Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, Метод комплексного интегрирования,
Лекц. курсы НОЦ, 2006, выпуск 2, 3–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn2>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:12:57

Оглавление

Обозначения	4
§ 1 Мультипликативные функции. Производящие ряды Ди- рихле	5
§ 2 Сумматорные функции. Формула Перрона	13
§ 3 Дзета-функция Римана. Функциональное уравнение . . .	20
§ 4 Нули дзета-функции Римана	29
§ 5 Асимптотический закон распределения простых чисел .	38
§ 6 Проблема делителей Дирихле. Формула Вороного	45

Обозначения

Запись $d \mid n$ при натуральном d и целом n означает, что d делит n , то есть существует целое q такое, что $n = dq$;

(n, m) обозначает наибольший общий делитель чисел n и m ;

$p, p_1, p_2, \dots, q, q_1, q_2, \dots$ обозначают простые числа;

$s = \sigma + it$ обозначает комплексное переменное;

Запись $A \ll B$ при положительном B означает, что $A = O(B)$, то есть существует положительное c такое, что $|A| \leq cB$;

Запись $A \asymp B$ означает, что $A \ll B$ и $B \ll A$;

$c, c_1, c_2, \dots$ обозначают положительные постоянные, в различных формулах, вообще говоря, различные;

ε обозначает произвольно малое положительное число;

$[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x ;

$\{x\}$ обозначает дробную долю числа x , то есть $x - [x]$;

$\ln s$ обозначает главную ветвь логарифма.

§ 1 Мультипликативные функции. Производящие ряды Дирихле

Комплекснозначная функция натурального аргумента $f(n)$ называется *мультипликативной*, если она не равна нулю тождественно и для любых натуральных n и m таких, что $(n, m) = 1$, имеет место равенство

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

Например, функция n^s мультипликативна при любом комплексном s . Рассмотрим простейшие свойства мультипликативных функций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ мультипликативны. Тогда

а) $f(1) = 1$;

б) $f(n)g(n)$ мультипликативна;

в) $\sum_{d|n} f(d)$ мультипликативна;

г) если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, то $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_r^{\alpha_r})$.

Таким образом, мультипликативная функция вполне определяется своими значениями на степенях простых чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть n таково, что $f(n) \neq 0$. Поскольку $(n, 1) = 1$, имеем

$$f(n) = f(n \cdot 1) = f(n)f(1).$$

Сокращая на $f(n)$, получаем требуемое.

б) Пусть $(n, m) = 1$. Тогда

$$f(nm)g(nm) = f(n)f(m)g(n)g(m) = f(n)g(n)f(m)g(m).$$

При этом $f(n)g(n)$ не равна нулю тождественно, так как $f(1) = g(1) = 1$.

в) При $n = 1$ имеем $\sum_{d|1} f(d) = f(1) = 1$. Пусть теперь $(n, m) = 1$. Тогда из основной теоремы арифметики следует, что если d_1 пробегает делители n , а d_2 пробегает делители m , то $d_1 d_2$ пробегает все делители nm , причем только один раз. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{d|nm} f(d) &= \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1) f(d_2) \\ &= \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} f(d_2), \end{aligned}$$

ибо, очевидно, $(d_1, d_2) = 1$.

г) Так как $(p_1^{\alpha_1} \dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}, p_r^{\alpha_r}) = 1$, имеем

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1} \dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}})f(p_r^{\alpha_r}).$$

Продолжая этот процесс, получим требуемое. ■

Определим *функцию Мебиуса* $\mu(n)$ равенствами $\mu(1) = 1$, $\mu(p_1 \dots p_r) = (-1)^r$; $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа. Таким образом, функция $\mu(n)$ отлична от нуля только на числах, свободных от квадратов, а ее модуль есть характеристическая функция множества таких чисел. Докажем важные свойства функции Мебиуса.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место следующие утверждения:*

а) *Функция Мебиуса мультипликативна;*

б) *при натуральном $n > 1$ имеет место равенство*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0;$$

в) *(формула обращения Мебиуса) если $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, то $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$ и обратно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть n или m содержит квадрат. Тогда nm также содержит квадрат и равенство $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ выполнено. Пусть теперь n и m бесквадратны, причем $(n, m) = 1$. Тогда $n = p_1 \dots p_r$ и $m = q_1 \dots q_s$, при этом $p_i \neq q_j$ для всех $i = 1, \dots, r$ и $j = 1, \dots, s$. Тогда

$$\mu(n)\mu(m) = (-1)^r(-1)^s = (-1)^{r+s} = \mu(nm).$$

В случае $n = 1$ полагаем $r = 0$.

б) Из пункта а) и теоремы 1 заключаем, что функция $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ мультипликативна. Найдём ее значения на степенях простых чисел. При $\alpha \geq 1$ имеем

$$f(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \dots + \mu(p^\alpha) = 1 - 1 = 0.$$

Теперь требуемое утверждение следует из пункта г) теоремы 1.

в) Пусть $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Используя утверждение пункта б) имеем

$$\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{k|\frac{n}{d}} f(k) = \sum_{k|n} f(k) \sum_{d|\frac{n}{k}} \mu(d) = f(n).$$

Обратно, если $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$, то

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} \sum_{k|d} \mu\left(\frac{d}{k}\right) g(k) = \sum_{k|n} g(k) \sum_{r|\frac{n}{k}} \mu(r) = g(n).$$

■

В теории чисел важную роль играют ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, называемые рядами Дирихле. Следующая теорема позволяет перемножать подобные ряды.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$ сходятся абсолютно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$, где

$$c(n) = \sum_{d|n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right)$$

также сходится абсолютно, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}.$$

Формула для коэффициентов $c(n)$ содержит сумму по делителям числа n , что и определяет тесную связь рядов Дирихле с арифметикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перемножая частичные суммы, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{a(n)}{n^s} \sum_{m=1}^N \frac{b(m)}{m^s} &= \sum_{n,m=1}^N \frac{a(n)b(m)}{(nm)^s} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} \sum_{n|k} a(n) b\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{\substack{n,m=1 \\ nm > N}}^N \frac{a(n)b(m)}{(nm)^s}, \end{aligned}$$

но так как при $nm > N$ либо $n > \sqrt{N}$, либо $m > \sqrt{N}$, то

$$\left| \sum_{\substack{n,m=1 \\ nm > N}}^N \frac{a(n)b(m)}{(nm)^s} \right| \leq \sum_{n > \sqrt{N}} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b(m)|}{m^\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \sum_{m > \sqrt{N}} \frac{|b(m)|}{m^\sigma}.$$

В силу абсолютной сходимости перемножаемых рядов правая часть последнего выражения стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Наконец, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$ сходится абсолютно, так как

$$\frac{|c(n)|}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^\sigma} \sum_{d|n} |a(d)| \left| b\left(\frac{n}{d}\right) \right|,$$

а по доказанному выше

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{d|n} |a(d)| \left| b\left(\frac{n}{d}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b(n)|}{n^\sigma} < \infty.$$

■

Простейший ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Его сумма как функция комплексного переменного s называется *дзета-функцией Римана*. Таким образом, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ называется *производящим* рядом Дирихле функции $f(n)$. Производящие ряды Дирихле многих мультипликативных функций выражаются через дзета-функцию Римана. Например, пользуясь основным свойством функции Мебиуса, при $\operatorname{Re} s > 1$ находим

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d|n} \mu(d) = 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что дзета-функция Римана не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Итак, в этой полуплоскости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Аналогично

$$\zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d^2|n} \left| \mu\left(\frac{n}{d^2}\right) \right|,$$

где $\delta(n)$ – характеристическая функция множества квадратов натуральных чисел. Последний ряд есть дзета-функция Римана, так как при любом n

$$\sum_{d^2|n} \left| \mu\left(\frac{n}{d^2}\right) \right| = 1.$$

Действительно, из основной теоремы арифметики следует, что натуральное n однозначно представляется в виде a^2b с бесквадратным b . Суммирование по $d^2 | n$ заменяется при этом суммированием по $d | a$, а по свойствам функции Мебиуса все слагаемые окажутся равными нулю, кроме слагаемого с $d = a$, которое равняется единице. Таким образом, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

ТЕОРЕМА 4 (тождество Эйлера). Пусть $f(n)$ мультипликативна и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ абсолютно сходится. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

Тождество Эйлера по существу представляет собой аналитический эквивалент основной теоремы арифметики о единственности канонического разложения натурального числа на простые сомножители.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ряды $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)p^{-ks}$ сходятся абсолютно, повторное применение теоремы 3 показывает, что их можно перемножать между собой в любом конечном числе. Имеем

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) = \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^s} + \sum'_{n > N} \frac{f(n)}{n^s},$$

где штрих у знака суммы означает суммирование по натуральным n , все простые делители которых не превосходят N . Здесь мы

существенно пользуемся основной теоремой арифметики и мультипликативностью функции $f(n)$. В силу абсолютной сходимости производящего ряда Дирихле имеем

$$\left| \sum'_{n>N} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n>N} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, доказываем сходимость произведения и получаем требуемое. Заметим, что в силу абсолютной сходимости производящего ряда Дирихле, случай расходимости бесконечного произведения к нулю здесь исключен.

Например, при $\operatorname{Re} s > 1$, находим

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots \right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} \right).$$

Отсюда легко следуют уже полученные нами ранее соотношения между этими функциями. ■

Задачи к § 1

1. При $k \geq 3$ функции $\tau_k(n)$ определяются по индукции равенством

$$\tau_k(n) = \sum_{d|n} \tau_{k-1}(d),$$

где

$$\tau_2(n) = \tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

есть число делителей n .

- а) Доказать мультипликативность $\tau_k(n)$;
- б) показать, что $\tau_k(n)$ есть число решений уравнения $x_1 \dots x_k = n$ в натуральных $x_1, \dots, x_k$;
- в) доказать, что

$$\tau_k(p^\alpha) = C_{\alpha+k-1}^{k-1};$$

г) доказать, что $\tau_k(n) \leq \tau^{k-1}(n)$;

д) доказать, что $1 \leq \tau_k(n) \leq C(\varepsilon)n^\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$;

е) показать, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = \zeta^k(s).$$

2. При $k \geq 1$ функции $\sigma_k(n)$ определяются равенствами

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k,$$

в частности,

$$\sigma_1(n) = \sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

есть сумма делителей n .

а) Доказать мультипликативность $\sigma_k(n)$;

б) доказать, что

$$\sigma_k(p^\alpha) = \frac{p^{(\alpha+1)k} - 1}{p^k - 1};$$

в) доказать, что при $k \geq 2$ имеют место неравенства $n^k \leq \sigma_k(n) \leq 2n^k$;

г) пользуясь тем, что

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + O(1), \quad \sum_{p \leq x} \ln p \gg x,$$

доказать неравенства $n \leq \sigma(n) \leq n \ln \ln n$;

д) показать, что при $\operatorname{Re} s > k + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s) \zeta(s - k);$$

е) показать, что при $\operatorname{Re} s > k + l + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n) \sigma_l(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s) \zeta(s - k) \zeta(s - l) \zeta(s - k - l)}{\zeta(2s - k - l)}.$$

3. Функция Эйлера $\varphi(n)$ есть количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним:

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{k \leq n \\ (k, n) = 1}} 1.$$

а) Доказать, что

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d};$$

б) доказать мультипликативность $\varphi(n)$;

в) доказать, что $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$;

г) доказать, что

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right);$$

д) доказать, что

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n;$$

е) пользуясь тем, что

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + O(1), \quad \sum_{p \leq x} \ln p \gg x,$$

доказать неравенства

$$\frac{n}{\ln \ln n} \ll \varphi(n) \leq n;$$

ж) показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

§ 2 Сумматорные функции. Формула Перрона

Докажем вначале интегральный аналог преобразования Абеля для сумм, который имеет исключительно широкое применение в аналитической теории чисел.

ТЕОРЕМА 5 (преобразование Абеля). Пусть $c_n \in \mathbb{C}$, $C(x) = \sum_{a < n \leq x} c_n$ и $f(x) \in C^1[a, b]$. Тогда

$$\sum_{a < n \leq b} c_n f(n) = C(b)f(b) - \int_a^b C(x)f'(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{a < n \leq x} c_n f'(x) dx &= \sum_{a < n \leq b} c_n \int_n^b f'(x) dx \\ &= f(b) \sum_{a < n \leq b} c_n - \sum_{a < n \leq b} c_n f(n). \end{aligned}$$

■

Выражение $\sum_{n \leq x} f(n)$ называют *сумматорной функцией* $f(n)$. Оказывается, производящий ряд Дирихле достаточно просто выражается через сумматорную функцию.

ТЕОРЕМА 6. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ сходится при $\operatorname{Re} s > a \geq 0$, $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$. Тогда при $\operatorname{Re} s > a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{F(x)}{x^{s+1}} dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совершая преобразование Абеля, получим

$$\sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^s} = \frac{F(N)}{N^s} + s \int_1^N \frac{f(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $F(x) = 0$ при $x < 1$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $F(N)N^{-s} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^s} F(N) &= \frac{1}{N^s} \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}} n^{s-\varepsilon} \\ &= N^{-\varepsilon} \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}} - \frac{s-\varepsilon}{N^s} \int_1^N \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}} x^{s-\varepsilon-1} dx. \end{aligned}$$

Но в силу сходимости ряда Дирихле

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}} \right| \leq C(s, \varepsilon)$$

для любого N . Отсюда, считая ε столь малым, что $\sigma - \varepsilon > 0$, находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(N)}{N^s} \right| &\leq C(s, \varepsilon) \left(N^{-\varepsilon} + \frac{|s| + \varepsilon}{N^\sigma} \int_1^N x^{\sigma-\varepsilon-1} dx \right) \\ &\leq C_1(s, \varepsilon) N^{-\varepsilon} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. ■

Следующая теорема, напротив, выражает сумматорную функцию через соответствующий производящий ряд Дирихле.

ТЕОРЕМА 7 (формула Перрона). Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

причем ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > a \geq 0$, и пусть при $\sigma \rightarrow a + 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \ll (\sigma - a)^{-\alpha}$$

с некоторым $\alpha > 0$. Тогда при любых $b > a$, $x \geq 2$, $T \geq 2$ имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \ll \frac{x^b}{T(b-a)^\alpha} + 2^b \left(\frac{x \ln x}{T} + \ln \frac{T}{b} + 1 \right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд Дирихле функции $F(s)$ равномерно сходится на отрезке интегрирования, поэтому его можно интегрировать почленно. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}.$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Пусть $n < x - 1$, выберем произвольно большое число U и рассмотрим прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $-U \pm iT$, $b \pm iT$. По теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \operatorname{res}_{s=0} \frac{1}{s} \left(\frac{x}{n}\right)^s = 1.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} + I_1 + I_2 + I_3,$$

где I_1 , I_2 , I_3 обозначают интегралы по левой, верхней и нижней сторонам контура Γ . Оценим эти интегралы по абсолютной величине:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(\frac{x}{n}\right)^{-U} \frac{dt}{U} = \frac{T}{\pi U} \left(\frac{x}{n}\right)^{-U}, \\ |I_2|, |I_3| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^b \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \frac{d\sigma}{T} \leq \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{x}{n}\right)^b \left| \ln \frac{x}{n} \right|^{-1}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $U \rightarrow \infty$, получим при $n < x - 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = 1 + O\left(\frac{1}{T} \left(\frac{x}{n}\right)^b \left| \ln \frac{x}{n} \right|^{-1}\right).$$

Пусть теперь $n > x + 1$. Выбирая произвольно большое число U и, рассматривая прямоугольный контур с вершинами в точках $b \pm iT$, $U \pm iT$, проведем аналогичные рассуждения. Получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = O\left(\frac{1}{T} \left(\frac{x}{n}\right)^b \left| \ln \frac{x}{n} \right|^{-1}\right).$$

Наконец, при $|n - x| \leq 1$ оценим интеграл тривиально:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} &\ll \left(\frac{x}{n}\right)^b \int_{-T}^T \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b^2}} \\ &\ll 2^b \int_0^b \frac{dt}{b} + 2^b \int_b^T \frac{dt}{t} \ll 2^b \left(\ln \frac{T}{b} + 1 \right). \end{aligned}$$

Собирая полученные оценки, находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} &= \sum_{n < x-1} a(n) \\ &\quad + O\left(2^b \left(\ln \frac{T}{b} + 1\right) \sum_{|n-x| \leq 1} |a(n)|\right) \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{|n-x| > 1} |a(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^b \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1} \\ &= \sum_{n \leq x} a(n) + O\left(2^b \left(\ln \frac{T}{b} + 1\right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)|\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{T} \sum_{|n-x| > \frac{x}{2}} |a(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^b \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} |a(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^b \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно две последние суммы, обозначив их через S_1 и S_2 . При $|n - x| > \frac{x}{2}$ имеем $\left|\ln \frac{x}{n}\right| > \ln \frac{3}{2}$. Отсюда находим

$$S_1 \ll \frac{x^b}{T} \sum_{|n-x| > \frac{x}{2}} \frac{|a(n)|}{n^b} \leq \frac{x^b}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^b} \ll \frac{x^b}{T(b-a)^\alpha}.$$

При $1 < |n - x| \leq \frac{x}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \frac{2^b}{T} \left(\sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \left|\ln \frac{n}{x}\right|^{-1} \right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)| \\ &\ll \frac{2^b}{T} \left(\sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \left|\frac{n}{x} - 1\right|^{-1} \right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)|, \end{aligned}$$

ибо $s(\ln(1+s))^{-1}$ есть аналитическая в круге $|s| < 1$ функция. Итак,

$$\begin{aligned} S_2 &\ll 2^b \frac{x}{T} \left(\sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \frac{1}{|n-x|} \right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)| \\ &\ll 2^b \frac{x \ln x}{T} \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)|. \end{aligned}$$

Этим доказательство завершается. ■

Иногда более удобен другой вариант формулы Перрона, в котором фигурирует интеграл от сумматорной функции.

ТЕОРЕМА 8. Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

причем этот ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > a \geq 0$, и пусть при $b > a$

$$B(b) = \int_1^{\infty} \frac{|A(u)|}{u^{b+1}} du, \quad A(u) = \sum_{n \leq u} a(n).$$

Тогда при $x \geq 2$, $T \geq 2$ имеет место формула

$$\int_1^x A(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \ll B(b) \frac{x^{b+1}}{T} + 2^b \left(\frac{x \ln x}{T} + \ln T \right) \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} s > a$ согласно теореме 6 имеем

$$\frac{F(s)}{s} = \int_1^{\infty} \frac{A(u)}{u^{s+1}} du.$$

Поскольку этот интеграл равномерно сходится при $s = b + it$, $|t| \leq T$, мы можем поменять порядок интегрирования следующим

образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\int_1^\infty \frac{A(u)}{u^{s+1}} du \right) \frac{x^{s+1}}{s+1} ds \\ &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b+1-iT}^{b+1+iT} \left(\frac{x}{u} \right)^s \frac{ds}{s} \right) A(u) du. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в правой части уже был исследован при доказательстве предыдущей теоремы. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \int_1^{x-1} A(u) du \\ &+ O\left(\frac{1}{T} \int_{|x-u|>1} |A(u)| \left(\frac{x}{u} \right)^{b+1} \left| \ln \frac{x}{u} \right|^{-1} du + \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)| \ln T \right) \\ &= \int_1^x A(u) du + O\left(\ln T \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)| \right) \\ &+ O\left(\frac{1}{T} \int_{|x-u|>\frac{x}{2}} |A(u)| \left(\frac{x}{u} \right)^{b+1} \left| \ln \frac{x}{u} \right|^{-1} du \right. \\ &\left. + \frac{1}{T} \int_{1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}} |A(u)| \left(\frac{x}{u} \right)^{b+1} \left| \ln \frac{x}{u} \right|^{-1} du \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно два последних интеграла, обозначив их через I_1 и I_2 . При $|x-u| > \frac{x}{2}$ имеем $\left| \ln \frac{x}{u} \right| > \ln \frac{3}{2}$. Отсюда находим

$$I_1 \ll \frac{x^{b+1}}{T} \int_{|x-u|>\frac{x}{2}} \frac{|A(u)|}{u^{b+1}} du \leq \frac{x^{b+1}}{T} \int_1^\infty \frac{|A(u)|}{u^{b+1}} du = B(b) \frac{x^{b+1}}{T}.$$

При $1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \frac{2^b}{T} \left(\int_{1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}} \left| \ln \frac{u}{x} \right|^{-1} du \right) \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)| \\ &\ll \frac{2^b}{T} \left(\int_{1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}} \left| \frac{u}{x} - 1 \right|^{-1} du \right) \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)|, \end{aligned}$$

ибо $s(\ln(1+s))^{-1}$ есть аналитическая в круге $|s| < 1$ функция. Итак,

$$\begin{aligned} I_2 &\ll 2^b \frac{x}{T} \left(\int_{1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}} \frac{du}{|x-u|} \right) \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)| \\ &\ll 2^b \frac{x \ln x}{T} \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)|. \end{aligned}$$

Этим доказательство завершается. ■

Задачи к § 2

1. Доказать, что функция

$$F(s) = s e^{Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n} \right) e^{-\frac{s}{n}}$$

является целой и имеет только простые нули в точках $s = 0, -1, -2, \dots$

2. Пусть C – постоянная Эйлера,

$$C = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \ln N \right).$$

Тогда при $\operatorname{Re} s > 0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{F(s)} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Из приведенных задач следует, что гамма-функция Эйлера задается при любом комплексном s равенством

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{s} e^{-Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n} \right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}.$$

Гамма-функция не имеет нулей, а в точках $s = 0, -1, -2, \dots$ она имеет полюса первого порядка.

§ 3 Дзета-функция Римана. Функциональное уравнение

Мы начнем с доказательства формулы суммирования Эйлера, имеющей многочисленные приложения. Введем вспомогательные функции

$$\varrho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \varrho(u) du.$$

Очевидны следующие свойства этих функций:

- а) $\varrho(x)$ и $\sigma(x)$ периодичны с периодом 1;
- б) $\varrho(n) = \frac{1}{2}$ и $\sigma(n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.
- в) $|\varrho(x)| \leq \frac{1}{2}$ и $0 \leq \sigma(x) \leq \frac{1}{8}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 9 (формула суммирования Эйлера). Пусть $f \in C^2[a, b]$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(x) dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) \\ &\quad + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к сумме в левой части преобразование Абеля

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= f(b) \sum_{a < n \leq b} 1 - \int_a^b \left(\sum_{a < n \leq x} 1 \right) f'(x) dx \\ &= f(b)([b] - [a]) - \int_a^b ([x] - [a]) f'(x) dx \\ &= f(b)(b - a + \varrho(b) - \varrho(a)) \\ &\quad - \int_a^b (x - a + \varrho(x) - \varrho(a)) f'(x) dx \\ &= f(b)(b - a + \varrho(b) - \varrho(a)) - \int_a^b (x - a) f'(x) dx \\ &\quad - \int_a^b \varrho(x) f'(x) dx + \varrho(a)(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(b)(b - a + \varrho(b)) - \varrho(a)f(a) - \\
&\quad - (b - a)f(b) + \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varrho(x)f'(x) dx \\
&= \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) - \int_a^b \varrho(x)f'(x) dx.
\end{aligned}$$

Мы получили *упрощенный вариант* формулы суммирования Эйлера, который также часто используется.

Допустим, интервал (a, b) не содержит целых точек, то есть функция $\varrho(x)$ непрерывна на (a, b) . Тогда

$$\begin{aligned}
-\int_a^b \varrho(x)f'(x) dx &= -\int_a^b f'(x) d\sigma(x) \\
&= \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx.
\end{aligned}$$

Если же интервал (a, b) содержит целые точки, то, разбивая его на интервалы, таких точек не содержащие, и действуя аналогично предыдущему случаю, получим требуемое. ■

В полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ *дзета-функция Римана* определяется равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

В силу равномерной сходимости ряда Дирихле в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1 + \varepsilon$ дзета функция Римана является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Кроме того, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Наконец, как уже отмечалось в §1, $\zeta(s)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$.

С помощью формулы суммирования Эйлера получим аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$.

ТЕОРЕМА 10. *При $\operatorname{Re} s > 0$, $N \geq 1$ имеет место равенство*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M > N$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq M} \frac{1}{n^s} &= \int_N^M \frac{du}{u^s} + \frac{1}{2}M^{-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s \int_N^M \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} - \frac{M^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}M^{-s} + s \int_N^M \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} du. \end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{Re} s > 1$. Перейдем к пределу при $M \rightarrow \infty$. Имеем

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} du.$$

Последний интеграл есть аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ функция. Согласно принципу аналитического продолжения получаем требуемое. ■

Таким образом, $\zeta(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом 1.

Теперь мы докажем функциональное уравнение дзета-функции Римана, которое связывает значения дзета-функции в точках s и $1-s$, и дает аналитическое продолжение $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость. Нам понадобится вспомогательное утверждение.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $x > 0$,

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Тогда

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\theta(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать x фиксированным числом. Пусть $N > 10$, $M = N^4$, $|n| \leq N$. Рассмотрим интеграл

$$I(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi(2M+1)u}{\sin \pi u} e^{-\pi x(n+u)^2} du.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi(2M+1)u}{\sin \pi u} du &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-M}^M e^{2\pi i k u} du \\ &= \sum_{k=-M}^M \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i k u} du = 1, \end{aligned}$$

имеем

$$I(n) = e^{-\pi x n^2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi(2M+1)u}{\sin \pi u} (e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi x n^2}) du.$$

Разобьем последний интеграл на интегралы I_1 , I_2 и I_3 по промежуткам $(N^{-3}, \frac{1}{2})$, $(-N^{-3}, N^{-3})$ и $(-\frac{1}{2}, -N^{-3})$, соответственно. Оценим каждый из интегралов сверху. При $|u| \leq \frac{1}{2}$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi x n^2} \ll Nu,$$

откуда

$$I_2 \ll N \int_0^{N^{-3}} \frac{u du}{\sin \pi u} \ll \frac{1}{N^2},$$

ибо $|\sin \pi u| \geq 2u$ при $|u| \leq \frac{1}{2}$. Интегралы I_1 и I_3 оцениваются одинаково. Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-\cos \pi(2M+1)u}{\pi(2M+1) \sin \pi u} (e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi x n^2}) \Big|_{N^{-3}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \int_{N^{-3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi(2M+1)u}{\pi(2M+1)} \left(\frac{\pi \cos \pi u}{\sin^2 \pi u} (e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi x n^2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi x(n+u)e^{-\pi x(n+u)^2}}{\sin \pi u} \right) du. \end{aligned}$$

Действуя аналогично предыдущему, получаем, что внеинтегральный член есть $\ll NM^{-1}$, а выражение в скобках в последнем интеграле есть $\ll Nu^{-1}$. Отсюда

$$I_1 \ll \frac{N}{M} + \frac{N}{M} \int_{N^{-3}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u} \ll \frac{N \ln N}{M} \ll \frac{1}{N^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=-N}^N I(n) = \sum_{n=-N}^N e^{-\pi x n^2} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N I(n) &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-M}^M e^{2\pi i k u - \pi x(n+u)^2} du \\ &= \sum_{k=-M}^M \sum_{n=-N}^N \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} e^{2\pi i k u - \pi x u^2} du \\ &= \sum_{k=-M}^M \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{2\pi i k u - \pi x u^2} du. \end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл. Рассмотрим прямоугольный контур с вершинами в точках $\pm(N+\frac{1}{2})$, $\pm(N+\frac{1}{2})+ikx^{-1}$. Подынтегральная функция аналитична внутри этого контура, поэтому согласно теореме Коши интеграл от этой функции по такому контуру будет равен нулю. Отсюда, оценивая интегралы по боковым сторонам контура тривиально, находим

$$\begin{aligned} &\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{2\pi i k u - \pi x u^2} du \\ &= \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{2\pi i k(u+ikx^{-1}) - \pi x(u+ikx^{-1})^2} du + O(|k|e^{-\pi x N}) \\ &= e^{-\frac{\pi k^2}{x}} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{-\pi x u^2} du + O(|k|e^{-\pi x N}) \\ &= e^{-\frac{\pi k^2}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x u^2} du + O((|k|+1)e^{-\pi x N}), \end{aligned}$$

ибо

$$\int_{N+\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-\pi x u^2} du \leq \int_N^{\infty} e^{-\pi x u} du \ll e^{-\pi x N}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x u^2} du &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi x u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\sum_{n=-N}^N e^{-\pi x n^2} + O\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=-N^4}^{N^4} e^{-\frac{\pi k^2}{x}} + O(N^8 e^{-\pi x N}).$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем требуемое. ■

Идея доказательства этой теоремы является основой так называемой формулы суммирования Пуассона. Теперь мы готовы к доказательству функционального уравнения $\zeta(s)$.

ТЕОРЕМА 12 (функциональное уравнение дзета-функции Римана). *Дзета-функция Римана аналитически продолжается на всю комплексную плоскость за исключением точки $s = 1$ и удовлетворяет тождеству*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^N e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du.\end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену переменной $x = \pi n^2 u$. Введем функцию

$$\omega(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} = \frac{\theta(u) - 1}{2}.$$

Из определения $\omega(u)$ следует, что $\theta(u) \ll e^{-\pi u}$ при $u \rightarrow \infty$, а из теоремы 11 следует, что $\theta(u) \ll u^{-\frac{1}{2}}$ при $u \rightarrow 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \omega(u) du \\ &\quad - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du, \end{aligned}$$

причем первый интеграл в правой части сходится. Оценим выражение в скобках:

$$\begin{aligned} \sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u} &\leq \int_N^\infty e^{-\pi x^2 u} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi u}} \int_{\pi N^2 u}^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv \\ &\ll \min(u^{-\frac{1}{2}}, (Nu)^{-1} e^{-\pi N^2 u}). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{N^2}} \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du &\ll \int_0^{\frac{1}{N^2}} u^{\frac{\sigma-3}{2}} du = \frac{2N^{1-\sigma}}{\sigma-1}, \\ \int_{\frac{1}{N^2}}^\infty \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du &\ll \frac{1}{N} \int_{\frac{1}{N^2}}^\infty e^{-\pi N^2 u} u^{\frac{\sigma}{2}-2} du \\ &= N^{1-\sigma} \int_1^\infty e^{-\pi v} v^{\frac{\sigma}{2}-2} dv. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{Re} s > 1$, оба выражения стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \omega(u) du.$$

Рассмотрим часть этого интеграла, отвечающую промежутку $(0, 1)$, сделаем в нем замену $u = v^{-1}$, и воспользуемся теоремой 11.

Имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \omega(u) du &= \int_1^\infty v^{-1-\frac{s}{2}} \omega(v^{-1}) dv = \int_1^\infty \frac{\theta(\frac{1}{v}) - 1}{2} v^{-1-\frac{s}{2}} dv \\
 &= \int_1^\infty \frac{\sqrt{v}\theta(v) - 1}{2} v^{-1-\frac{s}{2}} dv \\
 &= \int_1^\infty \left(\sqrt{v}\omega(v) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{v}}{2} \right) v^{-1-\frac{s}{2}} dv \\
 &= \int_1^\infty v^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \omega(v) dv - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \\
 &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty v^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \omega(v) dv.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место формула

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (u^{\frac{s}{2}-1} + u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}) \omega(u) du.$$

Последний интеграл есть целая функция комплексного переменного s , так что по принципу аналитического продолжения получаем, что дзета-функция Римана задается равенством

$$\zeta(s) = \frac{1}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (u^{\frac{s}{2}-1} + u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}) \omega(u) du \right)$$

при любом комплексном s , кроме $s = 1$, так как полюс первого порядка при $s = 0$ гасится полюсом первого порядка функции $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$. Наконец, правая часть предпоследнего равенства не меняется при замене s на $1-s$, что дает функциональное уравнение и завершает доказательство. ■

Задачи к §3

1. Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + C + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

причем для константы Эйлера C справедливо представление

$$C = \frac{1}{2} + 2 \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{x^3} dx.$$

2. Доказать, что при $\delta > 0$ и $|\arg s| \leq \pi - \delta$ справедлива формула Стирлинга

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

3. Доказать следующую формулу для суммы Гаусса

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i \frac{n^2}{N}} = \frac{1 + i^{-N}}{1 + i^{-1}} \sqrt{N}.$$

4. Доказать, что

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = C.$$

§ 4 Нули дзета-функции Римана

В предыдущем параграфе было установлено, что дзета-функция Римана аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом 1. Из свойств гамма-функции Эйлера (см. задачи к § 2) и последнего равенства § 3 следует, что дзета-функция Римана имеет нули в точках $s = -2, -4, -6, \dots$, называемые *тривиальными*. Других нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$ нет, так как в противном случае в силу функционального уравнения и свойств гамма-функции $\zeta(s)$ имела бы нули при $\operatorname{Re} s > 1$, что, как мы показали в § 1, не имеет места. Таким образом, все прочие нули дзета-функции Римана, называемые *нетривиальными*, лежат в *критической полосе* $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$. При этом они расположены симметрично относительно *критической прямой* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ и вещественной оси $\operatorname{Im} s = 0$, поскольку $\zeta(s)$ вещественна при вещественных s и удовлетворяет функциональному уравнению. *Гипотеза Римана*, до сих пор не доказанная и не опровергнутая, утверждает, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат на критической прямой.

Рассмотрим функцию

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Из последнего равенства § 3 следует, что $\xi(s)$ является целой функцией и ее нули суть в точности нетривиальные нули дзета-функции Римана. При этом в силу теоремы 12 имеет место соотношение

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

В этом параграфе мы получим представление $\xi(s)$ в виде бесконечного произведения по нетривиальным нулям дзета-функции Римана. Нам потребуются два вспомогательных утверждения из комплексного анализа.

ТЕОРЕМА 13 (формула Иенсена). Пусть функция $f(s)$ аналитична в круге $|s| \leq R$, не имеет нулей на окружности $|s| = R$ и $f(0) \neq 0$. Тогда

$$\ln \frac{|f(0)|R^n}{r_1 \dots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})| d\varphi,$$

где $r_1, \dots, r_n$ – модули нулей функции $f(s)$ в круге $|s| < R$, каждый из которых считается столько раз, каков его порядок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_1, \dots, s_n$ – нули $f(s)$ в круге $|s| < R$. Рассмотрим функцию

$$F(s) = \frac{f(s)}{R^n} \prod_{k=1}^n \frac{R^2 - s\overline{s_k}}{s - s_k}.$$

Эта функция аналитична в круге $|s| \leq R$ и не имеет там нулей, ибо $R^2 r_k^{-1} > R$. Таким образом, функция $\ln F(s)$ аналитична в круге $|s| \leq R$. Согласно теореме о среднем

$$\ln F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln F(Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Отделяя вещественную часть, получим

$$\ln F(0) = \ln \frac{|f(0)|R^n}{r_1 \dots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(Re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Но по определению функции $F(s)$

$$|F(Re^{i\varphi})| = |f(Re^{i\varphi})| \prod_{k=1}^n \left| \frac{R - e^{i\varphi}\overline{s_k}}{Re^{i\varphi} - s_k} \right| = |f(Re^{i\varphi})|,$$

что и завершает доказательство. ■

ТЕОРЕМА 14 (Борель, Каратеодори). Пусть функция $f(s)$ аналитична в круге $|s| \leq R$. Тогда для любого $n \geq 1$

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq 2(A(R) - \operatorname{Re} f(0))R^{-n},$$

где $A(R)$ обозначает максимум $\operatorname{Re} f(s)$ на окружности $|s| = R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формулам Коши

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} \frac{f(s) ds}{s^{n+1}} = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

С другой стороны, при $n \geq 1$, в силу теоремы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) s^{n-1} ds = \frac{R^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{in\varphi} d\varphi = 0.$$

Таким образом, взяв комплексное сопряжение, получим

$$\frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(Re^{i\varphi})} e^{-in\varphi} d\varphi = 0.$$

Складывая, находим

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi \\ &= \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) - A(R)) e^{-in\varphi} d\varphi, \\ \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| &\leq \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) - A(R) \right| d\varphi \\ &= \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} (A(R) - \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})) d\varphi, \end{aligned}$$

ибо, по определению $A(R)$, всегда $A(R) \geq \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})$. Далее,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi \operatorname{Re} f(0)$$

в силу теоремы о среднем. Подставляя полученное равенство в предыдущую оценку, получим требуемое. ■

ТЕОРЕМА 15. *Справедливо равенство*

$$\xi(s) = e^{as} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

где в правой части стоит бесконечное произведение по всем нетривиальным нулям ϱ функции $\zeta(s)$ с учетом кратности, расположенным в порядке возрастания модуля,

$$a = \ln 2\sqrt{\pi} - \frac{C}{2} - 1,$$

C – константа Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим максимум модуля $\xi(s)$ на окружности $|s| = R$. Так как $\xi(s) = \xi(1-s)$, достаточно рассмотреть случай $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Из теоремы 10 при $N = 1$ получаем оценку

$$|\zeta(s)| \leq \frac{1}{|s-1|} + \frac{1}{2} + |s| \int_1^\infty \frac{|\varrho(u)|}{u^{\sigma+1}} du \leq \frac{1}{R-1} + \frac{1}{2} + \frac{R}{2} \int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} \ll R.$$

Отделяя вещественную часть в формуле Стирлинга (см. задачу 2 к §3), находим

$$\begin{aligned} \ln \left| \Gamma \left(\frac{s}{2} \right) \right| &= \frac{\sigma - 1}{2} \ln \frac{|s|}{2} - \frac{t}{2} \arg \frac{s}{2} - \frac{\sigma}{2} + \ln \sqrt{2\pi} + O \left(\frac{1}{|s|} \right) \\ &\leq \frac{R}{2} \ln \frac{R}{2} + \frac{\pi R}{4} + O(1) \ll R \ln R. \end{aligned}$$

Отсюда находим при $|s| = R$

$$|\xi(s)| = \left| s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \right| \ll R^3 e^{c_1 R \ln R} \leq e^{c_2 R \ln R}.$$

Предположим, что множество нетривиальных нулей дзета-функции Римана бесконечно. Применим формулу Иенсена к функции $\xi(s)$. Легко видеть, что

$$\xi(0) = \xi(1) = \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \neq 0.$$

Пусть $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ — нули $\xi(s)$ в круге $|s| \leq R$. Выберем $R_1 \in [2R, 3R]$ так, чтобы $\xi(s)$ не имела нулей на окружности $|s| = R_1$. Пусть $\varrho_1, \dots, \varrho_k$ — нули $\xi(s)$ в круге $|s| \leq R_1$. Имеем

$$\ln \frac{R_1^k}{|\varrho_1| \dots |\varrho_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\xi(Re^{i\varphi})| d\varphi \leq c_2 R_1 \ln R_1 \leq c_3 R \ln R.$$

С другой стороны, поскольку $|\varrho_l| \leq R$ при $l = 1, \dots, n$, имеем

$$\ln \frac{R_1^k}{|\varrho_1| \dots |\varrho_k|} \geq \ln \left(\frac{R_1}{R} \right)^n \geq n \ln 2.$$

Таким образом, число нулей $\xi(s)$ в круге $|s| \leq R$ есть $O(R \ln R)$. В частности, при $R = |\varrho_n|$ получим

$$n \leq c_4 |\varrho_n| \ln |\varrho_n| \leq c_5 |\varrho_n|^{1+\varepsilon}.$$

Итак, при любом положительном a справедлива оценка

$$|\varrho_n|^{-a} \leq c_6 n^{-\frac{a}{1+\varepsilon}},$$

что означает сходимость ряда $\sum_\varrho |\varrho|^{-a}$ при $a > 1$.

Рассмотрим функцию

$$F(s) = \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

и докажем, что она является целой и имеет своими нулями точки $s = \varrho$ и только их. Пусть R – произвольно большое число. Рассмотрим круг $|s| \leq R$ и разобьем произведение на два сомножителя – с ϱ , по модулю не превосходящими $2R$, и с оставшимися ϱ , обозначив эти сомножители через $F_1(s)$ и $F_2(s)$, соответственно. Функция $F_1(s)$ аналитична в круге $|s| \leq R$ и имеет там только требуемые нули. Докажем, что функция $F_2(s)$ также аналитична в круге $|s| \leq R$, но не имеет там нулей. В силу произвольности R это и даст нам требуемое утверждение.

Рассматривая соответствующий $F_2(s)$ ряд логарифмов, при $|s| \leq R$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\varrho| > 2R} \left(\ln \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) + \frac{s}{\varrho} \right) \right| &\leq \sum_{|\varrho| > 2R} \left| \frac{s^2}{2\varrho^2} + \frac{s^3}{3\varrho^3} + \dots \right| \\ &\leq \sum_{|\varrho| > 2R} \frac{|s|^2}{|\varrho|^2} \leq R^2 \sum_{|\varrho| > 2R} \frac{1}{|\varrho|^2}. \end{aligned}$$

Поскольку ряд $\sum_{\varrho} |\varrho|^{-2}$ сходится, то сходится и вышеприведенный ряд логарифмов, следовательно, бесконечное произведение $F_2(s)$ также сходится. Таким образом, функция $F_2(s)$ существует и не обращается в нуль в круге $|s| \leq R$. Далее, имеет место тождество

$$\begin{aligned} \left| \prod_{2R < |\varrho| \leq M} \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) e^{\frac{s}{\varrho}} - F_2(s) \right| \\ = |F_2(s)| \left| 1 - \exp \left(\sum_{|\varrho| > M} \left(\ln \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) + \frac{s}{\varrho} \right) \right) \right|. \end{aligned}$$

Выражение в экспоненте в правой части стремится к нулю с ростом M , что следует из предыдущей оценки при замене $2R$ на M . Поэтому, начиная с некоторого M , справедлива оценка

$$\left| \prod_{2R < |\varrho| \leq M} \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) e^{\frac{s}{\varrho}} - F_2(s) \right| \leq 2R^2 \exp \left(R^2 \sum_{|\varrho| > 2R} \frac{1}{|\varrho|^2} \right) \sum_{|\varrho| > M} \frac{1}{|\varrho|^2},$$

правая часть которой также стремится к нулю с ростом M . Таким образом, последовательность частичных произведений сходится к $F_2(s)$ равномерно в круге $|s| \leq R$, что в силу теоремы Вейерштрасса означает аналитичность $F_2(s)$ в этом круге.

Итак, функция $\xi(s)(F(s))^{-1}$ есть целая функция, не имеющая нулей. Следовательно, ее логарифм есть также целая функция. Таким образом, имеем

$$\xi(s) = e^{h(s)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

где $h(s)$ – некоторая целая функция. Мы доказали эту формулу в предположении бесконечности множества нетривиальных нулей ϱ , в случае конечности этого множества формула очевидна.

Прологарифмируем это равенство и дважды продифференцируем его:

$$h''(s) = \frac{d}{ds} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} + \sum_{\varrho} \frac{1}{(s - \varrho)^2}.$$

Пусть R – произвольно большое число, и $|s| \leq \frac{R}{2}$. Тогда при $|\varrho| > R$ имеем $|s - \varrho| \geq |\varrho| - |s| > \frac{1}{2}|\varrho|$. Таким образом, находим

$$\left| \sum_{|\varrho| > R} \frac{1}{(s - \varrho)^2} \right| \leq \sum_{|\varrho| > R} \frac{1}{|s - \varrho|^2} \leq 4 \sum_{|\varrho| > R} \frac{1}{|\varrho|^2}.$$

Итак, эта сумма стремится к нулю с ростом R . В случае конечности множества нулей ϱ она вообще равна нулю тождественно при достаточно большом R .

Рассмотрим теперь функцию

$$\frac{d}{ds} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} + \sum_{|\varrho| \leq R} \frac{1}{(s - \varrho)^2} = \frac{d^2}{ds^2} \ln \left(\xi(s) \prod_{|\varrho| \leq R} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)^{-1} \right) = h_R''(s)$$

и применим к $h_R(s)$ теорему Бореля–Каратеодори. На окружности $|s| = 2R$ имеем

$$\operatorname{Re} h_R(s) = \ln \left| \xi(s) \prod_{|\varrho| \leq R} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)^{-1} \right| \leq c_3 R \ln R,$$

ибо при $|s| = 2R$ и $|\varrho| \leq R$

$$\left| \frac{\varrho}{\varrho - s} \right| \leq \frac{|\varrho|}{|s| - |\varrho|} \leq 1.$$

Далее, $\operatorname{Re} h_R(0) = \ln |\xi(0)| = 0$, откуда при $n \geq 1$ имеем

$$\left| \frac{h_R^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq c_7 (2R)^{-n} R \ln R.$$

Раскладывая $h_R''(s)$ в ряд Тейлора при $|s| \leq \frac{R}{2}$, находим

$$\begin{aligned} |h_R''(s)| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h_R^{(n)}(0)}{(n-2)!} s^{n-2} \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} c_7 (2R)^{-n} n(n-1) \left(\frac{R}{2} \right)^{n-2} R \ln R \\ &= 4c_7 \frac{\ln R}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^n}. \end{aligned}$$

Мы видим, что $h_R''(s)$ также стремится к нулю с ростом R . Фиксируя s и устремляя R к бесконечности, получаем, что функция $h''(s)$ равна нулю тождественно, то есть $h(s) = as + b$. Итак,

$$\xi(s) = e^{as+b} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) e^{\frac{s}{\varrho}}.$$

Подставляя $s = 0$, находим, что $b = 0$. Для вычисления a возьмем логарифмическую производную от обеих частей равенства и положим $s = 0$:

$$a = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = \lim_{s \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right).$$

Здесь мы пользовались определением и функциональным уравнением $\xi(s)$. Пользуясь выражением гамма-функции в виде бесконечного произведения (см. задачу 2 к §2), находим

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{C}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) - \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) \\ &= \ln 2\sqrt{\pi} + \frac{C}{2} - 1 - \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right). \end{aligned}$$

Для вычисления предела воспользуемся задачей 4 к §3, согласно которой в окрестности точки $s = 1$ будем иметь

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + c + \dots}{\frac{1}{s-1} + C + c(s-1) + \dots} = -\frac{1}{s-1} + C + O(|s-1|).$$

Таким образом, искомый предел равен константе Эйлера C .

Осталось показать, что множество нулей ϱ бесконечно. В противном случае $\xi(s)$ есть многочлен, умноженный на экспоненту от линейной функции, то есть

$$\max_{|s|=R} |\xi(s)| \leq e^{c_8 R}.$$

Но если R вещественно и стремится к $+\infty$, то из формулы Стирлинга и определения функции $\xi(s)$ следует, что $\ln \xi(R) \sim \frac{R}{2} \ln R$, то есть

$$\max_{|s|=R} |\xi(s)| \geq |\xi(R)| \geq e^{c_9 R \ln R}.$$

Полученное противоречие доказывает бесконечность множества нетривиальных нулей $\zeta(s)$ и завершает доказательство теоремы. ■

Задачи к § 4

1. Функция Мангольдта $\Lambda(n)$ равна $\ln p$, если n есть степень простого числа p , и равна нулю, если n не является степенью простого числа.

а) Доказать, что

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n;$$

б) показать, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)};$$

в) показать, что

$$\ln(n!) = \sum_{k \leq n} \Lambda(k) \left[\frac{n}{k} \right];$$

г) доказать оценку

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \asymp x;$$

д) доказать асимптотическую формулу

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + B + O\left(\frac{1}{\ln x}\right);$$

е) показать, что

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \asymp \frac{x}{\ln x}.$$

2. Доказать, что при $t \geq 2\pi$, $|\sigma| \leq N$ (N – фиксировано), имеет место формула

$$\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-it \ln \frac{t}{2\pi e} + i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

3. Доказать, что при $t \geq 2\pi$ и фиксированном N справедливы оценки

$$\begin{aligned} \zeta(s) &\ll t^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln t, & -N \leq \sigma \leq 0; & \quad \zeta(s) \ll t^{\frac{1}{2}} \ln t, & 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}; \\ \zeta(s) &\ll t^{1-\sigma} \ln t, & \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1; & \quad \zeta(s) \ll \ln t, & 1 \leq \sigma \leq N. \end{aligned}$$

§ 5 Асимптотический закон распределения простых чисел

Метод комплексного интегрирования возник в связи с доказательством асимптотической формулы для $\pi(x)$ – количества простых чисел, не превосходящих x . Эта формула была получена Адамаром и Валле-Пуссенем в 1896 году. Ключевым моментом доказательства явилось установление так называемой границы нулей дзета-функции Римана.

ТЕОРЕМА 16 (Валле-Пуссен). *Пусть $T \geq 10$. Тогда существует $c > 0$ такое, что дзета-функция Римана не имеет нулей в области*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln T}, \quad |t| \leq T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В точке $s = 1$ функция $\zeta(s)$ имеет полюс, поэтому при достаточно малом c существует $T_0 > 0$ такое, что в области

$$1 - \frac{c}{\ln T} \leq \sigma \leq 1, \quad |t| \leq T_0$$

дзета-функция Римана не имеет нулей. Кроме того, $\zeta(s) \neq 0$ при $\sigma > 1$.

Согласно задаче 1 к § 3 при $\sigma > 1$ имеем

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t \ln n).$$

Поскольку при любом вещественном φ

$$3 + 4 \cos \varphi + \cos 2\varphi = 2 + 4 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi = 2(1 + \cos \varphi)^2 \geq 0,$$

при $1 < \sigma \leq 2$, $T_0 < t \leq T$ справедливо следующее неравенство:

$$3 \left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right) + 4 \left(-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) + \left(-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right) \geq 0.$$

Оценим сверху каждое слагаемое в левой части этого неравенства. Логарифмическая производная дзета-функции Римана имеет при $s = 1$ полюс первого порядка с вычетом -1 , поэтому

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + c_1.$$

Пользуясь теоремой 15, определением функции $\xi(s)$ и представлением гамма-функции в виде бесконечного произведения, получим

$$\begin{aligned}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= a + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s - \varrho} + \frac{1}{\varrho} \right) \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{C}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right).\end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{Re} \varrho = \beta$, $\operatorname{Im} \varrho = \gamma$, тогда

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leqslant - \sum_{\varrho} \left(\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \right) + c_2 \ln T,$$

ибо

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{s-1} + c_3 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) \right| \\ \leqslant \frac{1}{T_0} + |c_3| + \sum_{n \leqslant T} \frac{1}{n} + \sum_{n > T} \frac{|s|}{4n^2} \leqslant c_2 \ln T.\end{aligned}$$

Поскольку $\sigma > 1$, а $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, то в сумме по ϱ все слагаемые неотрицательны, следовательно,

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \leqslant - \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + c_2 \ln T,$$

где $\varrho = \beta + i\gamma$ — произвольный нетривиальный нуль дзета-функции Римана. Наконец, аналогично получаем оценку

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \leqslant c_4 \ln T.$$

Объединяя полученные оценки, находим при $1 < \sigma \leqslant 2$, $T_0 < t \leqslant T$ следующее неравенство

$$\frac{3}{\sigma-1} - 4 \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + c_5 \ln T \geqslant 0,$$

где $\varrho = \beta + i\gamma$ — произвольный нетривиальный нуль дзета-функции Римана. Пусть $T_0 < \gamma \leqslant T$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в этом случае $\beta < 1 - \frac{c}{\ln T}$ для достаточно малого c . Взяв $t = \gamma$, получим

$$\frac{4}{\sigma - \beta} \leqslant \frac{3}{\sigma - 1} + c_5 \ln T.$$

Возьмем теперь $\sigma = 1 + \frac{1}{2c_5 \ln T}$, что дает неравенство

$$\beta \leq 1 - \frac{1}{14c_5 \ln T}$$

и завершает доказательство теоремы. ■

Теперь мы готовы к доказательству асимптотического закона распределения простых чисел.

ТЕОРЕМА 17. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $c > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} s > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Применим формулу Перрона, взяв $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$. Параметр α равен единице, ибо логарифмическая производная $\zeta(s)$ имеет при $s = 1$ полюс первого порядка. Для коэффициентов $\Lambda(n)$ справедлива тривиальная оценка $\ln n$. В итоге находим

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T} + \ln x \ln T \right). \end{aligned}$$

Согласно теореме Валле-Пуссена о границе нулей дзета-функции Римана существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что в области

$$\sigma \geq 1 - \frac{2c_1}{\ln T}, \quad |t| \leq 2T$$

нет нулей $\zeta(s)$. Рассмотрим интеграл по контуру Γ , представляющему собой прямоугольник с вершинами $b \pm iT$, $\alpha \pm iT$, где $\alpha = 1 - \frac{c_1}{\ln T}$. Подынтегральная функция аналитична на Γ и внутри него, исключая простой полюс при $s = 1$ с вычетом x . Таким образом, в силу теоремы Коши

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + I_1 + I_2 + I_3,$$

где через I_1, I_2, I_3 обозначены интегралы по левой и горизонтальным сторонам контура Γ . Оценим эти интегралы сверху.

Применим теорему Бореля–Каратеодори к функции $\ln \zeta(s)$ в круге радиуса $R = \frac{3c_1}{\ln T}$ с центром в точке $s_0 = 1 + \frac{R}{2} + it$, где $2\pi \leq t \leq T$. Согласно задаче 3 к § 4 в круге $|s - s_0| \leq R$ справедлива оценка $\zeta(s) \ll \ln T$. Таким образом, имеем

$$A(R) = \max_{|s-s_0|=R} \operatorname{Re} \ln \zeta(s) = \max_{|s-s_0|=R} \ln |\zeta(s)| \leq c_2 \ln \ln T.$$

Далее, пользуясь тождеством Эйлера, находим

$$\begin{aligned} |\ln \zeta(s_0)| &= \left| \sum_p \ln \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}} \right) \right| = \left| \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms_0}} \right| \\ &\leq \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma_0}} = \ln \zeta \left(1 + \frac{R}{2} \right) \leq c_3 \ln \ln T, \end{aligned}$$

ибо

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{R}{2}}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{1+\frac{R}{2}}} = \frac{2+R}{R} \ll \ln T.$$

Итак, $-\operatorname{Re} \ln \zeta(s_0) = -\ln |\zeta(s_0)| \leq |\ln \zeta(s_0)| \leq c_3 \ln \ln T$, откуда при $n \geq 1$ имеем окончательно

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \ln \zeta(s) \Big|_{s=s_0} \ll R^{-n} \ln \ln T.$$

Раскладывая логарифмическую производную дзета-функции Римана в ряд Тейлора, находим в круге $|s - s_0| \leq \frac{5c_1}{2 \ln T}$ оценку

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (s - s_0)^{n-1} \ll \ln \ln T \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6} \right)^n \ln T \ll \ln T \ln \ln T.$$

В частности, эта оценка справедлива на горизонтальных сторонах контура Γ и на его левой стороне, если $|t| \geq 2\pi$. Если же $|t| < 2\pi$, то на левой стороне Γ справедлива оценка

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \ln T,$$

поскольку логарифмическая производная дзета-функции имеет при $s = 1$ простой полюс.

Теперь оценим интегралы I_1, I_2, I_3 . Имеем

$$I_1 \ll x^\alpha \ln T \int_0^{2\pi} dt + x^\alpha \ln T \ln \ln T \int_{2\pi}^T \frac{dt}{t} \ll x^\alpha \ln^2 T \ln \ln T,$$

$$I_2, I_3 \ll \frac{\ln T \ln \ln T}{T} \int_\alpha^b x^\sigma d\sigma \ll \frac{x}{T} \ln T \ln \ln T.$$

Собирая вместе все полученные оценки, находим

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

$$= x + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T} + \frac{x \ln T \ln \ln T}{T} + x^\alpha \ln^2 T \ln \ln T + \ln x \ln T\right).$$

Положив $T = e^{\sqrt{\ln x}}$, получим требуемое асимптотическое равенство. ■

СЛЕДСТВИЕ (асимптотический закон распределения простых чисел). *Имеет место асимптотическая формула*

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $c > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функции Мангольдта находим

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \ln p = \sum_{p \leq x} \ln p + O(\sqrt{x}),$$

ибо в силу задачи 1, е к § 4

$$\sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \ln p = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \sum_{2 \leq k \leq \frac{\ln x}{\ln p}} 1 \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \leq \ln x \sum_{p \leq \sqrt{x}} 1 \ll \sqrt{x}.$$

Таким образом, из теоремы 17 получаем, что

$$\sum_{p \leq x} \ln p = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Пусть $\delta(n)$ обозначает характеристическую функцию множества простых чисел. Совершая преобразование Абеля (теорема 9), находим

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &= 1 + \sum_{2 < n \leq x} \delta(n) \ln n \frac{1}{\ln n} \\
 &= 1 + \frac{1}{\ln x} \sum_{2 < n \leq x} \delta(n) \ln n + \int_2^x \left(\sum_{2 < n \leq u} \delta(n) \ln n \right) \frac{du}{u \ln^2 u} \\
 &= 1 + \frac{1}{\ln x} \sum_{2 < p \leq x} \ln p + \int_2^x \left(\sum_{2 < p \leq u} \ln p \right) \frac{du}{u \ln^2 u} \\
 &= \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{du}{\ln^2 u} + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}} + \int_2^x e^{-c\sqrt{\ln u}} du\right).
 \end{aligned}$$

Возьмем по частям интеграл в главном члене

$$\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{du}{\ln^2 u} = \frac{x}{\ln x} - \int_2^x u d\left(\frac{1}{\ln u}\right) = \int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

Наконец, оценим интеграл в остаточном члене, разбив его на два интеграла и пользуясь монотонностью подынтегральной функции

$$\int_2^x e^{-c\sqrt{\ln u}} du \ll \int_2^{\sqrt{x}} du + e^{-c_1\sqrt{\ln x}} \int_{\sqrt{x}}^x du \ll xe^{-c_1\sqrt{\ln x}}.$$

Этим доказательство завершается. ■

В 1958 году Виноградов получил новую границу нулей дзета-функции Римана — $\sigma \geq 1 - c(\ln T)^{-\frac{2}{3}-\varepsilon}$, и новую оценку остаточного члена в асимптотическом законе — $\ll xe^{-c(\ln x)^{0.6-\varepsilon}}$. Эти результаты, по существу, не улучшены и по сей день. Между тем, из гипотезы Римана следует, что

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(\sqrt{x} \ln x).$$

Задачи к § 5

1. Доказать следующие асимптотические формулы:

а)

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(xe^{-c\sqrt{\ln x}});$$

б)

$$\sum_{n \leq x} r(n) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $r(n)$ – число решений уравнения $\varphi(m) = n$.

2. Доказать следующие асимптотические формулы:

а)

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln x + c + O(x^{-\frac{2}{3}} \ln^2 x);$$

б)

$$\sum_{n \leq x} \sigma^2(n) = \frac{\zeta^2(2)\zeta(3)}{\zeta(4)} \frac{x^3}{3} + O(x^{\frac{7}{3}} \ln^3 x);$$

в)

$$\sum_{n \leq x} \tau(n^2) = \frac{x \ln^2 x}{2\zeta(2)} + c_1 x \ln x + c_2 + O(x^{\frac{5}{7}+\varepsilon}).$$

3. Доказать следующую асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{\tau(n)} &= \frac{x}{\sqrt{\pi \ln x}} \prod_p \sqrt{p(p-1)} \ln \frac{p}{p-1} \\ &+ c_1 x (\ln x)^{-\frac{3}{2}} + \dots + c_{N-1} x (\ln x)^{-N+\frac{1}{2}} + O(x (\ln x)^{-N-\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

где N – произвольное фиксированное число.

§ 6 Проблема делителей Дирихле. Формула Вороного

Асимптотические формулы для некоторых сумматорных функций можно получить, не прибегая к методу комплексного интегрирования. Например,

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \tau(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{d \leq x} \sum_{k \leq \frac{x}{d}} 1 \\ &= \sum_{d \leq x} \left[\frac{x}{d} \right] = x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} + O(x) = x \ln x + O(x).\end{aligned}$$

Полученная оценка остатка очень груба, так как суммирование по d идет вплоть до x , где ошибка от замены целой части дроби $\frac{x}{d}$ на саму дробь сравнима по величине с этой дробью. Гораздо более точную оценку можно получить с помощью изящного приема, восходящего к Гауссу.

ТЕОРЕМА 18 (Дирихле). *Справедливо равенство*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

где C – постоянная Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{d \leq x} \left[\frac{x}{d} \right] = \sum_{uv \leq x} 1.$$

Таким образом, интересующая нас величина представляет собой число точек с целыми неотрицательными координатами под гиперболой $uv = x$. Имеет место соотношение

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{d} \right] - \left(\sum_{d \leq \sqrt{x}} 1 \right)^2.$$

Действительно, первое слагаемое в правой части есть число целых точек под гиперболой $uv = x$ с ограничением $u \leq \sqrt{x}$ плюс число целых точек под той же гиперболой с ограничением $v \leq \sqrt{x}$. Эти две области перекрываются по квадрату $u, v \leq \sqrt{x}$, то есть

целые точки в этом квадрате считаются дважды и их количество должно быть вычтено. Согласно задаче 1 к §3 имеем

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = 2x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{d} - x + O(\sqrt{x}) = x \ln x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

Этим доказательство завершается. ■

Положим

$$R(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n) - x \ln x - (2C - 1)x.$$

Проблема уточнения оценки $R(x)$ известна как проблема делителей Дирихле. В 1903 году Вороной показал, что $R(x) \ll x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$. Наилучший на сегодняшний день результат – $R(x) \ll x^{\frac{7}{22}+\varepsilon}$ – получен Иванцом в 1988 году. С другой стороны, Харди доказал существование последовательности чисел x_n , стремящейся к бесконечности и такой, что $|R(x_n)| \gg x_n^{\frac{1}{4}}$. Предполагают, что имеет место оценка $R(x) \ll x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

Мы получим явную формулу для $R(x)$, известную как формула Вороного, из которой легко следует оценка $R(x) \ll x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$. Для этого мы проведем контур интегрирования существенно левее единичной прямой, и вместо того, чтобы оценивать интеграл по левой стороне контура, вычислим его асимптотически. Нам потребуется два вспомогательных утверждения.

ТЕОРЕМА 19. При $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$ имеет место оценка

$$\zeta(s) \ll t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(s) = e^{\varepsilon is + \frac{s-1}{2} \ln(-is)} \frac{1}{\ln(-is)}.$$

Пусть $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$. Имеем

$$|f_\varepsilon(s)| = \frac{e^{-\varepsilon t + \frac{\sigma-1}{2} \ln |s| - \frac{t}{2} \arg(-is)}}{\sqrt{\ln^2 |s| + \arg^2(-is)}} = t^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{-\varepsilon t} \frac{e^{\frac{\sigma}{2}} + O(t^{-2})}{\ln t},$$

поскольку $\ln |s| = \frac{1}{2} \ln(\sigma^2 + t^2) = \ln t + O(t^{-2})$, а $\arg(-is) = -\arctg \frac{\sigma}{t} = -\frac{\sigma}{t} + O(t^{-3})$.

Рассмотрим теперь функцию $\zeta(s)f_\varepsilon(s)$ в полуполосе $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$. Согласно задаче 3 к § 4 имеют место оценки $\zeta(it) \ll t^{\frac{1}{2}} \ln t$ и $\zeta(1+it) \ll \ln t$. Таким образом, на границе указанной полуполосы имеем

$$|\zeta(s)f_\varepsilon(s)| \leq M,$$

где M – абсолютная постоянная. При $T \geq T_0(\varepsilon)$ та же оценка верна и при $s = \sigma + iT$, $0 \leq \sigma \leq 1$, что опять же следует из упомянутой задачи. В силу принципа максимума модуля указанная оценка справедлива в прямоугольнике $0 \leq \sigma \leq 1$, $2\pi \leq t \leq T$, а значит и во всей полуполосе $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$, так как T можно брать произвольно большим.

Итак, при $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$ имеем

$$|\zeta(s)| \leq M|f_\varepsilon(s)|^{-1} \leq M_1 e^{\varepsilon t} t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t.$$

Доказательство завершается переходом к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

ТЕОРЕМА 20. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ условиям:

- 1) $f^{(4)}(x)$ и $\varphi''(x)$ непрерывны;
- 2) существуют числа $H, A > 0, U \geq b - a$ такие, что

$$f^{(2)}(x) \asymp A^{-1}, \quad f^{(3)}(x) \ll A^{-1}U^{-1}, \quad f^{(4)}(x) \ll A^{-1}U^{-2},$$

$$\varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-1};$$

- 3) существует $c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = 0$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx = \frac{\varphi(c)}{\sqrt{f''(c)}} e^{2\pi i f(c) + \frac{\pi i}{4}} + O(HAU^{-1})$$

$$+ O(H \min(|f'(a)|^{-1}, \sqrt{A})) + O(H \min(|f'(b)|^{-1}, \sqrt{A})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \in (a, b)$. Рассмотрим отдельно интеграл от c до b и интеграл от a до c . Имеем

$$\int_c^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx = \varphi(c) \int_c^b e^{2\pi i f(x)} dx$$

$$+ \int_0^{b-c} (\varphi(x+c) - \varphi(c)) e^{2\pi i f(x+c)} dx.$$

Возьмем второй интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^{b-c} (\varphi(x+c) - \varphi(c)) e^{2\pi i f(x+c)} dx &= \left. \frac{\varphi(x+c) - \varphi(c)}{2\pi i f'(x+c)} e^{2\pi i f(x+c)} \right|_0^{b-c} \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_0^{b-c} \frac{\varphi'(x+c) f'(x+c) - f''(x+c)(\varphi(x+c) - \varphi(c))}{(f'(x+c))^2} \\ &\quad \times e^{2\pi i f(x+c)} dx. \end{aligned}$$

Пользуясь условиями на производные функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, из формулы конечных приращений Лагранжа находим

$$\begin{aligned} \varphi(x+c) - \varphi(c) &= \varphi'(c)x + O(HU^{-2}x^2), \\ \varphi'(x+c) &= \varphi'(c) + O(HU^{-2}x), \\ f'(x+c) &= f''(c)x + O(A^{-1}U^{-1}x^2), \quad |f'(x+c)| \gg A^{-1}x, \\ f''(x+c) &= f''(c) + O(A^{-1}U^{-1}x). \end{aligned}$$

Из этих оценок и неравенства $U \geq b-a$ следует, что

$$\int_0^{b-c} (\varphi(x+c) - \varphi(c)) e^{2\pi i f(x+c)} dx \ll HAU^{-1}.$$

Точно такая же оценка справедлива и для интеграла от a до c .

Рассмотрим теперь разность

$$D = \int_0^{b-c} e^{2\pi i f(x+c)} dx - \int_0^{b-c} \frac{f'(x+c) e^{2\pi i f(x+c)} dx}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c) - f(c))}}.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{f'(x+c)} - \frac{1}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c) - f(c))}} \right) e^{2\pi i f(x+c)} \Big|_0^{b-c} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_0^{b-c} \left(-\frac{f''(x+c)}{(f'(x+c))^2} + \frac{f'(x+c)}{\sqrt{8f''(c)(f(x+c) - f(c))}^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &\quad \times e^{2\pi i f(x+c)} dx. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Тейлора и условиями на производные функции $f(x)$, получаем

$$\begin{aligned} f(x+c) - f(c) &= \frac{1}{2}f''(c)x^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(c)x^3 + O(A^{-1}U^{-2}x^4), \\ f'(x+c) &= f''(c)x + f^{(3)}(c)x^2 + O(A^{-1}U^{-2}x^3), \\ f''(x+c) &= f''(c) + f^{(3)}(c)x + O(A^{-1}U^{-2}x^2). \end{aligned}$$

Из этих оценок и неравенства $U \geq b - a$ следует, что

$$\int_0^{b-c} e^{2\pi i f(x+c)} dx = \int_0^{b-c} \frac{f'(x+c) e^{2\pi i f(x+c)} dx}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c) - f(c))}} + O(AU^{-1}).$$

В случае интеграла от a до c имеем

$$\int_{a-c}^0 e^{2\pi i f(x+c)} dx = - \int_{a-c}^0 \frac{f'(x+c) e^{2\pi i f(x+c)} dx}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c) - f(c))}} + O(AU^{-1}),$$

ибо в этом случае $x \leq 0$ и $\sqrt{x^2} = -x$.

Сделаем замену переменной $u = f(x+c) - f(c)$, обозначая $\lambda = f(b) - f(c)$ (соответственно, $\lambda = f(a) - f(c)$). Имеем $u \geq 0$, так как c – точка минимума $f(x)$, и в обоих случаях получаем интеграл одного и того же вида:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_0^\lambda \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du + O\left(\sqrt{A} \left| \int_\lambda^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \right). \end{aligned}$$

С одной стороны, интегрируя по частям, находим оценку

$$\left| \int_\lambda^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{4\pi} \int_\lambda^\infty u^{-\frac{3}{2}} du \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

С другой стороны,

$$\left| \int_\lambda^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \ll 1.$$

При $\lambda > 1$ последняя оценка следует из предыдущей, а при $\lambda \leq 1$ имеем

$$\int_\lambda^{\lambda+1} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{\lambda+1} - 2\sqrt{\lambda} \ll 1.$$

Наконец, согласно формуле конечных приращений Лагранжа находим

$$\begin{aligned} \sqrt{f(b) - f(c)} &= \sqrt{\frac{1}{2}f''(\xi)(b-c)^2} \gg \frac{1}{\sqrt{A}}|b-c|, \\ |f'(b)| &= |f''(\xi_1)(b-c)| \ll \frac{1}{A}|b-c|, \end{aligned}$$

то есть

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ll \frac{1}{\sqrt{A}|f'(b)|}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx &= \frac{\varphi(c)}{\sqrt{f''(c)}} e^{2\pi i f(c)} \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du + O(HAU^{-1}) \\ &+ O(H \min(|f'(a)|^{-1}, \sqrt{A})) + O(H \min(|f'(b)|^{-1}, \sqrt{A})). \end{aligned}$$

Случай $c = b$ или $c = a$ также учитывается этой формулой: главный член будет вдвое меньше, но он поглощается остатком $O(H\sqrt{A})$.

Остается вычислить несобственный интеграл в правой части. Рассмотрим контур Γ , состоящий из четвертей окружностей радиусов r и R с центром в нуле, расположенных в первом квадранте, и соединяющих концы этих дуг отрезков вещественной и мнимой осей. Согласно теореме Коши

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{2\pi i s}}{\sqrt{s}} ds = 0.$$

Интегралы по дугам стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$, ибо

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2\pi i r e^{i\varphi}}}{\sqrt{r e^{i\frac{\varphi}{2}}}} i r e^{i\varphi} d\varphi &\ll \sqrt{r}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2\pi i R e^{i\varphi}}}{\sqrt{R e^{i\frac{\varphi}{2}}}} i R e^{i\varphi} d\varphi &\ll \sqrt{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\pi R \sin \varphi} d\varphi \\ &\ll \sqrt{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-4R\varphi} d\varphi \ll \frac{1}{\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi u}}{\sqrt{u}} du = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

Этим доказательство завершается. ■

Теперь мы готовы к доказательству формулы Вороного.

ТЕОРЕМА 21 (формула Вороного). Пусть $T \leq x$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq \frac{1}{x} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right),$$

где C – постоянная Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать $T \geq 100\sqrt{x}$, так как в противном случае формула Вороного следует из теоремы Дирихле. Будем также считать, не ограничивая общности, что верхний предел суммирования в правой части формулы Вороного есть полуцелое число. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s),$$

причем согласно задаче 1, д к §1 справедлива оценка $\tau(n) \ll n^\varepsilon$. Поскольку дзета-функция Римана имеет при $s = 1$ полюс первого порядка, то при $\sigma \rightarrow 1 + 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^\sigma} = \zeta^2(\sigma) \ll \frac{1}{(\sigma - 1)^2}.$$

Выберем $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$ и применим формулу Перрона, полагая $T \leq x$. Имеем

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{1+2\varepsilon}}{T}\right).$$

Рассмотрим прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $b \pm iT$, $-\varepsilon \pm iT$. Согласно теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds = \operatorname{res}_{s=1} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} + \operatorname{res}_{s=0} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s}.$$

Вычислим вычеты в правой части последнего равенства:

$$\operatorname{res}_{s=1} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} = \left(((s-1)\zeta(s))^2 \frac{x^s}{s} \right)'_{s=1} = x \ln x - x + 2Cx,$$

что следует из задачи 4 к §3, и

$$\operatorname{res}_{s=0} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} = \zeta^2(0) \ll 1.$$

Теперь оценим интегралы по горизонтальным сторонам контура Г. Используя теорему 19 и задачу 3 к §4, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^b \zeta^2(\sigma \pm iT) \frac{x^{\sigma \pm iT}}{\sigma \pm iT} d\sigma &\ll \frac{x^0}{T} \max_{-\varepsilon \leq \sigma \leq 0} |\zeta^2(\sigma \pm iT)| \\ &+ \frac{\ln^2 T}{T} \int_0^1 x^\sigma T^{1-\sigma} d\sigma + \frac{x^b}{T} \max_{1 \leq \sigma \leq b} |\zeta^2(\sigma \pm iT)| \\ &\ll T^{2\varepsilon} \ln^2 T + \frac{x}{T} \ln^2 T \ll \frac{x^{1+3\varepsilon}}{T}. \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + j + O\left(\frac{x^{1+3\varepsilon}}{T}\right),$$

где

$$j = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - iT}^{-\varepsilon + iT} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds.$$

Преобразуем интеграл j к более удобному виду. Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - 2\pi i}^{-\varepsilon + 2\pi i} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds \ll 1,$$

и, поскольку дзета-функция Римана вещественна при вещественных s ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{-2\pi} \zeta^2(-\varepsilon + it) \frac{x^{-\varepsilon + it}}{-\varepsilon + it} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^T \zeta^2(-\varepsilon - it) \frac{x^{-\varepsilon - it}}{-\varepsilon - it} dt \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^T \zeta^2(-\varepsilon + it) \frac{x^{-\varepsilon + it}}{-\varepsilon + it} dt}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$j = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{2\pi}^T \zeta^2(-\varepsilon + it) \frac{x^{-\varepsilon + it}}{-\varepsilon + it} dt + O(1).$$

Согласно функциональному уравнению дзета-функции Римана и задаче 2 к § 4 имеем

$$\begin{aligned}\zeta^2(-\varepsilon + it) &= \chi^2(-\varepsilon + it) \zeta^2(1 + \varepsilon - it) \\ &= \zeta^2(1 + \varepsilon - it) \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1+2\varepsilon} e^{-2it \ln \frac{t}{2\pi e} + i\frac{\pi}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{-\varepsilon + it} = \frac{1}{it} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

и

$$\zeta^2(1 + \varepsilon - it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} n^{it} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \ll 1,$$

получаем равенство

$$\begin{aligned}\zeta^2(-\varepsilon + it) \frac{x^{-\varepsilon+it}}{-\varepsilon + it} \\ = \zeta^2(1 + \varepsilon - it) \frac{x^{-\varepsilon} t^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} e^{-it \ln(\frac{1}{x} (\frac{t}{2\pi e})^2)} + O(x^{-\varepsilon} t^{2\varepsilon-1}).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$j = \frac{1}{\pi} \frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} \operatorname{Re} \int_{2\pi}^T \zeta^2(1 + \varepsilon - it) t^{2\varepsilon} e^{-it \ln(\frac{1}{x} (\frac{t}{2\pi e})^2)} dt + O(T^{2\varepsilon}).$$

Но ряд Дирихле для $\zeta^2(1 + \varepsilon - it)$ сходится равномерно на отрезке интегрирования, поэтому его можно проинтегрировать почленно, что приводит к равенству

$$j = \frac{1}{\pi} \frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \operatorname{Re} j(n) + O(T^{2\varepsilon}),$$

где

$$j(n) = \int_{2\pi}^T t^{2\varepsilon} e^{it \ln(\frac{1}{nx} (\frac{t}{2\pi e})^2)} dt.$$

Мы изменили знак показателя мнимой экспоненты, так как он не влияет на вещественную часть.

Теперь найдем асимптотическую формулу для величины $j(n)$. Введем обозначение

$$f(t) = \frac{t}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{nx} \left(\frac{t}{2\pi e} \right)^2 \right).$$

Тогда

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{nx} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^2 \right) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{t}{t_1},$$

где $t_1 = 2\pi\sqrt{nx}$. Очевидно, $f'(t_1) = 0$. Пусть

$$n_1 = \frac{1}{x} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2,$$

причем T , напомним, таково, что n_1 равно половине нечетного числа. Пусть вначале $t_1 > T$, то есть $n > n_1$. Тогда, интегрируя по частям, найдем

$$\begin{aligned} j(n) &= \int_{2\pi}^T \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)} de^{2\pi i f(t)} \\ &= \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)} e^{2\pi i f(t)} \Big|_{2\pi}^T - \int_{2\pi}^T e^{2\pi i f(t)} d \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)}. \end{aligned}$$

Но функция $-t^{2\varepsilon}(f'(t))^{-1}$ положительна и монотонно возрастает на отрезке интегрирования, поэтому, оценивая правую часть тривиально, получим

$$j(n) \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{|f'(T)|} \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{\ln \frac{n}{n_1}},$$

ибо

$$f'(T) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{nx} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{n}{n_1}.$$

Таким образом, в силу полужелости n_1 , имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n > n_1} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \operatorname{Re} j(n) &\ll T^{2\varepsilon} \sum_{n > n_1} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{\ln \frac{n}{n_1}} \\ &\ll T^{2\varepsilon} \sum_{n > \frac{3}{2}n_1} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} + \frac{T^{2\varepsilon}}{n_1^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{n_1 < n \leq \frac{3}{2}n_1} \frac{n_1}{n - n_1} \\ &\ll T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} + T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n_1}{2}} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \\ &\ll T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} \ln n_1 \ll T^{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$j = \frac{1}{\pi} \frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} \sum_{n < n_1} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \operatorname{Re} j(n) + O(T^{2\varepsilon}).$$

Пусть теперь $n < n_1$, то есть $t_1 < T$. Введем обозначения $a = 0.9t_1$, $b = \min(1.1t_1, T)$. Аналогично предыдущему имеем

$$\int_{2\pi}^a \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)} de^{2\pi i f(t)} \ll \frac{a^{2\varepsilon}}{|f'(a)|} \ll t_1^{2\varepsilon} \ll n^\varepsilon x^\varepsilon.$$

Функция $t^{2\varepsilon}(f'(t))^{-1}$ положительна на отрезке $[b, T]$ и либо монотонна на этом отрезке, либо имеет на нем два участка монотонности, разделенных точкой минимума. В обоих случаях интегрирование по частям приводит к оценке

$$\int_b^T \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)} de^{2\pi i f(t)} \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{|f'(T)|} + \frac{b^{2\varepsilon}}{|f'(b)|} \ll n^\varepsilon x^\varepsilon + \frac{T^{2\varepsilon}}{\ln \frac{n_1}{n}}.$$

Отсюда

$$j = \frac{1}{\pi} \frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} \sum_{n < n_1} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \operatorname{Re} \int_a^b t^{2\varepsilon} e^{2\pi i f(t)} dt + R + O(T^{2\varepsilon}),$$

где

$$\begin{aligned} R &\ll \sum_{n < n_1} \frac{\tau(n)}{n} + T^{2\varepsilon} \sum_{n < n_1} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{\ln \frac{n_1}{n}} \\ &\ll n_1^\varepsilon \ln n_1 + T^{2\varepsilon} \sum_{n < \frac{n_1}{2}} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} + T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n_1}{2}} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \ll T^{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Наконец, применим к интегралу от a до b теорему 20, полагая $\varphi(t) = t^{2\varepsilon}$, $A = U = t_1$ и $H = t_1^{2\varepsilon}$. Это приводит к равенству

$$\int_a^b t^{2\varepsilon} e^{2\pi i f(t)} dt = t_1^{2\varepsilon} \sqrt{\pi t_1} e^{-2it_1 + i\frac{\pi}{4}} + O(t_1^{2\varepsilon}).$$

Отделяя вещественную часть, подставляя в вышеприведенную формулу и пользуясь явным выражением для t_1 , получим

$$j = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi \sqrt{2}} \sum_{n \leq \frac{1}{x} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \cos\left(4\pi \sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + O(T^{2\varepsilon}).$$

Этим доказательство завершается. ■

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + O(x^{\frac{1}{3} + \varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценивая выражение для остаточного члена тривиально, при $T \geq 100\sqrt{x}$ получим

$$\begin{aligned} R(x) &\ll x^{\frac{1}{4}} \sum_{n \leq \frac{1}{x} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T} \\ &\ll x^{\frac{1}{4} + \varepsilon} \int_1^{T^2 x^{-1}} \frac{du}{u^{\frac{3}{4}}} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T} \ll x^\varepsilon \sqrt{T} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T}. \end{aligned}$$

Выбирая $T = x^{\frac{2}{3}}$, получаем требуемое. ■