Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Вяткин, Точка Нагеля и окружности пяти точек, *Квант*, 2019, номер 9, 25–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:31:38

Заранее предупредим Читателя, что оно будет называться страшным словом – трансцендентное.

Дальше – больше. Что если связать друг с другом два астероида, вращающихся вокруг общего центра масс? Это очень облегчило бы грузоперевозки между ними. Тут уж придется учесть и гравитацию, так что суммарная плотность энергии в точке r (см. рис.3) будет равна

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} + GM \left(\frac{1}{L-r} - \frac{1}{L+r} \right),$$

где G – гравитационная постоянная. Видно, что сила гравитации заставит сделать трос еще толще.

Можно надеяться, что Читатель уже приобрел достаточный опыт в решении подобных инженерных проблем. А с точки зрения физики в приведенных рассуждениях гравитационная и инертная массы молчаливо предполагались одинаковыми. Однако, их эквивалентность на заре современной физики (опыты Галилея) не казалась очевидной, и только благодаря все более тонким экспериментам к началу прошлого века она оказалась одним из наиболее точно установленных фактов. Наконец, А.Эйнштейн догадался связать поле тяжести с ускоренно движущейся системой отсчета, положив начало современной теории относительности.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Точка Нагеля и окружности пяти точек

Н.ВЯТКИН

В ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC выполним следующее построение. На продолжении отрезка AC за точку C отложим отрезок, равный по длине AB . Аналогичным образом построим еще пять отрезков (рис.1). Известно, что концы шести построенных

Рис. 1

отрезков лежат на одной окружности – окружности Конвея. Ее центр совпадает с центром I вписанной в треугольник ABC окружности.

Оказывается, если отрезки, равные противоположным сторонам, откладывать в другую сторону, получается не менее интересная шестерка точек, которая связана с *точкой Нагеля* (точкой пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания внеписанных окружностей со сторонами).

Этой конструкции и посвящена настоящая статья.

Итак, рассмотрим произвольный неравносторонний треугольник ABC , для определенности упорядочим длины его сторон: $a = BC < b = CA < c = AB$. На лучах AC и AB отметим точки B_a и C_a соответственно, такие, что $AB_a = AC_a = a$. Аналогично, на лучах BC , BA и CB , CA отметим точки A_b , C_b и A_c , B_c соответственно, такие, что $BA_b = BC_b = b$ и $CA_c = CB_c = c$ (рис.2). Заметим, что расположение отмеченных точек на сторонах треугольника или их продолжениях однозначно определяется неравенством $a < b < c$.

1. Из построения очевидно, что треугольник AB_aC_a равнобедренный и прямая B_aC_a перпендикулярна биссектрисе угла BAC . Аналогично, прямые C_bA_b и A_cB_c перпендикулярны соответствующим биссектрисам.

Рис. 2

Кроме того, $AB_c = AC_b = c - b$, $BA_c = BC_a = c - a$, $CA_b = CB_a = b - a$. Треугольник AB_cC_b равнобедренный, откуда видно, что

• прямая B_cC_b параллельна биссектрисе угла A (рис.3).

Рис. 3

Аналогично выясняются направления прямых A_bB_a и C_aA_c .

2. Докажем, что

• прямые A_bB_a , B_cC_b и C_aA_c пересекаются в одной точке.

Обозначим центры внеписанных окружностей треугольника ABC как I_a , I_b и I_c (I_a соответствует стороне BC и т. д.).

Как было замечено ранее, треугольники BA_cC_a и CA_bB_a равнобедренные. Серединные перпендикуляры к их основаниям совпадают с внешними биссектрисами треугольника ABC . Треугольник AB_aC_a также равнобедренный по построению. Серединный перпендикуляр к его основанию совпадает с биссектрисой угла A треугольника ABC . Следовательно, $I_aA_b = I_aB_a = I_aC_a = I_aA_c$. Значит, точки A_b , B_a , C_a , A_c лежат на одной окружности (рис.4). Обозначим ее ω_a . Аналогично определим окружности ω_b и ω_c .

Рис. 4

Для окружностей ω_a и ω_b прямая A_bB_a является радикальной осью (см. рис.4). Так же для пар окружностей ω_a , ω_c и ω_b , ω_c прямые C_aA_c и B_cC_b являются радикальными осями, поэтому все три прямые пересекаются в одной точке – радикальном центре окружностей ω_a , ω_b и ω_c (очевидно, эти прямые не параллельны).

Точку пересечения прямых A_bB_a , B_cC_b и C_aA_c назовем N .

3. Проведем еще одно рассуждение, из которого вытекает другое описание точки N .

Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC , также обозначим через M_a , M_b , M_c середины его сторон (рис.5), и пусть S – центр вписанной окружности серединного треугольника $M_aM_bM_c$ (точка S также называется центром Шпикера треугольника ABC).

Пусть луч M_cS пересекает сторону AC в точке P . Как известно, $BC \parallel M_bM_c$ и $CA \parallel M_aM_c$, поэтому $CI \parallel M_cP$ и $\angle M_bM_cP = \angle BCI = \angle ICM_b = \angle M_cPM_b$, откуда $PM_b = M_bM_c = a/2$. Далее, $CP = CM_b - PM_b = (b - a)/2 = CB_a/2$. Также $M_cS \parallel CI \parallel A_bB_a$.

Рис. 5

Это означает, что прямая M_cS лежит «посередине» между прямыми CI и A_bB_a (иначе говоря, середина любого отрезка с концами на прямых CI и A_bB_a лежит на прямой M_cS). Тогда A_bB_a проходит через точку, симметричную I относительно S . То же верно и для прямых B_cC_b и C_aA_c .

Получается, что N – точка, симметричная I относительно S . Однако известно, что для любого треугольника центр вписанной окружности I , точка Нагеля и центр Шпикера S лежат на одной прямой – так называемой *прямой Нагеля*, причем S является серединой отрезка между I и точкой Нагеля. Это и означает, что

• N – точка Нагеля!

По пути еще отметим, что на прямой Нагеля IN лежит также и точка M пересечения медиан, при этом $\overline{MN} = 2\overline{IM}$, а в центре Шпикера треугольника находится центр тяжести проволочного треугольника ABC , стороны которого являются тонкими однородными стержнями с массами, равными длинам соответствующих сторон. Это свойство центра Шпикера мы доказывать не будем.

4. Согласно исходному построению, $AB_a = AC_a = a$. Это означает, что мы можем вписать в угол A окружность Ω_a , касающуюся сторон угла именно в точках B_a и C_a . Так же получим окружности Ω_b и Ω_c (рис.6). Их центры обозначим O_a , O_b и O_c соответственно.

Докажем, что

• N лежит на каждой из окружностей Ω_a , Ω_b и Ω_c , т.е. все они пересекаются в точке N (см. рис.6).

Докажем, что $N \in \Omega_a$. Заметим, что

$$\begin{aligned} 2\angle B_aNC_a &= 360^\circ - 2\angle CA_bB_a - 2\angle C_aA_cB = \\ &= 360^\circ - \angle C - \angle B = 180^\circ + \angle A = \angle B_aO_aC_a. \end{aligned}$$

Рис. 6

(Обратите внимание на рисунок 7, этот угол больше развернутого.) Значит, угол B_aNC_a равен половине центрального угла $B_aO_aC_a$

Рис. 7

окружности Ω_a . Из этого следует, что данный угол является вписанным в окружность Ω_a , поэтому $N \in \Omega_a$. Проведя аналогичные рассуждения для двух других окружностей, получим, что точка N принадлежит всем трем данным окружностям.

5. Вернемся к равнобедренным треугольникам AB_cC_b , BA_cC_a , CA_bB_a . Описанные окружности этих треугольников обозначим λ_a , λ_b , λ_c .

Покажем, что

• *середина M'_c дуги ACB описанной окружности треугольника ABC является центром окружности λ_c (рис.8).*

Имеем $AM'_c = BM'_c$, $\angle M'_cAC = \angle M'_cBC = \angle M'_cBA_b$. Но $AC = BA_b = b$, следовательно, $\triangle M'_cAC = \triangle M'_cBA_b$, откуда $M'_cC = M'_cA_b$. Аналогично, $\triangle M'_cAB_a = \triangle M'_cBC$, поскольку $AB_a = BC = a$. Значит, $M'_cB_a = M'_cC$. Получаем требуемое: M'_c – центр описанной окружности $\triangle CA_bB_a$.

Рис. 8

Поскольку $CA_b = CB_a$, во внешний угол C можно вписать окружность, касающуюся AC и BC в B_a и A_b соответственно. Обозначим ее центр O'_c . Очевидно, $O'_c B_a \perp AC$ и $O'_c A_b \perp BC$, поэтому O'_c — точка на окружности λ_c , диаметрально противоположная точке C (см. рис.8).

Аналогично определяются точки O'_a , O'_b и M'_a , M'_b . Для них также верны соответствующие утверждения.

6. Далее нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. Пусть некоторая окружность θ вписана в угол A треугольника ABC . Ближнюю к вершине A точку пересечения прямой AN — нагелианы — с окружностью θ обозначим через P . Тогда касательная к окружности θ в точке P параллельна BC (рис.9).

Рис. 9

Доказательство. Поскольку окружность θ вписана в угол A , то существует гомотетия с центром в точке A , переводящая вневписанную окружность треугольника ABC , касающуюся стороны BC в точке Q , в окружность θ . При такой гомотетии прямая AN перейдет в себя, но так как точки A , P и Q лежат на одной прямой (см. рис.9), то Q перейдет в P , а касательная BC перейдет в параллельную ей касательную к окружности θ в точке P . Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть три окружности пересекаются в одной точке. Тогда эта точка лежит на одной окружности с их центрами тогда и только тогда, когда их попарные точки пересечения лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть O — общая точка трех окружностей, A , B и C — их попарные точки пересечения, O_3 , O_2 и O_1 — центры этих окружностей (рис.10). Тогда имеем равенства $\angle OO_1O_3 = \frac{1}{2} \angle OO_1B = \angle OCB$ и

Рис. 10

$\angle OO_2O_3 = \frac{1}{2} \angle OO_2A = \angle OCA$. Но равенство углов OCB и OCA означает коллинеарность точек A , B и C , а равенство углов OO_1O_3 и OO_2O_3 — вписанность четырехугольника $OO_1O_2O_3$. Из этого следует утверждение леммы.

Обозначим вторую точку пересечения (отличную от N) окружностей Ω_a и Ω_b как D_c . Аналогично определим точки D_a и D_b .

Докажем, что

• точки O_a , O_b , O'_c , M'_c и D_c лежат на одной окружности (рис.11).

Заметим, что

$$\begin{aligned} \angle B_a D_c A_b &= 180^\circ - \angle D_c A_b N - \angle A_b B_a D_c = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \angle D_c O_b N - \frac{1}{2} \angle N O_a D_c = \\ &= 180^\circ - \angle D_c O_b O_a - \angle O_b O_a D_c = \angle O_a D_c O_b. \end{aligned}$$

Угол $O_a D_c O_b$ по сути равен углу между окружностями Ω_a и Ω_b , но поскольку касательные к ним в точке N параллельны соответственным сторонам треугольника ABC (по лемме 1), то $\angle B_a C A_b = \angle O_a D_c O_b =$

Рис. 11

$= \angle B_a D_c A_b$, следовательно, точка D_c принадлежит окружности λ_c .

Применяя лемму 2 для окружностей λ_c , Ω_a и Ω_b (точка D_c для них общая, а попарные их точки пересечения – A_b , B_a и N коллинеарны), получаем, что четырехугольник $O_a D_c M'_c O_b$ вписанный.

Далее заметим, что точки O'_c , O_a и B_a , как и O'_c , O_b и A_b , коллинеарны, откуда

$$\begin{aligned} \angle O'_c O_a D_c &= \angle B_a O_a D_c = 2\angle B_a N D_c = \\ &= 2\angle A_b N D_c = \angle A_b O_b D_c = \angle O'_c O_b D_c. \end{aligned}$$

Значит, четырехугольник $O_a D_c O'_c O_b$ также вписанный.

Ясно, что эти два четырехугольника вписаны в одну окружность, так что все пять точек O_a , O_b , O'_c , M'_c и D_c лежат на одной окружности. Назовем ее *окружностью пяти точек для вершины C* и обозначим π_c .

7. Завершая исследование нашей конструкции, докажем совершенно удивительное **утверждение**, связывающее окружности пяти точек воедино:

• *три окружности пяти точек треугольника пересекаются в одной точке на описанной окружности этого треугольника.*

Для доказательства нам потребуется еще одна лемма.

Лемма 3. Пусть D , E и F – образы произвольной точки P при симметрии относительно сторон AB , BC и AC треугольника ABC . Тогда описанные окружности треугольников ADF , BDE и CEF пересекаются в одной точке на описанной окружности треугольника ABC (рис.12,а).

Доказательство. Пусть описанные окружности треугольников ADF и BDE вторично пересекаются в точке Q (рис.12,б). Так как точки D и F симметричны точке P относительно сторон угла A , то $\angle FAD = 2\angle A$ и $AF = AP = AD$, откуда $\angle DFA = 90^\circ - \angle A$. Аналогично, $\angle BED = 90^\circ - \angle B$. Из вписанности четырехугольников $AFQD$ и $DQEB$ имеем $\angle DFA = \angle DQA$ и $\angle BED = \angle BQD$. Объединяя все это, получим

$$\begin{aligned} \angle BQA &= \angle BQD + \angle DQA = \angle BED + \angle DFA = \\ &= 90^\circ - \angle B + 90^\circ - \angle A = \angle C. \end{aligned}$$

Это означает, что точка Q лежит на описанной окружности треугольника ABC . Тем самым, любые две из трех окружностей пересекаются на описанной окружности треугольника ABC . Поэтому все три окружнос-

Рис. 12

ти пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC . Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству **утверждения**. Для этого рассмотрим три окружности: окружность Ω_a , вписанную в треугольник ABC , и внеписанную, касающуюся стороны BC . А именно, их центры – O_a , I и I_a , которые лежат на биссектрисе угла A , и точки касания со стороной $AB - C_a$, L и K (рис.13).

Рис. 13

Заметим, что отрезки KL и AC_a соответственно пропорциональны отрезкам II_a и AO_a . С другой стороны, $KL = AC_a$:

$$\begin{aligned} KL &= KA - LA = \\ &= \frac{a+b+c}{2} - \frac{b+c-a}{2} = a = AC_a. \end{aligned}$$

Следовательно, $AO_a = II_a$. Треугольник

Рис. 14

ABC является ортотреугольником в треугольнике $I_a I_b I_c$, а $\Delta M'_a M'_b M'_c$ – середин-

ным треугольником; это известные факты. Поэтому $M'_b M'_c$ – серединный перпендикуляр к отрезку $A I_a$. Получается, что точки O_a и I симметричны относительно прямой $M'_b M'_c$ (рис.14). Аналогичные рассуждения верны для пар точек O_b, I и O_c, I .

Применяя лемму 3 для треугольника $M'_a M'_b M'_c$ и точки I , получаем, что описанные окружности треугольников $O_a M'_c O_b$, $O_b M'_a O_c$ и $O_c M'_b O_a$ пересекаются в одной точке на описанной окружности треугольника $M'_a M'_b M'_c$. Однако эти окружности в точности являются окружностями пяти точек треугольника ABC , а описанная окружность треугольника $M'_a M'_b M'_c$ является описанной окружностью треугольника ABC . Утверждение доказано.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А.И.Перегудину и П.А.Кожевникову за плодотворное обсуждение материалов настоящей статьи и ценные замечания по ее содержанию.

Точка Нагеля и разностный треугольник

С.АРУТЮНЯН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ РЕЧЬ ПОЙДЕТ ОБ ОДНОЙ замечательной точке треугольника – точке Нагеля. Это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вневписанными окружностями. С точкой Нагеля связано много красивых геометрических фактов. Упомянем известный факт о *прямой Нагеля*, которым мы будем пользоваться:

Для любого треугольника центр вписанной окружности I , точка Нагеля N и точка M пересечения медиан лежат на одной прямой, при этом $MN = 2IM$.

Немного по-другому этот факт можно переформулировать так. Пусть M_a, M_b, M_c

– середины соответствующих сторон треугольника. Тогда при гомотетии с центром в M и коэффициентом $-1/2$ треугольник ABC переходит в $\Delta M_a M_b M_c$, а точка N – в точку I , т.е. I является точкой Нагеля для серединного треугольника $M_a M_b M_c$.

А теперь посмотрим на один замечательный класс треугольников – так называемые *разностные треугольники*. Разностным называют треугольник, длины сторон которого составляют арифметическую прогрессию. У класса разностных треугольников существует много других красивых эквивалентных определений. Этому классу, например, посвящен параграф книги А.Д.Блинкова «Классические средние в арифметике и геометрии» (М.: МЦНМО, 2016). Упомянем два условия, эквивалентных условию разностности (при этом ограничимся рассмотрением только неравнобедренных треугольников).

Итак, пусть ABC – неравнобедренный треугольник, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $a + c = 2b$ (т.е. треугольник разностный, со средней по длине стороной b);
- (2) точка I равноудалена от M_a и M_c (рис.1);
- (3) *четыреугольник $BM_a IM_c$ – вписанный.*