Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Арутюнян, Точка Нагеля и разностный треугольник,
Квант, 2019, номер 9, 30–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 02:16:20

Рис. 14

ABC является ортотреугольником в треугольнике $I_a I_b I_c$, а $\Delta M'_a M'_b M'_c$ – середин-

ным треугольником; это известные факты. Поэтому $M'_b M'_c$ – серединный перпендикуляр к отрезку AI_a . Получается, что точки O_a и I симметричны относительно прямой $M'_b M'_c$ (рис.14). Аналогичные рассуждения верны для пар точек O_b, I и O_c, I .

Применяя лемму 3 для треугольника $M'_a M'_b M'_c$ и точки I , получаем, что описанные окружности треугольников $O_a M'_c O_b$, $O_b M'_a O_c$ и $O_c M'_b O_a$ пересекаются в одной точке на описанной окружности треугольника $M'_a M'_b M'_c$. Однако эти окружности в точности являются окружностями пяти точек треугольника ABC , а описанная окружность треугольника $M'_a M'_b M'_c$ является описанной окружностью треугольника ABC . Утверждение доказано.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А.И.Перегудину и П.А.Кожевникову за плодотворное обсуждение материалов настоящей статьи и ценные замечания по ее содержанию.

Точка Нагеля и разностный треугольник

С.АРУТЮНЯН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ РЕЧЬ ПОЙДЕТ ОБ ОДНОЙ замечательной точке треугольника – точке Нагеля. Это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вневписанными окружностями. С точкой Нагеля связано много красивых геометрических фактов. Упомянем известный факт о *прямой Нагеля*, которым мы будем пользоваться:

Для любого треугольника центр вписанной окружности I , точка Нагеля N и точка M пересечения медиан лежат на одной прямой, при этом $MN = 2IM$.

Немного по-другому этот факт можно переформулировать так. Пусть M_a, M_b, M_c

– середины соответствующих сторон треугольника. Тогда при гомотетии с центром в M и коэффициентом $-1/2$ треугольник ABC переходит в $\Delta M_a M_b M_c$, а точка N – в точку I , т.е. I является точкой Нагеля для серединного треугольника $M_a M_b M_c$.

А теперь посмотрим на один замечательный класс треугольников – так называемые *разностные треугольники*. Разностным называют треугольник, длины сторон которого составляют арифметическую прогрессию. У класса разностных треугольников существует много других красивых эквивалентных определений. Этому классу, например, посвящен параграф книги А.Д.Блинкова «Классические средние в арифметике и геометрии» (М.: МЦНМО, 2016). Упомянем два условия, эквивалентных условию разностности (при этом ограничимся рассмотрением только неравобедренных треугольников).

Итак, пусть ABC – неравобедренный треугольник, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $a + c = 2b$ (т.е. треугольник разностный, со средней по длине стороной b);
- (2) точка I равноудалена от M_a и M_c (рис.1);
- (3) четырехугольник $BM_a IM_c$ – вписанный.

Рис. 1

Условие (3), очевидно, эквивалентно условию на углы

$$(3') \quad \angle M_a I M_c = 180^\circ - \angle ABC.$$

Попробуем получить условия на треугольник, эквивалентные приведенным, но связанные с точкой Нагеля.

Рассмотренная выше гомотетия переводит треугольник ANC в $\Delta M_a I M_c$. А это значит, что условие (2) эквивалентно условию

$$(4) \quad \text{точка } N \text{ равноудалена от } A \text{ и } C.$$

Да, оказывается, из равенства $NA = NC$ совершенно не следует, что треугольник равнобедренный! Неожиданно, но красиво!

Уже неплохо. Попробуем поработать с другими условиями.

Все та же гомотетия помогает переформулировать условие (3') как

$$(5) \quad \angle ANC = 180^\circ - \angle ABC.$$

Рассмотрим точку N' , симметричную N относительно AC , так что $\angle ANC = \angle AN'C$. Условие (5) эквивалентно тому, что $\angle AN'C + \angle ABC = 180^\circ$, т.е. тому, что четырехугольник $ABCN'$ вписанный, или условию

(5') N' лежит на описанной окружности треугольника ABC .

Как известно, точка, симметричная ортоцентру H относительно прямой, содержащей сторону треугольника, лежит на описанной окружности. Отражение относительно AC дает возможность теперь переформулировать условие (5') как

(5'') точки A, C, N, H лежат на одной окружности.

Заметим, что из условия (5') следует (4), значит, $AN' = CN'$, т.е. N' — середина дуги.

Получается, что (5') эквивалентно формально более слабому факту

(5''') N' является серединой дуги AC (не содержащей точки B).

Видим, что в разностном треугольнике N' лежит на биссектрисе угла B . Этот факт можно переформулировать в такой занятой форме. Пусть имеется бильярд в форме треугольника ABC , в котором $a + c = 2b$. Тогда бильярдный шар, выпущенный из вершины B вдоль биссектрисы угла ABC , после отражения относительно борта AC пройдет через точку Нагеля. Предлагаем читателю подумать, верно ли утверждение, обратное данному.

Можно продолжать и получать другие условия, в том числе и не использующие точку N . Например, при помощи изогонального сопряжения условие (5'') можно переформулировать так.

Пусть S — центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей вписанную окружность в описанную. Тогда условие (5'') эквивалентно тому, что точки A, C, O, S лежат на одной окружности (рис.2). Секрет здесь в том, что O и H , а также S и N — пары изогонально сопряженных точек; а кроме того, если точки A, C, X, Y лежат на одной окружности, то же верно и для точек A, C, X_1, Y_1 , где X_1 и Y_1 — точки, изогонально сопряженные точкам X и Y . (Докажите это!)

Но вернемся к условию (5). Продлим отрезки AN и CN до нагелиан AN_a и CN_a . Условие (5) приводим к виду

Рис. 2

$\angle N_a N N_c = 180^\circ - \angle N_a B N_c$. А это эквивалентно тому, что

(6) *точки B, N_a, N, N_c лежат на одной окружности (рис. 3).*

Рис. 3

Проведем окружность CNN_a и найдем точку T ее пересечения с AC . Тогда $\angle NTA = \angle NN_a C$. Условие (6) эквивалентно равенству

$$\angle NN_c B = \angle NN_a C \Leftrightarrow \angle NN_c B = \angle NTA,$$

следовательно, точки A, N_c, N, T лежат на одной окружности. Иными словами, (6) эквивалентно тому, что окружности CNN_a и ANN_c пересекаются на AC .

В разностном треугольнике, с учетом условия (4), получаем

$$\angle CN_c T = \angle NAC = \angle NCA = \angle AN_a T.$$

Тогда треугольники ATN_a и CTN_c равнобедренные и T – точка пересечения серединных перпендикуляров к нагелианам AN_a и CN_c . (Подумайте, следует ли из того, что серединные перпендикуляры к нагелианам AN_a и CN_c пересекаются на AC , что треугольник ABC разностный.)

Продолжаем рассуждения для разностного треугольника ABC . Треугольники TCN_a и $TN_c A$ равны (получаются один из другого поворотом вокруг точки T), значит, T равноудалена от прямых AB и BC , т.е. T является основанием биссектрисы!

В завершение обсудим ситуацию, когда отрезок BD делит треугольник ABC на два разностных треугольника ABD и CBD со средней стороной BD (рис.4). Нетрудно понять (сделайте это), что в таком случае

Рис. 4

BD обязана быть нагелианой BN_b , и при этом $BN_b = p/2$, т.е. нагелиана равна четверти периметра. Если это условие выполнено, то точки Нагеля N_1 и N_2 треугольников ABD и CBD равноудалены от точек B и D , откуда $BD \perp N_1 N_2$.

Зададимся вопросом – верно ли обратное? Следует ли из условия $BD \perp N_1 N_2$ то, что $BD = p/2$? Оказывается, ответ на этот вопрос положительный. Докажем это.

Впишем в треугольники ABD и CBD окружности с центрами J_1 и J_2 и отметим точки P_1, Q_1, Q_2, P_2 их касания с отрезками BA, AD, DC, CB соответственно. Также обозначим через K_1, L_1, L_2, K_2 середины отрезков BA, AD, DC, CB соответственно.

Для того чтобы имело место $N_1 N_2 \perp BD$, необходимо и достаточно, чтобы $N_1 B^2 - N_1 D^2 = N_2 B^2 - N_2 D^2$ (проверьте это). Рассматривая гомологию, упомянутую в доказательстве условия (4), получаем, что $DN_1 = 2K_1 J_1$ и $BN_1 = 2L_1 J_1$, $DN_2 = 2K_2 J_2$ и $BN_2 = 2L_2 J_2$. Отсюда

$$N_1 B^2 - N_1 D^2 = N_2 B^2 - N_2 D^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J_1 L_1^2 - J_1 K_1^2 = J_2 L_2^2 - J_2 K_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (J_1 Q_1^2 + Q_1 L_1^2) - (J_1 P_1^2 + P_1 K_1^2) =$$

$$= (J_2 Q_2^2 + Q_2 L_2^2) - (J_2 P_2^2 + P_2 K_2^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_1 L_1^2 - P_1 K_1^2 = Q_2 L_2^2 - P_2 K_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AB - BD)^2 - (AD - BD)^2 =$$

$$= (CB - BD)^2 - (CD - BD)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BD = \frac{AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2}{2(AB - BC + CD - AD)}.$$

Подставив $AB = c, BC = a, AD = p - c,$

$CD = p - a$, получаем

$$BD = \frac{c^2 - a^2 + (p-a)^2 - (p-c)^2}{2(c-a+(p-a)-(p-c))} = \frac{p}{2}.$$

Нетрудно заметить, что проведенные выше рассуждения не изменяются, если «вырожденный четырехугольник» $ABCD$ заменить на любой другой четырехугольник, в котором $BA + AD = BC + CD$ (для таких четырехугольников, как и для описанных, существует окружность, касающаяся всех прямых, содержащих их стороны).

Завершая наш рассказ, отметим, что есть несколько других интересных свойств, связывающих точку Нагеля с треугольниками, в которых отношение суммы длин двух сторон к длине третьей стороны равно некоторому фиксированному числу. Треугольники, для которых это отношение равно 3, хорошо исследованы и про них можно прочитать в статье А. Заславского «Приключения одной задачи» в «Кванте» №12 за 2017 год. Читатель может самостоятельно попробовать исследовать свойства таких классов треугольников и связать их с точкой Нагеля.

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest. Желаем успеха!

1. Вася хочет выбрать среди чисел а) 1, 2, ..., 50; б) 1, 2, ..., 51 как можно больше чисел так, чтобы любые два числа различались хотя бы на 3. Сколько способов сделать это есть у Васи?

П. Кожевников

2. Квантик загадал целое число от 0 до 99, а Ноутик его отгадывает. Число считается отгаданным, если Ноутик его назвал. За ход Ноутик называет четыре целых числа от 0 до 99, обладающих одним из двух свойств: либо первый разряд у всех чисел совпадает, а вторые разряды последовательные, либо второй разряд у всех чисел совпадает, а первые разряды последовательные (у однозначных чисел первый разряд считаем равным 0). Например, наборы 13, 14, 15, 16 и 3, 13, 23, 33 подходят, а набор 18, 19, 20, 21 – нет. За какое минимальное чис-

ло ходов Ноутик может гарантированно отгадать число?

Ю. Маркелов, С. Маркелов

3. Дан отрезок a и правильный треугольник со стороной b . Постройте (циркулем и линейкой) внутри этого треугольника правильный треугольник со стороной a такой, чтобы вершины внешнего треугольника лежали на продолжениях сторон внутреннего.

Е. Бакаев

4. Верно ли, что числа вида $1 + x + x^{2017} + x^{2018} + x^{2019}$ являются составными для всех натуральных $x > 1$?

В. Расторгуев