Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, Метод тригонометрических сумм,
Лекц. курсы НОЦ, 2009, выпуск 13, 3–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 08:08:45

Оглавление

§ 1. Дробные доли вещественных функций. Критерий Г. Вейля	5
§ 2. Формула замены тригонометрической суммы более короткой	13
§ 3. Метод Г. Вейля. Оценка $\zeta(s)$ на критической прямой	22
§ 4. Метод ван дер Корпута. Проблема Гаусса	27
§ 5. Суммы с простыми числами. Проблема Гольдбаха .	36

Обозначения

Запись $d \mid n$ при натуральном d и целом n означает, что d делит n , то есть существует целое q такое, что $n = dq$;

(n, m) обозначает наибольший общий делитель чисел n и m ;

$p, p_1, p_2, \dots$ обозначают простые числа;

$s = \sigma + it$ обозначает комплексную переменную;

$\operatorname{Re} s$ обозначает вещественную часть комплексного числа s ;

$\operatorname{Im} s$ обозначает мнимую часть s ;

Запись $A \ll B$ при положительном B означает, что $A = O(B)$, то есть существует положительное c такое, что $|A| \leq cB$;

Запись $A \asymp B$ означает, что $A \ll B$ и $B \ll A$;

$c, c_1, c_2, \dots$ обозначают положительные постоянные, в различных формулах, вообще говоря, различные;

ε обозначает произвольно малое положительное число;

$[x]$ обозначает целую часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x ;

$\{x\}$ обозначает дробную долю числа x , то есть $x - [x]$;

$\|x\|$ обозначает расстояние от x до ближайшего целого числа, т.е. $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$;

$\ln s$ обозначает главную ветвь логарифма.

Через $\mu(A)$ обозначаем лебегову меру множества A ;

$\varphi(n)$ – функция Эйлера, т.е. количество взаимно простых с n чисел, не превосходящих n ;

$\mu(n)$ – функция Мебиуса, которая определяется следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \cdots p_k; \\ 0, & \text{если } p^2 \mid n. \end{cases}$$

$\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x .

Материал прошлого семестра, на который здесь приходится неоднократно ссылаться, опубликован в выпуске 2 “лекционных курсов НОЦ” под названием “Метод комплексного интегрирования”.

§ 1. Дробные доли вещественных функций. Критерий Г. Вейля

Многие задачи аналитической теории чисел сводятся к изучению распределения дробных долей некоторых функций, которое, в свою очередь, зависит от оценок модуля так называемых тригонометрических сумм. Мы докажем утверждения, выявляющие связь распределения дробных долей с тригонометрическими суммами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть r – натуральное число, α и β – вещественные, $0 < \Delta < \frac{1}{8}$, $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$. Тогда существует периодическая функция $g(x)$ с периодом 1 и с условиями:

- 1) $g(x) = 1$ при $\alpha + \frac{\Delta}{2} \leq x \leq \beta - \frac{\Delta}{2}$,
- 2) $0 < g(x) < 1$ при $\alpha - \frac{\Delta}{2} < x < \alpha + \frac{\Delta}{2}$ и $\beta - \frac{\Delta}{2} < x < \beta + \frac{\Delta}{2}$,
- 3) $g(x) = 0$ при $\beta + \frac{\Delta}{2} \leq x \leq 1 + \alpha - \frac{\Delta}{2}$,
- 4) $g(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$g(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} a_m e^{2\pi i m x},$$

где

$$|a_m| \leq \min \left(\beta - \alpha, \frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|} \left(\frac{r}{\pi|m|\Delta} \right)^r \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим периодическую функцию $g_0(x)$ с периодом 1, заданную следующими равенствами:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 \text{ при } \alpha < x < \beta, \\ g_0(\alpha) &= g_0(\beta) = \frac{1}{2}, \\ g_0(x) &= 0 \text{ при } \beta < x < 1 + \alpha. \end{aligned}$$

Возьмем теперь $\delta = \frac{\Delta}{2r}$ и последовательно определим функции $g_1(x), \dots, g_r(x)$ равенствами

$$g_k(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} g_{k-1}(x+u) du.$$

Легко видеть, что функция $g_r(x)$ является периодической с периодом 1 и удовлетворяет условиям 1)–3) из формулировки теоремы. Таким образом, остается проверить выполнение условия 4).

Разложим функцию $g_0(x)$ в ряд Фурье

$$g_0(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} a_{m,0} e^{2\pi i m x},$$

где

$$a_{m,0} = \int_0^1 g_0(x) e^{-2\pi i m x} dx = \frac{e^{-2\pi i m \alpha} - e^{-2\pi i m \beta}}{2\pi i m}.$$

При $k = 1, \dots, r$ имеем

$$g_k(x) = a_{0,k} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} a_{m,k} e^{2\pi i m x},$$

где

$$\begin{aligned} a_{0,k} &= \int_0^1 g_k(x) dx = \int_0^1 dx \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} g_{k-1}(x+u) du \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} du \int_0^1 g_{k-1}(x+u) dx = a_{0,k-1}, \\ a_{m,k} &= \int_0^1 g_k(x) e^{-2\pi i m x} dx = \int_0^1 e^{-2\pi i m x} dx \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} g_{k-1}(x+u) du \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} e^{2\pi i m u} du \int_0^1 g_{k-1}(x+u) e^{-2\pi i m (x+u)} dx \\ &= \frac{a_{m,k-1}}{2\delta} \cdot \frac{e^{2\pi i m \delta} - e^{-2\pi i m \delta}}{2\pi i m}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} a_{0,k} &= \beta - \alpha, \\ a_{m,k} &= \frac{e^{-2\pi i m \alpha} - e^{-2\pi i m \beta}}{2\pi i m} \left(\frac{e^{2\pi i m \delta} - e^{-2\pi i m \delta}}{4\pi i m \delta} \right)^k \\ &= e^{-\pi i m (\alpha + \beta)} \frac{\sin \pi m (\beta - \alpha)}{\pi m} \left(\frac{\sin 2\pi m \delta}{2\pi m \delta} \right)^k. \end{aligned}$$

Этим доказательство завершается.

Функции $g(x)$ были введены И. М. Виноградовым и носят название “стаканчиков” Виноградова.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x)$ – вещественная функция, r – натуральное число, $0 < \Delta < \frac{1}{8}$. Пусть при любых допустимых значениях α и β имеет место соотношение

$$\sum_{x=1}^P g(f(x)) = (\beta - \alpha)P + O(R),$$

где $g(x)$ – “стаканчик” Виноградова, отвечающий параметрам α , β , Δ , r . Тогда справедливо равенство

$$\sum_{x=1}^P \{f(x)\} = \frac{1}{2}P + O(R + \Delta P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $D(\alpha, \beta)$ количество $x = 1, \dots, P$ с условием $\alpha \leq \{f(x)\} < \beta$. Тогда при $2\Delta < \beta - \alpha < 1 - 2\Delta$ имеем

$$\sum_{x=1}^P g_1(f(x)) \leq D(\alpha, \beta) \leq \sum_{x=1}^P g_2(f(x)),$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – “стаканчики” Виноградова, отвечающие параметрам $\alpha + \frac{\Delta}{2}$, $\beta - \frac{\Delta}{2}$, Δ , r и $\alpha - \frac{\Delta}{2}$, $\beta + \frac{\Delta}{2}$, Δ , r , соответственно. Из условия теоремы немедленно получаем, что

$$D(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)P + O(R + \Delta P).$$

Это соотношение распространяется на случай произвольных α и β , $0 < \beta - \alpha \leq 1$ с помощью равенства

$$D(\alpha, \beta) = D(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}) + D(\alpha + \frac{1}{2}, \beta)$$

при $1 - 2\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1$ и равенства

$$D(\alpha, \beta) = D(\alpha, \alpha + 1 - 2\Delta) - D(\beta, \alpha + 1 - 2\Delta)$$

при $0 < \beta - \alpha \leq 2\Delta$.

Будем считать, что $R < 0.1P$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Возьмем $n = [PR^{-1}]$. Имеем при $k = 1, \dots, n$

$$D\left(0, \frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}P + R_k,$$

где $R_k \ll R + \Delta P$. Отсюда находим при $k = 1, \dots, n$

$$D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) = \frac{P}{n} + R_k - R_{k-1}.$$

Легко видеть, что справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \leq \sum_{x=1}^P \{f(x)\} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right).$$

Пользуясь полученными соотношениями для $D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) &= \frac{P}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(R_k - R_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2}P + O\left(\frac{P}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (kR_k - (k-1)R_{k-1}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R_{k-1} \\ &= \frac{1}{2}P + O(R + \Delta P), \\ \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{P}{n} + O(R + \Delta P)\right) \\ &= \frac{1}{2}P + O(R + \Delta P). \end{aligned}$$

Этим доказательство завершается.

Пусть $f(x)$ – вещественная функция. Обозначим через $D_P(\alpha, \beta)$ количество $x = 1, \dots, P$ с условием $\alpha \leq \{f(x)\} < \beta$. Последовательность дробных долей функции $f(x)$ называется *равномерно распределенной*, если при любых $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ справедливо равенство

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{1}{P} D_P(\alpha, \beta) = \beta - \alpha.$$

Рассмотрим общий критерий равномерного распределения, связывающий вопросы распределения дробных долей с оценками тригонометрических сумм.

ТЕОРЕМА 3 (КРИТЕРИЙ Г. ВЕЙЛЯ). *Необходимым и достаточным условием равномерности распределения дробных долей функции $f(x)$ является выполнение равенства*

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{1}{P} \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)} = 0$$

при любом целом $m \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть $0 < \gamma < 1$, $0 < \varepsilon < \min(\frac{\gamma}{2}, \frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{8})$, $r = 1$. Имеют место неравенства

$$\sum_{x=1}^P g_1(f(x)) \leq D_P(0, \gamma) \leq \sum_{x=1}^P g_2(f(x)),$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – “стаканчики” Виноградова, отвечающие параметрам $\frac{\varepsilon}{2}$, $\gamma - \frac{\varepsilon}{2}$, ε , 1 и $\frac{-\varepsilon}{2}$, $\gamma + \frac{\varepsilon}{2}$, ε , 1, соответственно. Пользуясь разложением функции $g_1(f(x))$ в ряд Фурье, получим

$$\sum_{x=1}^P g_1(f(x)) = (\gamma - \varepsilon)P + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} a_m \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)}.$$

Для коэффициента a_m теорема 1 дает оценку

$$|a_m| \leq \min \left(\frac{1}{|m|}, \frac{1}{|m|^2 \varepsilon} \right).$$

Возьмем $N = \lceil \varepsilon^{-2} \rceil$. Поскольку при любом целом $m \neq 0$

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{1}{P} \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)} = 0,$$

найдется $P_0(\varepsilon)$ такое, что при $P > P_0(\varepsilon)$ и $0 < |m| \leq N$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon P}{\ln N}.$$

Для $|m| > N$ оценим тригонометрическую сумму тривиально, т.е. числом ее слагаемых P . Таким образом, получим при $P > P_0(\varepsilon)$

$$\left| \sum_{x=1}^P g_1(f(x)) - \gamma P \right| \leq \varepsilon P + 2 \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} \frac{\varepsilon P}{\ln N} + 2 \sum_{m > N} \frac{1}{m^2 \varepsilon} P \leq 6\varepsilon P.$$

Аналогично получаем, что

$$\left| \sum_{x=1}^P g_2(f(x)) - \gamma P \right| \leq 6\varepsilon P,$$

откуда

$$|D_P(0, \gamma) - \gamma P| \leq 6\varepsilon P$$

при $P > P_0(\varepsilon)$. В силу произвольности ε это означает, что

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{1}{P} D_P(0, \gamma) = \gamma,$$

то есть дробные доли $f(x)$ распределены равномерно.

Необходимость. Зададим $m \neq 0$ и произвольное $q \in \mathbb{N}$. Пусть M_k обозначает множество тех $x = 1, \dots, P$, для которых $\frac{k}{q} \leq \{f(x)\} < \frac{k+1}{q}$. Имеем

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)} = \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{x \in M_k} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Вычислим внутреннюю сумму. При $x \in M_k$ справедливо представление

$$\{f(x)\} = \frac{k}{q} + \frac{\theta_x}{q},$$

где $0 \leq \theta_x < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{x \in M_k} e^{2\pi i m f(x)} &= \sum_{x \in M_k} e^{2\pi i \frac{mk}{q}} \left(1 + O\left(\frac{|m|}{q}\right) \right) \\ &= D_P\left(\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right) e^{2\pi i \frac{mk}{q}} + O\left(D_P\left(\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right) \frac{|m|}{q}\right). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)} = \sum_{k=0}^{q-1} D_P\left(\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right) e^{2\pi i \frac{mk}{q}} + O\left(\frac{|m|}{q} P\right).$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем q столь большим, что остаточный член будет по модулю меньше εP . Поскольку дробные

доли $f(x)$ распределены равномерно, можно выбрать $P_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $P > P_0(\varepsilon)$ и $k = 0, \dots, q-1$ выполнялось неравенство

$$\left| D_P \left(\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q} \right) - \frac{1}{q} P \right| \leq \frac{\varepsilon P}{q}.$$

Таким образом, имеем

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)} - \frac{1}{q} P \sum_{k=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{mk}{q}} \right| \leq 2\varepsilon P,$$

причем полная линейная тригонометрическая сумма в левой части равна нулю, так как $0 < |m| < q$ и, следовательно, $q \nmid m$. В силу произвольности ε получаем, что

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{1}{P} \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)} = 0,$$

чем доказательство завершается.

Задачи к § 1

1. Доказать, что сумма

$$\sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{ax}{q}}$$

равна q при a , делящемся на q , и равна нулю в противном случае.

2. Доказать, что при $(a, q) = 1$ имеет место равенство

$$\sum_{\substack{x=1 \\ (x, q)=1}}^q e^{2\pi i \frac{ax}{q}} = \mu(q).$$

3. Доказать, что

$$\left| \sum_{x=1}^N e^{2\pi i \alpha x} \right| \leq \min \left(N, \frac{1}{2\|\alpha\|} \right),$$

где $\|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$ – расстояние от α до ближайшего целого числа.

4. Доказать, что при $(a, q) = 1$ модуль суммы Гаусса

$$\sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}$$

равен $\sqrt{q}$ при нечетном q , $\sqrt{2q}$ при q , делящемся на четыре, и равен нулю при q вида $4n + 2$.

5. Получить оценку для неполной суммы Гаусса ($N < q$)

$$\sum_{x=1}^N e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}} \ll \sqrt{q} \ln q$$

при $(a, q) = 1$.

6. Доказать, что последовательность дробных долей функции $\alpha x + \beta$ равномерно распределена в том и только в том случае, когда α иррационально.

§ 2. Формула замены тригонометрической суммы более короткой

В ряде случаев тригонометрическую сумму удастся с хорошей точностью приблизить другой тригонометрической суммой, имеющей меньшее по сравнению с исходной суммой число слагаемых, то есть “более короткой”. Таким образом, уже тривиальная оценка второй суммы дает нетривиальную оценку для первой. Докажем вначале теорему о приближении тригонометрической суммы суммой интегралов специального вида.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) $f''(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны;
- 2) $f''(x) > 0$;
- 3) существуют $H > 0$, $U \geq b - a$ такие, что

$$\varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}.$$

Тогда при любом $\Delta \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} &= \\ &= \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx + O(H \ln(\beta - \alpha + 2)), \end{aligned}$$

где $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$, постоянная в знаке O зависит только от Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему в случае $\varphi(x) = 1$. Действительно, совершая преобразование Абеля (теорема 5 прошлого семестра), получим

$$\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \varphi(b) \sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} - \int_a^b \varphi'(u) \sum_{a < x \leq u} e^{2\pi i f(x)} du.$$

Обозначая $\gamma = f'(u)$, имеем

$$\sum_{a < x \leq u} e^{2\pi i f(x)} = \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \gamma + \Delta} \int_a^u e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx + O(\ln(\beta - \alpha + 2)).$$

При $n > \gamma + \Delta$, интегрируя по частям, найдем

$$\int_a^u e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_a^u \frac{de^{2\pi i(f(x)-nx)}}{f'(x)-n} \ll \frac{1}{n-\gamma},$$

так как функция в знаменателе отрицательна и монотонно возрастает. Таким образом,

$$\sum_{a < x \leq u} e^{2\pi i f(x)} = \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^u e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx + O(\ln(\beta - \alpha + 2)).$$

Подставляя полученное равенство в первую формулу, находим

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} &= \\ &= \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \left(\varphi(b) \int_a^b e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b \varphi'(u) \left(\int_a^u e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx \right) du \right) + O(H \ln(\beta - \alpha + 2)) \\ &= \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx + O(H \ln(\beta - \alpha + 2)). \end{aligned}$$

Далее, достаточно доказать теорему в случае $0 < \alpha - \Delta \leq 1$. Действительно, выберем целое k так, чтобы $0 < \alpha - \Delta + k \leq 1$ и пусть $f_1(x) = f(x) + kx$. Тогда $\alpha_1 = \alpha + k \in (\Delta, 1 + \Delta]$ и

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} &= \sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f_1(x)} \\ &= \sum_{\alpha_1 - \Delta \leq n \leq \beta_1 + \Delta} \int_a^b e^{2\pi i(f_1(x)-nx)} dx + O(\ln(\beta - \alpha + 2)) \\ &= \sum_{\alpha - \Delta \leq n - k \leq \beta + \Delta} \int_a^b e^{2\pi i(f(x)-(n-k)x)} dx + O(\ln(\beta - \alpha + 2)). \end{aligned}$$

Итак, считаем $\varphi(x) = 1$ и $\alpha - \Delta \in (0, 1]$. Применяя формулу суммирования Эйлера (теорема 9 прошлого семестра), получим

$$\sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx - 2\pi i \int_a^b \rho(x) f'(x) e^{2\pi i f(x)} dx + O(1),$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Первый интеграл есть $O(1)$, так как

$$\int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{de^{2\pi i f(x)}}{f'(x)} \ll \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\Delta}.$$

Здесь мы пользовались тем, что $f'(x)$ положительна и монотонно возрастает. При нецелых x функция $\rho(x)$ представляется своим рядом Фурье

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi m x}{m}.$$

Поскольку значения $\rho(x)$ в целых точках не влияют на величину интеграла, имеем

$$\sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} = -2i \int_a^b \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi m x}{m} f'(x) e^{2\pi i f(x)} dx + O(1).$$

Докажем возможность почленного интегрирования ряда в правой части последней формулы. Поскольку функция $f'(x)e^{2\pi i f(x)}$ ограничена на отрезке $[a, b]$, достаточно показать, что

$$\int_a^b \left| \sum_{m > N} \frac{\sin 2\pi m x}{m} \right| dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

С одной стороны, совершая преобразование Абеля и пользуясь оценкой линейной тригонометрической суммы (задача 3 к § 1), получим

$$\begin{aligned} \sum_{N < m \leq M} \frac{\sin 2\pi m x}{m} &= \operatorname{Im} \sum_{N < m \leq M} \frac{e^{2\pi i m x}}{m} \\ &= \frac{1}{M} \operatorname{Im} \sum_{N < m \leq M} e^{2\pi i m x} + \int_N^M \operatorname{Im} \sum_{N < m \leq u} e^{2\pi i m x} \frac{du}{u^2} \ll \frac{1}{N \|x\|} \end{aligned}$$

при любом M . С другой стороны, имеем

$$\sum_{m=1}^N \frac{\sin(2\pi m x)}{m} = 2\pi \int_0^x \sum_{m=1}^N \cos(2\pi m u) du.$$

Но для подынтегрального выражения находим следующее представление

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^N \cos 2\pi m u &= \operatorname{Re} \sum_{m=1}^N e^{2\pi i m u} \\ &= \operatorname{Re} \frac{e^{2\pi i (N+\frac{1}{2})u} - e^{\pi i u}}{2i \sin \pi u} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin \pi(2N+1)u}{2 \sin \pi u},\end{aligned}$$

откуда при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ получим

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^N \frac{\sin 2\pi m x}{m} &= -\pi x + \int_0^x \frac{\sin \pi(2N+1)u}{u} du \\ &\quad + \pi \int_0^x \sin \pi(2N+1)u \left(\frac{1}{\sin \pi u} - \frac{1}{\pi u} \right) du \\ &= -\pi x + \int_0^{\pi(2N+1)x} \frac{\sin u}{u} du \\ &\quad + \int_0^{\pi x} \sin(2N+1)u \left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u} \right) du.\end{aligned}$$

Поскольку второй интеграл в правой части максимален при верхнем пределе, равном π , имеем при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ оценку

$$\left| \sum_{m=1}^N \frac{\sin 2\pi m x}{m} \right| \leq \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u} \right) du \ll 1.$$

Эта же оценка справедлива при всех x в силу нечетности и периодичности синуса. Таким образом, собирая вместе полученные оценки, находим

$$\left| \sum_{N < m \leq M} \frac{\sin 2\pi m x}{m} \right| \ll \min \left(1, \frac{1}{N\|x\|} \right)$$

при любом M . Устремив M к бесконечности, получаем

$$\int_a^b \left| \sum_{m>N} \frac{\sin 2\pi m x}{m} \right| dx \ll \int_a^b \min \left(1, \frac{1}{N\|x\|} \right) dx \ll \frac{1}{\sqrt{N}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

что и доказывает возможность почленного интегрирования соответствующего ряда. Проводя последнюю оценку, мы разбили

отрезок $[a, b]$ на два множества — $\frac{1}{\sqrt{N}}$ -окрестности целых точек и дополнение к ним.

Итак, имеем следующее равенство

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} + O(1) &= -2i \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} \int_a^b \sin(2\pi m x) f'(x) e^{2\pi i f(x)} dx \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} \left(\int_a^b f'(x) e^{2\pi i (f(x) - mx)} dx - \int_a^b f'(x) e^{2\pi i (f(x) + mx)} dx \right). \end{aligned}$$

Возьмем второй интеграл по частям

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) e^{2\pi i (f(x) + mx)} dx &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(x)}{f'(x) + m} d e^{2\pi i (f(x) + mx)} \ll \frac{\beta}{\beta + m}. \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались тем, что дробь под интегралом положительна и монотонно возрастает. Находим

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\beta}{m(\beta + m)} \ll \beta \sum_{m \leq \beta} \frac{1}{m\beta} + \beta \sum_{m > \beta} \frac{1}{m^2} \ll \ln(\beta + 2).$$

Первый интеграл возьмем по частям при $m > \beta + \Delta$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) e^{2\pi i (f(x) - mx)} dx &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(x)}{f'(x) - m} d e^{2\pi i (f(x) - mx)} \ll \frac{\beta}{m - \beta}. \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались тем, что дробь под интегралом отрицательна и монотонно убывает. Находим

$$\begin{aligned} \sum_{m > \beta + \Delta} \frac{\beta}{m(m - \beta)} &\ll \beta \sum_{m > 2\beta} \frac{1}{m^2} + \beta \sum_{\beta + \Delta < m \leq 2\beta} \frac{1}{\beta(m - \beta)} \\ &\ll \ln(\beta + 2). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} + O(\ln(\beta + 2)) = \\
&= \sum_{\alpha - \Delta \leq m \leq \beta + \Delta} \frac{1}{m} \int_a^b f'(x) e^{2\pi i(f(x) - mx)} dx \\
&= \sum_{\alpha - \Delta \leq m \leq \beta + \Delta} \frac{1}{2\pi i m} \int_a^b e^{-2\pi i m x} d e^{2\pi i f(x)} \\
&= \sum_{\alpha - \Delta \leq m \leq \beta + \Delta} \left(\int_a^b e^{2\pi i(f(x) - mx)} dx + O\left(\frac{1}{m}\right) \right) \\
&= \sum_{\alpha - \Delta \leq m \leq \beta + \Delta} \int_a^b e^{2\pi i(f(x) - mx)} dx + O(\ln(\beta + 2)),
\end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

Важным частным случаем доказанной теоремы является утверждение о приближении тригонометрической суммы интегралом.

СЛЕДСТВИЕ (ВАН ДЕР КОРПУТ). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 4 и, кроме того,

$$|f'(x)| \leq \delta < 1$$

при $x \in [a, b]$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx + O(H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в теореме 4 $\Delta = \frac{1-\delta}{2}$. Тогда $\beta + \Delta \leq \frac{1+\delta}{2} < 1$ и $\alpha - \Delta \geq -\frac{1+\delta}{2} > -1$, то есть в правой части останется единственное слагаемое с $n = 0$, если только $\alpha - \Delta \leq 0 \leq \beta + \Delta$. В противном случае формула также будет справедлива, поскольку

$$\int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx = O(H),$$

что получается интегрированием по частям. Этим доказательство завершается.

Теперь мы готовы к доказательству основной теоремы этого параграфа.

ТЕОРЕМА 5. Пусть вещественные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

1) $f^{(4)}(x)$ и $\varphi''(x)$ непрерывны;

2) существуют $H, A > 0$ и $U \geq b - a$ такие, что

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &\asymp A^{-1}, & f^{(3)}(x) &\ll A^{-1}U^{-1}, & f^{(4)}(x) &\ll A^{-1}U^{-2}, \\ \varphi(x) &\ll H, & \varphi'(x) &\ll HU^{-1}, & \varphi''(x) &\ll HU^{-2}. \end{aligned}$$

Тогда, определяя числа x_n из уравнения $f'(x_n) = n$, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} &= \\ &= e^{\frac{\pi i}{4}} \sum_{f'(a) \leq n \leq f'(b)} c(n) \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}} e^{2\pi i(f(x_n) - nx_n)} + R, \end{aligned}$$

где

$$c(n) = \begin{cases} 1, & f'(a) < n < f'(b), \\ \frac{1}{2}, & n = f'(a) \text{ или } n = f'(b), \end{cases}$$

$$R \ll HAU^{-1} + H \ln(f'(b) - f'(a) + 2) + HT(a) + HT(b),$$

$$T(c) = \begin{cases} 0, & f'(c) \in \mathbb{Z}, \\ \min(\|f'(c)\|^{-1}, \sqrt{A}), & f'(c) \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f'(a)$ и $f'(b)$ не являются целыми числами. Возьмем в теореме 4 $\Delta = 1/2$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} &= \sum_{f'(a) - 0.5 \leq n \leq f'(b) + 0.5} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x) - nx)} dx \\ &\quad + O(H \ln(f'(b) - f'(a) + 2)). \end{aligned}$$

При $[f'(a)] + 1 \leq n \leq [f'(b)]$ применим к интегралам в правой части теорему об асимптотическом значении тригонометрических интегралов (теорема 20 прошлого семестра). Находим

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x) - nx)} dx &= e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}} e^{2\pi i(f(x_n) - nx_n)} \\ &\quad + O(HAU^{-1}) + O(H \min(|f'(a) - n|^{-1}, \sqrt{A})) \\ &\quad + O(H \min(|f'(b) - n|^{-1}, \sqrt{A})), \end{aligned}$$

где x_n определяется из уравнения $f'(x_n) = n$. Суммируя последние соотношения по n , получим

$$\begin{aligned} \sum_{[f'(a)] < n \leq [f'(b)]} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx = \\ = e^{\frac{\pi i}{4}} \sum_{f'(a) \leq n \leq f'(b)} \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}} e^{2\pi i(f(x_n)-nx_n)} \\ + O(HT(a) + HT(b)) + O(H \ln(f'(b) - f'(a) + 2)). \end{aligned}$$

Если же $n = [f'(a)]$ или $n = [f'(b)] + 1$, то точка x_n лежит вне отрезка $[a, b]$. В этом случае, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx = \left. \frac{\varphi(x) e^{2\pi i(f(x)-nx)}}{2\pi i(f'(x) - n)} \right|_a^b \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi'(x)(f'(x) - n) - \varphi(x)f''(x)}{(f'(x) - n)^2} e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx \\ \ll H\|f'(c)\|^{-1} + HAU^{-1}, \end{aligned}$$

где $c = a$ при $n = [f'(a)]$ и $c = b$ при $n = [f'(b)] + 1$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx = \int_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \varphi(x) e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx + O(H\sqrt{A}) \\ = \left. \frac{\varphi(x) e^{2\pi i(f(x)-nx)}}{2\pi i(f'(x) - n)} \right|_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \frac{\varphi'(x)(f'(x) - n) - \varphi(x)f''(x)}{(f'(x) - n)^2} e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx \\ + O(H\sqrt{A}) \ll H\sqrt{A} + HAU^{-1}, \end{aligned}$$

ибо $f'(a+\sqrt{A}) - [f'(a)] \geq f'(a+\sqrt{A}) - f'(a) = f''(\xi)\sqrt{A} \asymp \frac{1}{\sqrt{A}}$. Собирая вместе полученные оценки, доказываем искомую формулу.

Пусть теперь $f'(a)$ и(или) $f'(b)$ являются целыми числами. В этом случае доказательство проводится аналогично, но учитывается, что согласно доказательству теоремы об асимптотическом значении тригонометрических интегралов (теорема 20 прошлого

семестра) при $n = f'(a)$ и(или) $n = f'(b)$ имеет место формула

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx &= \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\varphi(c)}{\sqrt{f''(c)}} e^{2\pi i(f(c)-nc)} + O(HAU^{-1} + HT(d)), \end{aligned}$$

где $c = a$, $d = b$ при $n = f'(a)$ и $c = b$, $d = a$ при $n = f'(b)$. Этим доказательство завершается.

Задачи к § 2

1. Доказать, что при фиксированном $\sigma_0 > 0$ и при $\sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, $2\pi \leq |t| \leq \pi x$ имеет место следующее представление для дзета-функции Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}).$$

2. (Приближенное функциональное уравнение Харди–Литтлвуда) Доказать, что при фиксированных $h, \sigma_0 > 0$ и при $\sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, $x, y > h$, $2\pi xy = |t|$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + e^{-2\pi i\theta(t)} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1-s}} \\ &\quad + O(t^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1} \ln t + x^{-\sigma} \ln t), \end{aligned}$$

где $\theta(t) = \frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{8}$.

3. Пользуясь приближенным функциональным уравнением Харди–Литтлвуда, получить оценку

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^{\frac{1}{4}}.$$

§ 3. Метод Г. Вейля. Оценка $\zeta(s)$ на критической прямой

Г. Вейлем был разработан метод оценки полиномиальных тригонометрических сумм, состоящий в последовательном понижении степени многочлена за счет линейной замены переменной суммирования.

ТЕОРЕМА 6 (НЕРАВЕНСТВО Г. ВЕЙЛЯ). Пусть $k \geq 2$, $K = 2^{k-1}$,

$$f(x) = \alpha x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x,$$

где $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i f(x)} \right|^K &\leq 2^{2K} P^{K-1} \\ &+ 2^K P^{K-k} \sum_{r_1=1}^{P-1} \dots \sum_{r_{k-1}=1}^{P-1} \min(P, \|\alpha k! r_1 \dots r_{k-1}\|^{-1}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i f(x)} \right|^2 &= \sum_{x=1}^P \sum_{y=1}^P e^{2\pi i (f(x) - f(y))} \\ &= \sum_{x=1}^P \sum_{r_1=x-P}^{x-1} e^{2\pi i (f(x) - f(x-r_1))} = \sum_{r_1=1-P}^{P-1} \sum_{x=X_1}^{X_2} e^{2\pi i (r_1 \alpha k x^{k-1} + \dots)} \\ &\leq \sum_{r_1=1-P}^{P-1} \left| \sum_{x=X_1}^{X_2} e^{2\pi i (r_1 \alpha k x^{k-1} + \dots)} \right|, \end{aligned}$$

где сделана линейная замена переменной суммирования $y = x - r_1$, причем $X_1 = \max(1, r_1 + 1)$, $X_2 = \min(P, r_1 + P)$. Если $k = 2$, то в правой части стоит линейная тригонометрическая сумма. Оценивая ее (см. задачу 3 к § 1), получим

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i f(x)} \right|^2 \leq P + 2 \sum_{r_1=1}^{P-1} \min(P, \|\alpha r_1\|^{-1}),$$

что доказывает искомое неравенство в случае $k = 2$.

Пусть теперь $k \geq 3$. Тогда в правой части стоит полиномиальная сумма, но многочлен уже имеет степень $k - 1$ и старший коэффициент $r_1 \alpha k$. Предположим справедливость оценки Г. Вейля для этой суммы и докажем ее для исходной суммы. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i f(x)} \right|^K &\leq \left(\sum_{r_1=1-P}^{P-1} \left| \sum_{x=X_1}^{X_2} e^{2\pi i (r_1 \alpha k x^{k-1} + \dots)} \right| \right)^{\frac{K}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{r_1=1-P}^{P-1} 1 \right)^{\frac{K}{2}-1} \cdot \sum_{r_1=1-P}^{P-1} \left| \sum_{x=X_1}^{X_2} e^{2\pi i (r_1 \alpha k x^{k-1} + \dots)} \right|^{\frac{K}{2}} \\ &\leq (2P)^{\frac{K}{2}-1} \left(P^{\frac{K}{2}} + \sum_{r_1=1-P}^{P-1} \left(2^K P^{\frac{K}{2}-1} + 2^{\frac{K}{2}} P^{\frac{K}{2}-k+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sum_{r_2=1}^{P-1} \dots \sum_{r_{k-1}=1}^{P-1} \min(P, \|r_1 \alpha k(k-1)! r_2 \dots r_{k-1}\|^{-1}) \right) \right). \end{aligned}$$

Доказательство завершается раскрытием скобок и приведением подобных слагаемых.

Некоторые тригонометрические суммы, такие как дзетовая сумма, могут быть приближены полиномиальными. Таким образом, метод Г. Вейля дает оценки и для этих сумм.

ТЕОРЕМА 7 (Г. Вейль). *Справедлива оценка*

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^{\frac{1}{6}} \ln^{\frac{3}{2}} t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно приближенному функциональному уравнению Харди–Литтлвуда (задача 2 к § 2), имеем

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll \left| \sum_{n \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} + it}} \right| + t^{-\frac{1}{4}} \ln t,$$

где мы положили $x = y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$. Разобьем сумму по n на две: по $n \leq 10t^{\frac{1}{3}}$ и по $10t^{\frac{1}{3}} < n \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$. Первую сумму оценим тривиально, то есть суммой модулей слагаемых. Находим

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll \left| \sum_{10t^{\frac{1}{3}} < n \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} + it}} \right| + t^{\frac{1}{6}}.$$

Теперь разобьем сумму по n на $\ll \ln t$ сумм по $N < n \leq N_1$, где $N_1 \leq 2N$ и $10t^{\frac{1}{3}} \leq N \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$, и выберем среди них наибольшую по модулю. Имеем

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll \ln t \left| \sum_{N < n \leq N_1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} + it}} \right| + t^{\frac{1}{6}} \ll \frac{\ln t}{\sqrt{N}} \left| \sum_{N < n \leq N_2} n^{-it} \right| + t^{\frac{1}{6}}.$$

Здесь мы совершили преобразование Абеля (теорема 5 прошлого семестра), причем $N_2 \leq N_1$ таково, что сумма в правой части имеет наибольший модуль. Не ограничивая общности, можно считать, что $N_2 - N > N^{\frac{5}{6}}$.

Положим $\mu = \lfloor Nt^{-\frac{1}{3}} \rfloor \geq 10$ и разобьем сумму по n на l сумм, длины которых не превосходят μ , причем $l \asymp \frac{N}{\mu} \asymp t^{\frac{1}{3}}$. Имеем

$$\left| \sum_{N < n \leq N_2} n^{-it} \right| \leq \sum_{\nu=0}^{l-1} \left| \sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it \ln(N + \nu\mu + r)} \right|,$$

где $\mu_1 \leq \mu$. Применим к внутренней сумме преобразование Абеля (теорема 5 прошлого семестра) следующим образом

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it \ln(N + \nu\mu + r)} \right| &= \left| \sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it \ln(1 + \frac{r}{N + \nu\mu})} \right| \\ &= \left| \sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it(\frac{r}{N + \nu\mu} - \frac{r^2}{2(N + \nu\mu)^2})} \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-it(\ln(1 + \frac{r}{N + \nu\mu}) - \frac{r}{N + \nu\mu} + \frac{r^2}{2(N + \nu\mu)^2})} \right| \\ &\ll \left| \sum_{r=1}^{\mu_2} e^{-it(\frac{r}{N + \nu\mu} - \frac{r^2}{2(N + \nu\mu)^2})} \right|, \end{aligned}$$

где $\mu_2 \leq \mu_1$ таково, что модуль суммы в правой части наибольший. Здесь мы пользовались тем, что производная соответствующей функции при $0 \leq r \leq \mu$ есть $\ll \frac{tr^2}{N^3} \ll \frac{1}{\mu}$. Теперь применим к сумме в правой части неравенство Вейля при $k = 2$. Имеем

$$\sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it(\frac{r}{N + \nu\mu} - \frac{r^2}{2(N + \nu\mu)^2})} \ll \sqrt{\mu + \sum_{r=1}^{\mu} \min \left(\mu, \left\| \frac{tr}{2\pi(N + \nu\mu)^2} \right\|^{-1} \right)}.$$

Собирая вместе все полученные оценки, находим

$$\begin{aligned} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) &\ll t^{\frac{1}{6}} + \frac{\ln t}{\sqrt{N}} l \sqrt{\mu} \\ &\quad + \frac{\ln t}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=0}^{l-1} \sqrt{\sum_{r=1}^{\mu} \min\left(\mu, \left\|\frac{tr}{2\pi(N + \nu\mu)^2}\right\|^{-1}\right)}. \end{aligned}$$

Применяя к последней сумме неравенство Коши и пользуясь условиями на параметры l , μ и N , получим

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^{\frac{1}{6}} \ln t + \frac{t^{\frac{1}{6}} \ln t}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{r=1}^{\mu} \sum_{\nu=0}^{l-1} \min\left(\mu, \left\|\frac{tr}{2\pi(N + \nu\mu)^2}\right\|^{-1}\right)}.$$

Оценим внутреннюю сумму. Выражение под знаком расстояния до ближайшего целого положительно и монотонно убывает с ростом ν . Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{tr}{2\pi(N + \nu\mu)^2} - \frac{tr}{2\pi(N + (\nu + 1)\mu)^2} \\ &= \frac{tr\mu(2N + (2\nu + 1)\mu)}{2\pi(N + \nu\mu)^2(N + (\nu + 1)\mu)^2} \asymp \frac{tr\mu}{N^3} \asymp \frac{r}{\mu^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, значения этих дробей попадают на промежутков длины $\ll \frac{rl}{\mu^2}$. Разобьем его на $\ll \frac{rl}{\mu^2}$ промежутков длины $\frac{1}{2}$, имеющих своими концами целые либо полуцелые числа (легко видеть, что $\frac{rl}{\mu^2} \gg 1$). На каждом из этих промежутков соответствующая часть суммы оценится как

$$\mu + \sum_{k \leq \frac{\mu^2}{r}} \frac{\mu^2}{rk} \ll \mu + \frac{\mu^2}{r} \ln t \ll \frac{\mu^2}{r} \ln t,$$

причем первое слагаемое добавлено на случай, если какое-либо значение дроби окажется близким к целому числу. Здесь мы существенно использовали вышеприведенную оценку разности последовательных дробей. Находим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{l-1} \min\left(\mu, \left\|\frac{tr}{2\pi(N + \nu\mu)^2}\right\|^{-1}\right) &\ll \frac{rl}{\mu^2} \cdot \frac{\mu^2}{r} \ln t \ll t^{\frac{1}{3}} \ln t, \\ \sum_{r=1}^{\mu} \sum_{\nu=0}^{l-1} \min\left(\mu, \left\|\frac{tr}{2\pi(N + \nu\mu)^2}\right\|^{-1}\right) &\ll \mu t^{\frac{1}{3}} \ln t \ll N \ln t. \end{aligned}$$

Доказательство завершается подстановкой полученной оценки в неравенство для $\zeta(\frac{1}{2} + it)$.

Задачи к § 3

1. Пусть $k \geq 2$, $K = 2^{k-1}$, $f(x) = \alpha x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \dots + \alpha_1x$, $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$. В случае, когда для α справедливо рациональное приближение

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$$

с $(a, q) = 1$, $|\theta| < 1$, доказать следующую оценку

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i f(x)} \ll \left(Pq^{-\frac{1}{K}} + P^{1-\frac{1}{K}} + P^{1-\frac{K}{K}} q^{\frac{1}{K}} \right) (Pq)^\varepsilon,$$

где ε – произвольно малое фиксированное положительное число.

2. (Теорема Дирихле) Доказать, что для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathbb{N}$ существуют $a \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ такие, что $(a, q) = 1$, $q \leq \tau$ и

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^\tau},$$

где $|\theta| < 1$.

3. Доказать, что дробные доли многочлена $\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \dots + \alpha_1x$ распределены равномерно в том и только в том случае, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ иррационален.

§ 4. Метод ван дер Корпута. Проблема Гаусса

Весьма общий метод оценки тригонометрических сумм с функцией, имеющей непрерывную k -ую производную, был предложен ван дер Корпутом. Основой метода является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8 (ВАН ДЕР КОРПУТ). Пусть $k \geq 2$, $K = 2^{k-1}$, $f(x) \in \mathbb{C}^k[a, b]$, $b - a \geq 1$. Если выполнены неравенства

$$0 < \lambda_k \leq f^{(k)}(x) \leq h\lambda_k,$$

то справедлива оценка

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \ll h^{\frac{2}{K}} (b-a) \lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}},$$

причем постоянная в знаке Виноградова абсолютна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале случай $k = 2$. Если $\lambda_2 \geq 1$, то утверждение теоремы тривиально. Если же $0 < \lambda_2 < 1$, то применим теорему 4, полагая $\Delta = \frac{1}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} &= \sum_{f'(a) - \frac{1}{2} \leq n \leq f'(b) + \frac{1}{2}} \int_a^b e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx \\ &\quad + O(\ln(f'(b) - f'(a) + 2)). \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл в правой части последнего равенства. Вторая производная функции, стоящей в экспоненте, больше λ_2 . Следовательно, ее первая производная на отрезке $[a, b]$ обращается в нуль не более одного раза. Разобьем отрезок $[a, b]$ на множества M_1, M_2, M_3 (некоторые из них могут быть и пустыми) следующим образом: в M_1 войдут те значения x , для которых $f'(x) - n < -\sqrt{\lambda_2}$; в M_3 — те значения x , для которых $f'(x) - n > \sqrt{\lambda_2}$; в M_2 войдут те значения x , для которых $|f'(x) - n| \leq \sqrt{\lambda_2}$. Легко видеть, что

$$\left| \int_{M_2} e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx \right| \leq \mu(M_2) \leq 2\lambda_2^{-\frac{1}{2}},$$

ибо по формуле конечных приращений Лагранжа

$$2\sqrt{\lambda_2} \geq f''(\xi)\mu(M_2) > \lambda_2\mu(M_2).$$

Интегралы по множествам M_1 и M_3 легко оцениваются интегрированием по частям

$$\left| \int_{M_3} e^{2\pi i(f(x)-nx)} dx \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{M_3} \frac{de^{2\pi i(f(x)-nx)}}{f'(x) - n} \right| \leq \lambda_2^{-\frac{1}{2}},$$

где мы существенно пользуемся монотонностью функции $f'(x) - n$. Собирая вместе полученные оценки, находим

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \ll (f'(b) - f'(a) + 2) \lambda_2^{-\frac{1}{2}} + \ln(f'(b) - f'(a) + 2).$$

Остается лишь заметить, что второе слагаемое в правой части всегда меньше первого, и согласно формуле конечных приращений Лагранжа $f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b - a) \leq h\lambda_2(b - a)$.

Покажем теперь, что при достаточно большой, но не зависящей от k , постоянной A в знаке Виноградова в формулировке теоремы можно сделать индукционный переход от $k - 1$ к k . При этом можно считать $0 < \lambda_k < 1$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Положим при $r > 0$ $g(x) = f(x + r) - f(x)$. Тогда

$$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x + r) - f^{(k-1)}(x) = r f^{(k)}(\xi),$$

где $x \leq \xi \leq x + r$. Отсюда следует, что при $a \leq x \leq b - r$

$$r\lambda_k \leq g^{(k-1)}(x) \leq hr\lambda_k.$$

Согласно предположению индукции, имеем

$$\sum_{a < n \leq b-r} e^{2\pi i g(n)} \leq A \left(h^{\frac{4}{K}} (b - a) (r\lambda_k)^{\frac{1}{K-2}} + (b - a)^{1-\frac{4}{K}} (r\lambda_k)^{-\frac{1}{K-2}} \right).$$

Пусть q – некоторое натуральное число, не превосходящее $b - a$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{a < n \leq b-r} e^{2\pi i g(n)} \right| &\leq \\ &\leq 2A \left(h^{\frac{4}{K}} (b - a) q^{1+\frac{1}{K-2}} \lambda_k^{\frac{1}{K-2}} + (b - a)^{1-\frac{4}{K}} q^{1-\frac{1}{K-2}} \lambda_k^{-\frac{1}{K-2}} \right), \end{aligned}$$

ибо в силу формулы конечных приращений Лагранжа

$$r^{1-\frac{1}{K-2}} - (r-1)^{1-\frac{1}{K-2}} \geq \left(1 - \frac{1}{K-2}\right) r^{-\frac{1}{K-2}}.$$

Обозначим $e(n) = e^{2\pi i f(n)}$ при $a < n \leq b$ и $e(n) = 0$ в противном случае. Пусть $q \leq b - a$. Имеем

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n) = \frac{1}{q} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=1}^q e(n+m).$$

Применяя неравенство Коши, найдем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right|^2 &\leq \frac{1}{q^2} \left(\sum_{a-q < n \leq b-1} 1 \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m=1}^q e(n+m) \right|^2 \\ &\leq \frac{2(b-a)}{q^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m=1}^q e(n+m) \right|^2. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^q e(n+m) \right|^2 &= \sum_{m=1}^q |e(n+m)|^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \sum_{1 \leq m_1 < m_2 \leq q} \overline{e(n+m_1)} e(n+m_2). \end{aligned}$$

Имеем следующие равенства

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=1}^q |e(n+m)|^2 &= \sum_{m=1}^q \sum_{n \in \mathbb{Z}} |e(n+m)|^2 \leq 2q(b-a), \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{1 \leq m_1 < m_2 \leq q} \overline{e(n+m_1)} e(n+m_2) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{m=1}^{q-r} \overline{e(n+m)} e(n+m+r) \\ &= \sum_{r=1}^{q-1} (q-r) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{e(n)} e(n+r) = \sum_{r=1}^{q-1} (q-r) \sum_{a < n \leq b-r} e^{2\pi i g(n)}. \end{aligned}$$

Собирая вместе все полученные оценки, находим

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right|^2 \leq \frac{4(b-a)}{q} \left((b-a) + \sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{a < n \leq b-r} e^{2\pi i g(n)} \right| \right).$$

Подставим сюда полученную выше оценку для второго слагаемого в правой части. Имеем

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leq \frac{2(b-a)}{\sqrt{q}} + 4\sqrt{A} \left(h^{\frac{2}{K}} (b-a) (q\lambda_k)^{\frac{1}{2K-4}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}} (q\lambda_k)^{-\frac{1}{2K-4}} \right).$$

Выберем $q = \lfloor \lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} \rfloor + 1$. Условие $q \leq b-a$ можно считать выполненным, так как при $2\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} > (b-a)^{\frac{4}{K}}$ утверждение теоремы тривиально. При таком выборе q получим оценку

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leq 2(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + 8\sqrt{A}h^{\frac{2}{K}}(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + 4\sqrt{A}(b-a)^{1-\frac{2}{K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}}.$$

Взяв A достаточно большим, но не зависящим от k , добьемся того, что $2 + 8\sqrt{A} < A$, и обоснуем индукционный переход от $k-1$ к k . Этим доказательство завершается.

Метод ван дер Корпута широко применяется при оценке тригонометрических сумм. Одной из задач, в которой метод ван дер Корпута дает существенное продвижение, является проблема Гаусса о числе целых точек в круге. Введем обозначение

$$K(R) = \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ n^2 + m^2 \leq R}} 1.$$

Величина $K(R)$ есть количество точек с целыми координатами, лежащими в круге радиуса $\sqrt{R}$. Асимптотическое значение $K(R)$ при $R \rightarrow +\infty$ есть площадь круга πR , а задача получения лучшей оценки остатка известна как проблема Гаусса.

ТЕОРЕМА 9. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$K(R) = \pi R + O\left(R^{\frac{1}{3} - \frac{5}{1506}} \ln R\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим криволинейную трапецию $0 < x \leq \sqrt{R/2}$, $0 < y \leq \sqrt{R - x^2}$. Весь круг $x^2 + y^2 \leq R$ состоит из восьми подобных трапеций. Учитывая пересечения этих областей по квадратам со стороной $\sqrt{R/2}$ и целые точки, лежащие на осях координат, имеем

$$\begin{aligned} K(R) &= 1 + 4[\sqrt{R}] + 8 \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} [\sqrt{R - x^2}] - 4([\sqrt{R/2}])^2 \\ &= 8 \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} \sqrt{R - x^2} - 2R + 4\sqrt{2R}\{\sqrt{R/2}\} + 4\sqrt{R} \\ &\quad - 8 \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} \{\sqrt{R - x^2}\} + O(1). \end{aligned}$$

Вычислим первую сумму в правой части, пользуясь формулой суммирования Эйлера (теорема 9 прошлого семестра).

$$\begin{aligned} \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} \sqrt{R - x^2} &= \int_0^{\sqrt{R/2}} \sqrt{R - x^2} dx + \left(\frac{1}{2} - \{\sqrt{R/2}\} \right) \sqrt{\frac{R}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{R} + \sigma(\sqrt{R/2}) + \int_0^{\sqrt{R/2}} \sigma(x) \frac{d^2}{dx^2} \sqrt{R - x^2} dx \\ &= \frac{\pi R}{8} + \frac{R}{4} + \frac{\sqrt{R}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{R}}{2} - \left\{ \sqrt{\frac{R}{2}} \right\} \sqrt{\frac{R}{2}} + O(1). \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались тем, что первый интеграл равен площади рассматриваемой криволинейной трапеции, функция $\sqrt{R - x^2}$ выпукла, а $|\sigma(x)| \leq \frac{1}{8}$. Подставляя полученное равенство в формулу для $K(R)$, находим

$$K(R) = \pi R + 2\sqrt{2R} - 8 \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} \{\sqrt{R - x^2}\} + O(1).$$

Оценивая сумму дробных долей тривиально, получим результат Гаусса

$$K(R) = \pi R + O(\sqrt{R}).$$

Вычислим сумму

$$\sigma = \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} \{\sqrt{R - x^2}\}.$$

Для этого возьмем $r = [\ln R] \geq 1$, $0 < \Delta < \frac{1}{8}$, $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$. Согласно теореме 2 нам достаточно вычислить сумму

$$\sigma_0 = \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} g(\sqrt{R - x^2}),$$

где $g(x)$ – функция теоремы 1, отвечающая параметрам r , Δ , α , β . Согласно теореме 1 функция $g(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$g(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} c_m e^{2\pi i m x},$$

причем для коэффициентов c_m справедлива оценка

$$|c_m| \leq \min \left(\frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|} \left(\frac{r}{\pi|m|\Delta} \right)^r \right).$$

Отсюда находим соотношение

$$\sigma_0 = (\beta - \alpha) \left[\sqrt{\frac{R}{2}} \right] + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} c_m \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} e^{2\pi i m \sqrt{R - x^2}}.$$

При $|m| > \Delta^{-1} \ln R$ оценим внутреннюю сумму тривиально

$$\begin{aligned} \sum_{|m| > \Delta^{-1} \ln R} c_m \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} e^{2\pi i m \sqrt{R - x^2}} &\ll \sqrt{R} \sum_{m > \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\pi m \Delta} \right)^r \\ &\ll \sqrt{R} \pi^{-r} \ll 1. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\sigma_0 = (\beta - \alpha) \sqrt{\frac{R}{2}} + O \left(\sum_{m \leq \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{m} \left| \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} e^{-2\pi i m \sqrt{R - x^2}} \right| + 1 \right).$$

Заменим внутреннюю сумму более короткой. Применим к ней теорему 5, полагая $a = 0$, $b = \sqrt{\frac{R}{2}}$, $f(x) = -m\sqrt{R - x^2}$, $H = 1$, $U = \sqrt{R/2}$, $A = \sqrt{R}/m$. Нетрудно проверить, что условия теоремы 5 выполнены. Имеем

$$f'(x) = \frac{mx}{\sqrt{R - x^2}}, \quad x_n = \frac{n\sqrt{R}}{\sqrt{n^2 + m^2}}, \quad f''(x) = \frac{mR}{(R - x^2)^{3/2}}.$$

Отсюда находим следующее равенство

$$\sum_{x \leq \sqrt{R/2}} e^{-2\pi i m \sqrt{R-x^2}} = e^{\frac{\pi i}{4}} m R^{\frac{1}{4}} \sum_{n \leq m} \frac{e^{-2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}}}{(n^2+m^2)^{3/4}} + O(R^{\frac{1}{4}} m^{-\frac{1}{2}} + \ln(m+2)).$$

Оценивая сумму в правой части тривиально, получим

$$\sigma_0 = (\beta - \alpha) \sqrt{\frac{R}{2}} + O(R^{\frac{1}{4}} \Delta^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln R} + 1),$$

что согласно теореме 2 дает для суммы σ соотношение

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{2}} + O(\Delta \sqrt{R} + R^{\frac{1}{4}} \Delta^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln R} + 1).$$

Выбирая $\Delta = R^{-\frac{1}{6}} \ln^{\frac{1}{3}} R$, получаем результат В. Серпинского

$$K(R) = \pi R + O((R \ln R)^{\frac{1}{3}}).$$

Мы же оценим сумму в правой части нетривиально, используя теорему ван дер Корпута. Совершая преобразование Абеля (теорема 5 прошлого семестра), находим

$$\sum_{n \leq m} \frac{e^{-2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}}}{(n^2+m^2)^{3/4}} \ll m^{-\frac{3}{2}} \sum_{n \leq x} e^{-2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}},$$

где x – некоторое число, не превосходящее m . Для оценки суммы в правой части применим теорему ван дер Корпута, полагая $k = 6$, $f(n) = -\sqrt{R(n^2+m^2)}$. Имеем

$$f^{(6)}(n) = 360 \sqrt{R} (n^2+m^2)^{-\frac{11}{2}} m^2 \left(n^4 - \frac{3}{2} n^2 m^2 + \frac{1}{8} m^4 \right).$$

На промежутке $[0, x]$ может лежать нуль $f^{(6)}(n)$ равный

$$n_0 = \frac{\sqrt{3-\sqrt{7}}}{2} m.$$

Пусть $m \geq 10$. Разобьем отрезок $[0, x]$ на $\ll \ln m$ промежутков $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{-1}, E_{-2}, \dots$, где

$$\begin{aligned} E_0 &= [n_0 - 1, n_0 + 1], \\ E_\nu &= [n_0 + 2^{\nu-1}, n_0 + 2^\nu], \quad \nu = 1, 2, \dots, \\ E_{-\nu} &= [n_0 - 2^\nu, n_0 - 2^{\nu-1}], \quad \nu = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

При $\nu \geq 1$ длина $E_{\pm\nu}$ равна $2^{\nu-1}$, а при $n \in E_{\pm\nu}$

$$|f^{(6)}(n)| \asymp \sqrt{R} m^{-6} 2^\nu.$$

Применим теорему 8, полагая $\lambda_6 = \sqrt{R} m^{-6} 2^\nu$. Если $f^{(6)}(n)$ отрицательна, следует рассмотреть комплексно сопряженную сумму. При $\nu \geq 1$ находим

$$\begin{aligned} \sum_{n \in E_{\pm\nu}} e^{-2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}} &\ll 2^\nu (\sqrt{R} m^{-6} 2^\nu)^{\frac{1}{62}} + 2^{\frac{15}{16}\nu} (\sqrt{R} m^{-6} 2^\nu)^{-\frac{1}{62}}, \\ \sum_{n \leq x} e^{-2\pi i \sqrt{R(n^2+m^2)}} &\ll m \left((\sqrt{R} m^{-5})^{\frac{1}{62}} + m^{\frac{15}{16}} (\sqrt{R} m^{-5})^{-\frac{1}{62}} + 1 \right). \end{aligned}$$

Имеем окончательно

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{m} \left| \sum_{x \leq \sqrt{R/2}} e^{-2\pi i m \sqrt{R-x^2}} \right| \\ \ll R^{\frac{1}{4}} + R^{\frac{8}{31}} \sum_{m \leq \Delta^{-1} \ln R} m^{-\frac{18}{31}} + R^{\frac{15}{62}} \sum_{m \leq \Delta^{-1} \ln R} m^{-\frac{239}{496}} \\ \ll R^{\frac{1}{4}} + R^{\frac{8}{31}} \Delta^{-\frac{13}{31}} \ln R + R^{\frac{15}{62}} \Delta^{-\frac{257}{496}} \ln R. \end{aligned}$$

Выбирая $\Delta = R^{-\frac{1}{6} - \frac{5}{1506}}$ и пользуясь теоремой 2, получим

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{2}} + O(R^{\frac{1}{3} - \frac{5}{1506}} \ln R),$$

что и завершает доказательство.

Задачи к § 4

1. Доказать оценку

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^{\frac{1}{6} - \frac{1}{492}} \ln t.$$

2. Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + O\left(x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{246}} \ln^2 x\right),$$

где C – постоянная Эйлера,

а) пользуясь теоремой 2 аналогично доказательству теоремы 9;

б) пользуясь формулой Вороного (теорема 21 прошлого семестра).

§ 5. Суммы с простыми числами. Проблема Гольдбаха

Линейные тригонометрические суммы с простыми числами впервые были рассмотрены Виноградовым в 1937 году. Для их оценки им был предложен так называемый метод сглаживания, то есть сведения к суммам по подряд идущим натуральным числам.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, где $q \leq N$, $(a, q) = 1$, $|\theta| \leq 1$. Тогда имеет место оценка

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p} \ll N \ln^2 N \left(\sqrt{\frac{q}{N}} + \frac{1}{q} + N^{-\frac{1}{6}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{\sqrt{N} < n \leq N} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n},$$

где $\Lambda(n)$ – функция Мангольдта (см. задачу 1 к § 4 прошлого семестра). Имеет место тождество

$$\begin{aligned} S &= \sum_{d \leq \sqrt{N}} \mu(d) \sum_{l \leq \frac{N}{d}} \ln l e^{2\pi i \alpha d l} \\ &\quad - \sum_{d \leq \sqrt{N}} \mu(d) \sum_{n \leq \sqrt{N}} \Lambda(n) \sum_{r \leq \frac{N}{nd}} e^{2\pi i \alpha n d r} = W_1 - W_2. \end{aligned}$$

Действительно,

$$W_1 = \sum_{d \leq \sqrt{N}} \mu(d) \sum_{l \leq \frac{N}{d}} \sum_{n|l} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha d l} = \sum_{k \leq N} e^{2\pi i \alpha k} \sum_{\substack{nd|k \\ d \leq \sqrt{N}}} \mu(d) \Lambda(n),$$

$$W_2 = \sum_{k \leq N} e^{2\pi i \alpha k} \sum_{\substack{nd|k \\ n, d \leq \sqrt{N}}} \mu(d) \Lambda(n).$$

Здесь мы пользовались тем, что $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$. Далее находим

$$\begin{aligned} W_1 - W_2 &= \sum_{k \leq N} e^{2\pi i \alpha k} \sum_{\substack{nd|k \\ d \leq \sqrt{N}, n > \sqrt{N}}} \mu(d) \Lambda(n) \\ &= \sum_{\sqrt{N} < k \leq N} e^{2\pi i \alpha k} \sum_{\substack{n|k \\ n > \sqrt{N}}} \Lambda(n) \sum_{d|\frac{k}{n}} \mu(d). \end{aligned}$$

Согласно теореме 2 прошлого семестра внутренняя сумма отлична от нуля лишь при $n = k$, что и доказывает требуемое тождество.

Оценим W_1 . Разобьем внутреннюю сумму на $\ll \ln N$ сумм с пределами, различающимися не более чем вдвое, и вынесем монотонный множитель $\ln l$ за знак суммы с помощью преобразования Абеля. Имеем

$$W_1 \ll \ln^2 N \sum_{d \leq \sqrt{N}} \left| \sum_{X < l \leq X_1} e^{2\pi i \alpha d l} \right|,$$

где $X \leq \frac{N}{d}$. Теперь под знаком модуля стоит линейная тригонометрическая сумма, для оценки которой воспользуемся задачей 3 к § 1.

$$W_1 \ll \ln^2 N \sum_{d \leq \sqrt{N}} \min \left(\frac{N}{d}, \frac{1}{\|\alpha d\|} \right).$$

В сумме по d выделим слагаемые с $d \leq \frac{q}{2}$, а оставшуюся часть разобьем на $\ll \frac{\sqrt{N}}{q} + 1$ сумм длины q . При $\alpha \leq \frac{q}{2}$ произведение ad пробегает некоторые ненулевые и различные вычеты по модулю q , а $|\theta d| \leq \frac{q}{2}$. Поэтому в каждом случае справедлива оценка

$$\sum_{d \leq \frac{q}{2}} \frac{1}{\|\alpha d\|} \ll \sum_{n \leq \frac{q}{4}} \frac{q}{n - \frac{1}{2}} \ll q \ln q \ll q \ln N.$$

Если же $d = qt + r$ при фиксированном $t \in \mathbb{N}$ и r , меняющемся в пределах от $-\frac{q}{2}$ до $\frac{q}{2}$, то

$$\|\alpha d\| = \left\| \frac{ar + b}{q} + \frac{3\theta'}{2q} \right\|,$$

где $|\theta'| \leq 1$, а $b \in \mathbb{Z}$ не зависит от r . Поскольку $ar + b$ пробегает все вычеты по модулю q , находим

$$\sum_{|r| \leq \frac{q}{2}} \min \left(\frac{N}{qt + r}, \frac{1}{\|\alpha(qt + r)\|} \right) \ll \frac{N}{qt} + \sum_{n \leq q} \frac{q}{n} \ll \frac{N}{qt} + q \ln N.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} W_1 &\ll \left(\frac{\sqrt{N}}{q} + 1 \right) q \ln^3 N + \sum_{t \leq \frac{\sqrt{N}}{q}} \frac{N}{qt} \ln^2 N \\ &\ll N \ln^3 N \left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + N^{-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Для оценки W_2 разобьем ее на суммы W_3 по $d \leq N^{\frac{1}{3}}$ и W_4 по $N^{\frac{1}{3}} < d \leq \sqrt{N}$. Оценим W_3 . Имеем

$$W_3 = \sum_{k \leq N^{5/6}} a(k) \sum_{r \leq \frac{N}{k}} e^{2\pi i \alpha k r} \ll \ln^2 N \sum_{k \leq N^{5/6}} \left| \sum_{X < r \leq X_1} e^{2\pi i \alpha k r} \right|,$$

где $X \leq \frac{N}{k}$, а

$$a(k) = \sum_{\substack{nd=k \\ d \leq N^{1/3}, n \leq \sqrt{N}}} \mu(d) \Lambda(n) \ll \sum_{n|k} \Lambda(n) = \ln k.$$

Действуя также, как при оценке W_1 , получим

$$W_3 \ll N \ln^3 N \left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + N^{-\frac{1}{6}} \right).$$

Оценим W_4 . Разобьем сумму по d на $\ll \ln N$ сумм с пределами, различающимися не более чем вдвое. Имеем

$$\begin{aligned} W_4 &\ll \ln N \left| \sum_{X < d \leq X_1} \mu(d) \sum_{n \leq \sqrt{N}} \Lambda(n) \sum_{r \leq \frac{N}{nd}} e^{2\pi i \alpha n d r} \right| \\ &\ll \ln N \sum_{X < d \leq X_1} \left| \sum_{k \leq \frac{N}{d}} a(k) e^{2\pi i \alpha k d} \right|, \end{aligned}$$

где $N^{1/3} \leq X \leq \sqrt{N}$, а

$$a(k) = \sum_{\substack{nr=k \\ n \leq \sqrt{N}}} \Lambda(n) \ll \sum_{n|k} \Lambda(n) = \ln k.$$

Применяя неравенство Коши, находим

$$\begin{aligned} W_4^2 &\ll X \ln^2 N \sum_{X < d \leq X_1} \left| \sum_{k \leq \frac{N}{d}} a(k) e^{2\pi i \alpha k d} \right|^2 \\ &= X \ln^2 N \sum_{k_1, k_2 \leq \frac{N}{X}} a(k_1) a(k_2) \sum_{X < d \leq X_2} e^{2\pi i \alpha (k_1 - k_2) d}, \end{aligned}$$

где $X_2 = \min(X_1, \frac{N}{k_1}, \frac{N}{k_2})$. Пользуясь оценкой $a(k)$ и задачей 3 к §1, получим

$$\begin{aligned} W_4^2 &\ll X \ln^4 N \left(N + \sum_{k_2 \leq \frac{N}{X}} \sum_{k_3=1}^{k_2-1} \min\left(X, \frac{1}{\|\alpha k_3\|}\right) \right) \\ &\ll X \ln^4 N \left(N + \sum_{k_2 \leq \frac{N}{X}} \left(\frac{k_2}{q} + 1\right) (X + q \ln N) \right) \\ &\ll X \ln^5 N \left(N + \frac{Nq}{X} + \frac{N^2}{X^2} + \frac{N^2}{qX} \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, извлекая квадратный корень и учитывая, что $N^{1/3} \leq X \leq \sqrt{N}$, находим

$$W_4 \ll N \ln^3 N \left(\sqrt{\frac{q}{N} + \frac{1}{q}} + N^{-\frac{1}{6}} \right).$$

Поскольку $1 \leq q \leq N$, такая же оценка справедлива для суммы S .

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\sum_{p \leq N} \ln p e^{2\pi i \alpha p} = S + O\left(\sum_{\substack{p^k \leq N \\ k \geq 2}} \ln p + \sum_{n \leq \sqrt{N}} \Lambda(n) \right),$$

но $\sum_{n \leq \sqrt{N}} \Lambda(n) = \psi(\sqrt{N}) \ll \sqrt{N}$, а

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p^k \leq N \\ k \geq 2}} \ln p &= \sum_{p \leq \sqrt{N}} \ln p \sum_{2 \leq k \leq \frac{\ln N}{\ln p}} 1 \leq \sum_{p \leq \sqrt{N}} \ln p \left[\frac{\ln N}{\ln p} \right] \\ &\leq \pi(\sqrt{N}) \ln N \ll \sqrt{N}. \end{aligned}$$

Здесь мы пользуемся результатом задачи 2 к § 4 прошлого семестра. Таким образом,

$$\sum_{p \leq N} \ln p e^{2\pi i \alpha p} \ll N \ln^3 N \left(\sqrt{\frac{q}{N} + \frac{1}{q}} + N^{-\frac{1}{6}} \right),$$

и доказательство завершается применением преобразования Абеля.

Оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами дала ключ к решению тернарной проблемы Гольдбаха, то есть задачи о представимости любого достаточно большого нечетного числа суммой трех простых чисел. Метод решения этой и многих других так называемых аддитивных задач восходит к Харди и Литтлвуду и носит название кругового метода.

ТЕОРЕМА 11 (ВИНОГРАДОВ). *Для числа решений $J(N)$ уравнения $p_1 + p_2 + p_3 = N$ справедлива асимптотическая формула*

$$J(N) = \sigma(N) \frac{N^2}{2 \ln^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\ln^4 N}\right),$$

где

$$\sigma(N) = \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

В частности, если N нечетно, то $\sigma(N) > 1$ и любое достаточно большое нечетное число представимо суммой трех простых чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} J(N) &= \sum_{p_1 + p_2 + p_3 = N} 1 = \sum_{p_1, p_2, p_3 \leq N} \int_0^1 e^{2\pi i \alpha (p_1 + p_2 + p_3 - N)} d\alpha \\ &= \int_0^1 S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$S(\alpha) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}.$$

Пусть A и B – некоторые положительные числа, $L = \ln N$, $\tau = NL^{-A}$, $Q = L^B$. В силу периодичности подынтегральной функции с периодом 1 найдем

$$J(N) = \int_{\frac{1}{\tau}}^{1+\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Согласно задаче 2 к §3 каждое α из промежутка $[\frac{1}{\tau}, 1 + \frac{1}{\tau}]$ представляется в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + z,$$

где $1 \leq q \leq \tau$, $(a, q) = 1$ и $|z| \leq \frac{1}{q\tau}$. Разобьем отрезок интегрирования на два множества: E_1 , в которое войдут те α , для которых $q \leq Q$, и E_2 – дополнение к E_1 . Легко видеть, что отрезки, составляющие множество E_1 , не пересекаются. Действительно, расстояние между их центрами есть

$$\left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| = \frac{|aq' - a'q|}{qq'} \geq \frac{1}{qq'},$$

ибо $(a, q) = (a', q') = 1$, а сумма их полудлин равна

$$\frac{1}{q\tau} + \frac{1}{q'\tau} \leq \frac{2Q}{qq'\tau} < \frac{1}{qq'}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_1(N) &= \int_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha \\ &= \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i (\frac{a}{q} + z)N} dz. \end{aligned}$$

Для оценки интеграла по множеству E_2 заметим, что $Q < q \leq \tau$ при $\alpha \in E_2$, и воспользуемся оценкой теоремы 10 для $S(\alpha)$. Имеем

$$\begin{aligned} J_2(N) &= \int_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha \leq \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)|^2 d\alpha \\ &\ll NL^2 \left(\sqrt{\frac{\tau}{N} + \frac{1}{Q}} + N^{-\frac{1}{6}} \right) \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \\ &\ll N^2 L^{-\frac{A}{2}+1} + N^2 L^{-\frac{B}{2}+1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$J(N) = J_1(N) + O(N^2 L^{-\frac{A}{2}+1} + N^2 L^{-\frac{B}{2}+1}).$$

Теперь найдем асимптотическую формулу для $S\left(\frac{a}{q} + z\right)$. Разбивая суммирование по простым на прогрессии по модулю q , находим

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q} + z\right) &= \sum_{\sqrt{N} < p \leq N} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} e^{2\pi i z p} + O(\sqrt{N}) \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{2\pi i \frac{al}{q}} T(l) + O(\sqrt{N}), \end{aligned}$$

где

$$T(l) = \sum_{\substack{p \equiv l \pmod{q} \\ \sqrt{N} < p \leq N}} e^{2\pi i z p} = \sum_{\sqrt{N} < n \leq N} (\pi(n; q, l) - \pi(n-1; q, l)) e^{2\pi i z n}.$$

Примем без доказательства так называемую *теорему Зигеля–Вальфшиша* о распределении простых чисел в арифметической прогрессии: при $q \leq \ln^c x$, $(l, q) = 1$ имеет место формула

$$\pi(x; q, l) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l \pmod{q}}} 1 = \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(xe^{-c_1 \sqrt{\ln x}}).$$

Совершая с $T(l)$ преобразование Абеля и пользуясь теоремой Зигеля–Вальфшиша, находим

$$\begin{aligned} T(l) &= \frac{1}{\varphi(q)} \int_{\sqrt{N}}^N \frac{du}{\ln u} \cdot e^{2\pi i z N} - \int_{\sqrt{N}}^N \left(\frac{1}{\varphi(q)} \int_{\sqrt{N}}^x \frac{du}{\ln u} \right) d e^{2\pi i z x} \\ &\quad + O\left(N e^{-c_1 \sqrt{L}}\right) + O\left(N^2 |z| e^{-c_1 \sqrt{L}}\right) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\sqrt{N} < n \leq N} \int_{n-1}^n \frac{du}{\ln u} \cdot e^{2\pi i z n} \\ &\quad + O\left(N e^{-c_1 \sqrt{L}} + \frac{N^2}{\tau} e^{-c_1 \sqrt{L}}\right). \end{aligned}$$

Здесь после отделения остаточного члена мы совершили обратное преобразование Абеля и учли, что $|z| \leq \frac{1}{q\tau}$. Далее, так как

$$\int_{n-1}^n \frac{du}{\ln u} = \frac{1}{\ln u} + O\left(\frac{1}{n \ln^2 u}\right),$$

а $\tau = NL^{-A}$, то

$$T(l) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} + O(Ne^{-c_2\sqrt{L}}).$$

Подставляя это выражение в равенство для $S\left(\frac{a}{q} + z\right)$ и пользуясь результатом задачи 2 к § 1, получим

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} + O(Ne^{-c_2\sqrt{L}}).$$

Возводя последнее неравенство в куб, найдем

$$S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \left(\sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} \right)^3 + O(N^3e^{-c_2\sqrt{L}}),$$

откуда сразу получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right)N} dz &= \\ &= \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q}N} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \left(\sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} \right)^3 e^{-2\pi i z N} dz \\ &\quad + O\left(\frac{N^2L^A}{q} e^{-c_2\sqrt{L}}\right). \end{aligned}$$

Распространим интеграл в правой части на весь отрезок $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Обозначая

$$\varkappa(N) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} \right)^3 e^{-2\pi i z N} dz,$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \left(\sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} \right)^3 e^{-2\pi i z N} dz &= \\ &= \varkappa(N) + O\left(\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} \right|^3 dz\right). \end{aligned}$$

Совершая преобразование Абеля и пользуясь результатом задачи 3 к § 1, находим при $0 < z \leq \frac{1}{2}$

$$\sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} \ll \frac{1}{\ln N} \left| \sum_{2 < n \leq N} e^{2\pi i z n} \right| + \int_2^N \left| \sum_{2 < n \leq u} e^{2\pi i z n} \right| \frac{du}{u \ln^2 u} \ll \frac{1}{z},$$

откуда сразу получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \left(\sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} \right)^3 e^{-2\pi i z N} dz &= \kappa(N) + O(q^2 \tau^2) \\ &= \kappa(N) + O(N^2 L^{2B-2A}). \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$J_1(N) = \kappa(N) \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} + O(N^2 L^{2B-2A}).$$

Здесь мы пользуемся оценкой $\varphi(q)$ из задачи 3 к § 1 прошлого семестра. Теперь распространим суммирование по q до бесконечности. Обозначая

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N},$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} &= \sigma(N) + O\left(\sum_{q > Q} \frac{1}{\varphi^2(q)} \right) \\ &= \sigma(N) + O\left(\int_Q^{+\infty} \frac{(\ln \ln u)^2}{u^2} du \right). \end{aligned}$$

Собирая вместе все полученные оценки, имеем окончательно

$$\begin{aligned} J(N) &= \sigma(N) \kappa(N) \\ &\quad + O(\kappa(N) L^{-B+1} + N^2 L^{2B-2A} + N^2 L^{-\frac{B}{2}+1} + N^2 L^{-\frac{A}{2}+1}). \end{aligned}$$

Вычислим $\varkappa(N)$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} - \sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln N} \right| &\leq \sum_{2 < n \leq N} \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln N} \right) \\ &\leq \int_2^N \left(\frac{1}{\ln u} - \frac{1}{\ln N} \right) du \ll \frac{N}{\ln^2 N}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \left| \varkappa(N) - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} \right)^3 e^{-2\pi i z N} dz \right| \\ \ll \frac{N}{\ln^2 N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\left| \sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln n} \right|^2 + \left| \sum_{2 < n \leq N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\ln N} \right|^2 \right) dz. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\varkappa(N) = \frac{1}{\ln^3 N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{2 < n \leq N} e^{2\pi i z n} \right)^3 e^{-2\pi i z N} dz + O\left(\frac{N^2}{\ln^4 N}\right).$$

Интеграл в правой части последнего равенства есть не что иное, как число решений уравнения $n_1 + n_2 + n_3 = N$ при $3 \leq n_1, n_2, n_3 \leq N$. Имеем

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{2 < n \leq N} e^{2\pi i z n} \right)^3 e^{-2\pi i z N} dz = \sum_{n_3=3}^{N-6} (N - n_3 - 5) = \frac{N^2}{2} + O(N).$$

Отсюда

$$\varkappa(N) = \frac{N^2}{2 \ln^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\ln^4 N}\right).$$

Собирая вместе все полученные оценки и выбирая $A = 12$ и $B = 10$, получим окончательно

$$J(N) = \sigma(N) \frac{N^2}{2 \ln^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\ln^4 N}\right).$$

Осталось вычислить $\sigma(N)$. Докажем мультипликативность функции

$$T(q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q e^{-2\pi i \frac{aN}{q}}.$$

Пусть $(q_1, q_2) = 1$; имеем

$$\begin{aligned} T(q_1 q_2) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q_1 q_2)=1}}^{q_1 q_2} e^{-2\pi i \frac{aN}{q_1 q_2}} \\ &= \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1, q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2, q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i \frac{(a_1 q_2 + a_2 q_1)N}{q_1 q_2}} = T(q_1)T(q_2). \end{aligned}$$

Поскольку функции $\mu(q)$ и $\varphi(q)$ мультипликативны, мы имеем абсолютно сходящийся ряд мультипликативных функций. Согласно тождеству Эйлера (теорема 4 прошлого семестра), находим

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} T(q) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p-1)^3} T(p) \right).$$

В случае $p \mid N$ имеем $T(p) = p - 1$, а в случае $p \nmid N$ — $T(p) = -1$, поэтому

$$\sigma(N) = \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right).$$

Таким образом, при N — четном $\sigma(N) = 0$, а при нечетном N

$$\sigma(N) > \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) \geq \frac{2}{\zeta(2)} = \frac{12}{\pi^2} > 1.$$

Этим доказательство завершается.