Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Стасенко, Ледяная сосулька и космический трос, *Квант*, 2019, номер 9, 23–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:18:58

Ледяная сосулька и космический трос

А. СТАСЕНКО

Дифференциальный закон является той единственной формой причинного объяснения, которая может полностью удовлетворять современного физика. Ясное понимание дифференциального закона есть одно из величайших духовных достижений Ньютона.

А.Эйнштейн. Физика и реальность

КТО ЖЕ НЕ ВИДЕЛ СВЕРКАЮЩИХ НА солнце сосулек, столь опасных по весне! Всякий осторожный прохожий должен пом-

Рис. 1. Вертикальное сечение «оптимальной» сосульки — тела вращения в поле тяжести. Внизу — к определению максимального радиуса висящей капли воды

нить схему сосульки длиной L , изображенную на рисунке 1. Понятно, почему она к низу утончается, — ведь с увеличением координаты l поперечное сечение s_l должно выдерживать все большую нагрузку ниже расположенной массы. Вес этой массы, деленный на площадь, называется растягивающим напряжением σ .

Представим себе «оптимальную» сосульку, у которой напряжение во всех сечениях одинаково. На элемент объема сосульки sdl действует сила тяготения $gpsdl$. Это приращение должно компенсироваться приращением упругой

силы σds . В результате имеем уравнение

$$gpsdl = \sigma ds, \text{ или } \frac{ds}{s} = \frac{gp}{\sigma} dl. \quad (*)$$

Тут уж всякому современному школьнику это уравнение напомним: рост банковского вклада (где dl — элементарное приращение времени, а $\frac{gp}{\sigma}$ — процентная ставка). Решение этого уравнения в случае постоянного по длине значения ускорения свободного падения $g = g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$ известно:

$$\frac{s}{s_0} = \exp\left(\frac{gpl}{\sigma}\right),$$

где s_0 — площадь сечения нижнего конца сосульки. Отметим, что безразмерный показатель экспоненты можно считать отношением объемных плотностей потенциальных энергий с размерностью $[gpl] = [\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

Разумно предположить, что радиус $r_0 = \sqrt{\frac{s_0}{\pi}}$ нижнего сечения сосульки порядка размера той капли воды, которая уж было собралась сорваться вниз, но призадумалась и успела примерзнуть. Это известная задача о капле, оторвавшейся под действием собственной силы тяжести, превзошедшей силу поверхностного натяжения:

$$gm \geq 2\pi r_{\perp} \alpha,$$

где α ($[\alpha] = \text{Н/м}$) — коэффициент поверхностного натяжения, $r_{\perp}$ — радиус перешейка (см. рис.1, внизу) в момент отрыва.

Однако пора сделать численные оценки, используя характерные табличные данные для льда: $\rho = 920 \text{ кг/м}^3$ — плотность, $\sigma = 1 \text{ МПа}$ — предел упругости при разрыве. Получим

$$\frac{s}{s_0} = \exp\left(\frac{9,8 \cdot 920 \cdot 1}{10^6}\right) = \exp(9 \cdot 10^{-3}) \approx 1 - 0,01.$$

Таким образом, для сосульки длиной $L = 1 \text{ м}$ достаточно иметь площадь у основания всего на один процент больше, чем на ее конце.

Конечно, не все сосульки «оптимальны» в рассмотренном нами смысле — капли воды могут отвердевать, не достигнув нижнего

конца. В результате сосулька окажется относительно толще в своей верхней части (см. пункт 1 на рисунке 1), с запасом обеспечивая прочность своего тела.

Но что сосулька! Представим себе радиальную шахту, прорытую до самого центра однородного гравитирующего шара, например Луны, спутника Юпитера или даже Земли (рис.2). (Конечно, ситуация вообра-

Рис. 2. К задаче об оптимальной форме троса в радиальной шахте в гравитирующем шаре. Штриховая кривая — сечение сферической поверхности для определения радиальной зависимости ускорения тяготения

жаемая, ибо планеты устроены сложно.) Ясно, что сила тяжести в центре такого тела равна нулю. А чтобы описать ее зависимость от радиуса, можно использовать так называемую теорему Гаусса: поток вектора $\vec{g}$ напряженности поля тяготения через сферу радиусом $r < R$ пропорционален массе шара радиусом r (см. рис.2, внизу):

$$4\pi r^2 g \sim \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{ср}} r^3,$$

где $\rho_{\text{ср}}$ — среднеобъемная плотность тела. Отсюда находим

$$g(r) = g_0 \frac{r}{R},$$

где g_0 — значение ускорения тяготения на поверхности гравитирующего шара. Подставив это выражение в дифференциальное уравнение (*) и проинтегрировав его, получим (с учетом равенств $R = L$ и $r = l$)

$$\frac{s}{s_0} = \exp\left(\frac{\rho_{\text{ср}} g_0 r^2}{2\sigma R}\right).$$

Здесь в числителе показателя экспоненты можно усмотреть намек на энергию растянутой пружины, равную $\frac{kx^2}{2}$.

А вот пример создания «искусственной тяжести» в космической капсуле за счет центробежной силы (силы инерции). Две кабины массой M вращаются на тросе длиной L каждая с угловой скоростью ω вдали от всех небесных тел (рис.3). Для удобства

Рис. 3. К определению оптимальной формы троса в системе, вращающейся в невесомости с постоянной угловой скоростью

космонавтов центробежное ускорение обеспечивается равным ускорению тяготения g_0 на Земле:

$$\omega^2 L = g_0.$$

Понятно, что в уравнение (*) нужно подставить линейную зависимость $g(r) = \omega^2 r$. Это такая же зависимость от радиуса, как и в случае однородного гравитирующего шара, поэтому и результат интегрирования будет таким же.

Похожее выражение получится и для площади сечения лопадки быстро вращающегося колеса турбины с одинаковым по ее длине значением растягивающего напряжения. Конечно, при этом связь площади с ее шириной будет иная, чем в случае круглого сечения.

Читатель без особого труда сделает оценки, аналогичные приведенным выше. Например, можно для космического троса и лопадки турбины выбрать $\rho = 1,84 \text{ кг/м}^3$, $\sigma = 1 \text{ ГПа}$, $s_0 = 1 \text{ мм}^2$, длину $L = 100 \text{ м}$ для троса и ширину 1 см для лопадки (из двух последних данных получим предельную угловую скорость ω_{max}).

Но все сказанное верно, только если пренебречь массой капсул ($M = 0$). В противном случае в правой части уравнения (*) нужно добавить центробежную силу $M\omega^2 L$, действующую на капсулу и равномерно распределенную по искомой площади сечения троса. В результате интегрирования желаемый да получит новое выражение для $s(r)$.

Заранее предупредим Читателя, что оно будет называться страшным словом – трансцендентное.

Дальше – больше. Что если связать друг с другом два астероида, вращающихся вокруг общего центра масс? Это очень облегчило бы грузоперевозки между ними. Тут уж придется учесть и гравитацию, так что суммарная плотность энергии в точке r (см. рис.3) будет равна

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} + GM \left(\frac{1}{L-r} - \frac{1}{L+r} \right),$$

где G – гравитационная постоянная. Видно, что сила гравитации заставит сделать трос еще толще.

Можно надеяться, что Читатель уже приобрел достаточный опыт в решении подобных инженерных проблем. А с точки зрения физики в приведенных рассуждениях гравитационная и инертная массы молчаливо предполагались одинаковыми. Однако, их эквивалентность на заре современной физики (опыты Галилея) не казалась очевидной, и только благодаря все более тонким экспериментам к началу прошлого века она оказалась одним из наиболее точно установленных фактов. Наконец, А.Эйнштейн догадался связать поле тяжести с ускоренно движущейся системой отсчета, положив начало современной теории относительности.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Точка Нагеля и окружности пяти точек

Н.ВЯТКИН

В ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC выполним следующее построение. На продолжении отрезка AC за точку C отложим отрезок, равный по длине AB . Аналогичным образом построим еще пять отрезков (рис.1). Известно, что концы шести построенных

Рис. 1

отрезков лежат на одной окружности – окружности Конвея. Ее центр совпадает с центром I вписанной в треугольник ABC окружности.

Оказывается, если отрезки, равные противоположным сторонам, откладывать в другую сторону, получается не менее интересная шестерка точек, которая связана с *точкой Нагеля* (точкой пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания внеписанных окружностей со сторонами).

Этой конструкции и посвящена настоящая статья.

Итак, рассмотрим произвольный неравнобедренный треугольник ABC , для определенности упорядочим длины его сторон: $a = BC < b = CA < c = AB$. На лучах AC и AB отметим точки B_a и C_a соответственно, такие, что $AB_a = AC_a = a$. Аналогично, на лучах BC , BA и CB , CA отметим точки A_b , C_b и A_c , B_c соответственно, такие, что $BA_b = BC_b = b$ и $CA_c = CB_c = c$ (рис.2). Заметим, что расположение отмеченных точек на сторонах треугольника или их продолжениях однозначно определяется неравенством $a < b < c$.

1. Из построения очевидно, что треугольник AB_aC_a равнобедренный и прямая B_aC_a перпендикулярна биссектрисе угла BAC . Аналогично, прямые C_bA_b и A_cB_c перпендикулярны соответствующим биссектрисам.