к какому

нулевому меридиану на карте указаны долготы. Чтобы избежать подобных ситуаций, в конце XIX века был принят единый нулевой меридиан – Гринвичский, проходящий через Гринвичскую обсерваторию под Лондоном.

В середине XVI века Меркатор построил карту, которая сохраняет углы. Она до сих пор широко применяется. На

ней горизонтальная координата x тоже пропорциональна долготе $\varphi - \varphi_0$. Равнопромежуточная карта Марина Тирского и карта Меркатора относятся к цилиндрическим, в которых параллели и меридианы переходят в прямые линии и всюду перпендикулярны друг другу.

Известные из школьных учебников карты устроены сложнее и относятся к псевдоцилиндрическим. Они учитывают то, что в более точном приближении поверхность Земли является эллипсоидом, и хотя на них всегда указан масштаб, но он только указывает, насколько масштабируется размер эллипсоида перед применением к нему той или иной картографической проекции. В любом случае измерять длины линий на земной поверхности с помощью карт можно только приближенно, и при этом хорошей точности можно достичь только внутри малых областей, как показывают приведенные нами примеры.

Строгий математический критерий того, что участок поверхности может быть отображен на плоскость так, чтобы сохранялись длины всех линий и площади всех областей, принадлежит Гауссу. Он состоит в том, что на поверхности гауссова кривизна K как функция от точки поверхности должна всюду обращаться в ноль. Это вытекает из более общего результата Гаусса о кривизне, который он назвал «Theorema Egregium», что переводится с латыни как «замечательная теорема».

Заметим, что интерес Гаусса к этой задаче был вызван вопросом о построении достаточно точных карт, и он предложил

новую проекцию, полученную модификацией из проекции Меркатора с учетом того, что форма Земли приближается эллипсоидом. Эта проекция и отвечающие ей координаты Гаусса–Крюгера используются военными топографами.

Гауссова кривизна вычисляется достаточно сложно, хотя ее можно сразу найти для поверхностей, которые получаются из листа бумаги свертыванием в цилиндр или конус или любой другой деформацией, при которой лист не рвется: поскольку они разворачиваются в плоский лист, их гауссова кривизна всюду равна нулю.

Мы приведем для сферы радиуса R другое объяснение, почему любой сколь угодно малый ее участок не картографируется точно на плоскую область.

На плоскости кратчайшая линия между любой парой различных точек является отрезком прямой, а точки, которые отстоят от заданной точки X на расстояние r , образуют окружность радиуса r с центром в точке X . Посмотрим, как устроены кратчайшие линии на сфере. Можно попытаться установить это экспериментально, закрепив один конец нитки в полюсе глобуса и, натягивая нитку вдоль его поверхности, рассмотреть всевозможные положения ее концов. Если длина нитки достаточно мала, то это будут в точности параллели, и при этом нитка будет проходить по меридиану. Математически это означает, что точки, отстоящие от полюса на расстояние $r < \pi R$, где R – радиус глобуса, образуют параллели – аналоги окружностей радиуса r , а кратчайшие линии – это участки меридианов, т.е. линий, которые получаются при пересечении сферического глобуса с плоскостью, проходящей через его центр и полюс. Мы можем вращать сферу вокруг ее центра так, что расстояния сохраняются, а любая заданная точка сферы перейдет в любую другую заданную точку. Поэтому с сохранением расстояний можно перевести любую точку в полюс и применить к ней предыдущее рассуждение.

Линии – большие окружности, которые получаются при пересечении сферы с плоскостью, проходящей через ее центр, – называются *геодезическими* (на сфере).

Это общее понятие, обобщающее на произвольные метрические пространства понятие прямых с двумя важными отличиями, которые проявляются для некоторых пространств и, в частности, для сферы. Во-первых, участки геодезических линий имеют кратчайшую длину среди всех кривых, соединяющих их концы, но только в случае, когда концы достаточно близки друг к другу. Например, рассмотрим большую окружность на сфере: если угловая длина дуги отрезка геодезической не больше π , то он имеет кратчайшую длину среди всех линий, соединяющих его концы, а если больше π , то кратчайшим является другой, дополнительный к нему, участок большой окружности. Во-вторых, для некоторых пар точек кратчайший отрезок геодезической, соединяющий их, не является единственным: например, противоположные точки сферы связаны бесконечным числом кратчайших геодезических длины πR .

Мы приходим к следующему заключению:

1) кратчайшие линии на сфере радиуса R являются участками больших кругов (геодезических на сфере);

2) аналоги прямых на сфере – геодезические – являются замкнутыми линиями, окружностями;

3) при $r < \pi R$ «окружность радиуса» r с центром в точке P – это параллель S_r , которая получается при пересечении сферы с плоскостью, перпендикулярной оси, проходящей через точку P и противоположную ей точку сферы (рис.2); при

Рис. 2. Окружность радиуса r на сфере

$r = \pi R$ такая «окружность» сливается в точку, центрально-симметричную точке P ; расстояние от любой точки сферы до любой другой точки не превосходит πR . Это – так называемый *внутренний диаметр* сферы. Он равен расстоянию между двумя наиболее удаленными точками, измеренному по сфере, а не напрямую.

Если бы малый участок сферы (скажем, в окрестности ее полюса) можно было абсолютно точно картографировать участком плоскости, то длины окружностей и площади кругов с одинаковыми радиусами совпадали бы. На плоскости длина $l(r)$ окружности радиуса r и площадь $A(r)$ ограниченного им круга, как известно, равны

$$l(r) = 2\pi r, \quad A(r) = \pi r^2.$$

Вычислим их аналоги $\tilde{l}$ и $\tilde{A}$ для окружностей и кругов сферы радиуса R . Положим $\alpha = \frac{r}{R}$, это – угловое расстояние от центра до окружности радиуса r (см. рис.2). Теперь из формул, известных из школьной программы, следует, что

$$\tilde{l}(r) = 2\pi R \sin \alpha,$$

$$\tilde{A}(r) = 2(1 - \cos \alpha) \pi R^2, \quad \alpha = \frac{r}{R}.$$

Эти функции отличаются от функций $l(r)$ и $A(r)$ всюду, в том числе и около точки $r = 0$. Поэтому никакой сколь угодно малый участок сферы нельзя с сохранением длин и площадей отобразить на участок плоскости.

Возникает вопрос: где в этих рассуждениях проявляется гауссова кривизна?

При малых значениях α функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ приближенно ведут себя как $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$ и $\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4$ и, подставляя эти выражения в формулы для $\tilde{l}$ и $\tilde{A}(r)$, мы получаем

$$\tilde{l}(r) \approx 2\pi r - \frac{\pi}{3R^2} r^3 = 2\pi r - \frac{\pi K}{3} r^3,$$

$$\tilde{A}(r) \approx \pi r^2 - \frac{\pi}{12R^2} r^4 = \pi r^2 - \frac{\pi K}{12} r^4,$$

где $K = \frac{1}{R^2}$ и есть гауссова кривизна сферы радиуса R . Из этих формул мы видим, что в первом приближении при малых значениях r длины окружностей и площади кругов ведут себя как их аналоги на сфере, а в следующие по малости поправки входит гауссова кривизна поверхности.

В середине 1820-х годов Лобачевский построил геометрию, в которой не выполняется аксиома Евклида о параллельных прямых. Эта аксиома утверждает, что через точку, лежащую вне заданной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Отрицать аксиому Евклида можно двумя способами: либо утверждая, что через точку не проходит ни одна параллельная прямая, либо – что проходит несколько прямых. Первый случай реализуется на сфере, если под аналогом прямых понимать геодезические, – все большие окружности на сфере пересекаются друг с другом в двух точках, но при этом аналоги прямых не продолжают бесконечно в обе стороны, а замыкаются (*сферическая геометрия*).

Лобачевский построил геометрию, не указав пространство, в котором его геометрия реализуется. Примеры таких пространств были построены через сорок лет после его первых работ. Но Лобачевский вывел все аналитические формулы этой теории. При этом оказалось, что если понимать под треугольниками фигуры, составленные из трех отрезков геодезических, то возникают нетривиальные соотношения между длинами сторон и углами треугольников, чего нет в евклидовой геометрии, а суммы углов треугольников всегда меньше, чем π . (Лежандр, пытаясь вывести аксиому Евклида из других, доказал, что если существует хотя бы один треугольник с суммой углов, равной π , то аксиома Евклида выполняется.) Аналоги функций $\tilde{l}(r)$ и $\tilde{A}(r)$ в геометрии Лобачевского выглядят абсолютно так же, как в сферической геометрии, только вместо тригонометрических функций возникают гиперболические (геометрия Лобачевского

часто называется *гиперболической*), вид приведенных приближенных формул сохраняется, только гауссова кривизна становится отрицательной: $K < 0$. Лобачевский писал, что, хотя он и не может указать явную модель, непротиворечивость его геометрии вытекает уже из того, что при умножении длин сторон на мнимую единицу $\sqrt{-1}$ его формулы переходят в формулы сферической геометрии, которые непротиворечивы.

Обобщение понятия кривизны на многомерные пространства связано с другим свойством прямых на плоскости. Если две точки A и B соединены отрезком прямой и вектор $\mathbf{v}$ приложен к точке A , то параллельный перенос этого вектора в точку B реализуется семейством векторов, приложенных ко всем точкам отрезка так, что их длины и угол между векторами и прямой сохраняются. Эта процедура и называется параллельным переносом. Если мы на плоскости последовательно параллельно перенесем вектор $\mathbf{v}$ вдоль сторон треугольника ABC , то он перейдет сам в себя. В искривленном пространстве это не так.

Рассмотрим геодезический треугольник ABC на сфере радиуса R , взяв за точку A полюс сферы, а за точки B и C точки на экваторе (рис.3). Обозначим через α угол

Рис. 3. Параллельный перенос на сфере

между геодезическими отрезками AB и AC , другие углы этого треугольника — прямые. Возьмем в точке A ненулевой вектор $\mathbf{v}$, направленный вдоль отрезка AB . Перенесем его параллельно в точку B вдоль отрезка AB , мы получим вектор $\mathbf{v}'$,

перпендикулярный экватору. Теперь перенесем вектор $\mathbf{v}'$ вдоль экватора в точку C , а затем полученный вектор $\mathbf{v}''$, перпендикулярный экватору, перенесем в точку A параллельно вдоль отрезка CA и получим вектор $\tilde{\mathbf{v}}$, приложенный к точке A . Очевидно, что он направлен вдоль отрезка AC и поэтому образует угол α с исходным вектором $\mathbf{v}$, т.е. в результате параллельного переноса вектора вдоль сторон геодезического треугольника мы получили другой вектор. В этом проявляется кривизна пространства, и она измеряется отклонением исходного вектора от его параллельного переноса.

Обратим внимание и на другой факт: сумма углов треугольника ABC равна

$$\angle A + \angle B + \angle C = \alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \alpha + \pi,$$

т.е. больше, чем π , и отличается от развернутого угла на α . Площадь S треугольника ABC легко найти: $S = \alpha R^2$, и, обозначив через Σ сумму углов треугольника, мы можем связать ее с площадью треугольника формулой

$$\Sigma = \pi + KS,$$

так как для сферы $K = \frac{1}{R^2}$. Эта формула верна для всех поверхностей постоянной кривизны, в том числе и в геометрии Лобачевского, в которой $K < 0$. В частности, сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского всегда меньше, чем π . Более того, эта формула (Гаусса—Бонне) верна для поверхностей, у которых кривизна меняется от точки к точке (например, для гиперboloидов), только вместо KS надо брать интеграл от гауссовой кривизны K по внутренности треугольника.