Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Сергеев, Гармонические отображения, *Лекц. курсы НОЦ*, 2008, выпуск 10, 3–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn10>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:48:03

Оглавление

Глава 1. Общие свойства	7
1.1. Гармонические отображения римановой сферы в себя	7
1.2. Определение гармонических отображений	10
1.3. Уравнения Эйлера–Лагранжа	14
1.4. Отображения комплексных многообразий	18
Глава 2. Твисторный подход	29
2.1. Твисторная программа Пенроуза	29
2.2. Хопфовское расслоение над S^4	30
2.3. Твисторное расслоение риманова многообразия	35
2.4. Гармонические отображения в римановы многообразия	41
Глава 3. Отображения в проективные пространства	55
3.1. Гармонические отображения и голоморфные кривые .	55
3.2. Твисторная интерпретация	63
Глава 4. Отображения в грассмановы многообразия	69
4.1. Гауссовы расслоения и замещения	69
4.2. Твисторная интерпретация	80
Глава 5. Отображения в группы Ли	89
5.1. Конструкция Уленбек	89
5.2. Твисторная интерпретация	94
Глава 6. Отображения в пространства петель	101
6.1. Теорема Атьи–Дональдсона	101
6.2. Гармонические отображения в пространства петель . .	107
Список литературы	113
Предметный указатель	115

Предисловие

Эта книга представляет собой запись курса лекций, прочитанных автором в Научно-образовательном центре Математического института им. В. А. Стеклова весной 2008 года, дополненной главой, посвященной гармоническим отображениям в пространства петель компактных групп Ли.

Главной целью курса являлось изложение твисторного подхода к построению гармонических отображений из римановых поверхностей в римановы многообразия. Гармонические отображения в римановы многообразия (в отличие от гармонических функций) начали изучать в середине прошлого века, но настоящий бум теория гармонических отображений пережила в 90-х годах именно благодаря появлению твисторного подхода. Развитие этого направления связано в первую очередь с трудами британской школы математиков. Одним из основных результатов их усилий явилось полное описание гармонических отображений из римановых поверхностей в комплексные грассмановы многообразия, представленное в главе 4 данного курса.

Новый подъем теория гармонических отображений испытала благодаря осознанию ее связи с общей теорией интегрируемых систем. Указанная связь была установлена Уленбек в известной работе [22], результатом которой явилось проникновение методов теории интегрируемых систем в теорию гармонических отображений. На их основе было получено полное описание гармонических отображений в унитарную группу ([22], [24]). Это направление в теории гармонических отображений, представленное в главе 5, было в значительной степени мотивировано работами физиков по изучению классических решений т.н. σ -моделей. Именно физиками были получены первые результаты по описанию гармонических отображений из римановых поверхностей в комплексные проективные пространства, завершено затем математиками (физический “взгляд” на теорию гармонических отображений представлен в обзоре Переломова [15]).

В работе Атья [1] была установлена связь между голоморфными отображениями римановой сферы в пространства петель компактных групп Ли и инстантонами на евклидовом 4-мерном пространстве (т.е. решениями уравнений дуальности Янга–Миллса

на $\mathbb{R}^4$). Основываясь на этом наблюдении, можно предположить, что гармонические отображения римановой сферы в пространства петель компактных групп Ли аналогичным образом связаны с решениями полных уравнений Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$. Указанная гипотеза остается пока не доказанной, но она мотивирует изучение гармонических отображений из римановых поверхностей в пространства петель. Это новое направление теории гармонических отображений, связанное с изучением гармонических отображений в бесконечномерные кэлеровы многообразия, представлено в заключительной главе 6 данного курса.

Однако, помимо главной цели изложения твисторной теории гармонических отображений, мы рассматривали наш курс и как возможность ознакомить слушателей с методами современной (в первую очередь, комплексной) дифференциальной геометрии. По этой причине книга изобилует отступлениями, в которых излагаются необходимые, а иногда просто интересные, с нашей точки зрения, сведения из дифференциальной геометрии. Мы не ставили себе целью излагать их максимально подробно и с полными доказательствами. Скорее, наши отступления направлены на то, чтобы дать читателю “первый толчок” к самостоятельному изучению литературы, относящейся к рассматриваемому вопросу. Поэтому все они снабжены ссылками на наиболее доступные, по нашему мнению, учебники, имеющиеся на русском языке. (Есть ссылки и другого рода: в тех случаях, когда мы опускаем доказательство какого-либо из важных результатов, дается ссылка на источник, в котором это доказательство можно найти.)

Задачи, приведенные в тексте, предлагались слушателям курса и выносились на экзамен, где предлагалось решить любые две на “отличную оценку”. В основном они предназначены для самостоятельного закрепления пройденного материала, однако есть несколько задач, помеченных “звездочкой”, решение которых, возможно, потребует обращения к литературе за сведениями, не излагавшимися в курсе.

В заключение хочу принести свою благодарность всем слушателям курса за внимание, многочисленные вопросы и решения предложенных задач. Все это несомненно способствовало улучшению предлагаемого текста.

Глава 1. Общие свойства гармонических отображений

В этой главе определяются гармонические отображения римановых многообразий и выводятся уравнения, которым эти отображения удовлетворяют. Затем мы обращаемся к гармоническим отображениям комплексных и почти комплексных многообразий, являющимся главным объектом исследования в данном курсе. Начинается глава с разбора простого, но содержательного примера гармонических отображений римановой сферы в себя.

1.1. Гармонические отображения римановой сферы в себя

Рассмотрим следующую задачу, возникающую в теории ферромагнетизма. Предположим, что в каждой точке $x = (x_1, x_2)$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ задан вектор $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ единичной длины, гладко зависящий от точки x . Иными словами, задано гладкое

Рис. 1.1.

отображение $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$, $x \mapsto \varphi(x)$, плоскости $\mathbb{R}^2$ в единичную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Определим *энергию* отображения φ посредством

интеграла Дирихле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |d\varphi|^2 dx_1 dx_2,$$

где $|d\varphi|^2 = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|^2$.

Задача: Найти все гладкие отображения $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$, обладающие конечной энергией и задающие экстремумы функционала $E(\varphi)$.

Ввиду условия конечности энергии, естественно наложить на рассматриваемые отображения φ следующее асимптотическое условие:

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi_0 \quad \text{равномерно при } |x| \rightarrow \infty,$$

где φ_0 – некоторая фиксированная точка S^2 . При этом условии отображения $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ будут продолжаться до непрерывных отображений

$$\varphi: S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2.$$

Хорошо известно, что непрерывные отображения $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ обладают топологическим инвариантом, называемым *степенью отображения*. Этот целочисленный инвариант измеряет, сколько раз (с учетом ориентации) отображение φ “покрывает” сферу в образе. Его можно вычислить по формуле

$$\deg \varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^* \omega, \quad (1.1)$$

где ω – нормированная форма объема на сфере: $\int_{S^2} \omega = 1$, а $\varphi^* \omega$ – прообраз ω при отображении φ .

Задача 1. Покажите, что формула (1.1) действительно задает топологический инвариант, т.е. правая часть (1.1) не изменяется при гладких деформациях φ в классе гладких отображений с конечной энергией, удовлетворяющих асимптотическому условию: $\varphi(x) \rightarrow \varphi_0$ равномерно при $|x| \rightarrow \infty$, в то время как первые и вторые производные φ равномерно стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Учитывая наличие в рассматриваемой задаче описания гармонических отображений $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ топологического инварианта, мы можем уточнить ее формулировку следующим образом.

Задача: Найти все экстремали функционала $E(\varphi)$ в классе гладких отображений $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ с конечной энергией и заданной степени $k := \deg \varphi$.

Для решения указанной задачи удобно перейти к комплексным координатам. А именно, обозначим через $z = x_1 + ix_2$ комплексную координату в области определения $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ и введем комплексную координату w в образе $S^2 \setminus \{\infty\}$ с помощью стереографической проекции. В этих координатах выражение для энергии отображения $\varphi = w(z)$ принимает вид

$$E(\varphi) = 2 \int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial w / \partial z|^2 + |\partial w / \partial \bar{z}|^2}{(1 + |w|^2)^2} |dz \wedge d\bar{z}|,$$

а формула для степени φ преобразуется в

$$\deg \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial w / \partial z|^2 - |\partial w / \partial \bar{z}|^2}{(1 + |w|^2)^2} |dz \wedge d\bar{z}|.$$

Сравнивая две последние формулы, мы видим, что

$$E(\varphi) \geq 4\pi |\deg \varphi|. \quad (1.2)$$

При этом равенство в формуле (1.2) может достигаться только в следующих случаях:

- ★ если $k = \deg \varphi \geq 0$, то равенство в (1.2) достигается при $\partial w / \partial \bar{z} \equiv 0$, т.е. на голоморфных функциях $\varphi = w(z)$;
- ★ если $k = \deg \varphi < 0$, то оно достигается при $\partial w / \partial z \equiv 0$, т.е. на антиголоморфных функциях $\varphi = w(z)$.

Следовательно, голоморфные отображения $\varphi = w(z)$ задают минимумы энергии $E(\varphi)$ в топологических классах с $k = \deg \varphi \geq 0$, в то время как антиголоморфные отображения $\varphi = w(z)$ задают минимумы энергии $E(\varphi)$ в топологических классах с $k = \deg \varphi < 0$. Значение энергии $E(\varphi)$ на минимизирующих отображениях равно $4\pi |\deg \varphi| = 4\pi |k|$.

Отметим, что минимальные значения энергии целочисленны по модулю 4π . Это так называемое “квантование энергии”, которое зачастую возникает не только в квантовых, но и классических нелинейных моделях, изучаемых в теоретической физике.

Найдем конкретное выражение для минимизирующих отображений. Предположим, для определенности, что $k = \deg \varphi \geq 0$ и заметим, что функционал $E(\varphi)$ не изменяется при вращениях

сферы S^2 в образе (по этой причине рассматриваемую модель часто называют $SO(3)$ -моделью). Поэтому мы можем выбрать в качестве асимптотического значения φ_0 любую точку на сфере S^2 , например, ту, которая отвечает значению $w_0 = 1$. Нам нужно описать голоморфные отображения римановой сферы $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ степени k , равные 1 на бесконечности. Любое такое отображение рационально, а поскольку оно имеет степень k , то представляется в виде

$$\varphi = w(z) = \prod_{j=1}^k \frac{z - a_j}{z - b_j}, \quad (1.3)$$

где a_j, b_j – произвольные комплексные числа (для которых выписанная дробь несократима). Аналогичное описание допускают антиголоморфные отображения, минимизирующие $E(\varphi)$ при $k < 0$.

Заметим, что пространство решений нашей задачи, задаваемых формулой (1.3), зависит от $4k$ вещественных параметров (или от $4k + 2$ вещественных параметров, если добавить вращения сферы S^2 в образе).

Мы описали все локальные минимумы функционала энергии $E(\varphi)$. Оказывается, что других экстремалей у $E(\varphi)$ нет (это эффект двумерности образа рассматриваемых отображений φ).

Задача 2*. Покажите, что все гладкие отображения $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, где $\mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – риманова сфера, являющиеся экстремалами функционала энергии $E(\varphi)$ (с конечной энергией) исчерпываются голоморфными и антиголоморфными отображениями.

1.2. Определение гармонических отображений

ОТСТУПЛЕНИЕ (тензорные поля; см. [11], пп. 16–19).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Тензорным полем* или просто *тензором* T ранга (p, q) на гладком многообразии M называется гладкое сечение расслоения

$$\underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_p \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_q \longrightarrow M,$$

где TM – касательное расслоение (расслоение векторов), T^*M – кокасательное расслоение (расслоение ковекторов или 1-форм).

Локальное описание. Обозначим через $(x^1, \dots, x^n)$ локальные координаты в окрестности точки $p \in M$. Векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n},$$

задают локальный базис расслоения TM , а формы $dx^1, \dots, dx^n$ – локальный базис расслоения T^*M . В этих координатах локальное выражение тензора T имеет вид:

$$T \sim \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^n T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}. \quad (1.4)$$

Особое значение имеют для нас тензоры $(T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$, симметричные по верхним индексам и косимметричные по нижним, которые принято записывать в виде

$$T \sim \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j_1, \dots, j_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}.$$

Связь между тензорным полем T и его локальными представлениями $(T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$ устанавливается следующим образом. Выберем покрытие M координатными окрестностями $\{U_\alpha\}$, в которых тензорное поле T имеет локальное представление $(\overset{\alpha}{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$. На пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ локальные представления $(\overset{\alpha}{T})$ и $(\overset{\beta}{T})$ связаны формулами замены переменных, диктуемыми видом представлений (1.4) (явные выражения для указанных формул можно найти в [11]). Набор локальных представителей $\{\overset{\alpha}{T}\}$ определяет гладкое сечение T расслоения $(TM)^{\otimes p} \otimes (T^*M)^{\otimes q}$.

ПРИМЕР 1. Тензор ранга $(1, 0)$ – это векторное поле, которое имеет локальное представление вида

$$\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тензор ранга $(0, 1)$ – ковекторное поле или 1-форма, имеющее локальное представление вида

$$\sum_j b_j dx^j.$$

Тензор ранга $(0, 2)$ допускает локальное представление вида

$$\sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Симметричные тензоры такого вида называются *метрическими*. Если матрица (g_{ij}) положительно определена, то указанный тензор задает риманову метрику на M . Тензор ранга $(1, 1)$ – это линейное операторное поле, имеющее локальное представление вида

$$\sum_{i,j} a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j.$$

Значение этого тензора в точке $p \in M$ является линейным оператором $A_p: T_p M \rightarrow T_p M$.

Тензоры можно тензорно умножать друг на друга, сворачивать по повторяющимся индексам, поднимать и опускать у них индексы с помощью метрического тензора. Обо всех этих операциях можно прочитать в книге [11], п. 17. $\square$

Пусть заданы римановы многообразия M^n и N^m , иначе говоря, M есть гладкое многообразие размерности n с римановой метрикой $g \sim (g_{ij})$, N – гладкое многообразие размерности m с римановой метрикой $h \sim (h_{\alpha\beta})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ есть гладкое отображение. Его *энергией* называется функционал вида

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi(p)|^2 \text{vol}, \quad (1.5)$$

где $d\varphi$ – дифференциал отображения φ , $\text{vol} = \text{vol}_g$ – элемент объема метрики g .

Локальное описание подынтегрального выражения. Выберем в точке $p \in M$ локальные координаты (x^i) , а в ее образе $q = \varphi(p) \in N$ – локальные координаты (u^α) . В этих координатах локальное выражение для квадрата нормы дифференциала будет иметь вид

$$|d\varphi(p)|^2 = \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta}, \quad (1.6)$$

где $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x)$ – компоненты отображения φ , (g^{ij}) – тензор ранга $(2, 0)$, матрица которого является обратной к матрице (g_{ij}) метрического тензора: $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Элемент объема vol_g задается в выбранных локальных координатах выражением вида

$$\text{vol}_g \sim \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

которое ведет себя как тензор ранга $(0, n)$ относительно замен координат с положительным детерминантом.

Инвариантное определение дифференциала. Порождаемое $\varphi: M \rightarrow N$ касательное отображение $\varphi_*: TM \rightarrow TN$ можно отождествить с сечением $d\varphi$ расслоения

$$T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN) \longrightarrow M,$$

где $\varphi^{-1}(TN)$ – обратный образ касательного расслоения TN при отображении φ : его слой в точке $p \in M$ совпадает со слоем T_qN в точке $q = \varphi(p)$. Действительно, отображение $\varphi_*: TM \rightarrow TN$ можно рассматривать как морфизм $TM \rightarrow \varphi^{-1}TN$ расслоений над M , который отождествляется с сечением расслоения $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$.

Расслоение $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$ наделяется естественной римановой метрикой, индуцированной римановыми метриками g и h . (Локальное выражение для этой метрики извлекается из правой части формулы (1.6).)

ПРИМЕР 2. В случае, когда M и N являются открытыми подмножествами евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, норма дифференциала отображения $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m): M \rightarrow N$ задается выражением

$$|d\varphi(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \left| \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \right|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right|^2,$$

а энергия определяется интегралом Дирихле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M \sum_i \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right|^2 dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Экстремумы этого функционала задаются отображениями $\varphi = (\varphi^\alpha)$, компоненты φ^α которых являются гармоническими функциями.

Понятие гармонического отображения есть естественное обобщение отображений, описанных в примере 2, на случай общих римановых многообразий M, N .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Гладкое отображение $\varphi: M \rightarrow N$ римановых многообразий называется *гармоническим*, если оно является экстремальным для функционала энергии $E(\varphi)$ по отношению к гладким вариациям φ с компактными носителями.

1.3. Уравнения Эйлера–Лагранжа

ОТСТУПЛЕНИЕ (ковариантное дифференцирование и римановы связности; см. [11], пп. 28, 29). Введем на тензорных полях операцию ковариантного дифференцирования, которая переводит тензоры снова в тензоры. Сначала определим ковариантную производную векторов и 1-форм в терминах локальных представлений.

На векторных полях операция ковариантного дифференцирования задается посредством

$$\nabla_j: \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \sum_i \nabla_j a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \sum_k \Gamma_{kj}^i a^k.$$

На 1-формах определим операцию ковариантного дифференцирования по формуле

$$\nabla_j: \sum_i b_i dx^i \mapsto \sum_i \nabla_j b_i dx^i,$$

где

$$\nabla_j b_i = \frac{\partial b_i}{\partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k b_k.$$

Для того, чтобы указанная операция переводила векторные поля снова в векторные поля, а 1-формы в 1-формы, необходимо, чтобы символы Γ_{kj}^i при замене координат $x^i = x^i(x')$ преобразовывались по закону:

$$\Gamma_{kj}^i \mapsto \Gamma_{k'j'}^{i'} = \sum_{i,k,j} \Gamma_{kj}^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}. \quad (1.7)$$

Из приведенной формулы, в частности, видно, что символы Γ_{kj}^i ведут себя как тензоры только относительно линейных замен координат.

Функции (Γ_{kj}^i) , преобразующиеся по формуле (1.7) при замене координат, называются *символами Кристоффеля*, а операция ковариантного дифференцирования ∇_j – *связностью*. Связность ∇_j *симметрична*, если $\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$.

Продолжим теперь операцию ковариантного дифференцирования на тензорные поля произвольного ранга, пользуясь следующими правилами:

- 1) ковариантное дифференцирование есть линейная операция, совпадающая на функциях с обычной производной:

$$\nabla_j f = \frac{\partial f}{\partial x^j};$$

- 2) ковариантная производная векторных полей и 1-форм задается приведенными выше формулами;
- 3) ковариантная производная удовлетворяет правилу Лейбница, т.е. ковариантная производная тензорного произведения $S \otimes T$ тензоров $(S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$ и $(T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r})$ равна

$$\nabla_j (S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}) = (\nabla_j S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} + S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (\nabla_j T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}).$$

Этими свойствами операция ковариантного дифференцирования определяется однозначно. Например, ковариантная производная произвольного тензора ранга $(2, 0)$ равна

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \sum_l \Gamma_{lk}^i T^{lj} + \sum_l \Gamma_{lk}^j T^{il}.$$

Геометрический смысл связности (параллельный перенос). Если X – векторное поле на многообразии M , имеющее локальное представление

$$X \sim \sum_k X^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

то можно определить ковариантную производную тензора вдоль X , полагая

$$\nabla_X T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum_k X^k \nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

На функциях f эта операция совпадает с операцией дифференцирования по направлению векторного поля X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $x = x(t)$ есть гладкая кривая на многообразии M с началом в точке $p = x(0)$ и концом в точке $q = x(1)$. Обозначим через $\dot{x}$ векторное поле скорости кривой $x(t)$ с локальным представлением вида

$$\dot{x} \sim \sum_k \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Тензорное поле T *ковариантно постоянно* или *параллельно* вдоль $x(t)$, если

$$\nabla_{\dot{x}(t)} T = 0$$

в точках $x = x(t)$. *Параллельным переносом* вектора $X(p) \in T_p M$ вдоль кривой $x(t)$ называется векторное поле

$$X \sim \sum_k X^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

определенное в точках $x = x(t)$, которое параллельно вдоль $x(t)$ и при $t = 0$ совпадает с $X(p)$. Вектор $X(q) = X(x(t))|_{t=1}$ есть *результат* параллельного переноса вектора $X(p)$ вдоль кривой $x(t)$.

Локальное условие параллельности имеет вид

$$\sum_k \frac{dx^k}{dt} \nabla_k X^i = \frac{dX^i}{dt} + \sum_{k,j} \frac{dx^k}{dt} \Gamma_{jk}^i X^j = 0 \quad (1.8)$$

при всех t , т.е. параллельный перенос вектора $X(p)$ вдоль кривой $x(t)$ определяется решением обыкновенного дифференциального уравнения (1.8) с начальным условием: $X^i|_{t=0} = X^i(p)$.

Связность Γ_{ij}^k называется *согласованной с римановой метрикой* g_{ij} , если ковариантная производная от g_{ij} равна нулю:

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \text{ при всех } k, i, j.$$

Симметричная связность такого типа существует и определяется единственным образом по метрике g_{ij} . Ее символы Кристоффеля вычисляются по формуле

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Эта связность называется *римановой* или *связностью Леви-Чивита*.

Из приведенной формулы для символов Кристоффеля римановой связности вытекает, что они тождественно равны нулю для обычной евклидовой связности на пространстве $\mathbb{R}^n$, согласованной с евклидовой метрикой.

Мы определили связности на тензорных полях, которые позволяют их дифференцировать. Позже будут введены связности на векторных расслоениях, которые позволяют дифференцировать гладкие сечения этих расслоений. $\square$

Вернемся к уравнениям Эйлера–Лагранжа для функционала энергии $E(\varphi)$ гладких отображений $\varphi: M \rightarrow N$ римановых многообразий. Приведем сначала их вид в локальных координатах.

В локальных координатах (x^i) в точке $p \in M$ и (u^α) в точке $q = \varphi(p) \in N$ римановы связности ${}^M\nabla$ многообразия M и ${}^N\nabla$ многообразия N задаются символами Кристоффеля

$${}^M\nabla \sim {}^M\Gamma_{ij}^k \quad \text{и} \quad {}^N\nabla \sim {}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$$

соответственно. В этих координатах уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала энергии $E(\varphi)$ отображения $\varphi: M \rightarrow N$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k {}^M\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} + \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \right\} = \\ = \Delta_M \varphi^\gamma + \sum_{i,j} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} = 0, \quad \gamma = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Оператор

$$\Delta_M \varphi^\gamma = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k {}^M\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \right)$$

называется *оператором Лапласа–Бельтрами* многообразия M , определяемым римановой метрикой g . Это линейный дифференциальный оператор 2-го порядка по φ^γ . Второе слагаемое во второй строке формулы (1.9) зависит от геометрии многообразия N , т.е. от геометрии образа отображения φ , и задается выражением, квадратичным по производным отображения φ^γ .

ПРИМЕР 3. При $N = \mathbb{R}^m$ каждое из уравнений (1.9) превращается в уравнение Лапласа–Бельтрами на компоненту φ^γ отображения φ , решениями которого являются гармонические функции на M . Если $n = \dim M = 1$, то гармонические отображения $\varphi: M \rightarrow N$ – это просто геодезические на N , параметризованные длиной дуги.

ЗАДАЧА 3. Выведите уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала энергии $E(\varphi)$ гладких отображений $\varphi: M \rightarrow N$ римановых многообразий.

Инвариантная форма уравнений Эйлера–Лагранжа. Напомним (см. п. 1.2), что дифференциал $d\varphi$ можно рассматривать как сечение расслоения

$$T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN).$$

Римановы связности ${}^M\nabla$ и ${}^N\nabla$ порождают естественную связность ∇ на этом расслоении (найдите выражение для этой связности в локальных координатах!). В ее терминах уравнение Эйлера–Лагранжа может быть записано в виде

$$\mathrm{tr}(\nabla d\varphi) = 0,$$

или в локальных координатах

$$\sum_k \nabla_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0.$$

Векторное поле $\tau_\varphi := \mathrm{tr}(\nabla d\varphi)$ называется иначе *полем напряжений* отображения φ .

1.4. Гармонические отображения комплексных многообразий

ОТСТУПЛЕНИЕ (комплексные и почти комплексные многообразия; см. [21], гл. I, п. 3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть M – гладкое многообразие размерности $2n$. *Почти комплексной структурой* на M называется гладкое сечение J расслоения $\mathrm{End}(TM)$, удовлетворяющее соотношению

$$J^2 = -I.$$

Указанное сечение можно рассматривать как тензорное поле ранга $(1, 1)$, сопоставляющее каждой точке $p \in M$ линейный оператор J_p в пространстве $T_p M$, квадрат которого равен $-I$.

Обозначим через $T^{\mathbb{C}}M$ комплексифицированное касательное расслоение многообразия M , определяемое как

$$T^{\mathbb{C}}M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

В терминах локальных координат $(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$ в окрестности точки $p \in M$ это расслоение можно описать следующим образом. Базис касательного расслоения TM в окрестности p образуют векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}; \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n},$$

так что любое гладкое векторное поле X в окрестности p представляется в виде линейной комбинации

$$X = \sum_j \left(a^j \frac{\partial}{\partial x^j} + b^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \quad (1.10)$$

с коэффициентами a^j, b^j , являющимися гладкими $\mathbb{R}$ -значными функциями в окрестности p . Сечения расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ в окрестности p задаются той же формулой (1.10), в которой коэффициенты a^j, b^j являются произвольными гладкими $\mathbb{C}$ -значными функциями в окрестности p .

Удобнее однако перейти к комплексному локальному базису расслоения $T^{\mathbb{C}}M$, задаваемому векторными полями вида

$$\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}; \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n},$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i \frac{\partial}{\partial y^j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j} \right).$$

Тогда любое гладкое комплексное векторное поле (или, что то же самое, локальное сечение расслоения $T^{\mathbb{C}}M$) в окрестности точки p будет записываться в виде

$$X = \sum_j \left(X^j \frac{\partial}{\partial z^j} + X^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right),$$

где $X^j, X^{\bar{j}}$ – произвольные гладкие $\mathbb{C}$ -значные функции в окрестности p .

Аналогичным образом, локальный базис кокасательного комплексифицированного расслоения $T^{*,\mathbb{C}}M$ в окрестности точки $p \in M$ составляют 1-формы

$$dz^j = dx^j + i dy^j, \quad d\bar{z}^j = dx^j - i dy^j,$$

так что любая гладкая 1-форма в окрестности p представляется в виде

$$\omega = \sum_j (\omega_j dz^j + \omega_{\bar{j}} d\bar{z}^j)$$

с гладкими $\mathbb{C}$ -значными коэффициентами $\omega_j, \omega_{\bar{j}}$.

Выбранные локальные базисы векторных и ковекторных полей можно использовать для представления произвольных комплексных тензорных полей, т.е. сечений расслоений вида

$$\underbrace{T^{\mathbb{C}}M \otimes \dots \otimes T^{\mathbb{C}}M}_p \otimes \underbrace{T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \dots \otimes T^{*,\mathbb{C}}M}_q.$$

В частности, любая комплексная r -форма ω , являющаяся гладким сечением расслоения

$$\Omega_{\mathbb{C}}^r M := \underbrace{T^{*,\mathbb{C}}M \wedge \dots \wedge T^{*,\mathbb{C}}M}_r,$$

записывается в виде

$$\omega = \omega^{r,0} + \omega^{r-1,1} + \dots + \omega^{1,r-1} + \omega^{0,r},$$

где форма $\omega^{p,q}$ имеет вид

$$\omega^{p,q} = \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j_1, \dots, j_q} a_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

и называется *формой типа (p, q)* . Расслоение форм типа (p, q) обозначается через $\Omega^{p,q}M$.

Вернемся к почти комплексным структурам. Пусть J – почти комплексная структура на M , задаваемая гладким сечением расслоения $\text{End}(TM)$. Продолжим ее комплексно-линейным образом до сечения расслоения $\text{End}(T^{\mathbb{C}}M)$. Значение продолженного линейного оператора $J_p \in \text{End}(T_p^{\mathbb{C}}M)$ в произвольной точке $p \in M$

в заданном локальном базисе задается той же матрицей, что и значение исходного линейного оператора $J_p \in \text{End}(T_p M)$ в точке p (по этой причине оба оператора обозначаются одним и тем же символом). Обозначим через $T_p^{1,0} M$ (соответственно $T_p^{0,1} M$) собственное подпространство оператора $J_p \in \text{End}(T_p^{\mathbb{C}} M)$, отвечающее собственному значению i (соответственно $-i$). Тогда для комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}} M$ получим следующее разложение

$$T^{\mathbb{C}} M = T^{1,0} M \oplus T^{0,1} M,$$

где $T^{1,0} M$ (соответственно $T^{0,1} M$) – подрасслоение $T^{\mathbb{C}} M$, слоями которого являются собственные подпространства $T_p^{1,0} M$ (соответственно $T_p^{0,1} M$).

Если взять в качестве локального базиса расслоения $T^{\mathbb{C}} M$ в окрестности точки $p \in M$ базис, образованный векторными полями

$$\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}; \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n},$$

то локальный базис подрасслоения $T^{1,0} M$ будут составлять поля

$$\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n},$$

а локальный базис подрасслоения $T^{0,1} M$ – поля

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}.$$

Гладкие сечения подрасслоения $T^{1,0} M$ (соответственно $T^{0,1} M$) называются иначе *векторными полями типа $(1, 0)$* (соответственно *векторными полями типа $(0, 1)$*). По аналогии с формами типа (p, q) можно ввести и векторные поля произвольного типа (p, q) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Почти комплексная структура J на гладком многообразии M называется *интегрируемой*, если оператор внешнего дифференцирования форм

$$d: \Omega_{\mathbb{C}}^r M \longrightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^{r+1} M$$

можно представить в виде суммы двух операторов

$$d = d' + d'',$$

где оператор d' переводит формы типа (p, q) , $p + q = r$, в формы типа $(p + 1, q)$:

$$d' : \Omega^{p,q}M \longrightarrow \Omega^{p+1,q}M,$$

а оператор d'' — формы типа (p, q) в формы типа $(p, q + 1)$:

$$d'' : \Omega^{p,q}M \longrightarrow \Omega^{p,q+1}M.$$

Поясним приведенное определение на простом примере. В случае форм типа $(1, 0)$ оператор d отображает расслоение $\Omega^{1,0}M$ в расслоение

$$\Omega_{\mathbb{C}}^2M = \Omega^{2,0}M \oplus \Omega^{1,1}M \oplus \Omega^{0,2}M.$$

Выполнение условия интегрируемости означает в этом случае, что компонента оператора d , действующая из расслоения $\Omega^{1,0}M$ в расслоение $\Omega^{0,2}M$ (называемая иначе тензором Нийенхейса), должна быть равна нулю.

Для интегрируемой почти комплексной структуры J выполняются соотношения

$$d'^2 = d'd'' + d''d' = d''^2 = 0,$$

каждое из которых можно взять за определение интегрируемости J .

Эквивалентная формулировка условия интегрируемости почти комплексной структуры J в терминах векторных полей звучит так: скобка любых векторных полей типа $(1, 0)$, т.е. гладких сечений расслоения $T^{1,0}M$, должна быть снова векторным полем типа $(1, 0)$.

ЗАДАЧА 4. Докажите эквивалентность всех приведенных определений интегрируемости почти комплексной структуры J на почти комплексном многообразии M . А именно, J интегрируема $\Leftrightarrow d = d' + d'' \Leftrightarrow d'^2 = d'd'' + d''d' = d''^2 = 0 \Leftrightarrow$ скобка векторных полей типа $(1, 0)$ есть снова векторное поле типа $(1, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (теорема Ньюлендера–Ниренберга, см. [14], п. 2.12). Если почти комплексная структура J на гладком многообразии M интегрируема, то такое многообразие на самом деле является комплексным. Иначе говоря, на нем можно построить

атлас из локальных комплексных координат, в которых оператор J будет задаваться умножением на i . В частности, почти комплексное многообразие (M, J) с интегрируемой почти комплексной структурой J обладает большим запасом локальных голоморфных функций. Напротив, на многообразии (M, J) с неинтегрируемой почти комплексной структурой J таких функций может не быть вовсе. $\square$

Предположим теперь, что почти комплексное многообразие (M, J) является также римановым, т.е. наделено римановой метрикой g . Будем называть эту метрику *эрмитовой*, если она совместима с J в том смысле, что

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y на M . В этом случае многообразие (M, g, J) называется *почти эрмитовым* или *эрмитовым* в случае, когда почти комплексная структура J интегрируема.

Пусть (M, g, J) – почти эрмитово многообразие. Рассмотрим на нем 2-форму

$$\omega(X, Y) := g(X, JY).$$

Если эта 2-форма замкнута, т.е. $d\omega = 0$, будем называть такое многообразие (M, g, J, ω) *почти кэлеровым*. Если форма ω к тому же невырождена (в этом случае ω задает симплектическую структуру на M), а почти комплексная структура J интегрируема, то форма ω называется *кэлеровой*, а само многообразие (M, g, J, ω) – *кэлеровым*.

Задача 5. На гладком многообразии M заданы три совместимые друг с другом структуры: почти комплексная структура J , риманова метрика g и симплектическая форма ω . Покажите, что любые две из этих структур однозначно определяют третью.

Обратимся к гармоническим отображениям комплексных многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ есть гладкое отображение почти комплексных многообразий. Оно называется *почти голоморфным* или *псевдоголоморфным*, если касательное к нему отображение $\varphi_*: TM \rightarrow TN$ коммутирует с почти комплексными структурами, т.е.

$$\varphi_* \circ {}^M J = {}^N J \circ \varphi_*,$$

где ${}^M J$ (соответственно ${}^N J$) есть почти комплексная структура на M (соответственно на N). Отображение φ называется *почти антиголоморфным*, если φ_* антикоммутирует с почти комплексными структурами:

$$\varphi_* \circ {}^M J = -{}^N J \circ \varphi_*.$$

Удобно также называть почти голоморфные отображения *+псевдоголоморфными*, а почти антиголоморфные отображения *-псевдоголоморфными*, так что оба понятия объединяются единым термином *$\pm$ псевдоголоморфных отображений*.

Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ есть гладкое отображение почти комплексных многообразий. Продолжим касательное отображение $\varphi_*: TM \rightarrow TN$ комплексно-линейным образом до отображения $\varphi_*: T^{\mathbb{C}}M \rightarrow T^{\mathbb{C}}N$ комплексифицированных касательных расслоений. Полученное отображение, в соответствии с разложениями

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M, \quad T^{\mathbb{C}}N = T^{1,0}N \oplus T^{0,1}N,$$

можно представить в блочном виде, где блоки задаются следующими четырьмя операторами

$$\begin{aligned} \partial' \varphi: T^{1,0}M &\longrightarrow T^{1,0}N, & \partial'' \varphi: T^{0,1}M &\longrightarrow T^{1,0}N, \\ \partial' \bar{\varphi}: \overline{T^{1,0}M} &\longrightarrow T^{0,1}N, & \partial'' \bar{\varphi}: \overline{T^{0,1}M} &\longrightarrow T^{0,1}N. \end{aligned}$$

Если отождествить φ_* с дифференциалом $d\varphi$, рассматриваемым как сечение расслоения

$$T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N),$$

то введенные операторы получают аналогичную интерпретацию как сечения соответствующих подрасслоений указанного расслоения. Например, оператор $\partial' \varphi$ можно отождествить с сечением расслоения

$$\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}N).$$

В терминах введенных операторов отображение φ *почти голоморфно* (соответственно *почти антиголоморфно*), если

$$\partial'' \varphi = 0 \quad (\text{соответственно } \partial' \varphi = 0).$$

В случае, когда оба многообразия M и N почти эрмитовы, энергию гладкого отображения $\varphi: M \rightarrow N$ можно представить в виде

$$E(\varphi) = E'(\varphi) + E''(\varphi),$$

где

$$E'(\varphi) = \int_M |\partial' \varphi|^2 \text{vol}, \quad E''(\varphi) = \int_M |\partial'' \varphi|^2 \text{vol}.$$

Отображение φ почти голоморфно (соответственно почти антиголоморфно) тогда и только тогда, когда $E''(\varphi) = 0$ (соответственно $E'(\varphi) = 0$).

Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ есть гладкое отображение компактных почти кэлеровых многообразий. Положим

$$k(\varphi) := E'(\varphi) - E''(\varphi).$$

Задача 6. Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ есть гладкое отображение компактных почти кэлеровых многообразий. Покажите, что число

$$k(\varphi) := E'(\varphi) - E''(\varphi).$$

является топологическим инвариантом, т.е. зависит только от гомотопического класса отображения φ .

Поскольку

$$E(\varphi) = 2E'(\varphi) - k(\varphi) = 2E''(\varphi) + k(\varphi),$$

то экстремали у всех трех функционалов совпадают и всегда

$$E(\varphi) \geq |k(\varphi)|.$$

Следовательно, *почти голоморфные и почти антиголоморфные отображения φ задают минимумы энергии $E(\varphi)$ в заданном топологическом классе: при $k(\varphi) \geq 0$ минимумы реализуются на почти голоморфных отображениях с $E''(\varphi) = 0$, при $k(\varphi) < 0$ — на почти антиголоморфных отображениях с $E'(\varphi) = 0$.*

Тем самым, в случае почти кэлеровых многообразий локальные минимумы функционала энергии описываются также, как в случае отображений римановой сферы в себя.

В заключение остановимся более подробно на наиболее интересном для нас случае гармонических отображений римановых поверхностей в римановы многообразия. Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение из римановой поверхности M в риманово многообразие N . Как было отмечено выше, касательное отображение $\varphi_*: TM \rightarrow TN$ можно продолжить комплексно-линейным образом до отображения $\varphi_*: T^{\mathbb{C}}M \rightarrow T^{\mathbb{C}}N$ комплексифицированных

касательных расслоений и отождествить с сечением $d\varphi$ расслоения

$$T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N).$$

Поэтому дифференциал $d\varphi$ можно представить в виде суммы

$$d\varphi = \delta\varphi + \bar{\delta}\varphi, \quad (1.11)$$

где $\delta\varphi$ есть сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, а $\bar{\delta}\varphi$ – сечение расслоения $\Omega^{0,1}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$.

Обозначим, как и ранее, через ∇ естественную связность на расслоении $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$, порожденную римановыми связностями ${}^M\nabla$ и ${}^N\nabla$, и продолжим ее комплексно-линейно на комплексифицированное расслоение $T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$. Введем операторы, действующие на сечениях указанного расслоения, которые в терминах локальной координаты z на M определяются следующим образом

$$\delta := \nabla_{\partial/\partial z}, \quad \bar{\delta} := \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}$$

(заметим, что это определение согласуется с формулой (1.11)). Тогда условие гармоничности отображения $\varphi: M \rightarrow N$ будет записываться в виде

$$\bar{\delta}\delta\varphi = \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}(\delta\varphi) = \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}(\nabla_{\partial/\partial z}\varphi) = 0 \quad (1.12)$$

или в эквивалентной форме

$$\delta\bar{\delta}\varphi = \nabla_{\partial/\partial z}(\bar{\delta}\varphi) = \nabla_{\partial/\partial z}(\nabla_{\partial/\partial \bar{z}}\varphi) = 0. \quad (1.13)$$

В случае, когда многообразие N является кэлеровым, полученные условия можно упростить и далее, воспользовавшись соотношениями

$$\delta\varphi = \partial'\varphi + \overline{\partial''\varphi}, \quad \bar{\delta}\varphi = \partial''\varphi + \overline{\partial'\varphi}. \quad (1.14)$$

Так как для кэлерова многообразия N связность ${}^N\nabla$ сохраняет разложение $T^{\mathbb{C}}N = T^{1,0}N \oplus T^{0,1}N$ (см. задачу ниже), то условие гармоничности можно переписать в виде

$$\bar{\delta}\partial'\varphi = 0 \iff \delta\partial''\varphi = 0. \quad (1.15)$$

Задача 7. Докажите, что риманова связность ${}^N\nabla$ на кэлеровом многообразии N сохраняет пространства $\Omega^{p,q}M$ форм типа (p, q) .

Еще одна интерпретация условия гармоничности будет дана после того, как мы сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Кошуля–Мальгранжа, см. [13], а также [2], гл. IV, п. 1). Пусть $E \rightarrow M$ – комплексное векторное расслоение над римановой поверхностью M , снабженное связностью ∇ . Тогда на E существует единственная комплексная структура, согласованная со связностью ∇ , относительно которой $E \rightarrow M$ является голоморфным векторным расслоением. Согласованность комплексной структуры с ∇ означает, что $\bar{\partial}$ -оператор, отвечающий этой структуре, совпадает с $\nabla^{0,1}$.

Будем называть комплексную структуру на E , существование которой утверждается в сформулированной теореме, *структурой Кошуля–Мальгранжа*, индуцированной связностью ∇ , или коротко, *КМ-структурой*. Заметим, что векторное подрасслоение $F \subset E$ голоморфно относительно введенной КМ-структуры тогда и только тогда, когда выполняется условие $\nabla^{0,1}C^\infty(M, F) \subset C^\infty(M, F)$, где через $C^\infty(M, F)$ обозначено пространство гладких сечений расслоения $E \rightarrow M$.

В терминах КМ-структуры на $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, индуцированной связностью ∇ , условие гармоничности φ , даваемое формулой (1.12), означает, что $\delta\varphi$ есть голоморфное сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$. В случае, если N кэлерово, условие гармоничности φ , даваемое формулой (1.15), означает, что $\partial'\varphi$ есть голоморфное сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}N)$.

Глава 2. Твисторный подход

Эта глава посвящена твисторному подходу к построению гармонических отображений. Она начинается с эвристической формулировки так называемой твисторной программы Пенроуза. Затем мы разбираем наиболее известный пример твисторного расслоения над 4-мерной сферой, даваемый хопфовским расслоением, и приводим общую конструкцию твисторного расслоения над римановыми многообразиями, восходящую к пионерской работе Атьи–Хитчина–Зингера. Завершается глава изложением твисторной конструкции гармонических отображений, предложенной Иллсом и Саламоном.

2.1. Твисторная программа Пенроуза

Основной целью курса является построение гармонических отображений из компактных римановых поверхностей в компактные кэлеровы многообразия. Точнее, мы описываем метод, который позволяет свести эту общую проблему к решению более узкой (и более исследованной) задачи: построению голоморфных отображений из компактных римановых поверхностей в компактные кэлеровы многообразия. Образы голоморфных отображений компактных римановых поверхностей в комплексные многообразия часто называются просто *голоморфными кривыми*. Таким образом, речь идет о следующей редукции:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{гармонические отображе-} \\ \text{ния компактных римановых} \\ \text{поверхностей в компактные} \\ \text{кэлеровы многообразия} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные кривые} \\ \text{в компактных кэлеровых} \\ \text{многообразиях} \end{array} \right\}.$$

В случае успеха нам удалось бы свести исходную “вещественную” задачу построения гармонических отображений к “комплексной” задаче построения голоморфных кривых.

В дифференциальной геометрии имеется общий подход к такого рода редукциям, который носит название *твисторного мето-*

да Пенроуза. Сначала поясним идею Пенроуза на эвристическом уровне, приспособив ее к рассматриваемой задаче.

Твисторная программа Пенроуза. Построить для заданного риманова многообразия N так называемое твисторное расслоение $\pi: Z \rightarrow N$, где Z – почти комплексное многообразие, а π – гладкая сублимерсия (т.е. гладкое отображение $Z \rightarrow N$ с касательным отображением максимального ранга). Это расслоение должно обладать следующим нетривиальным свойством: оно должно устанавливать взаимно-однозначное соответствие между:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{объекты римановой гео-} \\ \text{метрии на } N \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{объекты голоморфной гео-} \\ \text{метрии на } Z \end{array} \right\}$$

Таким образом, твисторный подход позволяет изучать вещественную геометрию риманова многообразия N через комплексную геометрию его твисторного пространства Z .

Приведенная формулировка твисторной программы Пенроуза дана в работе Атьи–Хитчина–Зингера [4], где одновременно предложена конкретная конструкция твисторного расслоения $\pi: Z \rightarrow N$ для произвольного четномерного риманова многообразия N . Прежде, чем переходить к изложению этой конструкции в общей ситуации, разберем ее на простом, но содержательном примере $N = S^4$.

2.2. Хопфовское расслоение над S^4

Мы будем рассматривать евклидову сферу S^4 как кватернионную проективную прямую. Эта интерпретация аналогична представлению римановой сферы в виде комплексной проективной прямой.

ОТСТУПЛЕНИЕ (кватернионы). Пространство кватернионов $\mathbb{H}$ состоит из элементов вида

$$q = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – вещественные числа, i, j, k – мнимые единицы, т.е.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Сложение и умножение кватернионов на вещественные числа определяются покомпонентно, закон умножения кватернионов

вводится с помощью соотношений

$$ij = -ji = k$$

и их циклических перестановок.

Как вещественное векторное пространство $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, а с алгебраической точки зрения является телом (т.е. некоммутативным полем). В частности, любой ненулевой элемент $\mathbb{H}$ обладает обратным (проверьте это!).

Кватернионы $q \in \mathbb{H}$ можно записывать также в комплексной форме

$$q = z_1 + z_2 j,$$

где $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$ — комплексные числа. Как комплексное векторное пространство, $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$.

Удобно реализовать кватернионы в виде комплексных 2×2 -матриц, сопоставляя

$$q = z_1 + z_2 j \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix},$$

при этом умножению кватернионов будет отвечать умножение матриц (проверьте!).

Роль единичной окружности в $\mathbb{H}$ играет сфера S^3 , отождествляемая с группой

$$\mathrm{Sp}(1) = \{q = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 : |q|^2 := q\bar{q} = 1\},$$

где $\bar{q} := x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4$. В матричной реализации этой группы будет соответствовать группа $\mathrm{SU}(2)$ унитарных 2×2 -матриц с единичным детерминантом.

Задача 8. Группа $\mathrm{SO}(4)$ не является простой (в отличие от групп $\mathrm{SO}(n)$ с $n > 4$). Если обозначить через $\mathrm{Spin}(4)$ универсальную (иначе говоря, односвязную) накрывающую группы $\mathrm{SO}(4)$, то эта группа, называемая *спинорной*, будет двукратно накрывать группу $\mathrm{SO}(4)$. При этом

$$\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2).$$

Докажите этот факт, пользуясь кватернионной интерпретацией $\mathbb{R}^4$. $\square$

Вернемся к построению хопфовского расслоения над S^4 . Для этого отождествим евклидову сферу $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ с кватернионной проективной прямой $\mathbb{HP}^1$. Точками $\mathbb{HP}^1$ являются пары $[q, q']$ кватернионов, не равных нулю одновременно, которые заданы с точностью до умножения справа на ненулевой кватернион. (Строго говоря, определенное таким образом множество нужно называть правой кватернионной прямой. Аналогичным образом можно определить и левую кватернионную прямую. Поскольку в этом курсе используется только правая кватернионная прямая, мы опускаем термин “правая” в ее названии.)

Хопфовское расслоение над $S^4 \cong \mathbb{HP}^1$ имеет вид

$$\pi: \mathbb{CP}^3 \xrightarrow{\mathbb{CP}^1} \mathbb{HP}^1$$

и задается тавтологической формулой

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \longmapsto [z_1 + z_2j, z_3 + z_4j].$$

Здесь, четверка комплексных чисел $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ рассматривается как точка 3-мерного комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}^3$, т.е. определена с точностью до умножения на ненулевое комплексное число (общее определение n -мерного комплексного проективного пространства будет дано ниже в п. 3.1), а пара кватернионов $[z_1 + z_2j, z_3 + z_4j] \in \mathbb{HP}^1$ определена с точностью до умножения на ненулевой кватернион. Слой расслоения π совпадает с комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}^1$, инвариантной относительно умножения справа на j , т.е. инвариантной относительно отображения

$$j: [z_1, z_2, z_3, z_4] \longmapsto [-z_2, z_1, -z_4, z_3].$$

Для того, чтобы усмотреть связь построенного расслоения со стандартным хопфовским расслоением над S^4 , поднимем отображение π на сферу $S^7 \subset \mathbb{C}^4$, пользуясь расслоением

$$\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\mathbb{C}^1} \mathbb{CP}^3,$$

сопоставляющим точке пространства $\mathbb{C}^4$ проходящую через нее комплексную прямую. Получим расслоение

$$\pi: S^7 \xrightarrow{S^3} S^4$$

со слоем S^3 – кватернионный аналог хопфовского расслоения

$$\pi: S^3 \xrightarrow{S^1} S^2,$$

которое также можно построить из комплексного расслоения

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\mathbb{C}^1} \mathbb{CP}^1.$$

Построенное расслоение $\pi: \mathbb{CP}^3 \rightarrow S^4$ имеет красивую интерпретацию в терминах комплексных структур на $\mathbb{R}^4$, предложенную в работе [4]. Рассмотрим ограничение хопфовского расслоения π на евклидово пространство $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$, имеющее вид

$$\pi: \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

где выброшенная комплексная проективная прямая $\mathbb{CP}^1$ отождествляется со слоем $\pi^{-1}(\infty)$ хопфовского расслоения над $\infty \in S^4$.

Пространство $\mathbb{R}^4$ можно отождествить с $\mathbb{C}^2$ многими способами, среди которых нет канонического. Опишем пространство всех почти комплексных структур на $\mathbb{R}^4$, совместимых с евклидовой метрикой и ориентацией $\mathbb{R}^4$. Они задаются гладкими сечениями $J = \{J_q\}$ расслоения $\text{End}(T\mathbb{R}^4)$, такими что значение J_q в точке $q \in \mathbb{R}^4$ является линейным оператором на $T_q\mathbb{R}^4 \sim \mathbb{R}^4$, квадрат которого равен $-I$ и совместимым с евклидовой метрикой и ориентацией $\mathbb{R}^4$. Последнее означает, что операторы J_q задаются кососимметричными матрицами с нулевым следом (почему?). Иначе говоря, все они получаются из фиксированного оператора J_q^0 действием преобразований из группы $\text{SO}(4)$. При этом комплексные структуры с операторами J_q , полученными из J_q^0 действием преобразований из подгруппы $\text{U}(2) \subset \text{SO}(4)$, эквивалентны исходной (т.е. получаются из нее с помощью комплексной замены базиса). Таким образом, пространство комплексных структур на $T_q\mathbb{R}^4$, совместимых с метрикой и ориентацией, можно отождествить с

$$\text{SO}(4)/\text{U}(2).$$

Указанное однородное пространство совпадает с

$$\text{SO}(4)/\text{U}(2) \cong \text{SU}(2)/\text{U}(1) \cong S^3/S^1 \cong S^2.$$

Задача 9. Докажите этот факт.

Тем самым, слой расслоения комплексных структур над $\mathbb{R}^4$ в произвольной точке q , состоящий из различных комплексных структур на $T_x\mathbb{R}^4 \sim \mathbb{R}^4$, совпадает с $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$, а само расслоение совпадает с расслоением

$$\pi: \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^4.$$

Последний факт можно пояснить еще таким образом.

Пространство $\mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1$ расслаивается на параллельные проективные плоскости $\mathbb{CP}^2$, которые пересекаются в $\mathbb{CP}^3$ на выброшенной проективной прямой $\mathbb{CP}_\infty^1 = \pi^{-1}(\infty)$. Через каждую точку z слоя над точкой $q \in \mathbb{R}^4$ проходит единственная проективная плоскость $\mathbb{CP}_z^2$ из этого семейства. Касательное отображение π_* отождествляет эту проективную плоскость с пространством $T_q\mathbb{R}^4$ и, тем самым, наделяет $T_q\mathbb{R}^4$ индуцированной комплексной структурой. Это и есть комплексная структура $J_{\pi(z)}$, отвечающая точке z расслоения $\pi: \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

Еще одну интерпретацию хопфовского расслоения можно получить, пользуясь следующей задачей.

Задача 10. Пусть M есть ориентированное риманово 4-мерное многообразие. Тогда расслоение 2-форм $\Omega^2 M$ на M является прямой суммой расслоений автодуальных и антиавтодуальных форм

$$\Omega^2 M \cong \Omega_+^2 M \oplus \Omega_-^2 M.$$

Формы $\omega \in \Omega_{\pm}^2 M$ удовлетворяют соотношению: $*\omega = \pm\omega$, где $*$ – оператор Ходжа, определяемый метрикой M . Покажите, что сферическое подрасслоение $S(\Omega_-^2 M)$ можно каноническим образом отождествить с твисторным расслоением комплексных структур на M , совместимых с метрикой и ориентацией.

Отметим важное свойство построенного расслоения $\pi: \mathbb{CP}^3 \rightarrow S^4$. Твисторное пространство совпадает в этом случае с $\mathbb{CP}^3$ и, следовательно, обладает канонической комплексной структурой.

В следующем параграфе мы увидим, что многие из отмеченных нами свойств хопфовского расслоения распространяются на твисторные расслоения общих римановых многообразий.

2.3. Твисторное расслоение риманова многообразия

Начнем с описания пространства *эрмитовых структур* на четномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, т.е. комплексных структур на $\mathbb{R}^{2n}$, задаваемых кососимметричными линейными операторами J , квадрат которых равен $-I$. Пространство таких структур, обозначаемое через $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$, отождествляется с однородным пространством

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n).$$

Оно является объединением двух копий однородного пространства $\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$, параметризующего комплексные структуры на $\mathbb{R}^{2n}$, совместимые с метрикой и ориентацией (в случае $n = 2$ это пространство, рассмотренное в предыдущем параграфе, совпадает с S^2).

Пространство $\mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$ является комплексным многообразием. Комплексную структуру на $\mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$ можно построить, вкладывая его в комплексное грассманово многообразие $G_n(\mathbb{C}^{2n})$, состоящее из n -мерных подпространств в $\mathbb{C}^{2n}$. (Общее определение грассмановых многообразий дается ниже в п. 3.1.) Указанное вложение сопоставляет комплексной структуре $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ касательное пространство $T_J^{1,0}(\mathbb{R}^{2n})$ векторов типа $(1, 0)$ относительно этой структуры:

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \ni J \longmapsto T_J^{1,0}(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathbb{C}^{2n}. \quad (2.1)$$

Образ этого вложения является комплексным подмногообразием в $G_n(\mathbb{C}^{2n})$ с комплексной структурой, индуцированной из $G_n(\mathbb{C}^{2n})$. (Образ вложения (2.1) можно описать явным образом. Если продолжить евклидову метрику h_0 комплексно-линейным образом с $\mathbb{R}^{2n}$ на $\mathbb{C}^{2n}$, то образ (2.1) будет состоять из n -мерных подпространств в $\mathbb{C}^{2n}$, изотропных относительно h_0 . Иначе говоря, этот образ совпадает с квадрикой в $G_n(\mathbb{C}^{2n})$, задаваемой уравнением: $h_0(z, z) = 0$ в естественных комплексных координатах на $G_n(\mathbb{C}^{2n})$, см. п. 3.1.)

Можно ввести комплексную структуру на пространстве $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \cong O(2n)/U(n)$ и не обращаясь к вложению в $G_n(\mathbb{C}^{2n})$, если воспользоваться общей конструкцией инвариантных комплексных структур на орбитах присоединенного представления, излагаемой в следующем отступлении.

ОТСТУПЛЕНИЕ (инвариантные комплексные структуры на орбитах присоединенного представления; см. [17], п. 3). Пусть G есть компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и $C \subset \mathfrak{g}$ – орбита присоединенного представления (см. п. 5.1) группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (иначе говоря, C есть класс сопряженности). Тогда на C имеется инвариантная комплексная структура, которую можно ввести следующим образом. Фиксируем произвольную точку $\xi \in C$ и обозначим через

$$H_\xi = \{g \in G: \text{Ad } g(\xi) = \xi\}$$

подгруппу изотропии точки ξ , алгебра Ли которой совпадает с

$$\mathfrak{h}_\xi = \{\eta \in \mathfrak{g}: \text{ad } \xi(\eta) = [\xi, \eta] = 0\}.$$

При этом орбита C отождествляется с фактором G/H_ξ , а ее касательное пространство в точке ξ – с фактором $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_\xi$. Фиксируем на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ скалярное произведение, инвариантное относительно присоединенного действия группы G . Оператор $\text{ad } \xi$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ кососимметричен и имеет ядро, совпадающее с $\mathfrak{h}_\xi$. Поэтому образ $\mathfrak{m}_\xi$ этого оператора является прямым дополнением к $\mathfrak{h}_\xi$, так что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\xi \oplus \mathfrak{m}_\xi$ и $T_\xi C \cong \mathfrak{m}_\xi$.

Для того, чтобы определить G -инвариантную комплексную структуру на орбите C , достаточно построить H_ξ -инвариантное разложение комплексифицированного касательного пространства $T_\xi^{\mathbb{C}} C \cong \mathfrak{m}_\xi^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму подпространств $\mathfrak{m}_\xi^+$ векторов

типа $(1, 0)$ и $\mathfrak{m}_\xi^-$ векторов типа $(1, 0)$, а затем разнести его в другие точки орбиты C с помощью действия группы G .

Продолжение оператора $\text{ad } \xi$ на $T_\xi^\mathbb{C}C$ является косоэрмитовым оператором с ненулевыми собственными значениями, поэтому мы можем взять за $\mathfrak{m}_\xi^+$ прямую сумму собственных подпространств $\text{ad } \xi$ с собственными значениями λ , имеющими положительную мнимую часть: $\text{Im } \lambda > 0$, а за $\mathfrak{m}_\xi^-$ – прямую сумму собственных подпространств с собственными значениями λ : $\text{Im } \lambda < 0$. Тогда

$$\mathfrak{m}_\xi^\mathbb{C} = \mathfrak{m}_\xi^+ \oplus \mathfrak{m}_\xi^-, \quad \mathfrak{m}_\xi^- = \overline{\mathfrak{m}_\xi^+}, \quad \mathfrak{m}_\xi^+ \cap \mathfrak{m}_\xi^- = 0.$$

Очевидно, что разложение $\mathfrak{m}_\xi^\mathbb{C} = \mathfrak{m}_\xi^+ \oplus \mathfrak{m}_\xi^-$ является H_ξ -инвариантным, поэтому оно определяет на C инвариантную почти комплексную структуру, для которой подпространство касательных векторов типа $(1, 0)$ в точке ξ совпадает с $\mathfrak{m}_\xi^+$. Указанная почти комплексная структура интегрируема, поскольку $[\mathfrak{m}_\xi^+, \mathfrak{m}_\xi^+] \subset \mathfrak{m}_\xi^+$. $\square$

В рассматриваемой нами ситуации $G = \text{O}(2n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2n)$, $C = \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathfrak{o}(2n)$. Роль ξ играет комплексная структура $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$, задающая разложение

$$T_J^\mathbb{C}\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^{2n} = T_J^{1,0} \oplus T_J^{0,1}.$$

В этом случае собственное подпространство $\mathfrak{m}_J^+$ допускает следующее описание

$$\mathfrak{m}_J^+ = \{A \in \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C}) : AT_J^{1,0} = 0, \quad AT_J^{0,1} \subset T_J^{1,0}\}. \quad (2.2)$$

Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно (см. также [17], пред. 3.3).

Пусть, теперь, N – четномерное риманово многообразие размерности $2n$. Рассмотрим расслоение $\pi: \mathcal{J}(N) \rightarrow N$ эрмитовых структур на N , слоем которого в точке $q \in N$ является пространство $\mathcal{J}(T_q N) \cong \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ эрмитовых структур на касательном пространстве $T_q N$. Это расслоение ассоциировано с главным расслоением

$$\mathcal{O}(N) \longrightarrow N$$

ортонормированных реперов на N , слой которого в точке $q \in N$ совпадает с множеством $\mathcal{O}(T_q N)$ всех ортонормированных реперов в $T_q N$ и отождествляется с группой $\text{O}(2n)$.

Иначе говоря, расслоение $\mathcal{J}(N)$ можно отождествить с расслоением

$$\mathcal{J}(N) = \mathcal{O}(N) \times_{\mathcal{O}(2n)} \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$$

(смысл этого обозначения проясняется в нижеследующем отступлении).

ОТСТУПЛЕНИЕ (ассоциированные расслоения и косые произведения; см. [23], гл. 4, п. 5). Пусть на многообразии E действует справа группа Ли G и это действие не имеет неподвижных точек. Пусть, далее, F – другое многообразие, на котором та же группа действует слева. Тогда прямое произведение $E \times F$ можно снабдить правым действием группы G по правилу:

$$(e, f)g := (eg, g^{-1}f) \text{ для } e \in E, f \in F, g \in G.$$

Проекция на первый сомножитель порождает отображение

$$\pi: E \times F \longrightarrow E \longrightarrow E/G$$

на пространство орбит группы G в E . Обозначим через

$$E \times_G F$$

пространство орбит группы G в $E \times F$. Указанное выше отображение порождает отображение

$$\pi: E \times_G F \longrightarrow E/G,$$

которое является расслоением со структурной группой G и слоем F . В случае, когда E есть главное G -расслоение над многообразием M , эта конструкция дает расслоение над M , ассоциированное с $E \rightarrow M$, которое имеет слоем пространство F . $\square$

В рассматриваемом нами случае роль G играет группа $\mathcal{O}(2n)$, которая действует справа на $\mathcal{O}(N)$ заменой реперов, и действует левыми сдвигами на пространстве $\mathcal{J}(N)$.

Расслоение $\mathcal{J}(N) \rightarrow N$ будет играть роль твисторного расслоения над N . Покажем, прежде всего, что $\mathcal{J}(N)$ обладает естественной почти комплексной структурой. Для этого нам понадобится определение связности на расслоении.

ОТСТУПЛЕНИЕ (связности и вертикально-горизонтальные разложения; см. [5], гл. 5, пп. 5.1, 5.2, 5.4). Пусть $P \rightarrow M$ – главное расслоение над n -мерным многообразием M , слоем которого является группа Ли G .

Рассмотрим распределение плоскостей $V \subset TP$, слой которого в точке $p \in P$ состоит из векторов, касательных к слою $P_{\pi(p)}$ расслоения P , проходящему через точку p . Иными словами,

$$V_p = \{v \in T_p P : \pi_* v = 0\}.$$

Связностью на расслоении $P \rightarrow M$ называется гладкое распределение $H \subset TP$ n -мерных плоскостей, для которого выполняются следующие условия:

- (1) $T_p P = V_p \oplus H_p$ в каждой точке $p \in P$;
- (2) группа G , действующая на TP с помощью присоединенного представления, отображает H_p в H_{pg} для любого $g \in G$.

Распределение V называется *вертикальным*, а H – *горизонтальным распределением* на расслоении P .

Из приведенного определения связности вытекает, что касательное отображение π_* устанавливает изоморфизм

$$\pi_* : H_p \longrightarrow T_{\pi(p)} M$$

для любого $p \in P$. Поэтому любое векторное поле X на M допускает однозначный подъем до сечения $\tilde{X}$ расслоения H , называемого *горизонтальным подъемом* векторного поля X . Это позволяет, в частности, определить *параллельный перенос* слоя $P_{\pi(p)}$ вдоль произвольного пути $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ на M с началом в точке $\pi(p)$: $\gamma(0) = \pi(p)$. Для этого нужно рассмотреть горизонтальный подъем γ до пути $\tilde{\gamma}$ на расслоении P с началом в точке p и выбрать в качестве образа точки p при параллельном переносе вдоль γ значение $\tilde{\gamma}(1)$. Указанная конструкция связывает данное определение связности с ее определением в терминах параллельного переноса (см. п. 1.3).

Для того, чтобы установить соответствие приведенного определения с определением связности в терминах ковариантного дифференцирования (символов Кристоффеля–Шварца), введем *форму связности*, которая является 1-формой θ на расслоении P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Эта форма задается следующим образом: значение θ в точке $p \in P$ на векторе $v \in T_p P$ равно проекции $\text{pr}_V(v)$ этого вектора на вертикальное подпространство $V_p \subset T_p P$, рассматриваемой как элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что форма связности однозначно определяет саму связность H , а именно, слой H_p отождествляется с ядром формы θ_p .

Построим теперь вертикально-горизонтальное разложение на расслоении, которое ассоциировано с главным расслоением $P \rightarrow M$, снабженным связностью ${}^P H$. Пусть $E \rightarrow M$ – такое расслоение со слоем F и структурной группой G , действующей на F слева. Рассмотрим отображение

$$\rho: P \times F \longrightarrow E, \quad (p, f) \longmapsto e = \rho(p)f,$$

задаваемое действием элемента $p \in G$ на элемент $f \in F$. Касательное к нему отображение

$$\rho_*: T_{(p,f)}(P \times F) \longrightarrow T_e E$$

позволяет определить горизонтальное распределение ${}^E H$ на $E \rightarrow M$, полагая

$${}^E H_e := \rho_*({}^P H_p). \quad \square$$

Вернемся к твисторному расслоению $\mathcal{J}(N) \rightarrow N$. Риманова связность ${}^N \nabla$ порождает естественную связность на главном $O(2n)$ -расслоении $\mathcal{O}(N) \rightarrow N$, которая определяет вертикально-горизонтальное разложение ассоциированного расслоения $\mathcal{J}(N)$:

$$T\mathcal{J}(N) = V \oplus H.$$

Введем почти комплексную структуру $\mathcal{J}^1$ на $\mathcal{J}(N)$, полагая

$$\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}^v \oplus \mathcal{J}^h.$$

Значение вертикальной компоненты $\mathcal{J}_z^v \in \text{End}(V_z)$ в точке $z \in \mathcal{J}(N)$ совпадает с канонической комплексной структурой на пространстве

$$V_z \cong \text{O}(2n)/\text{U}(n),$$

введенной в начале этого параграфа. Значение горизонтальной компоненты $\mathcal{J}_z^h \in \text{End}(H_z)$ в точке z совпадает с комплексной структурой $J(z) \leftrightarrow z$ на пространстве H_z , отождествляемом с $T_{\pi(z)}N$ посредством π_* . Напомним, что слой $\pi^{-1}(q)$ расслоения $\mathcal{J}(N) \rightarrow N$ над точкой $q = \pi(z) \in N$ состоит из эрмитовых структур на $T_q N$ и мы обозначаем через $J(z)$ эрмитову структуру на $T_q N$, отвечающую точке $z \in \pi^{-1}(q)$.

Построенная почти комплексная структура $\mathcal{J}^1$ на $\mathcal{J}(N)$ превращает пространство $\mathcal{J}(N)$ в почти комплексное многообразие.

2.4. Твисторная конструкция гармонических отображений в римановы многообразия

В предыдущем параграфе мы построили для произвольного четномерного риманова многообразия N твисторное расслоение

$$\pi: Z = \mathcal{J}(N) \longrightarrow N$$

и наделили твисторное пространство Z почти комплексной структурой $\mathcal{J}^1$. В этом параграфе мы покажем, каким образом можно использовать указанное твисторное расслоение для решения нашей исходной задачи – построения гармонических отображений из компактных римановых поверхностей в римановы многообразия.

Начнем с эвристических соображений. Напомним, что согласно твисторной программе Пенроуза можно свести любую задачу римановой геометрии на рассматриваемом нами римановом многообразии N к некоторой задаче комплексной геометрии на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$. Поверив в этот тезис Пенроуза, следует предположить, что гармонические отображения $\varphi: M \rightarrow N$ из компактной римановой поверхности M в многообразии N должны возникать из псевдоголоморфных отображений $\psi: M \rightarrow (Z, \mathcal{J}^1)$ как проекции этих отображений на N , т.е. $\varphi = \pi \circ \psi$:

$$\begin{array}{ccc} & (Z, \mathcal{J}^1) & \\ \psi \nearrow & \downarrow \pi & \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

И это почти верно. Оказывается, что проекции псевдоголоморфных отображений $\psi: M \rightarrow Z$ на N действительно удовлетворяют дифференциальным уравнениям 2-го порядка на N , но это не гармонические уравнения, а *ультрагиперболические*, т.е. гармонические уравнения с “неправильной” сигнатурой (n, n) вместо нужной нам сигнатуры $(2n, 0)$. Поэтому, если мы хотим, оправдывая тезис Пенроуза, строить гармонические отображения $\varphi: M \rightarrow N$ как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi: M \rightarrow Z$, то должны поменять определение почти комплексной структуры на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$. А именно, в терминах вертикально-горизонтального разложения

$$T\mathcal{J}(N) = V \oplus H,$$

искомая почти комплексная структура $\mathcal{J}^2$ на $\mathcal{J}(N)$ должна задаваться как

$$\mathcal{J}^2 = (-\mathcal{J}^v) \oplus \mathcal{J}^h.$$

Указанная почти комплексная структура на $\mathcal{J}(N)$ была введена Илсом и Саламоном и, как мы увидим, именно она отвечает за твисторную интерпретацию гармонических отображений.

Переходя к строгому доказательству этого утверждения, определим сначала более формально понятие твисторного расслоения риманова многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Гладкое расслоение $\pi: Z \rightarrow N$, где $Z = (Z, \mathcal{J}^2)$ есть почти комплексное многообразие, называется *твисторным расслоением* риманова многообразия N , если проекция $\varphi := \pi \circ \psi$ любого псевдоголоморфного отображения $\psi: M \rightarrow Z$ произвольной компактной римановой поверхности M в твисторное пространство Z является гармоническим отображением $\varphi: M \rightarrow N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поясним, почему в приведенном определении и, вообще, в этом курсе мы ограничиваемся отображениями из римановых поверхностей M , а не рассматриваем, скажем, отображения из произвольных комплексных (или почти комплексных) многообразий M . Можно показать, что проекции почти голоморфных отображений $\psi: M \rightarrow (\mathcal{J}(N), \mathcal{J}^2)$ на риманово многообразие N при $\dim_{\mathbb{C}} M > 1$ являются не только гармоническими, но и плюригармоническими отображениями (т.е. удовлетворяют гармоническому уравнению при ограничении на любую комплексную кривую в M), что накладывает на них очень сильные ограничения. Поэтому, в надежде получить все гармонические отображения $\varphi: M \rightarrow N$ с помощью твисторной конструкции, мы ограничиваемся случаем $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$.

Пусть N – риманово многообразие размерности $2n$ и $\pi: Z = \mathcal{J}(N) \rightarrow N$ – его твисторное расслоение эрмитовых структур. Риманова связность ${}^N\nabla$ определяет разложение

$$T\mathcal{J}(N) = V \oplus H,$$

в терминах которого введенные почти комплексные структуры задаются как

$$\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}^v \oplus \mathcal{J}^h, \quad \mathcal{J}^2 = (-\mathcal{J}^v) \oplus \mathcal{J}^h.$$

Рассмотрим вопрос об их интегрируемости.

ТЕОРЕМА 2 (Ронсли, см. [17]). *Почти комплексная структура $\mathcal{J}^1$ на расслоении $\mathcal{J}(N)$ интегрируема $\iff N$ конформно плоско, т.е. N конформно эквивалентно плоскому пространству.*

Напомним, что отображение $\varphi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ римановых многообразий называется *конформным*, если индуцируемая им метрика φ^*h на M конформно эквивалентна римановой метрике g многообразия M , т.е.

$$\varphi^*h = \lambda g$$

для некоторой положительной гладкой функции λ на M .

Что касается почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на $\mathcal{J}(N)$, то она никогда не интегрируема (см. [18]). Пояснить последнее утверждение можно следующим образом. Нетрудно показать, исходя из определения почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$, что при условии ее интегрируемости локальные $\mathcal{J}^2$ -голоморфные кривые $f: U \rightarrow \mathcal{J}(N)$ могут быть только горизонтальными, т.е. касательные к ним пространства должны принадлежать горизонтальному распределению H . С другой стороны, если бы $(\mathcal{J}(N), \mathcal{J}^2)$ было комплексным многообразием, то локальную голоморфную кривую на нем можно было выпустить в любом комплексном касательном направлении.

На первый взгляд, приведенные результаты о неинтегрируемости почти комплексных структур $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ выглядят разочаровывающими, поскольку неинтегрируемые почти комплексные структуры могут быть “дикими” – например, они могут не иметь даже локальных голоморфных функций. Однако в рассматриваемой задаче мы имеем дело, к счастью, не с голоморфными функциями на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$ (т.е. с голоморфными отображениями $f: Z \rightarrow \mathbb{C}$), а с двойственным объектом – голоморфными отображениями $\psi: M \rightarrow Z$ из римановых поверхностей M в Z . Такое отображение ψ голоморфно относительно почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на $Z \iff$ оно удовлетворяет уравнению Коши–Римана $\partial_J \psi = 0$ относительно индуцированной почти комплексной структуры $J := \varphi^*(\mathcal{J}^2)$ на M . А на римановой поверхности любая почти комплексная структура интегрируема. Поэтому свойства интегрируемости почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$ прямого отношения к нашей задаче не имеют. Мы упомянули о них для того, чтобы дать представление об устройстве введенных почти комплексных структур.

Вернемся к задаче построения гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow N$ из компактных римановых поверхностей M в заданное риманово многообразие N . Допустим, что $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$ есть

гладкое отображение, проекция которого на N совпадает с заданным отображением $\varphi: M \rightarrow N$: $\varphi = \pi \circ \psi$.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{J}(N) \\ & \nearrow \psi & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

По определению горизонтального распределения H , индуцированное расслоение $\varphi^{-1}(TN)$ изоморфно обратному образу $\psi^{-1}H$, поэтому расслоение $\varphi^{-1}(TN)$ наследует почти комплексную структуру $\mathcal{J}^h$ из H . Значение этой почти комплексной структуры на слое $\varphi^{-1}(TN)_p = T_{\varphi(p)}N$ равно $\mathcal{J}_{\psi(p)}^h \in \mathcal{J}(N)_{\varphi(p)}$. Обратно, для любого гладкого отображения $\varphi: M \rightarrow N$ задание почти комплексной структуры на расслоении $\varphi^{-1}(TN)$ порождает естественным образом отображение $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$ со свойством: $\varphi = \pi \circ \psi$.

Следовательно, построение отображения $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$ таково, что $\varphi = \pi \circ \psi$, эквивалентно введению почти комплексной структуры на расслоении $\varphi^{-1}(TN)$.

Обозначим почти комплексную структуру на расслоении $\varphi^{-1}(TN)$, индуцируемую отображением ψ , через J_ψ . Ее можно представить в виде $J_\psi = \psi^{-1}J$, где J – почти комплексная структура на N (совпадающая с образом отображения $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$). Почти комплексная структура J_ψ порождает разложение комплексифицированного расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ в прямую сумму собственных подрасслоений этой структуры, отвечающих собственным значениям $\pm i$. Чтобы подчеркнуть их зависимость от отображения $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$, обозначим эти собственные подрасслоения через $\underline{\psi}^\pm$. Тем самым, введение почти комплексной структуры на расслоении $\varphi^{-1}(TN)$, отвечающей отображению ψ , эквивалентно представлению комплексифицированного расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ в виде

$$\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N) = \underline{\psi}^+ \oplus \underline{\psi}^-.$$

Обозначим через $\varphi^{-1}\nabla$ связность на расслоении $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, индуцированную римановой связностью ${}^N\nabla$. Дифференциал $d\psi$ отображения ψ отождествляется с сечением расслоения $T^*M \otimes \psi^{-1}TZ$, где $Z = \mathcal{J}(N)$. Как было указано ранее, связность ${}^N\nabla$

порождает вертикально-горизонтальное разложение касательного расслоения TZ :

$$TZ = V \oplus H, \quad (2.3)$$

и, в соответствии с этим разложением, мы можем представить дифференциал $d\psi$ в виде суммы его вертикальной и горизонтальной составляющих. Горизонтальная составляющая совпадает с $d\varphi$, поскольку $H \cong \pi^{-1}(TN)$, а вертикальная составляющая совпадает с $\psi^*(\theta)$, где θ – 1-форма связности на Z , определяемой разложением (2.3). Таким образом,

$$d\psi = \psi^*(\theta) \oplus d\varphi$$

в соответствии с разложением (2.3).

Вертикальную компоненту дифференциала можно охарактеризовать еще и следующим утверждением, которое понадобится нам ниже.

ЛЕММА 1 (Ронсли, см. [17], пред. 5.2). *Для любого вектора $X \in TM$ имеет место соотношение*

$$[\psi^*(\theta)X, J_\psi] = (\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi.$$

Следующее предложение дает критерий $\mathcal{J}^1$ - и $\mathcal{J}^2$ -голоморфности отображения $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$ в терминах введенных понятий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (Ронсли [17]). *Отображение $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$ является $\mathcal{J}^1$ -голоморфным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1a) $d\varphi(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi}^+$;
- (1b) $(\varphi^{-1}\nabla)_Z C^\infty(\underline{\psi}^+) \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}^+)$ для любого вектора $Z \in T^{1,0}M$.

Эти условия можно записать в другой, эквивалентной форме:

- (2a) $d\varphi \circ {}^M J = J_\psi \circ d\varphi$;
- (2b) $(\varphi^{-1}\nabla)_Z (J_\psi)\underline{\psi}^+ = 0$ для любого вектора $Z \in T^{1,0}M$.

Отображение $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$ является $\mathcal{J}^2$ -голоморфным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (3a) $d\varphi(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi}^+$;
- (3b) $(\varphi^{-1}\nabla)_{\bar{Z}} C^\infty(\underline{\psi}^+) \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}^+)$ для любого вектора $\bar{Z} \in T^{0,1}M$.

Эти условия можно записать в эквивалентной форме:

$$(4a) \quad d\varphi \circ {}^M J = J_\psi \circ d\varphi;$$

$$(4b) \quad (\varphi^{-1}\nabla)_{\bar{Z}}(J_\psi)\psi^+ = 0 \text{ для любого вектора } \bar{Z} \in T^{0,1}M.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Напомним, что почти комплексные структуры $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ определяются в терминах вертикально-горизонтального разложения (2.3) и отличаются только знаком вертикальной компоненты $\mathcal{J}^v$. Приведенное предложение дает критерий почти голоморфности отображений $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$ отдельно для горизонтальной и вертикальной составляющих структур $\mathcal{J}^1$, $\mathcal{J}^2$. Горизонтальная голоморфность отображения ψ обеспечивается условием (1a)=(3a), совпадающим для обеих структур. Вертикальная голоморфность ψ гарантируется условиями (1b) и (3b), которые, как и следовало ожидать, отличаются знаком. Заметим, что условие (3b) означает голоморфность подрасслоения $\psi^+ \subset \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ относительно КМ-структуры на $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, индуцированной связностью $\varphi^{-1}\nabla$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только критерий $\mathcal{J}^2$ -голоморфности отображения $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$, утверждение, касающееся его $\mathcal{J}^1$ -голоморфности, доказывается аналогично. Для доказательства $\mathcal{J}^2$ -голоморфности ψ нужно проверить, что

$$d\psi \circ {}^M J = \psi^{-1}\mathcal{J}^2 \circ d\psi. \quad (2.4)$$

Горизонтальная составляющая этого соотношения имеет вид

$$d\varphi \circ {}^M J = \psi^{-1}J \circ d\varphi,$$

что совпадает с условием (4a). Вертикальная составляющая (2.4) имеет вид

$$\psi^*(\theta) \circ {}^M J = -\psi^{-1}\mathcal{J}^v \circ \psi^*(\theta).$$

Вычислим значения обеих частей последнего равенства на векторе $X \in TM$ и возьмем скобку полученных значений с оператором J_ψ . Пользуясь леммой 1, получим

$$(\varphi^{-1}\nabla)_M J_X J_\psi = -\psi^{-1}\mathcal{J}^v(\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi.$$

В случае, когда вектор X имеет тип $(0,1)$, левая часть равна $-i(\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi$ и последнее соотношение превращается в

$$\psi^{-1}\mathcal{J}^v(\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi = i(\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi.$$

Обозначая $A := (\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi$, мы можем переписать его в виде $\psi^{-1}\mathcal{J}^v A = iA$. Иными словами, $A \in \psi^{-1}(T^{1,0}V)$. Из формулы (2.2) (см. п. 2.3) вытекает, что последнее условие эквивалентно тому, что

$$A\underline{\psi}^+ = 0, \quad A\underline{\psi}^- \subset \underline{\psi}^+.$$

Первое из этих соотношений совпадает с (4b). Второе вытекает из следующего утверждения, проверку которого мы оставляем читателю.

Пусть $(M, \mathcal{J})$ – почти эрмитово комплексное многообразие и ∇ – риманова связность на M . Тогда оператор $\nabla_X \mathcal{J}$ отображает каждое из собственных подрасслоений оператора $\mathcal{J}$ в его ортогональное дополнение, т.е. $\nabla_X \mathcal{J}: T_{\mathcal{J}}^{1,0} M \rightarrow T_{\mathcal{J}}^{0,1} M$ и $\nabla_X \mathcal{J}: T_{\mathcal{J}}^{0,1} M \rightarrow T_{\mathcal{J}}^{1,0} M$.

Условия (3a), (3b) являются просто переформулировками условий (4a), (4b).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В приведенном предложении не использовался тот факт, что M является римановой поверхностью. Оно справедливо для произвольных гладких отображений $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$ почти комплексных многообразий M в пространство $\mathcal{J}(N)$.

Имея критерий $\mathcal{J}^2$ -голоморфности, даваемый предложением Ронсли, мы можем доказать, что расслоение эрмитовых структур $\mathcal{J}(M) \rightarrow N$ является твисторным в смысле определения 8.

ТЕОРЕМА 3. *Расслоение эрмитовых структур*

$$\pi: (\mathcal{J}(N), \mathcal{J}^2) \longrightarrow N$$

является твисторным, т.е. проекция $\varphi = \pi \circ \psi$ произвольного $\mathcal{J}^2$ -голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(N)$ произвольной римановой поверхности M в пространство $\mathcal{J}(N)$ является гармоническим отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны показать, что

$$\tau_\varphi = \text{tr}(\nabla d\varphi) = \nabla d\varphi(Z, \bar{Z}) = 0,$$

где $Z = \partial/\partial z \in T^{1,0}M$. Но

$$\nabla d\varphi(Z, \bar{Z}) = (\varphi^{-1}{}^N \nabla)_{\bar{Z}} d\varphi(Z) - d\varphi({}^M \nabla_{\bar{Z}} Z).$$

Заметим, что векторное поле ${}^M\nabla_{\bar{Z}}Z \in T^{1,0}M$, поскольку ${}^M\nabla_{\bar{Z}}{}^M\nabla_{\bar{Z}}Z = 0$ (это одна из формулировок условия интегрируемости комплексной структуры на M). Поэтому по условию (3a) из предложения 1

$$d\varphi({}^M\nabla_{\bar{Z}}Z) \subset \underline{\psi}^+.$$

С другой стороны,

$$(\varphi^{-1}{}^N\nabla)_{\bar{Z}}d\varphi(Z) \subset \underline{\psi}^+,$$

поскольку $d\varphi(Z) \subset \underline{\psi}^+$ по условию (3a), а

$$(\varphi^{-1}{}^N\nabla)_{\bar{Z}}: C^\infty(\underline{\psi}^+) \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}^+)$$

по условию (3b) из предложения 1. Поэтому

$$\tau_\varphi = \nabla d\varphi(Z, \bar{Z}) \subset \underline{\psi}^+.$$

Но τ_φ вещественно, следовательно,

$$\tau_\varphi \subset \underline{\psi}^+ \cap \overline{\underline{\psi}^+} = \underline{\psi}^+ \cap \underline{\psi}^- = \{0\}.$$

Тем самым, $\tau_\varphi = 0$, т.е. отображение φ гармонично.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Доказанная теорема немедленно переносится на случай, когда M есть произвольное кэлерово многообразие (проверьте это самостоятельно).

Мы показали, что проекция любой $\mathcal{J}^2$ -голоморфной кривой $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(M)$ является гармоническим отображением. Спрашивается, когда верно обратное, иными словами, когда указанное гармоническое отображение $\varphi: M \rightarrow N$ является проекцией некоторой $\mathcal{J}^2$ -голоморфной кривой $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(M)$? Оказывается, “воспоминанием” отображения $\varphi: M \rightarrow N$ о том, что оно было получено как проекция $\mathcal{J}^2$ -голоморфной кривой в $\mathcal{J}(M)$, служит, помимо его гармоничности, еще и конформность отображения φ .

Общее определение конформного отображения $\varphi: M \rightarrow N$ римановых многообразий, данное выше при обсуждении интегрируемости почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$, в случае римановой поверхности M можно переформулировать следующим образом. Отображение $\varphi: M \rightarrow N$ римановой поверхности M в риманово многообразие (N, h) *конформно*, если

$$h(\varphi_*(\partial/\partial z), \varphi_*(\partial/\partial z)) = 0 \quad (2.5)$$

(в этом равенстве подразумевается, что риманова метрика h продолжена комплексно-линейным образом на $T^{\mathbb{C}}N$). Указанное условие означает, что образ пространства $T^{1,0}M$ при касательном отображении φ является изотропным подпространством относительно метрики h , иначе говоря, конформность отображения φ эквивалентна его изотропности. В случае, когда N является кэлеровым, условие (2.5) можно переписать в виде

$$h(\partial'\varphi, \overline{\partial''\varphi}) = 0.$$

Возвращаясь к поставленному нами вопросу, можно показать (см. [17]), что любое гармоническое конформное отображение $\varphi: M \rightarrow N$ из компактной римановой поверхности M в ориентированное риманово многообразие N локально является проекцией некоторой $\mathcal{J}^2$ -голоморфной кривой $\psi: M \rightarrow \mathcal{J}(M)$.

Рассмотренное нами расслоение эрмитовых структур $\mathcal{J}(M) \rightarrow N$ является далеко не единственным твисторным расслоением, с помощью которого можно строить гармонические отображения. Исходя из расслоения $\mathcal{J}(M) \rightarrow N$, можно строить и другие твисторные расслоения $Z \rightarrow N$, пользуясь следующим методом, предложенным Ронсли.

Пусть задано гладкое расслоение $p: Z \rightarrow N$, слои которого являются комплексными многообразиями с комплексной структурой, гладко зависящей от точки $q \in N$.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & \mathcal{J}(N) \\ & \searrow p & \swarrow \pi \\ & N & \end{array}$$

Допустим, что имеется послойное отображение $j: Z \rightarrow \mathcal{J}(N)$, которое голоморфно на слоях. Предположим, далее, что на расслоении $p: Z \rightarrow N$ имеется гладкое горизонтальное распределение ${}^Z H$, которое переводится отображением j_* в горизонтальное распределение H на $\mathcal{J}(N)$. Тогда на ${}^Z H$ возникает почти комплексная структура ${}^Z \mathcal{J}^h$, задаваемая прообразом почти комплексной структуры $\mathcal{J}^h$ на H при отображении j . Используя эту горизонтальную почти комплексную структуру ${}^Z \mathcal{J}^h$ на ${}^Z H$ и заданную вертикальную комплексную структуру на слоях расслоения $p: Z \rightarrow N$, мы можем ввести на Z почти комплексные структуры ${}^Z \mathcal{J}^1$ и ${}^Z \mathcal{J}^2$ также, как в случае расслоения $\pi: \mathcal{J}(N) \rightarrow N$.

Ясно, что отображение j является почти голоморфным по отношению к обеим введенным структурам, поэтому $p: Z \rightarrow N$ есть твисторное расслоение над N также, как и $\pi: \mathcal{J}(N) \rightarrow N$.

Продemonстрируем на конкретных примерах, как действует метод Ронсли “на практике”.

ПРИМЕР 4 (расслоение эрмитовых структур, совместимых с ориентациями). Обозначим через $\mathcal{J}^+(N) \rightarrow N$ *расслоение эрмитовых структур, совместимых с ориентацией*. Слоем этого расслоения в точке $q \in N$ является пространство $\mathcal{J}^+(T_q N)$, которое отождествляется с однородным пространством $\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$. Также, как в случае расслоения $\mathcal{J}(N)$, риманова связность ${}^N\nabla$ порождает вертикально-горизонтальное разложение

$$T\mathcal{J}^+(N) = V \oplus H,$$

а естественное вложение $j: \mathcal{J}^+(N) \hookrightarrow \mathcal{J}(N)$ превращает $\mathcal{J}^+(N) \rightarrow N$ в твисторное расслоение, наделенное почти комплексной структурой $\mathcal{J}^2$.

ПРИМЕР 5 (комплексное грассманово расслоение). Пусть N есть кэлерово многообразие размерности m . Обозначим через

$$Z := G_r(T^{1,0}N) \longrightarrow N$$

комплексное грассманово расслоение, слоem которого в точке $q \in N$ является грассманово многообразие $G_r(T_q^{1,0}N)$ комплексных подпространств размерности r в комплексном векторном пространстве $T_q^{1,0}N$. Если обозначить через $\mathcal{U}(N) \rightarrow N$ главное $\mathrm{U}(m)$ -расслоение унитарных реперов на N , то

$$Z = \mathcal{U}(N) \otimes_{\mathrm{U}(m)} G_r(\mathbb{C}^m).$$

В случае кэлерова многообразия N риманова связность ${}^N\nabla$ определяет связность на расслоении $\mathcal{U}(N)$ и потому задает горизонтальное распределение на пространстве Z . Комплексная структура на слоях $Z \rightarrow N$ индуцируется естественной комплексной структурой на грассмановом многообразии $G_r(\mathbb{C}^m)$ (см. п. 3.1). Построим теперь отображение

$$j: Z \longrightarrow \mathcal{J}(N),$$

полагая для подпространства $W \in G_r(T_q^{1,0}N)$:

$$j(W) = \begin{cases} {}^N J & \text{на } (W \oplus \overline{W}) \cap T_q N, \\ -{}^N J & \text{на } [(W \oplus \overline{W}) \cap T_q N]^\perp. \end{cases}$$

Построенное отображение $j: Z \rightarrow \mathcal{J}(N)$ удовлетворяет условиям метода Ронсли (проверьте это!), откуда следует, что грассманово расслоение $G_r(T^{1,0}N) \rightarrow N$ является твисторным, иными словами, проекция любого $\mathcal{J}^2$ -голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow G_r(T^{1,0}N)$ из компактной римановой поверхности M на многообразии N является гармоническим отображением $\varphi: M \rightarrow N$. Как было указано выше, такое отображение обязательно конформно. В случае $r = 1$ можно построить и обращение приведенной твисторной конструкции, иными словами, построить для произвольного конформного гармонического отображения $\varphi: M \rightarrow N$ его твисторное поднятие до $\mathcal{J}^2$ -голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow G_1(T^{1,0}N)$. Заметим, что грассманово расслоение $G_1(T^{1,0}N) \rightarrow N$ совпадает с проективизацией $\mathbb{P}(T^{1,0}N) \rightarrow N$ расслоения $T^{1,0}N \rightarrow N$.

Предположим, что задано конформное гармоническое отображение $\varphi: M \rightarrow N$, не являющееся антиголоморфным (для антиголоморфных, как и голоморфных, отображений задача о построении их твисторных поднятий не стоит). Его дифференциал $\delta\varphi$ записывается в виде (см. формулу (1.14) в п. 1.4)

$$\delta\varphi = \partial'\varphi + \overline{\partial''\varphi}.$$

Если отображение φ не является антиголоморфным, то $\partial'\varphi(\partial/\partial z)$ задает не равное тождественно нулю сечение расслоения $\varphi^{-1}(T^{1,0}N)$, которое голоморфно относительно КМ-структуры на этом расслоении, индуцированной римановой связностью ${}^N\nabla$. Это сечение может иметь только изолированные нули, вне которых твисторное поднятие $\psi: M \rightarrow \mathbb{P}(T^{1,0}N)$ задается, по определению, посредством

$$\psi = [\partial'\varphi(\partial/\partial z)].$$

Иными словами, значение $\psi(p)$ отображения ψ в точке $p \in M$ совпадает с комплексной прямой в $T_{\varphi(p)}^{1,0}N$, порождаемой $(1,0)$ -компонентой вектора $\varphi_*(\partial/\partial z)$. Пользуясь голоморфностью построенного линейного подрасслоения в расслоении $\varphi^{-1}(T^{1,0}N)$, можно продолжить его на изолированные нули сечения $\partial'\varphi(\partial/\partial z)$ (вариант теоремы Римана о стирании изолированных особенностей голоморфных функций), получив, тем самым, искомое отображение

$$\psi: M \rightarrow \mathbb{P}(T^{1,0}N).$$

Построенное отображение ψ является $\mathcal{J}^2$ -голоморфным, если φ конформно.

Задача 11. Докажите последнее утверждение, пользуясь критерием $\mathcal{I}^2$ -голоморфности из предложения 1.

Мы рассмотрели примеры различных твисторных пространств над римановыми многообразиями N . Сужая класс допустимых римановых многообразий (как в последнем примере, где мы ограничились классом кэлеровых многообразий N), можно с помощью метода Ронсли строить новые примеры твисторных пространств. Руководящая идея состоит в том, чтобы для каждого класса римановых многообразий N выбирать в качестве адекватного твисторного расслоения расслоение комплексных структур, так или иначе связанных с геометрией многообразий изучаемого класса. В следующих главах мы приведем конструкцию твисторных расслоений над комплексными проективными и грасмановыми многообразиями. Ее можно рассматривать как частный случай более общей конструкции твисторных расслоений над однородными пространствами вида G/H . В этой общей конструкции, которая также может быть получена методом Ронсли, в качестве твисторного расслоения выбирается расслоение G -инвариантных комплексных структур на G/H .

Глава 3. Гармонические отображения в комплексные проективные пространства

В этой главе будет дано описание гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ из компактных римановых поверхностей M в комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$. В п. 3.1 приводится конструкция гармонических отображений в терминах голоморфных кривых, не использующая твисторного подхода. Ее твисторная интерпретация в терминах флагового расслоения над $\mathbb{CP}^n$ дается в п. 3.2.

3.1. Гармонические отображения и голоморфные кривые

ОТСТУПЛЕНИЕ (комплексное проективное пространство и комплексное грасманово многообразие; см. [9], гл. I, п. 5).

Комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ есть множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Поскольку такая прямая полностью определяется любой своей точкой $z \neq 0$, то элементы $\mathbb{CP}^n$ можно отождествить с классами эквивалентности $[z]$, $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, заданными с точностью до умножения на ненулевое комплексное число. Тем самым имеется естественное отображение

$$\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\mathbb{C}^*} \mathbb{CP}^n,$$

сопоставляющее точке $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ее класс эквивалентности $[z] \in \mathbb{CP}^n$. Слой этого отображения совпадает с $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Наделим $\mathbb{CP}^n$ топологией, индуцируемой проекцией π , и рассмотрим открытые подмножества

$$U_i = \{[z_0, \dots, z_n]: z_i \neq 0\} \subset \mathbb{CP}^n,$$

состоящие из комплексных прямых, не лежащих в гиперплоскости $\{z_i = 0\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Введем отображение

$$\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad [z_0, \dots, z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

(“шляпка” над выражением $\frac{z_i}{z_i}$ означает, что оно должно быть пропущено).

Открытые множества $\{U_i\}$ вместе с гомеоморфизмами $\{\varphi_i\}$ образуют атлас комплексных координатных окрестностей и локальных карт на многообразии $\mathbb{CP}^n$, поскольку на пересечениях $U_i \cap U_j$ отображения

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

задаваемые посредством

$$(w_1, \dots, w_n) \longmapsto \left(\frac{w_1}{w_j}, \dots, \frac{\widehat{w_j}}{w_j}, \dots, \frac{1}{w_j}, \dots, \frac{w_n}{w_j} \right),$$

голоморфны (в последней формуле предполагается, что $j < i$ и дробь $\frac{1}{w_j}$ стоит на i -м месте). Это задает на $\mathbb{CP}^n$ структуру комплексного многообразия размерности n . Оно компактно, поскольку совпадает с непрерывным образом отображения

$$\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \subset S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{CP}^n,$$

где S^{2n+1} – единичная сфера в $\mathbb{C}^{n+1}$. Координаты $[z_0, \dots, z_n]$, заданные с точностью до пропорциональности, называются *однородными координатами* в $\mathbb{CP}^n$.

По-другому, можно представлять себе $\mathbb{CP}^n$ как компактификацию $\mathbb{C}^n$, получаемую добавлением к $\mathbb{C}^n$ гиперплоскости H на бесконечности. В координатах вложение $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$ можно задать отображением

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto [1, z_1, \dots, z_n],$$

при этом H отождествляется с гиперплоскостью $\{z_0 = 0\} \subset \mathbb{CP}^n$.

Построим эрмитову метрику на $\mathbb{CP}^n$. Для этого рассмотрим форму $\tilde{\omega}$ на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, задаваемую выражением

$$\tilde{\omega} = \frac{i}{2} \cdot \frac{|z|^2 \sum_{j=0}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j - \sum_{j,k=0, j \neq k}^n \bar{z}_j z_k dz_j \wedge d\bar{z}_k}{|z|^4},$$

где $|z|^2 = |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2$. Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\tilde{\omega} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log |z|^2,$$

где

$$\partial = \sum \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j, \quad \bar{\partial} = \sum \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

Форма $\tilde{\omega}$ является d -замкнутой (т.е. $d\tilde{\omega} = 0$) однородной формой на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, поэтому она спускается до замкнутой формы ω типа $(1, 1)$ на $\mathbb{CP}^n$. Ее ограничение на координатную окрестность U_0 можно записать в виде

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \frac{i}{2} \cdot \frac{(1 + |w|^2) \sum_j dw_j \wedge d\bar{w}_j - \sum_{j \neq k} \bar{w}_j w_k dw_j \wedge d\bar{w}_k}{(1 + |w|^2)^2},$$

где $w_j = z_j/z_0$. Определяемый этой формулой тензор

$$h(w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{(1 + |w|^2)^2} \sum_{j,k} h_{jk}(w) dw_j \otimes d\bar{w}_k$$

имеет коэффициенты $h_{jk}(w) = (1 + |w|^2)^2 \delta_{jk} - \bar{w}_j w_k$, составляющие положительно определенную эрмитову матрицу. То же самое рассуждение применимо к любой координатной окрестности U_i . Тем самым, h является метрическим тензором некоторой эрмитовой метрики на $\mathbb{CP}^n$, называемой *метрикой Фубини-Штуди*. Эта метрика вместе с замкнутой формой ω задает на $\mathbb{CP}^n$ структуру кэлерава многообразия.

Комплексное грассманово многообразие $G_k(\mathbb{C}^n)$ есть множество k -мерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Любое такое подпространство V задается набором из k векторов-строк $(v_1, \dots, v_k)$ в $\mathbb{C}^n$, порождающих подпространство V , иначе говоря, V задается $(k \times n)$ -матрицей

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}.$$

Две такие матрицы A, A' задают одно и то же подпространство V тогда и только тогда, когда $A' = gA$ для некоторой $(k \times k)$ -матрицы $g \in \text{GL}(k, \mathbb{C})$.

Фиксируем ортонормированный базис $\{e_i\}$ в $\mathbb{C}^n$. Для произвольного набора

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$$

индексов из k элементов обозначим через

$$V_I = \{k\text{-мерное подпространство в } \mathbb{C}^n, \\ \text{порожденное векторами } e_i \text{ с } i \in I\},$$

и через $V_I^\perp$ его ортогональное дополнение, т.е.

$$V_I^\perp = \{(n-k)\text{-мерное подпространство в } \mathbb{C}^n, \\ \text{порожденное векторами } e_i \text{ с } i \notin I\}.$$

Введем множества U_I , которые будут играть роль координатных окрестностей на $G_k(\mathbb{C}^n)$:

$$U_I = \{V \in G_k(\mathbb{C}^n) : V \cap V_I^\perp = 0\}.$$

Иначе говоря, U_I состоит из k -мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$, трансверсальных $V_I^\perp$. Для любого подпространства $V \in U_I$ можно найти матричное представление, в котором $(k \times k)$ -минор с индексами из I будет единичным. Например, любое подпространство $V \in U_{I^0}$ с $I^0 = \{1, \dots, k\}$ можно однозначно задать $(k \times n)$ -матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \star & \dots & \star \end{pmatrix},$$

вектор-строки которой отвечают точкам пересечения V с аффинными плоскостями $V_I^\perp + e_i$, $1 \leq i \leq k$.

Обратно, любая такая матрица задает некоторое подпространство $V \in U_{I^0}$. Тем самым, имеется взаимно-однозначное отображение

$$\varphi_{I^0} : U_{I^0} \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)}.$$

С помощью аналогичных рассуждений строятся взаимно-однозначные отображения

$$\varphi_I : U_I \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)},$$

для любого множества $I \subset \{1, \dots, n\}$ из k индексов. Наделим множество $G_k(\mathbb{C}^n)$ слабой топологией, индуцированной отображениями $\{\varphi_I\}$, в которой все отображения φ_I непрерывны. Тогда

атлас $\{U_I\}$ вместе с координатными отображениями $\{\varphi_I\}$ будет задавать на $G_k(\mathbb{C}^n)$ структуру комплексного многообразия размерности $k(n-k)$. (Для того, чтобы убедиться в этом, нужно еще проверить, что отображения $\varphi_I \circ \varphi_J^{-1} : \varphi_J(U_I \cap U_J) \rightarrow \varphi_I(U_I \cap U_J)$ голоморфны. Прделайте это самостоятельно.)

Унитарная группа $U(n)$ транзитивно действует на $G_k(\mathbb{C}^n)$ посредством замены базиса $\{e_i\}$. Подгруппа изотропии подпространства V_{I_0} совпадает, очевидно, с группой $U(k) \times U(n-k)$, поэтому многообразие $G_k(\mathbb{C}^n)$ допускает однородное представление вида

$$G_k(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(k) \times U(n-k),$$

из которого вытекает, что $G_k(\mathbb{C}^n)$ компактно.

При $k=1$ грассманово многообразие $G_1(\mathbb{C}^n)$ совпадает с комплексным проективным пространством $\mathbb{CP}^n$. При $k>1$ его также можно реализовать в виде подмногообразия комплексного проективного пространства с помощью *плюккерова вложения*:

$$\pi : G_k(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{CP}^{n_k},$$

где $n_k := \binom{n}{k} - 1$. Это отображение сопоставляет k -мерному подпространству $V \subset \mathbb{C}^n$, порождаемому векторами $v_1, \dots, v_k$, k -вектор $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. В базисе $\{e_I\}$, $e_I := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, пространства $\wedge^k \mathbb{C}^n$, однородные координаты подпространства V в пространстве $\mathbb{CP}^{n_k}$ будут иметь вид

$$[\dots, |\Lambda_I|, \dots],$$

где $\Lambda_I - (k \times k)$ -минор $(k \times n)$ -матрицы, задающей V , со столбцами, занумерованными индексами из I . Отображение π является голоморфным вложением $G_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{CP}^{n_k}$. Его образ совпадает с проективным подмногообразием в $\mathbb{CP}^{n_k}$, выделяемым условием разложимости k -вектора $v \in \wedge^k \mathbb{C}^n$ (т.е. представимости v в виде $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$). Это условие записывается в виде системы квадратичных соотношений на компоненты k -вектора v , тем самым, образ π совпадает с пересечением квадрик в $\mathbb{CP}^{n_k}$.

ЗАДАЧА 12. Опишите образ плюккерова вложения грассманиана $G_2(\mathbb{C}^4)$ в проективное пространство $\mathbb{CP}^5$.

Плюккерovo вложение $\pi : G_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{CP}^{n_k}$ позволяет наделить $G_k(\mathbb{C}^n)$ естественной эрмитовой метрикой, индуцированной метрикой Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^{n_k}$. $\square$

Перейдем к описанию гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ и вначале изложим метод их построения, который формально не аппелирует к теории твисторов (его твисторная интерпретация будет дана в п. 3.2). Указанный метод позволяет строить гармонические отображения $M \rightarrow \mathbb{CP}^n$, исходя из голоморфных кривых в $\mathbb{CP}^n$.

Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ – голоморфная кривая в $\mathbb{CP}^n$, т.е. голоморфное отображение компактной римановой поверхности M в $\mathbb{CP}^n$. Кривая f называется *полной*, если ее образ не содержится ни в каком собственном проективном подпространстве в $\mathbb{CP}^n$. Сопоставим f ассоциированную с ней кривую $f_r: M \rightarrow G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ в грассмановом многообразии $G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ с $0 \leq r \leq n$.

Для этого выберем локальную карту (U, z) в точке $p \in M$ с локальной координатой z и рассмотрим локальный подъем f_U отображения f над окрестностью U . Иными словами, f_U есть отображение $U \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, накрывающее f над U , так что $f(z) = \pi(f_U(z))$ для $z \in U$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \\ & \nearrow f_U & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{f} & \mathbb{CP}^n \end{array}$$

Обозначим $\partial^\alpha := \partial^\alpha / \partial z^\alpha$ для $\alpha = 1, 2, \dots$ и рассмотрим подпространство в $\mathbb{C}^{n+1}$ вида

$$\theta_r(p) := \text{span}_{\mathbb{C}} \{ \partial^\alpha f_U(p) : 0 \leq \alpha \leq r \}, \quad p \in M,$$

натянутое на векторы $f_U(p), \partial f_U(p), \dots, \partial^r f_U(p)$. Указанное подпространство не зависит от выбора локальной карты в точке p и локального подъема f_U кривой f . Оно называется *примыкающим к f пространством порядка r* . При изменении r размерность примыкающего пространства может меняться, но для полной кривой размерность $\dim \theta_n(p)$ должна быть равна $n+1$ хотя бы в одной точке $p \in M$ (а значит, и в некоторой ее окрестности).

Введем особое множество

$$S = \{ p \in M : \dim \theta_n(p) < n+1 \}$$

и определим голоморфное отображение $f_r: M \setminus S \rightarrow G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1})$, полагая

$$f_r(p) := \theta_r(p).$$

Множество S для полной голоморфной кривой f состоит из изолированных точек, поэтому отображение f_r можно продолжить до голоморфного отображения

$$f_r: M \rightarrow G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1}),$$

которое называется r -й ассоциированной кривой отображения f . Очевидно, $f_0 = f$ и мы полагаем для удобства $f_{-1}: M \rightarrow G_0(\mathbb{C}^{n+1})$ равным 0.

Определим для полной голоморфной кривой $f: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ ее *поляру* как отображение

$$g := f_{n-1}^\perp: M \xrightarrow{f_{n-1}} G_n(\mathbb{C}^{n+1}) \xrightarrow{\perp} G_1(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{CP}^n,$$

где второе отображение $\perp$ сопоставляет подпространству $V \in G_n(\mathbb{C}^{n+1})$ его ортогональное дополнение $V^\perp$. Поляра $g: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ является антиголоморфной кривой в $\mathbb{CP}^n$, которая связана с f соотношениями ортогональности:

$$f_\alpha \perp g_\beta \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \leq n - 1,$$

или в терминах локальных подъемов:

$$\langle \partial^\alpha f_U, \partial^\beta g_U \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \leq n - 1$$

(проверьте это утверждение самостоятельно!).

ТЕОРЕМА 4 (Иллс–Вуд [12]). Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ – полная голоморфная кривая. Для заданного r , $0 \leq r \leq n$, определим отображение $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$, полагая

$$\varphi(p) = f_{r-1}(p)^\perp \cap f_r(p), \quad (3.1)$$

т.е. $\varphi(p)$ есть ортогональное дополнение к $f_{r-1}(p)$ в $f_r(p)$. Эквивалентное определение:

$$\varphi(p) = [f_{r-1}(p) \oplus g_{s-1}(p)]^\perp, \quad s := n - r,$$

где g – поляра f . Построенное таким образом отображение $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ является полным и гармоническим.

Кроме того, построенное отображение $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ обладает свойством комплексной изотропности, обобщающим конформность. Напомним (см. п. 2.4), что отображение $\varphi: M \rightarrow N$ из

римановой поверхности M в кэлерово многообразие (N, h) конформно, если

$$h(\partial'\varphi, \overline{\partial''\varphi}) = 0.$$

Будем называть это отображение *комплексно изотропным*, если

$$h(\delta^\alpha \partial'\varphi, \delta^\beta \overline{\partial''\varphi}) = 0$$

для всех α, β с $\alpha + \beta \geq 1$, где δ – оператор, введенный в п. 1.4. Отображения $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$, построенные в теореме Иллса–Вуда, являются комплексно изотропными.

Теорема Иллса–Вуда позволяет строить комплексно изотропные отображения $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$, исходя из полных голоморфных кривых $f: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$. Более того, как следует из [12], построенное в этой теореме соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{полная голоморфная} \\ \text{кривая } f: M \rightarrow \mathbb{CP}^n; \\ \text{число } r, 0 \leq r \leq n \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{полное комплексно изотропное} \\ \text{гармоническое} \\ \text{отображение } \varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n \end{array} \right\}$$

является взаимно-однозначным. Более подробно, в [12] предложена конструкция, которая сопоставляет каждому полному комплексно изотропному гармоническому отображению некоторую полную голоморфную кривую $f: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ и число r такие, что построенное по формуле (3.1) отображение φ совпадает с исходным гармоническим отображением. Мы опускаем доказательство теоремы (которое можно найти в [12]), поскольку нас в первую очередь интересует твисторная интерпретация теоремы Иллса–Вуда, которая будет приведена в следующем параграфе. Прежде, однако, остановимся более подробно на применениях сформулированной теоремы и, в частности, проанализируем, насколько ограничительным является условие комплексной изотропности. Следующие ниже примеры заимствованы из цитированной выше статьи Иллса–Вуда.

ПРИМЕР 6 (сфера $M = S^2 = \mathbb{CP}^1$). Любое гармоническое отображение $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^n$ комплексно изотропно, поэтому в случае $M = \mathbb{CP}^1$ имеется взаимно-однозначное соответствие между полными гармоническими отображениями $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^n$ и парами (f, r) , где $f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^n$ – полная голоморфная кривая. При $n \geq 2$ имеются гармонические отображения любой степени, не являющиеся $\pm$ голоморфными.

ПРИМЕР 7 (тор $M = T^2$). Любое гармоническое отображение ненулевой степени комплексно изотропно. При $n \geq 2$ существуют гармонические отображения любой степени, не являющиеся $\pm$ голоморфными.

ПРИМЕР 8 (M – компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$). Любое конформное гармоническое отображение φ степени $|\deg \varphi| \geq 2g + 1$ комплексно изотропно. При $n \geq 3$ существуют гармонические отображения степени $\geq g + 1$, не являющиеся $\pm$ голоморфными.

3.2. Твисторная интерпретация

Твисторная интерпретация гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ связана со следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) & \\ \psi \nearrow & \downarrow \pi & \\ M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{CP}^n \end{array}$$

в которой отображение

$$\pi: G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

является твисторным расслоением.

Обозначим для краткости $T' := T^{1,0}\mathbb{CP}^n$ и $G_r := G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n)$. Сопоставим отображению $\psi: M \rightarrow G_r$ подрасслоение

$$\underline{\psi}' \subset \varphi^{-1}T',$$

слой которого в точке $p \in M$ совпадает с r -мерным подпространством $\psi(p)$ в T' .

Пусть D есть риманова связность на $\mathbb{CP}^n$. Она согласована с комплексной структурой $\mathbb{CP}^n$ (поскольку $\mathbb{CP}^n$ кэлерово) и потому порождает естественную связность на расслоении $T' = T^{1,0}\mathbb{CP}^n$ и грассмановом расслоении $G_r(T') \rightarrow \mathbb{CP}^n$. Обозначим через $\nabla = \varphi^{-1}D$ индуцированную связность на расслоении $\underline{T}' := \varphi^{-1}T'$.

Если обозначить через $\underline{\psi}'^\perp$ ортогональное дополнение к $\underline{\psi}'$ в $\underline{T}'$, то будем иметь ортогональные разложения

$$\underline{T}' = \varphi^{-1}T' = \underline{\psi}' \oplus \underline{\psi}'^\perp, \quad \underline{T}'' = \varphi^{-1}T'' = \underline{\psi}'' \oplus \underline{\psi}''^\perp,$$

где $T'' := T^{0,1}\mathbb{CP}^n$, $\underline{\psi}'' = \overline{(\underline{\psi}')}$, $\underline{\psi}''^\perp = \overline{(\underline{\psi}'^\perp)}$. Введенные ранее расслоения $\underline{\psi}^+$ и $\underline{\psi}^-$, задающие ортогональное разложение $\varphi^{-1}T^{\mathbb{C}}M = \underline{\psi}^+ \oplus \underline{\psi}^-$, связаны с расслоениями $\underline{\psi}'$ и $\underline{\psi}''$ соотношениями

$$\underline{\psi}^+ = \underline{\psi}' \oplus \underline{\psi}''^\perp, \quad \underline{\psi}^- = \underline{\psi}'' \oplus \underline{\psi}'^\perp.$$

Назовем отображение $\psi: M \rightarrow G_r$ *горизонтальным*, если образ $\psi_*(p)$, $p \in M$, лежит в горизонтальном подпространстве $H_{\psi(p)} \subset T_{\psi(p)}G_r$ относительно связности D на G_r . Ясно, что для горизонтального отображения понятия $\mathcal{J}^1$ - и $\mathcal{J}^2$ -голоморфности совпадают.

Предложение Ронсли (см. предложение 1 в п. 2.4), характеризующее $\mathcal{J}^2$ -голоморфные отображения ψ в терминах подрасслоений $\underline{\psi}^+$ и $\underline{\psi}^-$, может быть в рассматриваемой ситуации переформулировано следующим образом (доказательство этого варианта предложения 1 оставляем читателю).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (Ронсли, [17], п. 8). *Отображение $\psi: M \rightarrow G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n)$*

(1) *горизонтально тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X: C^\infty(\underline{\psi}') \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}')$$

для любого векторного поля X на M ;

(2) *$\mathcal{J}^2$ -голоморфно тогда и только тогда, когда $\underline{\psi}'$ является голоморфным подрасслоением в $\underline{T}' = \varphi^{-1}T'$ и*

$$\partial'\varphi(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi}', \quad \partial''\varphi(T^{0,1}M) \subset \underline{\psi}'^\perp;$$

(3) *горизонтально и голоморфно тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X: C^\infty(\underline{\psi}') \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}')$$

и

$$\partial'\varphi(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi}', \quad \partial''\varphi(T^{0,1}M) \subset \underline{\psi}'^\perp.$$

(В двух последних утверждениях $\partial'\varphi$ рассматривается как сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}T'$, а $\partial''\varphi$ – как сечение расслоения $\Omega^{0,1}M \otimes \varphi^{-1}T'$.)

Заметим, что голоморфность подрасслоения $\underline{\psi}'$ расслоения $\underline{T}'$ эквивалентна следующему условию

$$\nabla_{\bar{Z}}: C^\infty(\underline{\psi}') \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}')$$

для любого вектора $\bar{Z} \in T^{0,1}M$.

Введем обозначение

$$\nabla' := (\varphi^{-1}D)_{\partial/\partial z}, \quad \nabla'' := (\varphi^{-1}D)_{\partial/\partial \bar{z}}.$$

Тогда

$$\nabla' \varphi = \partial' \varphi \left(\frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \nabla'' \varphi = \partial'' \varphi \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

Определим высшие ковариантные производные отображения φ по индукции

$$\nabla'^{(k+1)} \varphi = \nabla'(\nabla'^k \varphi), \quad \nabla''^{(k+1)} \varphi = \nabla''(\nabla''^k \varphi).$$

Из предложения 2 вытекает, что для горизонтального голоморфного отображения ψ выполняются условия

$$\nabla'^k \varphi \subset \underline{\psi}', \quad \nabla''^k \varphi \subset \underline{\psi}'^\perp$$

для всех k , поэтому

$$\nabla'^k \varphi \perp \nabla''^l \varphi$$

для всех $k, l \geq 1$. Иначе говоря, отображение φ комплексно изотропно. Тем самым, показано, что проекция φ горизонтального голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow G_r$ является комплексно изотропным гармоническим отображением.

Справедливо также обратное утверждение, к формулировке которого мы переходим. Введем по аналогии с примыкающим пространством голоморфной кривой, ∇' -примыкающее пространство

$$\theta'(p) := \text{span}_{\mathbb{C}} \{ \nabla'^\alpha \varphi(p), \quad \alpha = 0, 1, \dots \}.$$

Его размерность может меняться при изменении p . По определению, максимум r размерности $\dim_{\mathbb{C}} \theta'(p)$ по $p \in M$ называется ∇' -порядком отображения φ . В этом случае в неособых точках

$$\theta'(p) =: \theta'_r(p) = \text{span}_{\mathbb{C}} \{ \nabla'^\alpha \varphi(p), \quad \alpha = 0, 1, \dots, r \}.$$

Обещанная обратная конструкция является прямым обобщением конструкции твисторного поднятия для расслоения $G_1(T^{1,0}N) \rightarrow N$ (см. п. 2.4) на грассманово расслоение $G_r(T^{1,0}N) \rightarrow N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (Ронсли). Если $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ – полное гармоническое комплексно изотропное отображение, имеющее ∇' -порядок r , то существует его твисторное поднятие $\psi: M \rightarrow G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На дополнении к особому множеству

$$S' = \{p \in M: \dim_{\mathbb{C}} \theta'(p) < r\},$$

которое состоит из изолированных точек, положим: $\psi(p) = \theta'_r(p)$. Это определяет голоморфное отображение $\psi: M \setminus S' \rightarrow G_r(T')$, продолжающееся в изолированные точки S' до голоморфного отображения

$$\psi: M \longrightarrow G_r(T').$$

Заметим, что вне точек S' имеет место включение: $\nabla' \theta'_r \subset \theta' = \theta'_r$, поскольку ∇' -порядок φ равен r . Отсюда и из голоморфности ψ вытекает, что

$$\nabla_X: C^\infty(\underline{\psi'}) \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi'})$$

для любого векторного поля X на M . Следовательно, ψ горизонтально вне S' , откуда следует, что и $\psi: M \rightarrow G_r(T')$ горизонтально. Кроме того, из условия $\nabla' \theta'_r \subset \theta'_r$ вытекает, что $\partial' \varphi(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi'}$, а из условия комплексной изотропности следует, что

$$\partial'' \varphi(T^{0,1}M) \perp \theta'_r \implies \partial'' \varphi(T^{0,1}M) \perp \underline{\psi'},$$

т.е. $\partial'' \varphi(T^{0,1}M) \subset \underline{\psi'}^\perp$.

Из приведенных утверждений вытекает, что имеет место следующая диаграмма (см. с. 67), все отображения в которой являются взаимно-однозначными соответствиями (подразумевается, что отображения f , φ и ψ в “ящиках” диаграммы являются полными; при этом полнота отображения $\psi: M \rightarrow G_r(T')$ означает, что его проекция $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ полна).

Построим явное отображение, сопоставляющее паре (f, r) , где $f: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ есть полная голоморфная кривая, отображение $\psi: M \rightarrow G_r(T')$. Для этого нам потребуется новая интерпретация расслоения $G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) \rightarrow \mathbb{CP}^n$.

Определим для $0 \leq r \leq n$ флаговое многообразие

$$F_r := \{(V, W) \in G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \times G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1}): V \subset W\},$$

которое является расслоением над $\mathbb{CP}^n$ вида

$$\pi: F_r \longrightarrow \mathbb{CP}^n, \quad (V, W) \longmapsto V^\perp \cap W.$$

Покажем, что *это расслоение изоморфно грассманову расслоению* $G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) \rightarrow \mathbb{CP}^n$. Действительно, касательное пространство $T_w^{1,0}(\mathbb{CP}^n)$ в точке $w \in \mathbb{CP}^n$ изоморфно пространству линейных отображений $\text{Hom}(w, w^\perp)$ (почему?). Сопоставим r -мерному комплексному подпространству H в $T_w^{1,0}(\mathbb{CP}^n)$ r -мерное комплексное подпространство в $w^\perp$, натянутое на образы $L(w)$ линейных отображений $L \in H \subset \text{Hom}(w, w^\perp)$. Тем самым, мы отождествляем

$$G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) \longleftrightarrow G_r(T^\perp),$$

где $T^\perp \rightarrow \mathbb{CP}^n$ – расслоение, получающееся из тавтологического расслоения $T \rightarrow \mathbb{CP}^n$ послойным ортогональным дополнением. Но $G_r(T^\perp)$ можно отождествить с F_r с помощью соответствия

$$\begin{array}{ccc} F_r & \longleftrightarrow & G_r(T^\perp) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{CP}^n & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} (V, W) & \longleftrightarrow & V \\ & \searrow & \swarrow \\ & w \in V^\perp \cap W & \end{array}$$

Иначе говоря, паре $V \subset W$ из F_r мы сопоставляем подпространство $V \subset G_r(\mathbb{C}^{n+1})$, которое рассматривается как подпространство из $[w]^\perp$. Подпространство W восстанавливается по $V \in G_r(T^\perp)_{[w]}$ по формуле: $W = \text{span}\{w, V\}$.

Итак, мы показали, что *твисторное расслоение*

$$G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) \rightarrow \mathbb{CP}^n$$

совпадает с *флаговым расслоением* $F_r \rightarrow \mathbb{CP}^n$.

Опишем теперь отображение

$$\left\{ \begin{array}{l} (f, r), \text{ где } f: M \rightarrow \mathbb{CP}^n \\ - \text{ полная голоморфная} \\ \text{кривая} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{горизонтальное голо-} \\ \text{морфное отображение} \\ \psi: M \rightarrow F_r \end{array} \right\}.$$

Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ – полная голоморфная кривая. Сопоставим ей отображение

$$\psi := (f_{r-1}, f_r): M \longrightarrow F_r,$$

задаваемое кривыми f_{r-1}, f_r , ассоциированными с f . Проверьте самостоятельно, что ψ является полным горизонтальным голоморфным отображением.

Задача 13*. Пусть f, g – мероморфные функции на римановой поверхности M , причем $g \not\equiv \text{const}$. Определим отображение $\Phi: M \rightarrow \mathbb{CP}^3$ по формуле

$$\Phi \equiv \Phi(f, g) := \left[1, f - \frac{g}{2} \frac{df}{dg}, g, \frac{1}{2} \frac{df}{dg} \right].$$

Покажите, что Φ голоморфно и горизонтально для твисторного расслоения $\pi: \mathbb{CP}^3 \rightarrow S^4$. Обратно, если $\Phi: M \rightarrow \mathbb{CP}^3$ – полное горизонтальное голоморфное отображение, то $\Phi = \Phi(f, g)$ для некоторых (однозначно определенных) мероморфных функций f, g на M .

Глава 4. Гармонические отображения в комплексные грассмановы многообразия

В этой главе будет дано описание гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ из компактных римановых поверхностей M в комплексное грассманово многообразие $G_r(\mathbb{C}^n)$. Такие отображения, как утверждает теорема Вуда, допускают факторизацию в виде произведения конечного числа гармонических отображений, каждое из которых получается из предыдущего с помощью операции замещения (начальное гармоническое отображение полагается равным нулю). Ключевое для этого результата понятие замещения вводится и подробно разбирается в п. 4.1 данной главы. В п. 4.2 дается твисторная интерпретация теоремы Вуда.

4.1. Гауссовы расслоения и замещения

ОТСТУПЛЕНИЕ (эрмитовы связности; см. [21], гл. III, пп. 1, 2). Пусть $E \rightarrow M$ – комплексное векторное расслоение над комплексным многообразием M , снабженное эрмитовой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Иначе говоря, в каждом слое E_p задана эрмитова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, гладко зависящая от $p \in M$. Такие расслоения называются *эрмитовыми*. Связность D на эрмитовом расслоении $E \rightarrow M$ называется *эрмитовой*, если она согласована с эрмитовой метрикой на E в том смысле, что

$$\langle D\sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, D\tau \rangle = d\langle \sigma, \tau \rangle$$

для любых сечений σ, τ расслоения E . Если, в частности, расслоение E совпадает с касательным расслоением TM , то, выбирая в качестве сечений векторные поля e_i , образующие унитарный репер в окрестности точки $p \in M$, получим справа 0, и в этом случае понятие эрмитовой связности сводится к понятию унитарной связности на главном расслоении унитарных реперов.

Если расслоение $E \rightarrow M$ голоморфно, то на E существует единственная эрмитова связность D , совместимая с голоморфной

структурой, т.е. такая что

$$\bar{\partial}_E = D^{0,1},$$

где $\bar{\partial}_E$ – оператор Коши-Римана на E (иначе говоря, голоморфными сечениями $E \rightarrow M$ являются сечения σ этого расслоения, удовлетворяющие уравнению $\bar{\partial}_E \sigma = 0$), а $D^{0,1}$ – $(0, 1)$ -компонента связности D .

Любое комплексное подрасслоение F эрмитова расслоения $E \rightarrow M$, наделенного эрмитовой связностью ${}^E D$, наследует эрмитову метрику и эрмитову связность из E . Например, эрмитова связность ${}^F D$ на F задается ортогональным проектированием связности ${}^E D$ на подрасслоение F :

$${}^F D\sigma := {}^F P({}^E D\sigma),$$

где ${}^F P: E \rightarrow F$ – оператор ортогонального проектирования на F . Если расслоение E голоморфно, а F – его голоморфное подрасслоение, то эрмитова связность ${}^E D$, совместимая с голоморфной структурой, индуцирует на F связность ${}^F D$, также совместимую с голоморфной структурой. $\square$

Пусть $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ – гладкое отображение. Обозначим через $T \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ тавтологическое расслоение, слой которого в точке $W \in G_r(\mathbb{C}^n)$ совпадает с r -мерным подпространством $W \subset \mathbb{C}^n$. Сопоставим φ векторное расслоение $\underline{\varphi} := \varphi^{-1}T$, являющееся подрасслоением ранга r тривиального расслоения $\underline{\mathbb{C}^n} := M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\varphi} = \varphi^{-1}T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\varphi} & G_r(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

Обратно, любое подрасслоение E ранга r в $\underline{\mathbb{C}^n}$ определяет гладкое отображение $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ по формуле: $\varphi(p) = E_p \subset \mathbb{C}^n$. Будем называть подрасслоение E в $\underline{\mathbb{C}^n}$ *гармоническим*, если ему отвечает гармоническое отображение $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$.

Задача 14. Покажите, что расслоение $\underline{\varphi} := \varphi^{-1}T$, построенное по гладкому отображению $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$, гармонично тогда и только тогда, когда гармонично расслоение $\underline{\varphi}^\perp$.

Обозначим через D плоскую связность на тривиальном расслоении $\mathbb{C}^n \times G_r(\mathbb{C}^n) \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$. Тавтологическое расслоение T , будучи подрасслоением тривиального расслоения, наследует эрмитову метрику и эрмитову связность из этого расслоения. Тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{C}}^n$ и его подрасслоение $\underline{\varphi}$ снабжаются индуцированными метрикой и связностью. Обозначим последнюю через $\nabla := \varphi^{-1}D$ и наделим $\underline{\varphi}$ комплексной КМ-структурой, индуцированной ∇ .

Касательное расслоение $T^{1,0}G_r(\mathbb{C}^n)$ можно (также, как в случае $\mathbb{CP}^n$) отождествить с расслоением послойно-линейных отображений $\text{Hom}(T, T^\perp)$, сопоставляя вектору $Z \in T^{1,0}G_r$ линейное отображение

$$A_Z: T \longrightarrow T^\perp, \quad A_Z\sigma = \pi_T^\perp(Z\sigma),$$

где $\pi_T^\perp: G_r \times \mathbb{C}^n \rightarrow T^\perp$ – ортогональная проекция.

Форме $d\varphi$ при отождествлении φ с подрасслоением $\underline{\varphi} \subset \underline{\mathbb{C}}^n$ будет отвечать форма, коэффициенты которой являются сечениями расслоения $\text{Hom}(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}^\perp)$ следующего вида

$$d\varphi = dz \otimes A'_\varphi + d\bar{z} \otimes A''_\varphi, \quad (4.1)$$

где коэффициенты A'_φ, A''_φ равны

$$A'_\varphi = \pi_\varphi^\perp \circ \partial', \quad A''_\varphi = \pi_\varphi^\perp \circ \partial'',$$

или, если рассматривать их как сечения расслоения $\text{Hom}(\underline{\mathbb{C}}^n, \underline{\mathbb{C}}^n)$, то

$$A'_\varphi = \pi_\varphi^\perp \circ \partial' \circ \pi_\varphi, \quad A''_\varphi = \pi_\varphi^\perp \circ \partial'' \circ \pi_\varphi.$$

В этих формулах $\pi_\varphi: \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \underline{\varphi}$ и $\pi_\varphi^\perp: \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \underline{\varphi}^\perp$ обозначают ортогональные проекции.

Из формулы (4.1) следует, что дифференциал $\partial'\varphi$, рассматриваемый как сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}G_r)$, отождествляется с формой $dz \otimes A'_\varphi$, а дифференциал $\partial''\varphi$, рассматриваемый как сечение расслоения $\Omega^{0,1}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}G_r)$, отождествляется с формой $d\bar{z} \otimes A''_\varphi$.

Условия голоморфности и гармоничности отображения φ переписываются в терминах форм A'_φ, A''_φ следующим образом:

- (1) отображение $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ голоморфно тогда и только тогда, когда $A''_\varphi = 0$;

- (2) отображение $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ гармонично тогда и только тогда, когда

$$A'_\varphi \circ \partial''_\varphi = \partial''_{\varphi^\perp} \circ A'_\varphi,$$

где $\partial''_\varphi := \pi_\varphi \circ \partial'' \circ \pi_\varphi$, $\partial''_{\varphi^\perp} := \pi_{\varphi^\perp} \circ \partial'' \circ \pi_{\varphi^\perp}$. Приведенное условие гармоничности означает, иными словами, что $dz \otimes A'_\varphi$ есть голоморфное сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \text{Hom}(\varphi, \varphi^\perp)$.

Пусть $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ есть гармоническое отображение. Тогда A'_φ есть голоморфное сечение расслоения $\text{Hom}(\varphi, \varphi^\perp)$. Рассмотрим пространство

$$\text{Im } A'_{\varphi,p}, \quad p \in M.$$

Заметим, что оно не зависит от выбора локальной комплексной координаты z в точке p , но его размерность может меняться при изменении p . Обозначим через s' максимальную размерность $\text{Im } A'_{\varphi,p}$ по всем $p \in M$. Тогда множество

$$S' := \{p \in M: \dim(\text{Im } A'_{\varphi,p}) < s'\}$$

состоит из изолированных точек. Продолжим голоморфное расслоение $\text{Im } A'_\varphi \subset \varphi^\perp$, заданное над $M \setminus S'$, до голоморфного расслоения над M . Полученное голоморфное расслоение называется *гауссовым ∂' -расслоением* отображения φ и обозначается через $G'(\varphi)$.

Аналогичным образом, обозначим через s'' максимальную размерность пространства $\text{Im } A''_{\varphi,p}$ по всем $p \in M$. Голоморфное расслоение $\text{Im } A''_\varphi$, первоначально определенное вне точек особого множества

$$S'' := \{p \in M: \dim(\text{Im } A''_{\varphi,p}) < s''\},$$

продолжается до голоморфного расслоения над M , которое обозначается через $G''(\varphi)$ и называется *гауссовым ∂'' -расслоением*.

Гауссовы расслоения играют ключевую роль в описании гармонических отображений в грассмановы многообразия, поэтому мы остановимся более подробно на их свойствах.

Свойства гауссовых расслоений.

Свойство 1 (см. [7]). Если $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ – гармоническое отображение, то гауссовы расслоения $G'(\varphi), G''(\varphi)$ определяют гармонические отображения

$$G'(\varphi): M \longrightarrow G_{s'}(\mathbb{C}^n), \quad G''(\varphi): M \longrightarrow G_{s''}(\mathbb{C}^n).$$

В соответствии с этим свойством мы можем итерировать процесс построения гауссовых расслоений. Именно, положим $G^0(\varphi) := \underline{\varphi}$ и определим по индукции

$$\begin{aligned} G^i(\varphi) &= G'(G^{i-1}(\varphi)) \text{ при } i = 1, 2, \dots, \\ G^{-i}(\varphi) &= G''(G^{-i+1}(\varphi)) \text{ при } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отметим еще одно интересное свойство гауссовых расслоений.
СВОЙСТВО 2:

$$G'(G''(\varphi)) \subset G^0(\varphi) = \underline{\varphi}, \quad G''(G'(\varphi)) \subset G^0(\varphi) = \underline{\varphi}.$$

Условие комплексной изотропности также допускает естественную интерпретацию в терминах гауссовых расслоений.

СВОЙСТВО 3. Если отображение φ комплексно изотропно, то и все гауссовы отображения $G^i(\varphi)$ комплексно изотропны. Более того, φ комплексно изотропно, если

$$G^i(\varphi) \perp G^j(\varphi) \text{ для всех } i \neq j.$$

Еще одно важное свойство гауссовых расслоений.

СВОЙСТВО 4. Если $G^{-i-1}(\varphi) = 0$ при некотором $i \geq 0$, то отображение $G^{-i}(\varphi)$ голоморфно, поскольку в неособых точках

$$G^{-i-1}(\varphi) = \operatorname{Im} A''_{G^{-i}(\varphi)} = 0,$$

откуда следует равенство $A''_{G^{-i}(\varphi)} = 0$, означающее голоморфность $G^{-i}(\varphi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пользуясь последним свойством, мы можем дать другое доказательство теоремы Иллса–Вуда о соответствии между комплексно изотропными гармоническими отображениями $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ и голоморфными кривыми в $\mathbb{CP}^n$. Именно, так как ранг расслоения $\underline{\varphi}$ для отображений $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ указанного вида равен 1, то ранг $\overline{G^\pm}(\varphi)$ также не превосходит 1 и то же самое верно для всех расслоений $G^i(\varphi)$. Но для комплексно изотропного отображения φ все $G^i(\varphi)$ попарно ортогональны друг другу и содержатся в расслоении $\underline{\varphi}^\perp$. Поэтому они должны обращаться в нуль при достаточно больших $|i|$. Пусть k – наименьшее неотрицательное число, для которого $G^{-k-1}(\varphi) = 0$. Тогда отображение $G^{-k}(\varphi)$ голоморфно и расслоение $\underline{\varphi}$ получается из него как

$$\underline{\varphi} = G^k(G^{-k}(\varphi)).$$

Таким образом, процедура размножения гармонических отображений с помощью гауссовых расслоений позволяет построить произвольные комплексно изотропные гармонические отображения, исходя из голоморфных кривых в $\mathbb{CP}^n$.

ЗАДАЧА 15*. Попробуйте доказать справедливость приведенных свойств гауссовых расслоений самостоятельно.

Рассуждение из замечания 6 мотивирует следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем говорить, что гармоническое отображение $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ имеет *конечный ∂'' -порядок* (соответственно *конечный ∂' -порядок*), если для некоторого $k \geq 0$ выполняется соотношение

$$G^{-k}(\varphi) = 0 \quad (\text{соответственно } G^k(\varphi) = 0).$$

Наименьшее число k , для которого $G^{-k}(\varphi) = 0$, но $G^{-k+1}(\varphi) \neq 0$, называется *∂'' -порядком* отображения φ . Аналогично определяется *∂' -порядок* отображения φ .

Согласно приведенному замечанию, гауссовы расслоения позволяют полностью решить задачу об описании комплексно изотропных гармонических отображений римановых поверхностей в комплексные проективные пространства. Однако для описания гармонических отображений в комплексные грассмановы многообразия их оказывается недостаточно и нам придется ввести еще одну общую конструкцию, называемую замещением. Эта конструкция была впервые предложена Уленбек для построения отображений в унитарную группу $U(n)$ и названа ею “добавлением унитона”.

Замещения. Пусть $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ есть гармоническое отображение. Предположим, что заданы голоморфные подрасслоения $\alpha \subset \underline{\varphi}$ и $\beta \subset \underline{\varphi}^\perp$, которые двойственны друг другу в том смысле, что

$$A'_\varphi(\alpha) \subset \beta \quad \text{и} \quad A'_{\varphi^\perp}(\beta) \subset \alpha.$$

В этом случае мы можем образовать новое расслоение

$$\underline{\varphi}' := (\underline{\varphi} \cap \alpha^\perp) \oplus \beta.$$

Преобразование

$$\underline{\varphi} = (\underline{\varphi} \cap \alpha^\perp) \oplus \alpha \longmapsto \underline{\varphi}' = (\underline{\varphi} \cap \alpha^\perp) \oplus \beta$$

называется ∂' -замещением $\alpha \rightarrow \beta$ расслоения α расслоением β .

Аналогичным образом, если имеются антиголоморфные под-расслоения $\alpha \subset \varphi$ и $\beta \subset \varphi^\perp$, такие что

$$A''_\varphi(\alpha) \subset \beta \quad \text{и} \quad A'_{\varphi^\perp}(\beta) \subset \alpha,$$

можно образовать расслоение

$$\varphi'' := (\varphi \cap \alpha^\perp) \oplus \beta,$$

которое называется ∂'' -замещением $\alpha \rightarrow \beta$ расслоения α расслоением β .

Задача 16. Покажите, что ∂' -замещение φ' и ∂'' -замещение φ'' являются гармоническими расслоениями, если отображение φ гармонично.

Примеры замещений.

ПРИМЕР 9 (тривиальное замещение). Возьмем в качестве α , β расслоения

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \varphi^\perp.$$

Тогда ∂' -замещение $\alpha \rightarrow \beta$ задается преобразованием

$$\varphi \mapsto \varphi' = \varphi^\perp,$$

аналогично, ∂'' -замещение $\alpha \rightarrow \beta$ задается преобразованием

$$\varphi \mapsto \varphi'' = \varphi^\perp.$$

При помощи указанного тривиального замещения можно представить любое ∂'' -замещение

$$\underline{\varphi}^\perp \mapsto (\underline{\varphi}^\perp \cap \beta^\perp) \oplus \alpha$$

в виде композиции двух ∂' -замещений:

$$\underline{\varphi}^\perp \mapsto \underline{\varphi} \quad \text{и} \quad \underline{\varphi} = (\underline{\varphi} \cap \alpha^\perp) \oplus \alpha \mapsto (\underline{\varphi} \cap \beta^\perp) \oplus \alpha$$

(аналогично любое ∂' -замещение можно представить в виде композиции двух ∂'' -замещений).

ПРИМЕР 10 (связь с гауссовыми расслоениями). Положим $\alpha = \underline{\varphi}$, $\beta = G'(\varphi)$. Тогда ∂' -замещение $\alpha \rightarrow \beta$ совпадает с гауссовым расслоением $G'(\varphi)$.

ПРИМЕР 11 (голоморфное продолжение). Пусть β есть голоморфное подрасслоение расслоения $\underline{\varphi}^\perp$, содержащее $G'(\varphi)$ (например, $\beta = G'(\varphi)$ или $\beta = \underline{\varphi}^\perp$):

$$G'(\varphi) \subset \beta \subset \underline{\varphi}^\perp.$$

Тогда ∂' -замещение $\alpha = \underline{\varphi} \rightarrow \beta$ совпадает с расслоением

$$\underline{\varphi}' = \beta \supset \underline{\varphi},$$

которое называется *голоморфным продолжением* $G'(\varphi)$. Вольфсон [25] показал, что любое гармоническое отображение $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ может быть построено из голоморфных и антиголоморфных отображений с помощью гауссовых расслоений и их голоморфных продолжений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Гармоническое отображение $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ называется *факторизуемым*, если существует конечная последовательность гармонических отображений $\varphi_i: M \rightarrow G_{r_i}(\mathbb{C}^n)$, $i = 0, 1, \dots, k$, такая что:

1. $\varphi_0: M \rightarrow G_0(\mathbb{C}^n)$ – нулевое отображение, $\varphi_k = \varphi$;
2. $\underline{\varphi}_i$ получается из $\underline{\varphi}_{i-1}$ посредством ∂' - или ∂'' -замещения.

ПРИМЕР 12. Пусть $\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ – гармоническое отображение ∂'' -порядка k (см. определение 9). Тогда последовательность отображений

$$\varphi_i := G^{-k+i}(\varphi), \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

задает факторизацию φ .

ТЕОРЕМА 5 (Вуд [26]). Любое гармоническое отображение $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ конечного ∂'' -порядка k допускает факторизацию, задаваемую последовательностью $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k = \varphi$ гармонических отображений, в которой φ_i получается из φ_{i-1} посредством ∂' -замещения.

ОТСТУПЛЕНИЕ (флаговые многообразия; см. [19], пп. 4.1–4.3). Фиксируем произвольное разложение числа n в сумму натуральных чисел

$$n = r_1 + \dots + r_k$$

и определим флаговое многообразие типа $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_k)$ как

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \{ \mathcal{V} = (V_1, \dots, V_k) : V_i - \text{подпространства в } \mathbb{C}^n \\ \text{размерности } r_1 + \dots + r_i, \text{ такие} \\ \text{что } V_1 \subset \dots \subset V_k = \mathbb{C}^n \}. \end{aligned}$$

В частности, при $\mathbf{r} = (r, n - r)$

$$\begin{aligned} F_{(r, n-r)}(\mathbb{C}^n) &= \{ \text{подпространства } V \text{ размерности } r \text{ в } \mathbb{C}^n \} \\ &= G_r(\mathbb{C}^n), \end{aligned}$$

т.е. совпадает с грассмановым многообразием $G_r(\mathbb{C}^n)$. При $\mathbf{r} = (1, 1, \dots, 1)$ многообразие

$$\begin{aligned} F(\mathbb{C}^n) &:= F_{(1,1,\dots,1)}(\mathbb{C}^n) \\ &= \{ V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n : \dim V_i = i \} \end{aligned}$$

называется *полным флаговым многообразием*.

Для нас более удобно эквивалентное определение флаговых многообразий как

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) &= \{ \mathcal{E} = (E_1, \dots, E_k) : E_i - \text{попарно ортогональные} \\ &\quad \text{подпространства в } \mathbb{C}^n \text{ размерности } r_i, \\ &\quad \text{такие, что } E_1 \oplus \dots \oplus E_k = \mathbb{C}^n \}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы перейти от первого определения ко второму, достаточно сопоставить

$$\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_k) \longmapsto \mathcal{E} = (E_1, \dots, E_k), \text{ где } E_i = V_{i-1}^\perp \cap V_i,$$

и обратно

$$\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_k) \longmapsto \mathcal{V} = (V_1, \dots, V_k), \text{ где } V_i = E_1 \oplus \dots \oplus E_i.$$

Фиксируем эрмитов базис $\{e_i\}$ в $\mathbb{C}^n$ и обозначим через $\mathcal{E}^0$ стандартный флаг типа $\mathbf{r}$ в $\mathbb{C}^n$, определяемый посредством

$$\mathcal{E}^0 = (E_1^0, \dots, E_k^0),$$

где подпространство E_1^0 порождается векторами $e_1, \dots, e_{r_1}$, подпространство E_2^0 порождается векторами $e_{r_1+1}, \dots, e_{r_1+r_2}$ и т.д.

Унитарная группа $U(n)$ транзитивно действует на флаговом многообразии $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ заменой эрмитова базиса $\{e_i\}$. При этом подгруппа изотропии стандартного флага $\mathcal{E}^0$ совпадает с произведением $U(r_1) \times \dots \times U(r_n)$, так что

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(r_1) \times \dots \times U(r_n).$$

С другой стороны, группа $GL(n, \mathbb{C})$ также транзитивно действует на $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$, переводя базис $\{e_i\}$ в произвольный комплексный базис в $\mathbb{C}^n$. Подгруппа изотропии стандартного флага $\mathcal{E}^0$ совпадает при этом с группой $P_{\mathbf{r}}$ верхних блочно-треугольных матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & r_1 & * & & * \\ \hline & \boxed{\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline & r_2 \end{array}} & & * & \dots & * \\ & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \dots & r_n \boxed{\begin{array}{c|c} & * \\ \hline & \end{array}} \end{array} \right)$$

Это дает нам еще одно, комплексное однородное представление флагового многообразия

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = GL(n, \mathbb{C})/P_{\mathbf{r}}.$$

В частном случае $\mathbf{r} = (r, n-r)$ получаем известные однородные представления для грассманова многообразия

$$G_r(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(r) \times U(n-r) = GL(n, \mathbb{C})/P_{(r, n-r)},$$

а в случае $\mathbf{r} = (1, 1, \dots, 1)$ – однородные представления для полного многообразия флагов

$$F(\mathbb{C}^n) = U(n)/T^n = GL(n, \mathbb{C})/B_+,$$

где $T^n = U(1) \times \cdots \times U(1)$ (n раз) – n -мерный тор, а B_+ – боре-левская группа верхне-треугольных матриц.

Из двух приведенных однородных представлений флагового многообразия

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(r_1) \times \cdots \times U(r_n) = GL(n, \mathbb{C})/P_{\mathbf{r}}$$

вытекает, что $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ является компактным комплексным многообразием, обладающим $U(n)$ -инвариантной комплексной структурой.

Вообще, любое абстрактное флаговое многообразие F компактной группы Ли G допускает два различных однородных представления

$$F = G/H = G^{\mathbb{C}}/P, \quad (4.2)$$

где H – замкнутая подгруппа G , $G^{\mathbb{C}}$ – комплексификация G , а P – замкнутая комплексная подгруппа в $G^{\mathbb{C}}$. Такое многообразие обязательно компактно и может быть наделено G -инвариантной почти комплексной структурой. Для ее определения достаточно выбрать соответствующее этой структуре подпространство $T_o^{1,0}F$ в начале $o := [eH]$. В терминах разложения алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, отвечающего комплексному представлению (4.2):

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bar{\mathfrak{n}}, \quad (4.3)$$

указанное подпространство $T_o^{1,0}F$ совпадает с $\mathfrak{n}$. $\square$

В рассматриваемом нами случае разложение (4.3) алгебры Ли $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(n)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(n) &\cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \cong \bar{\mathbb{C}}^n \otimes \mathbb{C}^n \cong \text{(отождествление с } T_{\mathcal{E}^0}^{\mathbb{C}} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)) \cong \\ &\cong (\bar{E}_1^0 \oplus \cdots \oplus \bar{E}_k^0) \otimes (E_1^0 \oplus \cdots \oplus E_k^0) \cong \\ &\cong [\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(r_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(r_k)] \oplus \left[\bigoplus_{i < j} (\bar{E}_i^0 E_j^0 \oplus E_i^0 \bar{E}_j^0) \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $\bar{E}_i^0 E_j^0$ обозначает $\bar{E}_i^0 \otimes E_j^0$ и аналогично $E_i^0 \bar{E}_j^0 := E_i^0 \otimes \bar{E}_j^0$. Из этого разложения вытекает, что комплексифицированное касательное пространство $T_{\mathcal{E}^0}^{\mathbb{C}} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ можно в рассматриваемом случае отождествить с пространством

$$T_{\mathcal{E}^0}^{\mathbb{C}} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \bigoplus_{i < j} (\bar{E}_i^0 E_j^0 \oplus E_i^0 \bar{E}_j^0)$$

и выбор $U(n)$ -инвариантной почти комплексной структуры J на $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ целиком определяется выбором одного из подпространств $\bar{E}_i^0 E_j^0$ или $E_i^0 \bar{E}_j^0$ в качестве собственного подпространства оператора J , отвечающего собственному значению $\sqrt{-1}$. Почти комплексную структуру $\mathcal{J}^1$, для которой

$$T_{\mathcal{E}^0}^{1,0} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \bigoplus_{i < j} (\bar{E}_i^0 E_j^0),$$

будем называть *канонической*.

ЗАДАЧА 17. Покажите, что каноническая почти комплексная структура $\mathcal{J}^1$ на флаговом многообразии $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ интегрируема.

4.2. Твисторная интерпретация

В этом параграфе мы построим флаговые расслоения над грассмановым многообразием $G_r(\mathbb{C}^n)$ и покажем, что они являются твисторными расслоениями над $G_r(\mathbb{C}^n)$.

Для этого фиксируем упорядоченное подмножество $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ и обозначим через σ^c его дополнение в множестве $\{1, \dots, n\}$. Положим

$$r := \sum_{i \in \sigma} r_i.$$

Флаговым расслоением называется отображение

$$\begin{aligned} \pi = \pi_{\sigma}: F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) &= \frac{U(n)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_n)} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \frac{U(n)}{U(r) \times U(n-r)} = G_r(\mathbb{C}^n), \end{aligned}$$

которое сопоставляет

$$\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n) \longmapsto E := \bigoplus_{i \in \sigma} E_i.$$

Это расслоение обладает канонической $U(n)$ -инвариантной связностью, которая целиком определяется вертикально-горизонтальным разложением касательного пространства $T_{\mathcal{E}^0}^{\mathbb{C}} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ в начале $\mathcal{E}^0$. Указанное разложение имеет вид

$$T_{\mathcal{E}^0}^{\mathbb{C}} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = V_{\mathcal{E}^0}^{\mathbb{C}} \oplus H_{\mathcal{E}^0}^{\mathbb{C}}, \quad (4.5)$$

где

$$V_{\mathcal{E}^0}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i < j} (\bar{E}_i^0 E_j^0 \oplus E_i^0 \bar{E}_j^0), \quad \text{где } i, j \in \sigma, \text{ либо } i, j \in \sigma^c,$$

$$H_{\mathcal{E}^0}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i < j} (\bar{E}_i^0 E_j^0 \oplus E_i^0 \bar{E}_j^0), \quad \text{где } i \in \sigma, j \in \sigma^c, \text{ либо } i \in \sigma^c, j \in \sigma.$$

Пользуясь разложением (4.5), определим почти комплексные структуры $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ на $F_r(\mathbb{C}^n)$ также, как в случае твисторного расслоения $Z = \mathcal{J}(N)$, а именно, вертикальная составляющая канонической структуры $\mathcal{J}^1$ задается формулой

$$\mathcal{J}_v^1 = \begin{cases} i & \text{на } \bar{E}_i^0 E_j^0, \\ -i & \text{на } E_i^0 \bar{E}_j^0, \end{cases}$$

где $i < j$ и $i, j \in \sigma$, либо $i, j \in \sigma^c$. Горизонтальная составляющая $\mathcal{J}^1$ задается той же формулой

$$\mathcal{J}_h^1 = \begin{cases} i & \text{на } \bar{E}_i^0 E_j^0, \\ -i & \text{на } E_i^0 \bar{E}_j^0, \end{cases}$$

при $i < j$ и $i \in \sigma, j \in \sigma^c$, либо $i \in \sigma^c, j \in \sigma$. Составляющие почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ имеют вид

$$\mathcal{J}_v^2 = -\mathcal{J}_v^1, \quad \mathcal{J}_h^2 = \mathcal{J}_h^1.$$

Мы собираемся доказать, что построенные расслоения

$$\pi_\sigma: F_r(\mathbb{C}^n) \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$$

являются твисторными. Можно было бы сделать это, пользуясь методом Ронсли, т.е. построив вложение многообразия $F_r(\mathbb{C}^n)$ в расслоение комплексных структур $\mathcal{J}(G_r(\mathbb{C}^n))$ (такой подход излагается в статье [6]), но мы предпочитаем более прямой метод.

Заметим, что любое гладкое отображение $\psi: M \rightarrow F_r(\mathbb{C}^n)$ из римановой поверхности M в флаговое многообразие $F_r(\mathbb{C}^n)$ порождает разложение тривиального расслоения $\underline{\mathbb{C}}^n = M \times \mathbb{C}^n$ в прямую ортогональную сумму подрасслоений

$$\underline{\mathbb{C}}^n = \bigoplus_{i=1}^k \underline{E}_i. \quad (4.6)$$

Действительно, обозначим через $T_i \rightarrow F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ тавтологическое расслоение, слоем которого в точке $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_k)$ является подпространство $E_i \subset \mathbb{C}^n$ размерности r_i . Тогда в качестве подрасслоений $\underline{E}_i$, фигурирующих в формуле (4.6), нужно взять

$$\underline{E}_i := \psi^{-1}T_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Обратно, любое разложение $\underline{\mathbb{C}}^n$ в прямую сумму подрасслоений вида (4.6) порождает отображение $\psi_{\mathcal{E}}: M \rightarrow F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$, сопоставляющее точке $p \in M$ флаг $(\underline{E}_{1,p}, \dots, \underline{E}_{k,p})$. Набор $\mathcal{E} = (\underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k)$ подрасслоений $\underline{\mathbb{C}}^n$ указанного вида будем называть *движущимся флагом*.

По аналогии с отображениями $\psi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$, дифференциал отображения $\psi_{\mathcal{E}}: M \rightarrow F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ является суммой компонент вида $dz \otimes A'_{ij}$, $d\bar{z} \otimes A''_{ij}$ с

$$A'_{ij} = \pi_i \circ \partial' \circ \pi_j, \quad A''_{ij} = \pi_i \circ \partial'' \circ \pi_j,$$

где $\pi_j: \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \underline{E}_j$ — ортогональная проекция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (Берстол–Саламон). *Построенные флаговые расслоения*

$$\pi_{\sigma}: (F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n), \mathcal{J}^2) \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$$

являются твисторными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что для $\mathcal{J}^2$ -голоморфного отображения $\psi_{\mathcal{E}}: M \rightarrow F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$, отвечающего движущемуся флагу $\mathcal{E} = (\underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k)$, расслоение $E := \oplus_{i \in \sigma} \underline{E}_i$ является гармоническим, т.е.

$$A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^{\perp}} \circ A'_E.$$

Условие $\mathcal{J}^2$ -голоморфности отображения $\psi_{\mathcal{E}}$ означает выполнение следующих соотношений:

$$A'_{ij} = 0 = A''_{ji}, \quad \text{если} \quad \begin{cases} i < j & \text{и } i, j \in \sigma, \text{ либо } i, j \in \sigma^c; \\ i < j & \text{и } i \in \sigma, j \in \sigma^c, \text{ либо } i \in \sigma^c, j \in \sigma. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $m < l$, $m \in \sigma$, $l \in \sigma^c$ справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned}
 0 &= \pi_l \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \pi_i \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \pi_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \pi_m = \\
 &= \sum_{i=1}^k (A''_{li} A'_{im} - A'_{li} A''_{im}) = \sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} A'_{im} - \sum_{i \in \sigma} A'_{li} A''_{im} = \\
 &= \left(\sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} \right) \left(\sum_{j \in \sigma^c} A'_{jm} \right) - \left(\sum_{i \in \sigma} A'_{li} \right) \left(\sum_{j \in \sigma} A''_{jm} \right) = \\
 &= \pi_l (\partial''_{E^\perp} \circ A'_E - \partial''_{E^\perp} \circ A'_E) \pi_m. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Поясним, откуда следуют отдельные равенства в этой цепочке. Первое равенство вытекает из того, что $\sum_{i=1}^k \pi_i = I$. Равенство во второй строке обосновывается следующей выкладкой

$$\begin{aligned}
 \sum_i A''_{li} A'_{im} &= \sum_{i < m} A''_{li} A'_{im} + \sum_{i > m} A''_{li} A'_{im} \\
 &= \sum_{\substack{i \in \sigma \\ i < m}} A''_{li} A'_{im} + \sum_{\substack{i \in \sigma^c \\ i > m}} A''_{li} A'_{im} = \\
 &= \sum_{\substack{i \in \sigma \\ i < m < l}} A''_{li} A'_{im} + \sum_{\substack{i \in \sigma^c \\ i > m}} A''_{li} A'_{im} \\
 &= 0 + \sum_{\substack{i \in \sigma^c \\ i > m}} A''_{li} A'_{im} = \sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} A'_{im} \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

и аналогичной выкладкой для суммы $\sum_i A'_{li} A''_{im}$. При переходе от второй строки к третьей в (4.7) мы добавляем члены вида $A''_{li} A'_{jm}$ с $i \neq m$, содержащие произведения вида $\pi_i \pi_j = 0$. Для обоснования последнего равенства в цепочке (4.7) заметим, что

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} \right) \left(\sum_{j \in \sigma^c} A'_{jm} \right) &= \left(\sum_{i \in \sigma^c} \pi_l \partial'' \pi_i \right) \left(\sum_{j \in \sigma^c} \pi_j \partial' \pi_m \right) = \\
 &= \pi_l \left(\partial'' \sum_{i \in \sigma^c} \pi_i \right) \left(\sum_{j \in \sigma^c} \pi_j \partial' \right) \pi_m = \pi_l (\partial''_{E^\perp} \circ A'_E) \pi_m \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

и аналогично для члена $\left(\sum_{i \in \sigma} A'_{li} \right) \left(\sum_{j \in \sigma} A''_{jm} \right)$.

При $m > l$ имеет место цепочка равенств, аналогичная (4.7). Из этих двух цепочек вытекает, что

$$A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E,$$

т.е. расслоение E гармонично.

В случае, когда риманова поверхность M совпадает с римановой сферой $\mathbb{CP}^1$ справедливо и обращение приведенного предложения. А именно, мы покажем, что любое гармоническое отображение $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ может быть получено проекцией некоторой $\mathcal{J}^2$ -голоморфной кривой $\psi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow F_r(\mathbb{C}^n)$, лежащей в некотором флаговом многообразии $F_r(\mathbb{C}^n)$. Доказательство этого результата основано на теореме Биркгофа–Гротендика, дающей классификацию голоморфных векторных расслоений над римановой сферой.

ОТСТУПЛЕНИЕ (теорема Биркгофа–Гротендика; см. [16], пп. 8.2).

ТЕОРЕМА 6 (Биркгоф–Гротендик). *Любое голоморфное векторное расслоение $E \rightarrow \mathbb{CP}^1$ изоморфно прямой сумме голоморфных линейных расслоений. Иными словами, если E имеет ранг r , то*

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^r L^{\gamma_i},$$

где $L \rightarrow \mathbb{CP}^1$ – тавтологическое расслоение, а γ_i – целочисленные индексы.

В терминах стандартного покрытия римановой сферы $\mathbb{CP}^1$ открытыми множествами

$$U_0 = \{[z_0, z_1]: z_1 \neq 0\} \quad \text{и} \quad U_\infty = \{[z_0, z_1]: z_0 \neq 0\},$$

любое голоморфное векторное расслоение ранга r над $\mathbb{CP}^1$ задается функцией перехода $F \equiv F_{0\infty}$, которая является голоморфной матричной функцией

$$F: U_0 \cap U_\infty \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}).$$

Для этой функции утверждение теоремы означает, что она допускает факторизацию вида

$$F(z) = H_0(z)D(z)H_\infty(z),$$

где функция H_0 (соответственно H_∞) продолжается до голоморфной функции

$$H_0: U_0 \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \quad (\text{соответственно } H_\infty: U_\infty \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})),$$

а D – диагональная матричная функция вида

$$D(z) = \mathrm{diag}(z^{\gamma_1}, \dots, z^{\gamma_r}),$$

где числа $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_r$ называются *частными индексами* матричной функции $F(z)$.

По-другому, теорему Биркгофа–Гротендика можно переформулировать следующим образом: существует фильтрация расслоения E голоморфными подрасслоениями вида

$$0 = \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \dots \subset \mathcal{B}_m = E, \quad (4.10)$$

где

$$\mathcal{B}_i / \mathcal{B}_{i-1} \cong \underbrace{L^{\beta_i} \oplus \dots \oplus L^{\beta_i}}_{p_i}$$

и $\beta_1 > \dots > \beta_m$. Расслоение $\mathcal{B}_i$ можно охарактеризовать как наименьшее голоморфное подрасслоение E , которое содержит образы всех мероморфных сечений E с дивизорами степени $\geq \beta_i$. Иначе говоря, $\mathcal{B}_i$ порождается образами мероморфных сечений E с дивизорами степени $\geq \beta_i$. Число $\beta_1 - \beta_m$ называется *высотой*, а сама фильтрация называется *фильтрацией Хардера–Нарасимхана*. $\square$

Применим теорему Биркгофа–Гротендика в форме Хардера–Нарасимхана к расслоению E , отвечающему гармоническому отображению $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$. Для этого снабдим E голоморфной структурой, задаваемой $\bar{\partial}$ -оператором $\bar{\partial}_E := \pi_E \circ \partial'' \circ \pi_E$. Фильтрация Хардера–Нарасимхана для расслоения E имеет вид (4.10), в котором фактор $\mathcal{B}_i / \mathcal{B}_{i-1}$ можно отождествить с ортогональным дополнением B_i расслоения $\mathcal{B}_{i-1}$ в $\mathcal{B}_i$, пользуясь эрмитовой метрикой на $\mathbb{C}^n$. Аналогичным образом, для расслоения $E^\perp$ получается фильтрация

$$0 = \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \dots \subset \mathcal{C}_l = E^\perp,$$

где

$$\mathcal{C}_i / \mathcal{C}_{i-1} \cong \underbrace{L^{\gamma_i} \oplus \dots \oplus L^{\gamma_i}}_{q_i}$$

и $\gamma_1 > \dots > \gamma_l$. Расслоение $\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i-1}$ отождествляется с ортогональным дополнением $\mathcal{C}_i$ расслоения $\mathcal{C}_{i-1}$ в $\mathcal{C}_i$. Соберем теперь полученные расслоения $B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_l$ вместе и переобозначим их через $\underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k$, так что $k = m + l$ и

$$\underline{E}_i \cong \underbrace{L^{\delta_i} \oplus \dots \oplus L^{\delta_i}}_{r_i}$$

с $\delta_1 \leq \dots \leq \delta_k$. (Знаки равенства в этой цепочке неравенств могут возникать из-за того, что какое-либо из чисел β_i может совпасть с каким-либо числом γ_j . В этом случае будем считать для определенности, что соответствующее расслоение B_i в наборе $\underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k$ стоит раньше расслоения C_j , т.е. если $B_i = \underline{E}_s$, то $C_j = \underline{E}_{s+1}$.)

Расслоения $\underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k$ образуют движущийся флаг, задающий искомое отображение $\psi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$. Действительно, обозначим через σ множество индексов i , $1 \leq i \leq k$, таких, что

$$E = \oplus_{i \in \sigma} \underline{E}_i \implies E^\perp = \oplus_{i \in \sigma^c} \underline{E}_i.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (Берстол–Саламон). *Если расслоение E гармонично, то движущийся флаг $\mathcal{E} = (\underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k)$ задает $\mathcal{J}^2$ -голоморфное отображение $\psi_{\mathcal{E}}: \mathbb{CP}^1 \rightarrow F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны показать, что

$$A'_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} i > j, & \text{если } i, j \in \sigma, \text{ либо } i, j \in \sigma^c; \\ i < j & \text{если } i \in \sigma, j \in \sigma^c, \text{ либо } i \in \sigma^c, j \in \sigma. \end{cases}$$

Предположим вначале, что $i, j \in \sigma$. Условие $i > j$ означает, что $\delta_i > \delta_j$ и расслоение $\underline{E}_i$ содержится в некотором голоморфном подрасслоении $\mathcal{B}_s \subset E$, ортогональном E_j . Поэтому

$$A''_{ji} = \pi_j \circ \partial'' \circ \pi_i \subset \pi_{\mathcal{B}_s}^\perp \circ \partial'' \circ \pi_{\mathcal{B}_s} = 0$$

в силу голоморфности $\mathcal{B}_s$ (см. условия голоморфности, выписанные после формулы (4.1)). Так как $A'_{ij} = -(A''_{ji})^*$ (проверьте!), то $A'_{ij} = 0$. Случай $i, j \in \sigma^c$ разбирается аналогично.

Предположим далее, что $i < j$ и $i \in \sigma^c$, $j \in \sigma$, причем $\underline{E}_j = \mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_s \subset E$. Так как расслоение E гармонично, то сечение $dz \otimes A'_E$ расслоения $\Omega^{1,0}(M) \otimes \text{Hom}(E, E^\perp)$ голоморфно и

расслоение $\mathcal{B}_s$ порождается мероморфными сечениями $E^\perp$, имеющими дивизоры степени $\geq \delta_j$. Заметим, что

$$A'_{ij} = \pi_i \circ \partial' \circ \pi_j = \pi_i \circ \partial'(\underline{E}_j) = \pi_i \circ \partial'(B_s) \subset \pi_i \circ \partial'(\mathcal{B}_s).$$

Расслоение $\partial'(\mathcal{B}_s)$ порождается образами мероморфных сечений $E^\perp$, имеющими дивизоры степени $\geq \delta_j + 1$, т.е. содержится в объединении

$$\tilde{E} := \oplus \underline{E}_t$$

подрасслоений $\underline{E}_t$ с $t > j$, $t \in \sigma^c$. Так как $i < j$, то отсюда следует, что $\pi_i(\tilde{E}) = 0$, т.е. $A'_{ij} = 0$ при $i < j$, $i \in \sigma^c$, $j \in \sigma$.

Аналогично рассматривается случай $i \in \sigma$, $j \in \sigma^c$, пользуясь гармоничностью расслоения $E^\perp$.

Теорема о факторизации гармонических отображений может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 7 (Берстол–Саламон). *Для заданного гармонического расслоения $E \subset \mathbb{C}^n$ над $\mathbb{CP}^1$ найдется конечная последовательность $\underline{E}_0, \underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k = E$ гармонических подрасслоений $\mathbb{C}^n$ таких, что:*

- 1) $0 = \text{высота}(\underline{E}_0) < \text{высота}(\underline{E}_1) < \dots < \text{высота}(\underline{E}_k) = \beta_1 - \beta_k$;
- 2) $\underline{E}_i$ получается из $\underline{E}_{i-1}$ или $\underline{E}_{i-1}^\perp$ с помощью ∂' - или ∂'' -замещения;
- 3) любое гармоническое расслоение высоты 0 имеет вид

$$\underline{E}_0 = F_1 \ominus F_2,$$

где F_1, F_2 – голоморфные подрасслоения $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющие условию $\partial' \mathcal{O}(F_2) \subset \mathcal{O}(F_1)$ (через $\mathcal{O}(F)$ обозначается пространство голоморфных сечений расслоения F).

Глава 5. Гармонические отображения в компактные группы Ли

В этой главе приводится конструкция Уленбек гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow G$ из компактной римановой поверхности M в компактную группу Ли G . Построение таких отображений сводится к решению систем уравнений типа Захарова–Шабата. В твисторных терминах гармонические отображения $\varphi: M \rightarrow G$, получаемые с помощью конструкции Уленбек, возникают как проекции отображений $\psi: M \rightarrow \Omega G$ в пространство петель группы G , которые голоморфны относительно обеих почти комплексных структур $\mathcal{J}^1, \mathcal{J}^2$ на ΩG .

5.1. Конструкция Уленбек

ОТСТУПЛЕНИЕ (инвариантные метрики на группах Ли; см. [8], гл. I, п. 2.4). Пусть G – компактная группа Ли (например, $G = U(n)$). Инвариантная риманова метрика на G определяется своим ограничением на касательное пространство в единице $T_e G$, т.е. на алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Другими словами, указанная метрика на G полностью определяется заданием инвариантной положительно определенной симметричной билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Под инвариантностью указанной формы понимается ее инвариантность относительно присоединенного действия $\text{Ad}: G \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}$, определяемого следующим образом. Группа G действует на самой себе посредством сопряжений:

$$G \ni g: h \in G \longmapsto ghg^{-1} \in G.$$

Это действие оставляет единицу $e \in G$ на месте и потому порождает действие G на алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_e G$, которое и называется *присоединенным действием* $\text{Ad } g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Касательное к этому действию отображение называется *присоединенным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ и задается формулой

$$\text{ad } \xi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad \eta \longmapsto [\xi, \eta].$$

Форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$ инвариантна, если

$$\langle (\text{Ad } g)\eta, (\text{Ad } g)\zeta \rangle = \langle \eta, \zeta \rangle \text{ для всех } \eta, \zeta \in \mathfrak{g}, g \in G.$$

Если группа G связна, то это условие равносильно следующему соотношению на уровне алгебр Ли:

$$\langle (\text{ad } \xi)\eta, \zeta \rangle + \langle \eta, (\text{ad } \xi)\zeta \rangle = 0,$$

или

$$\langle [\xi, \eta], \zeta \rangle + \langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle = 0.$$

На любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует инвариантная симметричная билинейная форма, называемая *формой Киллинга*, которая задается посредством

$$\langle \xi, \eta \rangle := \text{tr}(\text{ad } \xi \cdot \text{ad } \eta), \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

В частности, для полной линейной группы $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ алгебра Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ комплексных $(n \times n)$ -матриц и форма Киллинга принимает вид

$$\langle \xi, \eta \rangle = \text{tr}(\xi\eta),$$

где в правой части стоит след произведения матриц $\xi\eta$. На компактной группе G форма Киллинга $\langle \cdot, \cdot \rangle$ отрицательно определена, поэтому в качестве инвариантной положительной определенной формы на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можно взять $-\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\square$

Обозначим через μ *форму Кармана–Маурера* на G , т.е. тавтологическую 1-форму на G со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, задаваемую посредством равенства

$$\mu(\xi) := \xi \text{ для любого } \xi \in \mathfrak{g},$$

где ξ в левой части формулы рассматривается как левоинвариантное векторное поле на G . Справедливо следующее *уравнение Кармана–Маурера*

$$d\mu + \frac{1}{2}\mu \wedge \mu = 0,$$

в котором форма $\frac{1}{2}\mu \wedge \mu$ совпадает с коммутатором в алгебре Ли

$$\frac{1}{2}\mu \wedge \mu(\xi, \eta) = [\mu(\xi), \mu(\eta)] \text{ для } \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Иными словами, уравнение Картана–Маурера означает, что μ является формой плоской связности на G (называемой также *связностью Картана–Маурера*).

Рассмотрим теперь гладкое отображение $\varphi: M \rightarrow G$ римановой поверхности M в группу Ли G . Обозначим через $\alpha := \varphi^* \mu$ 1-форму на M , индуцированную формой Картана–Маурера на G при отображении φ . Эта форма удовлетворяет уравнению

$$d\alpha + \frac{1}{2}\alpha \wedge \alpha = 0,$$

т.е. задает плоскую связность на расслоении $\varphi^{-1}(TG)$. Ее продолжение на комплексифицированное расслоение $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}G)$ может быть записано в виде

$$\alpha = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$$

относительно локальной координаты z на M . Условие нулевой кривизны переписывается в терминах коэффициентов $A_z, A_{\bar{z}}$ в виде

$$\bar{\partial}A_z - \partial A_{\bar{z}} + 2[A_{\bar{z}}, A_z] = 0, \quad (5.1)$$

а условие гармоничности φ принимает вид

$$\bar{\partial}A_z + \partial A_{\bar{z}} = 0.$$

Два последних уравнения можно объединить в следующую систему, выглядящую более симметрично:

$$\bar{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z] = 0, \quad \partial A_{\bar{z}} - [A_{\bar{z}}, A_z] = 0. \quad (5.2)$$

Сопоставим форме α семейство форм α_λ , зависящих от комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C}^*$:

$$\alpha_\lambda := \frac{1 - \lambda^{-1}}{2} A_z dz + \frac{1 - \lambda}{2} A_{\bar{z}} d\bar{z},$$

которое включает исходную форму α (при $\lambda = -1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (Уленбек). *Отображение $\varphi: M \rightarrow G$ гармонично тогда и только тогда, когда связность на расслоении $\varphi^{-1}(TG)$, задаваемая формой α_λ , является плоской при всех $\lambda \in \mathbb{C}^*$, другими словами, когда выполняются соотношения*

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0 \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{C}^*. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем уравнение (5.3) в терминах коэффициентов $A_z, A_{\bar{z}}$, пользуясь формулой (5.1):

$$\begin{aligned} 2\left(d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda\right) &= \\ &= (1 - \lambda^{-1})\bar{\partial}A_z - (1 - \lambda)\partial A_{\bar{z}} + [(1 - \lambda^{-1})A_{\bar{z}}, (1 - \lambda)A_z] = \\ &= \lambda(\partial A_{\bar{z}} - [A_{\bar{z}}, A_z]) + \lambda^0(\bar{\partial}A_z - \partial A_{\bar{z}} + 2[A_{\bar{z}}, A_z]) \\ &\quad - \lambda^{-1}(\bar{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z]). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Мы видим, что коэффициенты при λ и λ^{-1} зануляются ввиду уравнений (5.2), а коэффициент при λ^0 – ввиду условия (5.1).

Сопоставим семейству форм α_λ систему линейных уравнений типа *Захарова–Шабата* на алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$:

$$dE_\lambda = E_\lambda \cdot \alpha_\lambda \iff E_\lambda^{-1}dE_\lambda = \alpha_\lambda \text{ при любом } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Отображение $E_\lambda: M \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ принимает значения в комплексификации $G^{\mathbb{C}}$ группы G , а операция $E_\lambda \cdot$ означает действие $\text{Ad } E_\lambda$ группы $G^{\mathbb{C}}$ на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Относительно локальной координаты z на M указанная система принимает вид

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial z} = (1 - \lambda^{-1})E_\lambda A_z, \quad \frac{\partial E_\lambda}{\partial \bar{z}} = (1 - \lambda)E_\lambda A_{\bar{z}}. \quad (5.5)$$

Уравнение нулевой кривизны $d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0$ является условием совместности для выписанной системы (проверьте!). Поэтому получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 8 (Уленбек). Пусть $\varphi: M \rightarrow G$ – гармоническое отображение односвязной (не обязательно компактной) римановой поверхности M в компактную группу G , которое центрировано в том смысле, что φ переводит заданную точку $p_0 \in M$ в единицу группы $e \in G$.

Тогда существует единственное решение $E: M \times \mathbb{C}^* \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ системы уравнений *Захарова–Шабата* такое, что

$$E_1 \equiv e, \quad E_{-1} = \varphi, \quad E_\lambda(p_0) \equiv e \text{ при любом } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Более того, E_λ зависит голоморфно от $\lambda \in \mathbb{C}^*$ и $E_\lambda \in G$ при $\lambda \in S^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7 (геометрический смысл уравнений Захарова–Шабата). Семейство E_λ решений системы уравнений (5.5) задает при любом $\lambda \in \mathbb{C}^*$ голоморфную тривиализацию расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}G)$, голоморфная КМ-структура которого индуцирована формой Картана–Маурера α_λ .

Справедлива и теорема, обратная к теореме 8.

ТЕОРЕМА 9 (Уленбек). Пусть $E: M \times \mathbb{C}^* \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ есть семейство голоморфных сечений расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}G)$, которое голоморфно зависит от $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Предположим, что $E_1 \equiv e$ и формы

$$A_z := \frac{1}{1 - \lambda^{-1}} E_\lambda^{-1} \partial' E_\lambda, \quad A_{\bar{z}} := \frac{1}{1 - \lambda} E_\lambda^{-1} \partial'' E_\lambda$$

не зависят от λ . Тогда отображение $\varphi := E_{-1}$ гармонично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\alpha := A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$. По условию, α не зависит от λ и при $\lambda = -1$ совпадает с $\frac{1}{2} \varphi^{-1} d\varphi$. Отображение E_λ удовлетворяет системе уравнений Захарова–Шабата

$$\partial' E_\lambda = (1 - \lambda^{-1}) E_\lambda A_z, \quad \partial'' E_\lambda = (1 - \lambda) E_\lambda A_{\bar{z}}.$$

Так как указанная система имеет решение, должно выполняться условие совместности, совпадающее с уравнением нулевой кривизны для связности

$$\alpha_\lambda := \frac{1 - \lambda^{-1}}{2} A_z dz + \frac{1 - \lambda}{2} A_{\bar{z}} d\bar{z}$$

при любом $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Согласно предложению 6, это означает, что отображение φ гармонично.

ЗАДАЧА 18. Сопоставим форме

$$\alpha := \varphi^* \mu = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z},$$

порожденной гармоническим отображением $\varphi: M \rightarrow G$, операторы

$$L = \partial_z + (1 - \lambda^{-1}) A_z, \quad N = -(1 - \lambda) A_{\bar{z}}.$$

Покажите, что они образуют пару Лакса, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{z}} = [N, L].$$

Обратимся теперь к случаю унитарной группы $G = U(n)$. Обозначим через

$$\mathrm{Gr}(\mathbb{C}^n) = \bigcup_{r=0}^n G_r(\mathbb{C}^n)$$

полный грассманиан пространства $\mathbb{C}^n$. Точки $\mathrm{Gr}(\mathbb{C}^n)$ можно отождествить с эрмитовыми проекторами P : $P^* = P$, $P^2 = P$, в пространстве $\mathbb{C}^n$, сопоставляя проектору P его образ $\mathrm{Im} P \subset \mathbb{C}^n$. Пользуясь этим отождествлением, мы можем вложить $\mathrm{Gr}(\mathbb{C}^n)$ в унитарную группу посредством отображения

$$\mathrm{Gr}(\mathbb{C}^n) \ni P \longmapsto P - P^\perp = V \in U(n).$$

С учетом этого замечания мы можем перенести теорему о факторизации гармонических отображений $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ на гармонические отображения $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow U(n)$ в следующей форме.

ТЕОРЕМА 10 (Уленбек–Валли, см. [24]). *Для любого гармонического отображения $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow U(n)$ найдется последовательность $\varphi_0, \dots, \varphi_k$ гармонических отображений $\mathbb{CP}^1 \rightarrow U(n)$ такая, что:*

- 1) $\varphi_0 \equiv \mathrm{const}, \varphi_k = \varphi$;
- 2) *каждое отображение φ_j получается из предыдущего φ_{j-1} по формуле*

$$\varphi_j = \varphi_{j-1} \cdot (P_j - P_j^\perp) \quad (\text{добавление унитона}),$$

так что для исходного отображения $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow U(n)$ получается факторизация вида

$$\varphi = \varphi_0 \cdot (P_1 - P_1^\perp) \cdot \dots \cdot (P_k - P_k^\perp); \quad (5.6)$$

- 3) *добавление унитона повышает энергию на 4π , так что исходное отображение, допускающее факторизацию вида (5.6), имеет энергию $4\pi k$.*

5.2. Твисторная интерпретация

ОТСТУПЛЕНИЕ (пространство петель группы Ли; см. [19], гл. 3). Пусть G – компактная группа Ли. Обозначим через

$$LG = C^\infty(S^1, G)$$

группу петель группы G , т.е. пространство гладких отображений $S^1 \rightarrow G$, где S^1 отождествляется единичной окружностью в $\mathbb{C}$. Это бесконечномерная группа Ли относительно операции поточечного умножения, в которой роль единицы играет отображение $S^1 \rightarrow e$ в единицу e группы G .

Пространством петель группы G называется однородное пространство группы петель LG вида

$$\Omega G = LG/G,$$

где группа G в знаменателе отождествляется с подгруппой постоянных отображений вида $S^1 \rightarrow g_0 \in G$. Группа петель LG действует на ΩG левыми сдвигами. Начало $o \in \Omega G$ отождествляется с классом $[G]$ постоянных отображений. Касательное пространство к ΩG в начале совпадает с

$$T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g} := L\mathfrak{g}/\mathfrak{g},$$

где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G , а $L\mathfrak{g}$ – алгебра петель, определяемая как

$$L\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{g}).$$

Это бесконечномерная алгебра Ли, наделенная скобкой, задаваемой поточечно.

Элементы пространства петель ΩG удобно представлять рядами Фурье, а именно, произвольный вектор $\xi \in T_o^{\mathbb{C}}(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ задается рядом

$$\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k e^{ik\theta}, \quad \text{где } \xi_k \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.$$

Этот вектор принадлежит $T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\xi_{-k} = \bar{\xi}_k$.

Пространство петель ΩG обладает естественной симплектической формой, инвариантной относительно действия группы LG на ΩG . Ввиду инвариантности достаточно определить сужение этой формы на касательное пространство $T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}$ в начале. Фиксируем инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и зададим 2-форму на $L\mathfrak{g}$ посредством

$$\omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(\theta), \eta'(\theta) \rangle d\theta \quad \text{для } \xi, \eta \in L\mathfrak{g}. \quad (5.7)$$

Это кососимметричная замкнутая 2-форма на $L\mathfrak{g}$, которая инвариантна относительно присоединенного действия группы LG на $L\mathfrak{g}$. Заметим, что $\omega_0(\xi, \eta) = 0$ тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из отображений ξ, η постоянно. Поэтому форма ω_0 спускается до замкнутой невырожденной 2-формы ω на $\Omega\mathfrak{g}$, которая разносится с помощью левых сдвигов группы LG в остальные точки ΩG .

ЗАДАЧА 19. Покажите, что форма ω_0 на алгебре петель $L\mathfrak{g}$, задаваемая формулой (5.7), действительно обладает указанными выше свойствами, т.е. что она порождает инвариантную симплектическую форму ω на пространстве петель ΩG .

Инвариантную комплексную структуру на пространстве петель ΩG можно ввести, пользуясь комплексным однородным представлением для ΩG , имеющим вид (см. [16], пп. 8.1, 8.2)

$$\Omega G = LG^{\mathbb{C}} / L_+ G^{\mathbb{C}}, \quad (5.8)$$

где $LG^{\mathbb{C}} = C^\infty(S^1, G^{\mathbb{C}})$ – комплексифицированная группа петель, а $L_+ G^{\mathbb{C}} = \text{Hol}(\Delta, G^{\mathbb{C}})$ – ее подгруппа, состоящая из отображений, продолжающихся до голоморфных отображений единичного круга Δ в комплексифицированную группу $G^{\mathbb{C}}$.

Заметим, что в случае унитарной группы $G = U(n)$ представление (5.8) означает, что любую гладкую матричную функцию $T(\theta): S^1 \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ на окружности можно представить в виде

$$T(\theta) = U(\theta)H_+(\theta),$$

где $U(\theta): S^1 \rightarrow U(n)$ – унитарная матричная функция, а H_+ продолжается внутрь единичного круга Δ до голоморфной матричной функции $H_+(z): \Delta \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$. Это представление является параметрическим аналогом представления матрицы в виде произведения унитарной и верхне-треугольной матриц.

ЗАДАЧА 20. Покажите, что любую гладкую функцию $f(\theta)$ на единичной окружности S^1 , не имеющую нулей, можно представить в виде

$$f = u \cdot h_+,$$

где u, h_+ – гладкие функции на S^1 , причем $|u(\theta)| \equiv 1$, а функция h_+ голоморфно продолжается внутрь единичного круга.

Опишем сужение инвариантной комплексной структуры $\mathcal{J}^1$, индуцируемой на ΩG представлением (5.8), на касательное пространство $T_o(\Omega G)$. В терминах рядов Фурье оно задается следующим образом

$$\mathcal{J}^1: \xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k e^{ik\theta} \mapsto \mathcal{J}^1 \xi = -i \sum_{k > 0} \xi_k e^{ik\theta} + i \sum_{k < 0} \xi_k e^{ik\theta}. \quad (5.9)$$

Задача 21. Докажите это утверждение, т.е. покажите, что сужение комплексной структуры $\mathcal{J}^1$ на ΩG , определяемой представлением (5.8), на касательное пространство $T_o(\Omega G)$ задается в терминах рядов Фурье формулой (5.9).

Симплектическая и комплексная структуры порождают инвариантную риманову метрику на ΩG , задаваемую в начале посредством:

$$g^1(\xi, \eta) = \omega(\xi, \mathcal{J}^1 \eta) \text{ для } \xi, \eta \in \Omega \mathfrak{g} = T_o(\Omega G).$$

В терминах рядов Фурье эта метрика вычисляется по формуле

$$g^1(\xi, \eta) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k > 0} k \langle \xi_k, \bar{\eta}_k \rangle = \sum_{k \neq 0} |k| \langle \xi_k, \bar{\eta}_k \rangle.$$

Существование двух однородных представлений для пространства петель ΩG :

$$\Omega G = LG/G = LG^{\mathbb{C}}/L_+ G^{\mathbb{C}}$$

роднит это пространство с флаговыми многообразиями группы G , допускающими представления вида

$$F = G/H = G^{\mathbb{C}}/P.$$

На самом деле можно показать, что ΩG является универсальным флаговым многообразием группы G в том смысле, что все флаговые многообразия F группы G вкладываются в ΩG в виде комплексных подмногообразий (см. задачу 22* в конце этого параграфа). $\square$

Вернемся к твисторной конструкции гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow G$ римановых поверхностей M в компактную группу Ли G . Рассмотрим отображение

$$\pi: \Omega G \longrightarrow G, \quad \gamma \longmapsto \gamma(-1).$$

Как мы увидим ниже, это отображение является твисторным расщеплением над G .

Конструкция Уленбек сопоставляет гармоническому отображению $\varphi: M \rightarrow G$ семейство отображений

$$E_\lambda: M \longrightarrow G^{\mathbb{C}},$$

которое голоморфно зависит от параметра $\lambda \in \mathbb{C}^*$ и удовлетворяет условиям

$$E_1 \equiv e, \quad E_{-1} = \varphi.$$

Для $\lambda \in S^1$ получаем семейство отображений $E_\lambda: M \rightarrow G$, которое можно рассматривать как отображение

$$E: S^1 \times M \longrightarrow G \iff E: M \longrightarrow \Omega G.$$

Тем самым мы сопоставили гармоническому отображению $\varphi: M \rightarrow G$ отображение $E: M \rightarrow \Omega G$, дифференциал которого имеет вид

$$E_\lambda^{-1} dE_\lambda = \alpha_\lambda = \frac{1 - \lambda^{-1}}{2} A_z dz + \frac{1 - \lambda}{2} A_{\bar{z}} d\bar{z}.$$

Напомним, что на ΩG имеется комплексная структура $\mathcal{J}^1$, ограничение которой на касательное пространство $T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}$ задается формулой

$$\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k e^{ik\theta} \longmapsto \mathcal{J}^1 \xi = -i \sum_{k > 0} \xi_k e^{ik\theta} + i \sum_{k < 0} \xi_k e^{ik\theta}.$$

Рассмотрим, наряду с этой комплексной структурой, инвариантную почти комплексную структуру $\mathcal{J}^2$, ограничение которой на $T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}$ задается формулой

$$\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k e^{ik\theta} \longmapsto \mathcal{J}^2 \xi = -i \sum_{k \neq 0} (-1)^{k+1} \operatorname{sgn} k \xi_k e^{ik\theta}.$$

В частности, $(\mathcal{J}^2 \xi)_k = (\mathcal{J}^1 \xi)_k$ при нечетных k и $(\mathcal{J}^2 \xi)_k = -(\mathcal{J}^1 \xi)_k$ при четных k .

Отображение $E: M \rightarrow \Omega G$, построенное по гармоническому отображению $\varphi: M \rightarrow G$, обладает тем свойством, что его дифференциал $E_\lambda^{-1} dE_\lambda$ содержит только члены, линейные по λ и λ^{-1} . Иначе говоря, его образ лежит в горизонтальном подпространстве ΩG , натянутом на $e^{i\theta}$ и $e^{-i\theta}$. Такие отображения называются

супергоризонтальными. По построению, отображение $E: M \rightarrow \Omega G$ голоморфно относительно комплексной структуры $\mathcal{J}^1$ на ΩG , поэтому оно голоморфно и относительно почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$. Тем самым, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\varphi: M \rightarrow G$ – центрированное гармоническое отображение, т.е. φ переводит отмеченную точку $p_0 \in M$ в единицу e группы G . Тогда оно допускает твисторное поднятие $E: M \rightarrow \Omega G$, которое супергоризонтально и голоморфно относительно обеих почти комплексных структур $\mathcal{J}^1$, $\mathcal{J}^2$ на ΩG .

Из теоремы Уленбек 9 вытекает, что справедливо и обратное утверждение: проекция $E_{-1} = \varphi$ любого супергоризонтального голоморфного отображения $E: M \rightarrow \Omega G$ является гармоническим отображением. На самом деле верно и более общее утверждение, доказательство которого мы оставляем в качестве задачи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8 (Берстол). Отображение $\pi: (\Omega G, \mathcal{J}^2) \rightarrow G$ является твисторным расслоением, т.е. проекция $\varphi = \pi \circ \psi$ любого $\mathcal{J}^2$ -голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow \Omega G$ компактной римановой поверхности M в пространство петель ΩG является гармоническим отображением.

ЗАДАЧА 22*. Определим действие группы окружности $S^1 = U(1)$ на пространстве петель ΩG по формуле

$$\lambda \cdot \gamma(z) := \gamma(\lambda)^{-1} \gamma(\lambda z),$$

где $\lambda \in U(1)$, $z = e^{i\theta} \in S^1$. Неподвижными точками этого действия являются гомоморфизмы $\gamma: S^1 = U(1) \rightarrow G$. Пользуясь этим фактом, постройте вложение флаговых многообразий $F = G/H$ группы G в пространство петель ΩG .

С другой стороны, неподвижные точки S^1 -действия на ΩG являются критическими точками функционала энергии

$$E(\gamma) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \langle \gamma(e^{i\theta})^{-1} \gamma'(e^{i\theta}), \gamma(e^{i\theta})^{-1} \gamma'(e^{i\theta}) \rangle d\theta.$$

Иными словами, S^1 -действие на ΩG порождается гамильтоновым векторным полем, отвечающим функционалу $E(\gamma)$.

Глава 6. Гармонические отображения в пространства петель и поля Янга–Миллса

В этой главе приводится конструкция гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow \Omega G$ из компактной римановой поверхности M в пространство петель ΩG компактной группы Ли G . Используя изометрическое вложение пространства ΩG в бесконечномерный грассманиан Гильберта–Шмидта, мы сводим эту задачу к построению гармонических отображений в указанный грассманиан. Оказывается, гармонические отображения в грассманиан Гильберта–Шмидта можно строить, также как в случае конечномерного грассмана многообразия, с помощью твисторного подхода. Именно, по аналогии с конечномерным случаем вводятся т.н. виртуальные флаговые расслоения над грассманианом Гильберта–Шмидта, которые играют роль твисторных расслоений. Пользуясь указанными расслоениями, гармонические отображения в грассманиан Гильберта–Шмидта можно строить, как и в конечномерном случае, проектируя $\mathcal{J}^2$ -голоморфные кривые в виртуальных флаговых расслоениях на грассманиан.

Значение гармонических отображений римановых поверхностей в пространства петель ΩG объясняется их гипотетической связью с полями Янга–Миллса на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$. Именно, теорема Атьи–Дональдсона утверждает, что имеется взаимнооднозначное соответствие между G -инстантонами на $\mathbb{R}^4$ и голоморфными отображениями римановой сферы в пространство петель ΩG . Предполагается, что верна и “реалификация” этой теоремы, утверждающая, что имеется взаимнооднозначное соответствие между G -полями Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ и гармоническими отображениями римановой сферы в пространство петель ΩG .

6.1. Теорема Атьи–Дональдсона

ОТСТУПЛЕНИЕ (поля Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$; см. [2], гл. I, II). Пусть G – компактная группа Ли, называемая также *калибровоч-*

ной группой. Калибровочным G -потенциалом на $\mathbb{R}^4$ называется связность в главном G -расслоении над $\mathbb{R}^4$, которую мы отождествляем с 1-формой A на $\mathbb{R}^4$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . В случае, когда калибровочная группа G совпадает с группой $U(n)$ унитарных $(n \times n)$ -матриц, форма A имеет вид

$$A = \sum_{\mu=1}^4 A_{\mu}(x) dx_{\mu},$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – координаты на $\mathbb{R}^4$, а $A_{\mu}(x)$ – гладкие функции на $\mathbb{R}^4$ со значениями в пространстве косоэрмитовых $(n \times n)$ -матриц. В частном случае $G = U(1)$ калибровочный потенциал совпадает с евклидовым аналогом обычного электромагнитного 4-потенциала.

Кривизна связности A называется *калибровочным G -полем*. Она задается 2-формой F на $\mathbb{R}^4$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ вида

$$F = DA = dA + \frac{1}{2}[A, A],$$

где $D: \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g})$ есть оператор ковариантного внешнего дифференцирования, порожденный связностью A . В частном случае $G = U(n)$ форма F имеет вид

$$F = \sum_{\mu, \nu=1}^4 F_{\mu\nu}(x) dx_{\mu} \wedge dx_{\nu},$$

где

$$F_{\mu\nu} := \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + [A_{\mu}, A_{\nu}], \quad \partial_{\mu} := \partial/\partial x_{\mu}.$$

В случае $G = U(1)$ набор функций $\{F_{\mu\nu}\}$ задает евклидов аналог тензора Максвелла электромагнитного поля.

Калибровочным преобразованием называется гладкое отображение

$$g: \mathbb{R}^4 \longrightarrow G,$$

которое действует на калибровочные потенциалы и поля следующим образом:

$$g: A \longmapsto A_g := g^{-1}dg + g^{-1}Ag, \quad g: F \longmapsto F_g := g^{-1}Fg$$

(группа G действует на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ посредством присоединенного представления). В случае $G = U(1)$ калибровочное преобразование совпадает с умножением на фазовый множитель

$g(x) = e^{i\theta(x)}$, действие которого на потенциал A сводится к градиентному преобразованию $A \mapsto A - id\theta$, поле F при этом не изменяется.

Функционал действия Янга–Миллса задается формулой

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \|F\|^2 d^4x, \quad (6.1)$$

где

$$\|F\|^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^4 \|F_{\mu\nu}\|^2,$$

а $\|F_{\mu\nu}\|$ вычисляется с помощью инвариантного скалярного произведения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В случае $G = U(n)$ в качестве такого произведения можно взять $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY)$. Формулу (6.1) можно при этом переписать в виде

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge *F),$$

где $*$ есть оператор Ходжа.

Калибровочные поля F , на которых реализуются экстремумы функционала Янга–Миллса, называются *полями Янга–Миллса*, а отвечающие им калибровочные потенциалы A – *связностями Янга–Миллса*. Они являются решениями (с конечным действием Янга–Миллса) уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала Янга–Миллса, которое имеет вид

$$D^*F = 0, \quad (6.2)$$

где $D^*: \Omega^2(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g})$ – оператор, формально сопряженный к оператору ковариантного дифференцирования D . Он равен $D^* = -*D*$, так что уравнение (6.2) можно переписать в виде

$$D * F = 0. \quad (6.3)$$

Последнее уравнение принято называть *уравнением Янга–Миллса*. К этому уравнению часто добавляют *тождество Бьянки*

$$DF = 0,$$

которое выполняется автоматически для калибровочных полей F .

Калибровочное поле F называется *автодуальным* (соответственно *анти-автодуальным*), если

$$*F = F \quad (\text{соответственно } *F = -F). \quad (6.4)$$

Из тождества Бьянки немедленно следует, что решения *уравнений дуальности*

$$*F = \pm F,$$

обладающие конечным действием Янга–Миллса, автоматически являются решениями уравнений Янга–Миллса (6.3).

Представим калибровочное поле F в виде суммы

$$F = F_+ + F_-,$$

где $F_{\pm} = \frac{1}{2}(*F \pm F)$. В терминах компонент $F_{\pm}$ выражение (6.1) для функционала Янга–Миллса можно переписать в виде

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} (\|F_+\|^2 + \|F_-\|^2) d^4x.$$

Для калибровочных полей F , обладающих конечным действием Янга–Миллса, число

$$k(A) := \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} (-\|F_+\|^2 + \|F_-\|^2) d^4x = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge F)$$

является целочисленным топологическим инвариантом, называемым иначе *топологическим зарядом* поля F . Очевидно, всегда

$$S(A) \geq 4\pi^2 |k(A)|. \quad (6.5)$$

Выделим топологический класс калибровочных полей, фиксируя значение инварианта $k(A)$, иначе говоря, ограничиваясь полями с конечным действием Янга–Миллса и топологическим зарядом $k(A) = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из неравенства (6.5) следует, что минимум $S(A)$ на рассматриваемом классе может достигаться при $k > 0$ только на анти-автодуальных полях, а при $k < 0$ – только на автодуальных полях. Анти-автодуальные поля с конечным действием Янга–Миллса называются *инстантонами*, а автодуальные поля с конечным действием Янга–Миллса – *анти-инстантонами*.

Основной объект изучения в теории Янга–Миллса – это *пространство модулей полей Янга–Миллса*, являющееся фактором

пространства всех полей Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ по модулю калибровочной эквивалентности. Отметим, что задача описания указанного пространства модулей еще далека от окончательного решения. В то же время более узкую задачу описания пространства модулей инстантонов, т.е. пространства всех инстантонов на $\mathbb{R}^4$ по модулю калибровочной эквивалентности, удалось решить полностью. Указанное решение было дано в известной работе Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина [3] на основе твисторного подхода. В твисторных терминах пространство модулей G -инстантонов (т.е. инстантонов, отвечающих калибровочной группе G) на $\mathbb{R}^4$ интерпретируется как пространство голоморфных $G^{\mathbb{C}}$ -расслоений (т.е. голоморфных расслоений со структурной группой $G^{\mathbb{C}}$) на 3-мерном проективном пространстве $\mathbb{CP}^3$, голоморфно тривиальных на проективных прямых в $\mathbb{CP}^3$, являющихся слоями хопфовского расслоения $\mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$. $\square$

Другая интерпретация пространства модулей инстантонов на $\mathbb{R}^4$ дана Дональдсоном в работе [10]. Теорема Дональдсона утверждает, что существует естественное взаимно-однозначное соответствие между пространством модулей G -инстантонов на $\mathbb{R}^4$ и множеством классов централизованной эквивалентности голоморфных $G^{\mathbb{C}}$ -расслоений на $\mathbb{CP}^2$, голоморфно тривиальных на “бесконечно удаленной” проективной прямой $\mathbb{CP}_{\infty}^1$. Централизованная эквивалентность означает, что допускаются только изоморфизмы голоморфных расслоений, которые тождественны в отмеченной точке на $\mathbb{CP}_{\infty}^1$. Можно рассматривать приведенный результат как редукцию ADHM-конструкции из [3] на 2-мерное проективное пространство $\mathbb{CP}^2$.

Для нас удобнее другая формулировка теоремы Дональдсона, данная в работе [1]. В этой формулировке пространство модулей G -инстантонов на $\mathbb{R}^4$ отождествляется с множеством классов централизованной эквивалентности голоморфных $G^{\mathbb{C}}$ -расслоений на произведении $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, голоморфно тривиальных на объединении $\mathbb{CP}_{\infty}^1 \cup \mathbb{CP}_{\infty}^1$ “бесконечно удаленных” проективных прямых:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{пространство модулей} \\ G\text{-инстантонов на } \mathbb{R}^4 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{классы эквивалентности го-} \\ \text{ломорфных } G^{\mathbb{C}}\text{-расслоений} \\ \text{на } \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1, \text{ тривиальных} \\ \text{на } \mathbb{CP}_{\infty}^1 \cup \mathbb{CP}_{\infty}^1 \end{array} \right\}.$$

Множество классов эквивалентности голоморфных расслоений в правой части этого соответствия можно, в свою очередь,

отождествить с пространством центрированных голоморфных отображений $f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \Omega G$, переводящих $\infty \in \mathbb{CP}^1$ в начало $o \in \Omega G$.

Действительно, фиксируем некоторую точку $z \in \mathbb{CP}^1$. Сужение заданного голоморфного $G^{\mathbb{C}}$ -расслоения над $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ на проективную прямую $\mathbb{CP}_z^1 := \mathbb{CP}^1 \times \{z\}$ задается функцией перехода

$$F_z: S^1 \subset \mathbb{CP}_z^1 \longrightarrow G^{\mathbb{C}},$$

которая продолжается в некоторую окрестность U экватора S^1 в $\mathbb{CP}_z^1$ до голоморфного отображения $F_z: U \subset \mathbb{CP}_z^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}}$. Функцию $F_z: S^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как элемент группы петель $LG^{\mathbb{C}}$, поэтому получаем отображение

$$F: \mathbb{CP}^1 \ni z \longmapsto F_z \in LG^{\mathbb{C}}.$$

В композиции с проекцией $LG^{\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega G^{\mathbb{C}} = LG^{\mathbb{C}}/L_+ G^{\mathbb{C}}$ оно дает отображение

$$f: \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \Omega G.$$

Построенное отображение f является центрированным и голоморфным, если исходное $G^{\mathbb{C}}$ -расслоение над $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ было голоморфным и тривиальным на $\mathbb{CP}_{\infty}^1 \cup \mathbb{CP}_{\infty}^1$. Тем самым, имеется следующее взаимно-однозначное соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{пространство модулей} \\ G\text{-инстантонов на } \mathbb{R}^4 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{пространство центрирован-} \\ \text{ных голоморфных отображе-} \\ \text{ний } f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \Omega G \end{array} \right\}.$$

Имея указанный результат Атьи–Дональдсона, естественно выдвинуть гипотезу, которая получается “реалификацией” (иначе говоря, “овеществлением”) приведенного соответствия. Согласно этой гипотезе, должно существовать следующее взаимно-однозначное соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{пространство модулей} \\ G\text{-полей Янга–Миллса} \\ \text{на } \mathbb{R}^4 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{пространство центрирован-} \\ \text{ных гармонических отобра-} \\ \text{жений } h: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \Omega G \end{array} \right\}.$$

Сформулированная гипотеза остается пока недоказанной. Главная трудность заключается в отсутствии “вещественного” аналога теоремы Дональдсона. Имеющееся доказательство этой теоремы основано на методе монад и является чисто голоморфным.

6.2. Гармонические отображения в пространства петель

Мы будем изучать гармонические отображения в пространства петель ΩG , вкладывая ΩG в бесконечномерный грассманиан Гильберта–Шмидта, к определению которого мы переходим.

ОТСТУПЛЕНИЕ (грассманиан Гильберта–Шмидта; см. [16], гл. VII, [19], гл. 7). Пусть H есть комплексное (сепарабельное) гильбертово пространство. Допустим, что H *поляризовано*, т.е. обладает разложением в прямую ортогональную сумму

$$H = H_+ \oplus H_- \quad (6.6)$$

замкнутых бесконечномерных подпространств. Обозначим через pr_+ (соответственно pr_-) ортогональную проекцию $H \rightarrow H_+$ (соответственно $H \rightarrow H_-$).

В качестве конкретной реализации поляризованного гильбертова пространства можно взять пространство $L_0^2(S^1, \mathbb{C})$ квадратично интегрируемых комплекснозначных функций на окружности S^1 с нулевым средним. Функции $f \in L_0^2(S^1, \mathbb{C})$ имеют ряды Фурье, сходящиеся в L^2 -смысле, вида

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k z^k, \quad f_0 = 0,$$

где $z = e^{i\theta}$. В этом случае в качестве H_+ (соответственно H_-) можно взять подпространство, состоящее из функций $f \in L_0^2(S^1, \mathbb{C})$, имеющих нулевые коэффициенты Фурье с отрицательными (соответственно положительными) индексами:

$$H_+ = \left\{ f \in H : f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k \right\},$$

$$H_- = \left\{ f \in H : f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k z^k \right\}.$$

Обозначим через $L(H)$ пространство линейных ограниченных операторов на H , и через $GL(H)$ группу линейных ограниченных операторов на H , имеющих ограниченный обратный. Относительно поляризации $H = H_+ \oplus H_-$ любой оператор $A \in L(H)$ записывается в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a: H_+ \rightarrow H_+, & b: H_- \rightarrow H_+ \\ c: H_+ \rightarrow H_-, & d: H_- \rightarrow H_- \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Группа Гильберта–Шмидта* $GL_{HS}(H)$ состоит из операторов $A \in GL(H)$, для которых внедиагональные члены b и c являются операторами Гильберта–Шмидта.

Оператор $A \in L(H)$ называется *оператором Гильберта–Шмидта*, если для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в пространстве H сходится ряд

$$\sum_i^{\infty} \|Te_i\| < \infty.$$

Если это условие выполняется для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}$, то оно выполняется и для любого другого ортонормированного базиса в H . Операторы Гильберта–Шмидта образуют комплексное гильбертово пространство $HS(H)$ относительно нормы, задаваемой формулой

$$\|T\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Можно сказать, что пространство $HS(H)$ является операторным аналогом функционального пространства L^2 , а определение 11

означает, что в операторах $A \in \text{GL}_{\text{HS}}(H)$ “внедиагональные” операторы b и c “малы” по сравнению с “диагональными” операторами a и d . Определение операторов Гильберта–Шмидта очевидным образом переносится на линейные ограниченные операторы $A: H_1 \rightarrow H_2$, действующие из одного гильбертова пространства в другое.

С группой $\text{GL}_{\text{HS}}(H)$, также как в конечномерном случае, связано грассманово многообразие Гильберта–Шмидта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Грассманово многообразие Гильберта–Шмидта* $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ есть множество замкнутых подпространств $W \subset H$, для которых ортогональная проекция $\text{pr}_+: W \rightarrow H_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\text{pr}_-: W \rightarrow H_-$ есть оператор Гильберта–Шмидта.

Напомним, что линейный оператор $A \in \text{L}(H)$ называется *фредгольмовым*, если он обладает конечномерными ядром и коядром. Для такого оператора можно определить его *фредгольмов индекс* по формуле

$$\text{ind } A := \dim(\text{Ker } A) - \dim(\text{Coker } A).$$

Фредгольмов индекс является топологическим инвариантом оператора A , точнее, он не меняется при непрерывных линейных деформациях A . Эквивалентное определение: оператор A является фредгольмовым, если он обратим по модулю компактных операторов, т.е. если существует оператор $B \in \text{L}(H)$ такой, что операторы $I - AB$ и $I - BA$ компактны. Определение фредгольмовых операторов немедленно переносится на линейные ограниченные операторы $A: H_1 \rightarrow H_2$, действующие из одного гильбертова пространства в другое.

С учетом приведенных свойств фредгольмовых операторов и операторов Гильберта–Шмидта можно перефразировать определение 12, сказав, что многообразие $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ состоит из подпространств $W \subset H$, которые “мало” отличаются от подпространства H_+ в том смысле, что проекция $\text{pr}_+: W \rightarrow H_+$ является изоморфизмом по модулю компактных операторов, а проекция $\text{pr}_-: W \rightarrow H_-$ “мала”, будучи оператором Гильберта–Шмидта.

Эквивалентно, грассманово многообразие $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ можно определить как множество замкнутых подпространств $W \subset H$, являющихся образами линейных ограниченных операторов $w: H_+ \rightarrow H$ таких, что оператор $w_+ := \text{pr}_+ \circ w: H_+ \rightarrow H_+$ фредгольмов,

а оператор $w_- := \text{pr}_- \circ w: H_+ \rightarrow H_-$ есть оператор Гильберта–Шмидта. Если подпространство W принадлежит $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, то график любого оператора Гильберта–Шмидта $w': W \rightarrow W^\perp$ также принадлежит $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$. Поэтому мы можем рассмотреть открытое подмножество $U_W \subset \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ вида

$$U_W := \{W' \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H) : \text{ортогональная проекция } W' \rightarrow W \text{ есть изоморфизм}\}. \quad (6.7)$$

Открытые подмножества U_W играют роль координатных окрестностей на грассмановом многообразии $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$.

Группа Гильберта–Шмидта $\text{GL}_{\text{HS}}(H)$ действует на многообразии $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, причем это действие транзитивно. Действие унитарной подгруппы $\text{U}_{\text{HS}}(H) \subset \text{GL}_{\text{HS}}(H)$, определяемой как

$$\text{U}_{\text{HS}}(H) := \text{U}(H) \cap \text{GL}_{\text{HS}}(H),$$

также является транзитивным, причем ее подгруппа изотропии в точке $H_+ \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ совпадает с $\text{U}(H_+) \times \text{U}(H_-)$.

Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9 ([16], пред. 7.1.2; [19], п. 7.1). *Грассманиан Гильберта–Шмидта $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ является комплексным гильбертовым многообразием, локальной моделью которого служит гильбертово пространство операторов Гильберта–Шмидта $\text{HS}(H_+, H_-)$. Введенные выше координатные окрестности $\{U_W\}$ образуют атлас многообразия $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ с локальными картами, задаваемыми отображениями*

$$U_W \ni W' \longmapsto w' \in \text{HS}(W, W^\perp).$$

Касательное пространство $T_{H_+} \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ совпадает с гильбертовым пространством $\text{HS}(H_+, H_-)$, на котором имеется инвариантное скалярное произведение, задаваемое формулой

$$(A, B) \longmapsto \text{Re} \{ \text{tr}(AB^*) \}, \quad A, B \in \text{HS}(H_+, H_-).$$

Мнимая часть комплексного скалярного произведения $\text{tr}(AB^*)$:

$$\omega(A, B) := \text{Im} \{ \text{tr}(AB^*) \}$$

определяет инвариантную невырожденную 2-форму на $T_{H_+} \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, которая продолжается до $\text{U}_{\text{HS}}(H)$ -инвариантной

симплектической формы на многообразии $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$. Это задает на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ кэлерову структуру, превращая его в кэлерово гильбертово многообразие.

Многообразию $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ имеет счетное число связных компонент, нумеруемых индексом соответствующего фредгольмова оператора. Именно, сопоставим подпространству $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, совпадающему с образом оператора $w: H_+ \rightarrow H$, число, равное индексу фредгольмова оператора w_+ . Будем говорить, что подпространство $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ имеет *виртуальную размерность* d , если фредгольмов индекс оператора w_+ равен d . Обозначим через $G_d(H)$ подмножество $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, состоящее из подпространств виртуальной размерности d . Тогда многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ является несвязным объединением связных компонент $G_d(H)$:

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H) = \bigcup_d G_d(H). \quad \square \quad (6.8)$$

Построим теперь обещанное изометрическое вложение пространства петель ΩG в грассманиан Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$.

Предположим, что компактная группа Ли G является матричной, т.е. реализована в виде подгруппы унитарной группы $U(n)$ при некотором n . Группа петель LG допускает изометрическое вложение в унитарную группу $U_{\mathrm{HS}}(H)$, где гильбертово пространство H отождествляется с пространством вектор-функций $L_0^2(S^1, \mathbb{C}^n)$. Это вложение строится следующим образом. Мы сопоставляем произвольной петле $\gamma \in LG = C^\infty(S^1, G)$ оператор умножения $M_\gamma \in U_{\mathrm{HS}}(H)$, определяемый посредством

$$f \in H = L_0^2(S^1, \mathbb{C}^n) \mapsto (M_\gamma f)(z) := \gamma(z)f(z) \text{ для } z \in S^1.$$

Иначе говоря, действие оператора M_γ на вектор-функцию $f \in H$ задается поточечным применением матричной функции $\gamma(z) \in C^\infty(S^1, U(n))$ к вектор-функции $f(z) \in L_0^2(S^1, \mathbb{C}^n)$.

Задача 23. Проверьте, что оператор умножения M_γ принадлежит группе $U_{\mathrm{HS}}(H)$ для гладких петель $\gamma \in C^\infty(S^1, G)$.

Построенное вложение группы петель LG в унитарную группу Гильберта–Шмидта $U_{\mathrm{HS}}(H)$ индуцирует изометрическое вложение

$$\Omega G \longrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H).$$

Тем самым, мы можем считать, что любое гармоническое отображение $M \rightarrow \Omega G$ из компактной римановой поверхности M

в пространство петель ΩG принимает значения в грассманиане Гильберта–Шмидта $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, сводя задачу об описании гармонических отображений $M \rightarrow \Omega G$ к исследованию гармонических отображений $M \rightarrow \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$. Последняя задача, ввиду разложения (6.8), сводится к изучению гармонических отображений

$$\varphi: M \longrightarrow G_d(H)$$

в грассманианы фиксированной виртуальной размерности d . Эту задачу можно решать, обобщая на указанные отображения методы, развитые для описания гармонических отображений $M \rightarrow G_d(\mathbb{C}^n)$.

Введем, по аналогии с конечномерным случаем, многообразия виртуальных флагов. Для этого фиксируем произвольное разложение $d = r_1 + \dots + r_n$ числа d в сумму целых чисел и определим *многообразие виртуальных флагов* $F_{\mathbf{r}}(H)$ типа $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, состоящее из наборов $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_n)$ попарно ортогональных подпространств $W_i \subset H$ виртуальной размерности r_i . Далее, для любого упорядоченного подмножества $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ положим $r := \sum_{i \in \sigma} r_i$ и построим однородное виртуальное флаговое расслоение

$$\pi_{\sigma}: F_{\mathbf{r}}(H) \longrightarrow G_r(H),$$

сопоставляя

$$(W_1, \dots, W_n) \longmapsto W := \bigoplus W_i.$$

Введем на многообразии виртуальных флагов $F_{\mathbf{r}}(H)$ почти комплексные структуры $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ также, как в конечномерной ситуации. Справедливо следующее предложение, которое доказывается также, как его аналог для грассманова многообразия $G_r(\mathbb{C}^n)$ (см. предложение 4 из п. 4.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10 [20]. *Флаговое расслоение*

$$\pi_{\sigma}: (F_{\mathbf{r}}(H), \mathcal{J}^2) \rightarrow G_r(H)$$

является твисторным, т.е. проекция любого $\mathcal{J}^2$ -голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow F_{\mathbf{r}}(H)$ на $G_r(H)$ есть гармоническое отображение $\varphi := \pi_{\sigma} \circ \psi: M \rightarrow G_r(H)$.

Есть основания полагать, что и другие утверждения, доказанные в п. 4.2 (в частности, предложение 5), переносятся на случай грассманова многообразия $G_r(H)$.

Список литературы

- [1] M. F. Atiyah, “Instantons in two and four dimensions”, *Commun. Math. Phys.*, **93** (1984), 437–451, [doi 10.1007/BF01212288](#), [MR 763752](#), [Zbl 0564.58040](#), [ADS 1984CMAPh..93..437A](#); Имеется русский перевод в сборнике: *Монополи. Топологические и вариационные методы*, Мир, М., 1989, 231–254.
- [2] М. Атья, “Геометрия полей Янга–Миллса”, *Геометрия и физика узлов*, Мир, М., 1995, [MR 1397266](#).
- [3] M. F. Atiyah, V. G. Drinfeld, N. J. Hitchin, Yu. I. Manin, “Construction of instantons”, *Phys. Lett. A*, **65** (1978), 185–187, [doi 10.1016/0375-9601\(78\)90141-X](#), [MR 598562](#), [ADS 1978PhLA...65..185A](#).
- [4] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, I. M. Singer, “Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry”, *Proc. Roy. Soc. London*, **362** (1978), 425–461, [MR 506229](#), [Zbl 0389.53011](#), [ADS 1978RSPSA.362..425A](#).
- [5] Р. Бишоп, Р. Криттенден, *Геометрия многообразий*, Мир, М., 1967, [MR 0213981](#), [Zbl 0146.43304](#).
- [6] F. E. Burstall, “Twistor methods for harmonic maps”, *Differential geometry*, Proc. Nord. Summer Sch. (Lyngby, Denmark, 1985), Lecture Notes Math., **1263**, 1987, 55–96, [doi 10.1007/BFb0078610](#), [MR 905879](#), [Zbl 0655.58011](#).
- [7] F. E. Burstall, J. C. Wood, “The construction of harmonic maps into complex Grassmannians”, *J. Diff. Geom.*, **23** (1986), 255–297, [MR 852157](#), [Zbl 0588.58018](#).
- [8] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988, [MR 1090326](#).
- [9] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982, [MR 0693752](#).
- [10] S. K. Donaldson, “Instantons and geometric invariant theory”, *Commun. Math. Phys.*, **93** (1984), 453–460, [doi 10.1007/BF01212289](#), [MR 763753](#), [Zbl 0581.14008](#), [ADS 1984CMAPh..93..453D](#); Имеется русский перевод в сборнике: *Монополи. Топологические и вариационные методы*, Мир, М., 1989, 255–267.
- [11] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М., 1979, [MR 0566582](#).
- [12] J. Eells, J. C. Wood, “Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces”, *Adv. Math.*, **49** (1983), 217–263, [doi 10.1016/0001-8708\(83\)90062-2](#), [MR 716372](#), [Zbl 0528.58007](#).
- [13] J. L. Koszul, B. Malgrange, “Sur certaines structures fibrées complexes”, *Arch. Math.*, **9** (1958), 102–109, [doi 10.1007/BF02287068](#), [MR 131882](#), [Zbl 0083.16705](#).

- [14] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971, [Zbl 0216.45701](#).
- [15] A. M. Perelomov, “Chiral models: geometrical aspects”, *Phys. Rep.*, **146** (1987), 135–213, [doi 10.1016/0370-1573\(87\)90044-5](#), [MR 876858](#), [ADS 1987PhR...146..135P](#).
- [16] Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990, [MR 1071737](#).
- [17] J. H. Rawnsley, “ f -structures, f -twistor spaces and harmonic maps”, *Geometry seminar “Luigi Bianchi” II*–1984, *Lecture Notes Math.*, **1164**, 1985, 84–159, [MR 829229](#).
- [18] S. Salamon, “Harmonic and holomorphic maps”, *Geometry seminar “Luigi Bianchi” II*–1984, *Lecture Notes Math.*, **1164**, 1985, 161–224, [doi 10.1007/BFb0081912](#), [MR 829230](#), [Zbl 0591.53031](#).
- [19] А. Г. Сергеев, *Кэлерава геометрия пространств петель*, МЦНМО, М., 2001.
- [20] A. G. Sergeev, “Harmonic maps into loop spaces of compact Lie groups”, *Science in China, Ser. A: Mathematics*, **51** (2008), 695–706, [doi 10.1007/s11425-007-0201-6](#), [MR 2395414](#), [Zbl pre05323348](#).
- [21] Р. Уэллс, *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, Мир, М., 1976, [MR 0515873](#).
- [22] K. Uhlenbeck, “Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model)”, *J. Diff. Geom.*, **30** (1989), 1–50, [MR 1001271](#), [Zbl 0677.58020](#).
- [23] Д. Хьюзмоллер, *Расслоенные пространства*, Мир, М., 1970.
- [24] G. Valli, “On the energy spectrum of harmonic 2-spheres in unitary groups”, *Topology*, **27** (1988), 129–136, [doi 10.1016/0040-9383\(88\)90032-8](#), [MR 948176](#).
- [25] J. C. Wolfson, “Harmonic sequences and harmonic maps of surfaces into complex Grassmann manifolds”, *J. Diff. Geom.*, **27** (1988), 161–178, [MR 918462](#), [Zbl 0642.58021](#).
- [26] J. C. Wood, “The explicit construction and parametrization of all harmonic maps from the two-sphere to a complex Grassmannian”, *J. Reine Angew. Math.*, **386** (1988), 1–31, [MR 936991](#), [Zbl 0633.58016](#).

Предметный указатель

- ∇' -порядок, 65
- ∇' -примыкающее пространство, 65
- ∂' -замещение, 74
- ∂'' -замещение, 75
- ∂'' -порядок, 74
- $\pm$ псевдоголоморфное отображение, 24
- $+$ псевдоголоморфное отображение, 24
- $-$ псевдоголоморфное отображение, 24
- автодуальное калибровочное поле, 103
- алгебра петель группы Ли, 95
- анти-автодуальное калибровочное поле, 103
- анти-инстантон, 104
- ассоциированная кривая, 61
- векторное поле типа $(0, 1)$, 21
- векторное поле типа $(1, 0)$, 21
- вертикальное распределение, 39
- виртуальная размерность, 110
- высота голоморфного векторного расслоения, 85
- гармоническое отображение, 14
- гармоническое расслоение, 70
- гауссово ∂' -расслоение, 72
- гауссово ∂'' -расслоение, 72
- голоморфная кривая, 29
- голоморфное продолжение гауссова расслоения, 76
- горизонтальное отображение, 64
- горизонтальное распределение, 39
- горизонтальный подъем векторного поля, 39
- грассманово многообразие Гильберта–Шмидта, 109
- группа Гильберта–Шмидта, 108
- группа петель группы Ли, 94
- движущийся флаг, 82
- действие Янга–Миллса, 103
- инстантон, 104
- интегрируемая почти комплексная структура, 21
- калибровочная группа, 101
- калибровочное G -поле, 102
- калибровочное преобразование, 102
- калибровочный потенциал, 101
- каноническая комплексная структура на флаговом многообразии, 80
- КМ-структура, 27
- ковариантно постоянное векторное поле, 16
- кокасательное комплексифицированное расслоение, 19
- комплексифицированная группа петель группы Ли, 96
- комплексифицированное касательное расслоение, 19

комплексно изотропное
 отображение, 61
 комплексное грассмано-
 многообразие, 57
 комплексное грассмано-
 расслоение, 51
 комплексное проективное
 пространство, 55
 конформное
 отображение, 44, 49
 кэлерова форма, 23
 кэлерово многообразие, 23

 метрика Фубини–Штуди, 57
 метрический тензор, 12
 многообразие виртуальных
 флагов, 112

 однородные координаты, 56
 оператор
 Гильберта–Шмидта, 108
 оператор
 Лапласа–Бельтрами, 17
 отображения конечного
 ∂' -порядка, 74
 отображения конечного
 ∂'' -порядка, 74

 пара Лакса, 93
 параллельное векторное
 поле, 16
 параллельный перенос, 16
 параллельный перенос
 в расслоении, 39
 плюккерovo вложение, 59
 поле Янга–Миллса, 103
 поле напряжений, 18
 полная голоморфная
 кривая, 60
 полное флаговое
 многообразие, 77

 поляра, 61
 поляризация гильбертова
 пространства, 107
 почти антиголоморфное
 отображение, 23
 почти голоморфное
 отображение, 23
 почти комплексная
 структура, 18
 почти кэлерово
 многообразие, 23
 почти эрмитово
 многообразие, 23
 примыкающее
 пространство, 60
 присоединенное действие
 группы Ли, 89
 присоединенное представление
 алгебры Ли, 89
 пространство модулей полей
 Янга–Миллса, 104
 пространство петель группы
 Ли, 95
 псевдоголоморфное
 отображение, 23

 расслоение эрмитовых
 структур, совместимых
 с ориентациями, 51
 риманова связность, 16

 связность, 15
 связность
 Картана–Маурера, 90
 связность Леви–Чивита, 16
 связность Янга–Миллса, 103
 связность на главном
 расслоении, 39
 связность, согласованная
 с римановой метрикой, 16
 символы Кристоффеля, 15

симметричная связность, 15
 система уравнений
 Захарова–Шабата, 92
 спинорная группа, 31
 степень отображения, 8
 структура
 Кошуля–Мальгранжа, 27
 супергоризонтальное
 отображение, 98
 твисторное расслоение, 30, 43
 твисторный метод
 Пенроуза, 29
 тензор, 10
 тензорное поле, 10
 теорема Ньюлендера–Нирен-
 берга, 22
 тождество Бьянки, 103
 топологический заряд, 104
 уравнение
 Картана–Маурера, 90
 уравнение Янга–Миллса, 103
 уравнения дуальности, 103
 факторизуемое гармоническое
 отображение, 76
 фильтрация
 Хардера–Нарасимхана, 85
 флаговое многообразие, 77
 флаговое многообразие F_r , 66
 флаговое расслоение, 80
 форма Картана–Маурера, 90
 форма Киллинга, 90
 форма связности, 40
 форма типа (p, q) , 20
 фредгольмов индекс, 109
 фредгольмов оператор, 109
 центрированное
 отображение, 92
 частные индексы, 85
 энергия, 7, 12
 энергия петли, 99
 эрмитова метрика, 23
 эрмитова связность, 69
 эрмитова структура, 35
 эрмитово векторное
 расслоение, 69
 эрмитово многообразие, 23