Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Катанаев, Математические основы общей теории относительности.
Часть 2, *Лекц. курсы НОЦ*, 2018, выпуск 29, 3–365

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:40:16

Оглавление

9. Скалярные и калибровочные поля	6
9.1. Действительное скалярное поле	6
9.1.1. Скалярное поле в пространстве Минковского	6
9.1.2. Скалярное поле в аффинной геометрии	10
9.1.3. Скалярное поле в общей теории относительности	11
9.2. Комплексное скалярное поле	14
9.2.1. Комплексное скалярное поле в пространстве Минковского	14
9.2.2. Комплексное скалярное поле в аффинной геометрии	18
9.2.3. Комплексное скалярное поле в общей теории относительности	19
9.3. Электромагнитное поле	20
9.3.1. Лагранжева формулировка	24
9.3.2. Законы сохранения	29
9.3.3. Гамильтонова формулировка	30
9.3.4. Скалярная электродинамика	37
9.3.5. Электромагнитное поле в аффинной геометрии	41
9.3.6. Электромагнитное поле в общей теории относительности	44
9.4. Поле Прок'а	48
9.4.1. Гамильтонова формулировка	50
9.5. Поля Янга–Миллса	54
9.5.1. Лагранжева формулировка	59
9.5.2. Гамильтонова формулировка	62
9.5.3. Поля Янга–Миллса в аффинной геометрии	65
9.5.4. Поле Янга–Миллса в общей теории относительности	67
10. Спиноры	69
10.1. Спинорное представление группы Лоренца $\mathbb{O}(1,3)$	69
10.1.1. γ -матрицы Дирака	70
10.1.2. Алгебра матриц Дирака	76
10.1.3. Трансформационные свойства спиноров	78
10.1.4. Дискретные преобразования P , C и T	84
10.1.5. Уравнение Дирака	87
10.1.6. Спиноры в геометрии Римана–Картана	95
11. Геометрия поверхностей	103
11.1. Геометрия Римана–Картана на поверхности	103
11.2. Неголономный базис в двух измерениях	106
11.3. Выбор системы координат	107
11.3.1. Конформная калибровка для римановых поверхностей	107
11.3.2. Конформная калибровка для лоренцевых поверхностей	109
11.4. Координаты светового конуса	111
12. Поверхности постоянной кривизны	114
12.1. Сфера $\mathbb{S}^2$	114
12.2. Двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^2$	118
12.3. Однополостный гиперboloид $\mathbb{L}^2$	122
12.4. Уравнение Лиувилля	130

13. Лоренцевы поверхности с одним вектором Киллинга	135
13.1. Локальный вид лоренцевой метрики	137
13.2. Конформные блоки	141
13.3. Экстремали	143
13.3.1. Форма экстремалей	143
13.3.2. Асимптотика экстремалей	147
13.3.3. Полнота экстремалей	148
13.4. Построение глобальных решений	150
13.5. Примеры	152
13.5.1. Решение Шварцшильда	152
13.5.2. Решение Рейснера–Нордстрема	154
13.5.3. Экстремальная черная дыра	156
13.5.4. Плоскость Минковского	156
13.5.5. Поверхности постоянной кривизны	159
13.6. Координаты Эддингтона–Финкельштейна	161
13.7. Дифференцируемость метрики в седловой точке	165
14. Римановы поверхности с одним вектором Киллинга	167
14.1. Локальный вид римановой метрики	167
14.2. Экстремали	169
14.3. Построение глобальных решений	173
14.4. Решение Шварцшильда	177
15. Двумерная гравитация	179
15.1. Двумерная гравитация с кручением	179
15.2. Действие и уравнения движения	182
15.3. Каноническая формулировка	184
15.3.1. Каноническое преобразование	188
15.4. Дилатонизация	190
15.5. Размерности полей	191
15.6. Общее решение без полей материи	192
15.6.1. Локальное решение	192
15.6.2. Глобальные решения	197
15.7. Квадратичная модель	200
15.8. Пуассоновы сигма модели	202
15.8.1. Гамильтонова формулировка	204
15.8.2. Общее решение уравнений движения	206
15.8.3. Двумерные поля Янга–Миллса	207
15.8.4. Двумерная гравитация как пуассонова сигма модель	209
16. Сплетенные решения в общей теории относительности	211
16.1. Сплетенное произведение	211
16.2. Двумерная редукция	212
16.3. Произведение поверхностей постоянной кривизны	216
16.4. Пространственно симметричные решения	217
16.4.1. Сферически симметричные решения $K = 1$	223
16.4.2. Планарные решения $K = 0$	228
16.4.3. Гиперболические глобальные решения $K = -1$	232

16.5. Лоренц-инвариантные решения	233
16.5.1. Лоренц-инвариантные решения $K = 1$	236
16.5.2. Решения с плоскостью Минковского $K = 0$	240
16.6. Итоги главы	242
17. Решение Шварцшильда	243
17.1. Координаты Шварцшильда	243
17.2. Координаты Эддингтона–Финкельштейна	250
17.3. Координаты Крускала–Секереша	252
17.4. Мост Эйнштейна–Розена	255
17.5. Изотропные координаты	258
17.6. Координаты Пенлеве–Гулстранда	262
17.7. Вложения решения Шварцшильда	263
18. Космология	276
18.1. Сплошная среда в космологии	276
18.1.1. Сплошная среда в классической механике	276
18.1.2. Сплошная среда в релятивистской механике	278
18.1.3. Уравнение Райчаудхури	281
18.1.4. Большой взрыв и большое сжатие	284
18.2. Трехмерные пространства постоянной кривизны	285
18.2.1. Трехмерная сфера S^3	285
18.2.2. Двуполостный гиперболоид H^3	292
18.3. Вселенная Фридмана	296
18.3.1. Метрика однородной и изотропной вселенной	297
18.3.2. Пример	302
18.3.3. Космологическое красное смещение	303
18.3.4. Уравнения движения	306
18.3.5. Вселенная Эйнштейна	310
18.3.6. Линейное уравнение состояния	311
18.4. Вакуумные решения	315
18.4.1. Пространство-время Минковского	316
18.4.2. Пространство-время де Ситтера dS	317
18.4.3. Пространство-время анти-де Ситтера AdS	322
18.4.4. Вложения вселенной Фридмана	325
18.4.5. Экстремали во вселенной Фридмана	328
18.4.6. Космологические горизонты	331
18.5. Однородные вселенные	333
18.5.1. Классификация Бианки	333
18.5.2. Уравнения движения для однородной вселенной	339
18.5.3. Вселенная Казнера	345
19. Дополнение	350
19.1. Кватернионы	350
19.2. Полностью антисимметричные тензоры	353
Библиография	357
Список литературы	357

9. Скалярные и калибровочные поля

Скалярные и электромагнитное поля, вместе со спинорными полями, являются важнейшими объектами квантовой теории поля. В настоящей главе мы напомним основные свойства скалярных и калибровочных полей в пространстве Минковского, рассмотрим эти поля на произвольных многообразиях с заданной аффинной геометрией и обсудим их уравнения в общей теории относительности.

9.1. Действительное скалярное поле

9.1.1. Скалярное поле в пространстве Минковского. Рассмотрим действительное скалярное поле (т.е. функцию) $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,n-1})$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ произвольного числа измерений. Обозначим декартовы координаты через x^α , $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$. Свободное скалярное поле описывается квадратичным лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (9.1)$$

где $\eta^{\alpha\beta} := \text{diag}(+ - \dots -)$ – обратная метрика Лоренца и $m = \text{const} > 0$ – масса скалярного поля. Соответствующее действие имеет вид

$$S = \int dx L.$$

Знаки слагаемых в лагранжиане выбраны таким образом, чтобы канонический гамильтониан, рассмотренный ниже, был положительно определен.

Посчитаем размерности. Действие и компоненты метрики, по определению, безразмерны. Координаты имеют размерность длины, $[x^\alpha] = l$, $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$ (скорость света мы положили равной единице). Поэтому скалярное поле и масса имеют следующие размерности:

$$[\varphi] = l^{\frac{2-n}{2}}, \quad [m] = l^{-1}. \quad (9.2)$$

Уравнение движения для свободного скалярного поля линейно:

$$S, \varphi := \frac{\delta S}{\delta \varphi} = -(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (9.3)$$

где

$$\square := \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = \partial_t^2 - \partial_1^2 - \dots - \partial_{n-1}^2$$

– волновой оператор (оператор Даламбера). Это уравнение называется *уравнением Клейна–Гордона–Фока*, которое при $m = 0$ сводится к уравнению Даламбера. Уравнение (9.3) было предложено независимо в работах [89, 90, 91, 92].

Скалярное поле называется свободным, потому что описывается линейным уравнением движения.

Поскольку свободное скалярное поле удовлетворяет волновому гиперболическому уравнению, то для постановки задачи Коши в полупространстве $x^0 \geq 0$ для однозначного определения решения необходимо задать начальные данные на гиперповерхности $x^0 = 0$ для поля φ

и его производной по времени $\dot{\varphi} := \partial_0 \varphi$. Говорят, что скалярное поле описывает одну динамическую степень свободы. В квантовой теории поля оно описывает нейтральные скалярные частицы.

Для того, чтобы описать скалярное поле с самодействием, к лагранжиану (9.1) добавляется потенциал взаимодействия $V(\varphi)$,

$$L \mapsto L = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - V(\varphi),$$

где $V(\varphi)$ – некоторая достаточно гладкая функция одного аргумента. Для упрощения обозначений мы включили массовый член в определение потенциала $V(\varphi)$. В общем случае функция $V(\varphi)$ зависит от некоторого набора размерных или безразмерных констант связи. Для самодействующего скалярного поля уравнение движения в общем случае становится нелинейным:

$$S_{,\varphi} := \frac{\delta S}{\delta \varphi} = -\square \varphi - V'(\varphi) = 0, \quad (9.4)$$

где $V' := dV/d\varphi$.

Действие для скалярного поля инвариантно относительно глобального действия группы Пуанкаре $\mathbb{IO}(1, n-1)$. Согласно первой теореме Нетер эта инвариантность приводит к законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения (см. разделы 5.2.1, 5.2.2). Выражение для сохраняющегося канонического тензора энергии-импульса (7.171) скалярного поля имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{(c)} = \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \partial \varphi^2 - V \right), \quad (9.5)$$

где использовано сокращенное обозначение для кинетического слагаемого

$$\partial \varphi^2 := \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi.$$

Тензор энергии-импульса, очевидно, симметричен по своим индексам.

Спиновый момент скалярного поля (5.54) равен нулю, $S_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$, т.к. при вращениях равна нулю вариация формы скалярного поля. Отсюда вытекает, что в квантовой теории поля скалярное поле описывает частицы с нулевым спином. Момент количества движения скалярного поля полностью определяется орбитальным моментом по формуле (5.52)

$$J_{\alpha\beta}{}^\gamma = M_{\alpha\beta}{}^\gamma := x_\beta T_{\alpha}^{(c)\gamma} - x_\alpha T_{\beta}^{(c)\gamma}. \quad (9.6)$$

Функция $V(\varphi)$ может быть положительно определена и при “неправильном” знаке квадрата массы, $m^2 < 0$. Например, положим (см. рис. 9.1a)

$$V(\varphi) = \frac{1}{4} \lambda (\varphi^2 - a^2)^2 = \frac{1}{4} \lambda (\varphi^4 - 2\varphi^2 a^2 + a^4), \quad a > 0. \quad (9.7)$$

При $\lambda > 0$ потенциал положительно определен, однако “квадрат массы”, $m^2 = -\lambda a^2$, отрицателен. Здесь возникает вопрос: “Что называется массой частицы, соответствующей полю φ ?” В квантовой теории поля масса частиц определяется квадратичным приближением лагранжиана, вокруг которого строится теория возмущений. Для этого необходимо выбрать вакуумное решение уравнений движения, вблизи которого будет происходить разложение полей. Простейшее решение уравнения движения (9.4) – это постоянное поле $\varphi_0 = \text{const}$, которое удовлетворяет условию

$$V'(\varphi_0) = 0.$$

Рис. 9.1. Минимум потенциала действительного (a) и комплексного (b) скалярного поля.

То есть мы предполагаем, что вакуум однороден и статичен. Для потенциала (9.7) уравнение равновесия принимает вид

$$\varphi(\varphi^2 - a^2) = 0.$$

Оно имеет три решения: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_0 = \pm a$. Решение $\varphi_0 = 0$ соответствует неустойчивому положению равновесия. Именно поэтому вблизи данного решения квадрат массы имеет неправильный знак. Оба решения $\varphi_0 = \pm a$ соответствуют устойчивым положениям равновесия и имеют одинаковую нулевую плотность энергии. Любое из этих решений можно выбрать в качестве вакуума, вокруг которого строится теория возмущений. Положим

$$\varphi = a + \tilde{\varphi}.$$

Тогда потенциал примет вид

$$V = \lambda \left(a^2 \tilde{\varphi}^2 + a \tilde{\varphi}^3 + \frac{1}{4} \tilde{\varphi}^4 \right).$$

Из квадратичного приближения следует, что масса скалярного поля положительна, $m^2 = 2\lambda a^2$. То есть масса частиц положительна, что соответствует устойчивому положению равновесия.

Перейдем к канонической формулировке. Импульс, канонически сопряженный скалярному полю, равен производной по времени от скалярного поля:

$$p := \frac{\partial L}{\partial(\dot{\varphi})} = \dot{\varphi}. \quad (9.8)$$

Одновременные скобки Пуассона для канонически сопряженных переменных имеют вид

$$[\varphi, p'] := [\varphi(t, \mathbf{x}), p(t, \mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

где введена пространственная δ -функция

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') := \delta(x^1 - x'^1) \dots \delta(x^{n-1} - x'^{n-1}).$$

Соответствующая плотность гамильтониана равна

$$H = T_{00}^{(c)} = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi), \quad (9.9)$$

где греческие буквы из середины алфавита пробегают, как и раньше, только пространственные значения: $\mu, \nu = 1, \dots, n-1$. Если функция $V(\varphi)$ положительно определена, то гамильтонова плотность H также положительно определена, т.к. $\eta^{\mu\nu} := -\delta^{\mu\nu}$.

Гамильтониан скалярного поля получается интегрированием гамильтоновой плотности по всему пространству:

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} H. \quad (9.10)$$

Если этот интеграл сходится, то полная энергия скалярного поля (численное значение $\mathcal{H}$) сохраняется.

Уравнение движения второго порядка (9.3) в гамильтоновой форме эквивалентно системе двух уравнений движения первого порядка относительно производных по времени:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= [\varphi, \mathcal{H}] = p, \\ \dot{p} &= [p, \mathcal{H}] = \Delta\varphi - m^2\varphi - V', \end{aligned} \quad (9.11)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Компонента $T_{00}^{(c)}$ тензора энергии-импульса скалярного поля (9.5) совпадает с плотностью гамильтониана (9.9). Остальные компоненты канонического тензора энергии-импульса также могут быть выражены через канонические переменные:

$$\begin{aligned} H_\mu &:= T_{0\mu}^{(c)} = p\partial_\mu\varphi, \\ T_{\mu\nu} &= \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \left[\frac{1}{2}(p^2 + \partial^\rho\varphi\partial_\rho\varphi - V(\varphi)) \right] \eta_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Ковектор энергии-импульса $\{P_\alpha\} = \{P_0 := \mathcal{H}, P_\mu\}$ для скалярного поля получается из компонент канонического тензора энергии-импульса интегрированием по пространству:

$$P_0 := \int d\mathbf{x} H, \quad P_\mu := \int d\mathbf{x} H_\mu, \quad (9.12)$$

где интегрирование проводится по сечениям $x^0 = \text{const}$. Численное значение P_0 и P_μ дают полную энергию и полный импульс скалярного поля. Если поле достаточно быстро убывает на бесконечности, что соответствует, в частности, отсутствию излучения, то полные энергия и импульс сохраняются:

$$\dot{P}_0 = 0, \quad \dot{P}_\mu = 0.$$

Отсюда следует, что компоненты канонического тензора энергии-импульса $T_{0\mu}^{(c)}$ имеют физический смысл плотности импульса скалярного поля.

Полный момент импульса скалярного поля получается интегрированием нулевых компонент тензора момента количества движения (9.6):

$$\mathcal{J}_{\alpha\beta} := \int d\mathbf{x} J_{\alpha\beta}^0.$$

Если скалярное поле достаточно быстро убывает на пространственной бесконечности, то он также сохраняется,

$$\dot{\mathcal{J}}_{\alpha\beta} = 0.$$

Строго говоря, полным моментом импульса являются только пространственные компоненты $\mathcal{J}_{\mu\nu} = -\mathcal{J}_{\nu\mu}$.

9.1.2. Скалярное поле в аффинной геометрии. Пусть на многообразии (пространстве-времени) $\mathbb{M}$ произвольной размерности n задана аффинная геометрия, т.е. задана метрика g лоренцевой сигнатуры и связность Γ . Лагранжиан скалярного поля, минимальным образом взаимодействующего с гравитацией, выбирается в виде

$$L = \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} \partial \varphi^2 - V(\varphi) \right), \quad (9.13)$$

где введено сокращенное обозначение,

$$\partial \varphi^2 := g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi,$$

для кинетической части лагранжиана. Лагранжиан (9.13) зависит только от метрики, а аффинная связность в него не входит. Это означает, что лагранжиан скалярного поля при минимальной подстановке имеет один и тот же вид как в римановой, так и в аффинной геометрии.

Размерности полей в аффинной геометрии те же, что и в пространстве Минковского, т.к. метрика, по определению, безразмерна.

Вычислим вариационные производные действия:

$$S, \varphi := \frac{\delta S}{\delta \varphi} = -\sqrt{|g|} \left(\tilde{\square} \varphi + V'(\varphi) \right) = 0, \quad (9.14)$$

$$S, \alpha\beta := \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} T_{\alpha\beta}, \quad (9.15)$$

где

$$\tilde{\square} := g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta.$$

– инвариантный волновой оператор, построенный по псевдоримановой метрике $g_{\alpha\beta}$ и

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - g_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \partial \varphi^2 - V \right) \quad (9.16)$$

– ковариантное обобщение тензора энергии-импульса (9.5) для пространства Минковского. Уравнение (9.14) является инвариантным уравнением движения для скалярного поля в аффинной геометрии. Однако в него входит не аффинная связность, которая может быть задана на многообразии, а только символы Кристоффеля. Это происходит потому что скалярное поле не чувствует кручения и неметричности при минимальной подстановке. Взаимодействие скалярного поля с кручением и неметричностью можно ввести неминимальным образом, добавив к лагранжиану соответствующие слагаемые. При этом существует много возможностей, поэтому мы их обсуждать не будем. Вариационная производная (9.16) определяет тензор энергии-импульса скалярного поля, который служит источником для гравитационного поля (компонент метрики) в уравнениях Эйнштейна.

ЗАМЕЧАНИЕ. То, что вариационная производная действия по метрике (9.16) пропорциональна ковариантному обобщению канонического тензора энергии-импульса не является общим свойством. Дальнейшие примеры покажут, что вариация действия по метрике в общем случае не всегда пропорциональна ковариантному обобщению тензора энергии-импульса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1.1. Если метрика на многообразии $\mathbb{M}$ имеет лоренцеву сигнатуру и координата x^0 является временем, то временная компонента тензора энергии-импульса действительного скалярного поля,

$$T_{00} = \partial_0 \varphi \partial_0 \varphi - g_{00} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - V \right), \quad (9.17)$$

при $V \geq 0$ положительно определена и, следовательно, удовлетворяет слабому энергетическому условию (7.139).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $u^\alpha := g^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi$. Тогда

$$\partial_0 \varphi = g_{00} u^0 + g_{0\mu} u^\mu.$$

Легко проверить равенство

$$(\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2} g_{00} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi = \frac{1}{2} (g_{00} u^0 - g_{0\mu} u^\mu)^2 - \frac{1}{2} g_{00} \left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu} g_{0\nu}}{g_{00}} \right) u^\mu u^\nu. \quad (9.18)$$

Если метрика имеет лоренцеву сигнатуру и координаты выбраны так, что x^0 – это время, то $g_{00} > 0$ и матрица

$$g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu} g_{0\nu}}{g_{00}}$$

отрицательно определена. Это означает, что временная компонента (9.17) является положительно определенной как сумма положительно определенных слагаемых в выражении (9.18).

Если действие инвариантно относительно общих преобразований координат, которые параметризуются n функциями, то согласно второй теореме Нетер уравнения движения удовлетворяют n тождествам. Допустим, что действие зависит только от метрики и скалярного поля. Тогда инвариантность действия означает равенство нулю вариации

$$\delta S = \int dx \sqrt{|g|} (S,^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + S, \varphi \delta \varphi) = 0.$$

Отсюда с учетом явного вида вариации компонент метрики и скалярного поля получаем, что уравнения движения (9.14) и (9.15) удовлетворяют n тождествам:

$$2\tilde{\nabla}_\alpha S,^\alpha_\beta - S, \varphi \partial_\beta \varphi = 0, \quad (9.19)$$

где $\tilde{\nabla}_\alpha$ – ковариантная производная с символами Кристоффеля.

С формальной точки зрения сдвиги на постоянный вектор, $x^\alpha \mapsto x^\alpha + a^\alpha$, $a^\alpha = \text{const}$, образуют подгруппу группы общих преобразований координат. Поэтому, так же, как и в пространстве Минковского, можно построить полную “энергию” и “импульс” скалярного поля. Эти величины будут сохраняться на уравнениях движения, однако им не всегда можно придать физический смысл, т.к. понятие декартовой системы координат в общем случае отсутствует. Это построение имеет смысл в асимптотически плоском пространстве-времени, когда на больших расстояниях пространство-время приближается к пространству Минковского. Это же верно и для момента количества движения.

9.1.3. Скалярное поле в общей теории относительности. Рассмотрим действительное скалярное поле, которое минимальным образом взаимодействует с гравитацией в общей теории относительности. В этом случае действие имеет вид

$$S = \kappa S_{\text{HE}} + S_\varphi, \quad (9.20)$$

где S_{HE} – действие Гильберта–Эйнштейна (7.6) и S_φ – действие для скалярного поля с лагранжианом (9.13). Добавление к действию скалярного поля действия Гильберта–Эйнштейна дает кинетический член для метрики. Поэтому вариация этого действия по обратной метрике приводит к уравнениям движения Эйнштейна

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} : \quad \kappa \left(\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} \right) + g_{\alpha\beta} \Lambda + \frac{1}{2} T_{\alpha\beta} = 0, \quad (9.21)$$

где $T_{\alpha\beta}$ – тензор энергии-импульса скалярного поля (9.16). Поскольку действие Гильберта–Эйнштейна не зависит от скалярного поля, то уравнение движения для скалярного поля остается прежним (9.14). Таким образом, полная система уравнений движения для скалярного поля в общей теории относительности состоит из уравнений (9.14) и (9.21).

Действие (9.20) инвариантно относительно общих преобразований координат. Поэтому, согласно второй теореме Нетер, между уравнениями движения существует линейная зависимость (9.19).

Перепишем уравнения Эйнштейна в другом виде. След уравнений Эйнштейна (9.21),

$$\kappa \left(1 - \frac{n}{2}\right) \tilde{R} + n\Lambda + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n}{2}\right) \partial\varphi^2 + \frac{n}{2}V = 0,$$

позволяет исключить скалярную кривизну. В результате уравнения движения (9.21) можно записать в эквивалентной форме

$$\kappa \tilde{R}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + \frac{1}{n-2} g_{\alpha\beta} (2\Lambda + V). \quad (9.22)$$

При нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$ и потенциале $V = 0$ уравнения (9.22) существенно упрощаются,

$$\kappa \tilde{R}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi. \quad (9.23)$$

Эта модель безмассового скалярного поля в общей теории относительности привлекает в последнее время большое внимание из-за своей относительной простоты.

Покажем, что уравнение движения для скалярного поля (9.14) являются следствием уравнений Эйнштейна (9.21).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1.2. *Если в некоторой области пространства-времени $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ градиент скалярного поля отличен от нуля, $\{\partial_\alpha \varphi \neq 0\}$, то в этой области уравнение для скалярного поля (9.14) является следствием уравнений Эйнштейна (9.21).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подействуем оператором ковариантного дифференцирования $\tilde{\nabla}^\beta$ на уравнение (9.21). В силу свернутых тождеств Бианки,

$$\tilde{\nabla}^\beta \left(\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} \right) = 0,$$

получим равенство

$$\tilde{\nabla}^\beta T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi (\Box \varphi + V') = 0.$$

Отсюда вытекает сделанное утверждение.

Доказанное предложение позволяет вместо решения полной системы уравнений для скалярного поля и метрики ограничиться решением только уравнений Эйнштейна.

В рассматриваемом случае ситуация аналогична точечным частицам в общей теории относительности, предложение 7.8.2.

До сих пор мы рассматривали минимальное взаимодействие скалярного с метрикой. Представляет также интерес неминимальное взаимодействие, поскольку в этом случае возможно появление дополнительной важной локальной инвариантности.

ТЕОРЕМА 9.1.1. *Действие*

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} \partial\varphi^2 - \frac{n-2}{8(n-1)} \varphi^2 \tilde{R} - \lambda \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \right), \quad \lambda = \text{const}, \quad (9.24)$$

с точностью до граничных слагаемых инвариантно относительно преобразований Вейля:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}, \\ \varphi &\mapsto \bar{\varphi} = e^{-\frac{n-2}{2}\phi} \varphi, \end{aligned} \quad (9.25)$$

где $\phi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$ – произвольная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка.

Учитывая размерность скалярного поля (9.2), получаем, что константа связи λ самодействия скалярного поля в действии (9.24) безразмерна.

Коэффициенты перед первыми двумя слагаемыми в действии (9.24) фиксированы требованием инвариантности относительно преобразований Вейля. Их можно умножить только на общую отличную от нуля постоянную. Фиксирован также показатель степени в преобразовании Вейля для скалярного поля (9.25). Нетрудно также проверить, что добавление к действию (9.24) действия Гильберта–Эйнштейна и космологической постоянной нарушает вейлевскую инвариантность.

Уравнения движения для действия (9.24) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|g|}} S_{,\alpha\beta} : \quad & \frac{n-2}{8(n-1)} \left[\varphi^2 \left(\tilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \tilde{R} \right) - g^{\alpha\beta} \square \varphi^2 + \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}^\beta \varphi^2 \right] + \\ & + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \partial \varphi^2 - \frac{1}{2} \partial^\alpha \varphi \partial^\beta \varphi - \frac{1}{2} \lambda g^{\alpha\beta} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} = 0, \end{aligned} \quad (9.26)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} S_{,\varphi} : \quad -\square \varphi - \frac{n-2}{4(n-1)} \tilde{R} \varphi - \lambda \frac{2n}{n-2} \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} = 0. \quad (9.27)$$

Эти уравнения движения не инвариантны, а ковариантны относительно преобразований Вейля, т.к. при преобразовании умножаются на некоторую отличную от нуля функцию.

Поскольку действие (9.24) инвариантно относительно преобразований Вейля, то в силу второй теоремы Нетер между уравнениями движения существует линейная зависимость. Чтобы ее найти, выпишем вариации формы для метрики и скалярного поля при вейлевских преобразованиях (9.25):

$$\delta g_{\alpha\beta} = 2\epsilon g_{\alpha\beta}, \quad \delta \varphi = -\frac{n-2}{2} \epsilon \varphi,$$

где $\epsilon(x)$ – бесконечно малый параметр преобразования. Поскольку действие инвариантно, то выполнено условие

$$\delta S = \int dx \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\delta S}{\delta \varphi} \delta \varphi \right) = 0.$$

Подставив сюда выражения для вариации полей, получим зависимость уравнений движения:

$$2S_{,\alpha\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{n-2}{2} \varphi S_{,\varphi} = 0. \quad (9.28)$$

Нетрудно проверить, что уравнения движения (9.26), (9.27) действительно удовлетворяют этому тождеству.

В важном случае четырехмерного пространства-времени, действие принимает хорошо известную форму

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} \partial \varphi^2 - \frac{1}{12} \varphi^2 \tilde{R} - \lambda \varphi^4 \right). \quad (9.29)$$

Оно инвариантно относительно преобразований Вейля

$$g_{\alpha\beta} \mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}, \quad \varphi \mapsto \bar{\varphi} = e^{-\phi} \varphi. \quad (9.30)$$

Соответствующие уравнения движения,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|g|}} S,^{\alpha\beta} : \quad & \frac{1}{12} \left[\varphi^2 \left(\tilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \tilde{R} \right) - g^{\alpha\beta} \square \varphi^2 + \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}^\beta \varphi^2 \right] - \\ & - \frac{1}{2} \partial^\alpha \varphi \partial^\beta \varphi + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \partial \varphi^2 - \frac{1}{2} \lambda g^{\alpha\beta} \varphi^4 = 0, \end{aligned} \quad (9.31)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} S, \varphi : \quad - \tilde{\square} \varphi - \frac{1}{6} \tilde{R} \varphi - 4\lambda \varphi^3 = 0, \quad (9.32)$$

ковариантны.

Действие (9.29) является выделенным случаем скалярно-тензорных моделей гравитации, рассмотренных в разделе 7.6. Чтобы привести лагранжиан (7.34) к рассматриваемому виду, необходимо положить

$$\phi = -\frac{\varphi^2}{12}, \quad \omega(\phi) = -\frac{3}{2}, \quad V(\phi) = \lambda \varphi^4, \quad \kappa = 1.$$

Построение действия для других полей, которое было бы инвариантно относительно преобразований Вейля, представляет собой отдельную задачу, на которой мы останавливаться не будем.

9.2. Комплексное скалярное поле

9.2.1. Комплексное скалярное поле в пространстве Минковского. Пусть $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ – комплексное скалярное поле (функция) в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$, где $\varphi_{1,2}(x) \in C^2(\mathbb{R}^{1,n-1})$ – два действительных скалярных поля (действительная и мнимая части). Комплексно сопряженное поле будем обозначать крестом $\varphi^\dagger := \varphi_1 - i\varphi_2$, как это принято в квантовой теории поля. Точнее, после вторичного квантования скалярное поле становится операторнозначной функцией, для которой крест означает не комплексное, а эрмитово сопряжение.

Лагранжиан свободного поля

$$\begin{aligned} L &= \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^\dagger \partial_\beta \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi = \\ &= \eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi_1 \partial_\beta \varphi_1 + \partial_\alpha \varphi_2 \partial_\beta \varphi_2) - m^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{aligned} \quad (9.33)$$

с точностью до множителя $1/2$ является суммой лагранжианов (9.1) для действительной и мнимой части. Он является действительной функцией.

Размерность комплексного скалярного поля такая же как и действительного (9.2).

Комплексное скалярное поле задается двумя действительными скалярными полями φ_1 и φ_2 . Для получения уравнений движения действие можно варьировать либо по действительной и мнимой частям φ_1 и φ_2 , либо по полям φ и $\varphi^\dagger$, рассматривая их в качестве независимых переменных. Мы остановимся на второй возможности, как более удобной. Тогда вариация действия по $\varphi^\dagger$ приводит к волновому уравнению для φ (уравнению Клейна–Гордона–Фока):

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi^\dagger} = -(\square + m^2) \varphi = 0, \quad (9.34)$$

которое эквивалентно двум волновым уравнениям для действительной и мнимой части. Вариация действия по φ дает уравнение, сопряженное к (9.34).

При рассмотрении задачи Коши для волнового уравнения (9.34) необходимо задать начальные условия независимо для полей φ_1 и φ_2 . Поэтому комплексное скалярное поле описывает две степени свободы и в квантовой теории поля описывает заряженные скалярные частицы.

Для описания самодействия комплексного скалярного поля вводится потенциал $V(\varphi^\dagger, \varphi)$, который в общем случае является достаточно гладкой вещественнозначной и положительно определенной функцией двух аргументов $\varphi^\dagger$ и φ . Мы предположим, что потенциал зависит только от одного аргумента – произведения $\varphi^\dagger \varphi$ – и обозначим $V' := dV/d(\varphi^\dagger \varphi)$. Тогда лагранжиан примет вид

$$L = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^\dagger \partial_\beta \varphi - V(\varphi^\dagger \varphi), \quad (9.35)$$

где, как и в случае действительного скалярного поля, мы включили массовый член в определение потенциала V . Уравнение движения для скалярного поля с самодействием в общем случае становится нелинейным:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi^\dagger} = -(\square + V')\varphi = 0, \quad (9.36)$$

Как и в случае действительного скалярного поля, действие для комплексного скалярного поля инвариантно относительно группы Пуанкаре $\mathbb{O}(1, n-1)$. При этом трансляциям соответствует сохраняющийся канонический тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta}^{(c)} = \partial_\alpha \varphi^\dagger \partial_\beta \varphi + \partial_\beta \varphi^\dagger \partial_\alpha \varphi - \eta_{\alpha\beta} L. \quad (9.37)$$

Его компоненты, очевидно, вещественны. Спиновый момент комплексного скалярного поля равен нулю и момент количества движения равен орбитальному моменту (9.6).

Действие для комплексного скалярного поля инвариантно также относительно глобальных $U(1)$ преобразований, меняющих фазу скалярного поля сразу во всем пространстве

$$\varphi' = e^{i\epsilon} \varphi, \quad \varphi'^\dagger = e^{-i\epsilon} \varphi^\dagger, \quad \epsilon = \text{const}. \quad (9.38)$$

Согласно первой теореме Нетер, этой инвариантности соответствует сохраняющийся ток (5.37)

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0.$$

где

$$J_\alpha = i(\varphi^\dagger \partial_\alpha \varphi - \partial_\alpha \varphi^\dagger \varphi). \quad (9.39)$$

Позже мы увидим, что $U(1)$ инвариантность модели комплексного скалярного поля соответствует закону сохранения заряда.

Рассмотрим гамильтонову формулировку теории. Из лагранжиана (9.35) следуют выражения для канонических импульсов, сопряженных полям φ и $\varphi^\dagger$,

$$p := \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi^\dagger, \quad (9.40)$$

$$p^\dagger := \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \varphi^\dagger)} = \partial_0 \varphi. \quad (9.41)$$

Ненулевые одновременные скобки Пуассона для координат и импульсов имеют вид

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), p(t, \mathbf{x}')] = [\varphi^\dagger(t, \mathbf{x}), p^\dagger(t, \mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Для положительно определенного потенциала V плотность гамильтониана комплексного скалярного поля,

$$H = p^\dagger p - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^\dagger \partial_\nu \varphi + V(\varphi^\dagger \varphi), \quad (9.42)$$

положительно определена. Канонические уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= p^\dagger, \\ \dot{\varphi}^\dagger &= p, \\ \dot{p} &= \Delta\varphi^\dagger - V'\varphi^\dagger, \\ \dot{p}^\dagger &= \Delta\varphi - V'\varphi.\end{aligned}\tag{9.43}$$

Теперь рассмотрим обобщение модели (9.7) для комплексного скалярного поля. Потенциал самодействия выберем в виде (рис. 9.1b)

$$V(\varphi^\dagger\varphi) = \frac{1}{2}\lambda[(\varphi^\dagger\varphi)^2 - a^2]^2 = \frac{1}{2}\lambda[(\varphi^\dagger\varphi)^2 - 2\varphi^\dagger\varphi a^2 + a^4], \quad a > 0.\tag{9.44}$$

При $\lambda > 0$ этот потенциал положительно определен. Однородное и статичное решение φ_0 для вакуума должно удовлетворять уравнению

$$\varphi_0(\varphi_0^\dagger\varphi_0 - a^2) = 0.$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений:

$$\varphi_0 = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_0 = a e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

которые зависят от параметра α . Это связано с наличием унитарной $U(1)$ глобальной симметрии (9.38). Решение $\varphi_0 = 0$ соответствует неустойчивому положению равновесия. Поэтому выберем вакуумное решение в виде $\varphi_0 = a$ и разложим поля вблизи данного решения:

$$\varphi_1 = a + \tilde{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = \varphi_2.\tag{9.45}$$

В новых переменных потенциал примет вид

$$V = \frac{1}{2}\lambda[4a^2\tilde{\varphi}_1^2 + 4a\tilde{\varphi}_1^3 + 4a\tilde{\varphi}_1\varphi_2^2 + \tilde{\varphi}_1^4 + \varphi_2^4 + 2\tilde{\varphi}_1^2\varphi_2^2].$$

Его квадратичная часть равна

$$V \simeq 2\lambda a^2 \tilde{\varphi}_1^2.$$

Таким образом, вещественная часть скалярного поля имеет положительную массу, в то время как мнимая часть вблизи вакуумного решения является безмассовой. Это ясно из рис. 9.1b. Точка $\varphi = a$ соответствует минимуму потенциальной энергии, однако в направлении φ_2 этот минимум является безразличным.

Описанная выше ситуация возникновения безмассовых полей в моделях с симметриями является типичной. Допустим, что модель зависит от некоторого набора скалярных полей $\varphi = \{\varphi^a\}$, $a = 1, \dots, N$, которые можно рассматривать, как компоненты некоторого вектора. Предположим также, что потенциал взаимодействия инвариантен относительно некоторой группы Ли преобразований $\mathbb{G}$. Если группа Ли K -мерна и вблизи единицы параметризуется набором параметров ϵ^A , $A = 1, \dots, K$, то инфинитезимальные преобразования полей имеют вид

$$\varphi(x) \mapsto \varphi(x) + \delta\varphi(x) = \varphi(x) + \epsilon^A R_A^a(\varphi),$$

где $R_A^a(\varphi)$ – некоторые функции, возможно, нелинейные, полей φ^a . Из инвариантности потенциала вытекает равенство нулю его вариации:

$$\delta V(\varphi) = \epsilon^A R_A^a \frac{\partial V}{\partial \varphi^a} = 0.\tag{9.46}$$

Это условие должно выполняться при всех значениях φ . Допустим, что существует вакуумное решение $\varphi_0 = \text{const}$, которое соответствует минимуму потенциала $V(\varphi)$. Тогда выполнено уравнение

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \varphi^a} \right|_{\varphi_0} = 0.$$

Само вакуумное решение может нарушать симметрию полностью или частично. Если все векторы $R_A(\varphi_0) \neq 0$ линейно независимы, то симметрия полностью нарушена. Если существуют некоторые наборы параметров ϵ^A , для которых $\epsilon^A R_A(\varphi_0) = 0$, то при соответствующих преобразованиях вакуум не меняется, и соответствующая симметрия является симметрией вакуумного решения. Очевидно, что множество преобразований, сохраняющих вакуум, образуют некоторую подгруппу $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$. Описанное явление называется *спонтанным нарушением симметрии*, и было описано в [93]. Слово “спонтанный” в данном случае означает, что симметрия нарушена не руками в исходном действии, а выбором вакуумного решения уравнений движения.

ТЕОРЕМА 9.2.1 Голдстоун. *Если потенциал самодействия скалярных полей инвариантен относительно некоторой группы Ли $\mathbb{G}$ преобразований (9.46) и вакуумное решение нарушает симметрию до некоторой собственной подгруппы $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$, то соответствующая модель содержит безмассовые скалярные поля, соответствующие нарушенным симметриям. Число безмассовых полей больше или равно разности $\dim \mathbb{G} - \dim \mathbb{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем равенство (9.46) по φ^b :

$$\epsilon^A \left(\frac{\partial R_A^a}{\partial \varphi^b} \frac{\partial V}{\partial \varphi^a} + R_A^a \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \right) = 0.$$

Если φ_0 – вакуумное решение уравнений движения, то первое слагаемое обращается в нуль и, следовательно, должно быть выполнено равенство

$$\epsilon^A R_A^a \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \Big|_{\varphi_0} = 0. \quad (9.47)$$

Массы полей определяются квадратичным приближением потенциала вблизи вакуумного решения. Поэтому массовая матрица имеет вид

$$m_{ab}^2 := \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \Big|_{\varphi_0}.$$

Собственные значения этой матрицы не могут быть отрицательны, т.к. φ_0 соответствует минимуму потенциала. Она симметрична и может быть приведена к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы. Система линейных уравнений (9.47) для $\epsilon^A R_A^a$ имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда массовая матрица вырождена. Каждой нарушенной симметрии соответствует некоторый нетривиальный вектор $\epsilon^A R_A^a$. Таких линейно независимых векторов ровно $\dim \mathbb{G} - \dim \mathbb{H}$. Это означает, что массовая матрица должна иметь по крайней мере $\dim \mathbb{G} - \dim \mathbb{H}$ нулевых собственных значений. В общем случае возможно появление дополнительных нулевых собственных значений, вызванных не нарушением симметрии, а спецификой модели. Нулевые собственные числа массовой матрицы означают наличие безмассовых скалярных полей.

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказанной теореме возможная зависимость параметров преобразования ϵ^A от точки пространства-времени никак не использовалась. Поэтому теорема Голдстоуна справедлива как для глобальных, так и для локальных (калибровочных) преобразований.

ПРИМЕР 9.2.1. Рассмотрим комплексное скалярное поле с положительно определенным потенциалом

$$V = \frac{1}{4}\nu(\varphi^\dagger\varphi - a^2)^4, \quad \nu, a > 0.$$

Вакуумное решение должно удовлетворять уравнению

$$\varphi_0(\varphi_0^\dagger\varphi_0 - a^2)^3 = 0.$$

Как и для потенциала (9.44) минимуму энергии соответствует бесконечно много решений. Выберем вакуумное решение в виде $\varphi_0 = a$ и произведем вблизи него разложение (9.45). Тогда потенциал примет вид

$$V = \frac{1}{4}\nu(2a\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_1^2 + \varphi_2^2)^4.$$

Этот потенциал вообще не имеет квадратичных слагаемых, и, значит, оба поля $\tilde{\varphi}_1$ и φ_2 являются безмассовыми. В то же время, вакуумное решение $\varphi_0 = a$ нарушает $U(1)$ -симметрию. Таким образом, число безмассовых полей превышает разность $\dim \mathbb{G} - \dim \mathbb{H} = 1$.

В рассмотренном примере появление дополнительного безмассового поля связано не с нарушением симметрии, а со спецификой модели. В квантовой теории поля безмассовые частицы, соответствующие безмассовым скалярным полям в спонтанно нарушенных моделях теории поля, которые связаны именно с нарушением симметрии, называются *голдстоуновскими бозонами*. Их число равно разности $\dim \mathbb{G} - \dim \mathbb{H}$.

9.2.2. Комплексное скалярное поле в аффинной геометрии. В аффинной геометрии минимальная подстановка для комплексного скалярного поля приводит к следующему лагранжиану

$$L = \sqrt{|g|}[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi^\dagger\partial_\beta\varphi - V(\varphi^\dagger\varphi)], \quad (9.48)$$

и аффинная связность в него не входит. Вариация соответствующего действия по полям приводит к следующим уравнениям движения и тензору энергии-импульса

$$S_{,\varphi^\dagger} := \frac{\delta S}{\delta\varphi^\dagger} = -\sqrt{|g|}(\tilde{\square} + V')\varphi = 0, \quad (9.49)$$

$$S_{, \varphi} := \frac{\delta S}{\delta\varphi} = -\sqrt{|g|}(\tilde{\square} + V')\varphi^\dagger = 0, \quad (9.50)$$

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}T_{\alpha\beta}, \quad (9.51)$$

где

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varphi^\dagger\partial_\beta\varphi + \partial_\beta\varphi^\dagger\partial_\alpha\varphi - g_{\alpha\beta}(g^{\gamma\delta}\partial_\gamma\varphi^\dagger\partial_\delta\varphi - V) \quad (9.52)$$

– ковариантное обобщение канонического тензора энергии-импульса (9.37).

Перепишем тензор энергии-импульса через действительную и мнимую части,

$$T_{\alpha\beta} = 2\partial_\alpha\varphi_1\partial_\beta\varphi_1 + 2\partial_\alpha\varphi_2\partial_\beta\varphi_2 - g_{\alpha\beta}(\partial\varphi_1^2 + \partial\varphi_2^2 - V).$$

Слагаемые с производными имеют тот же вид, что и в случае двух действительных скалярных полей. Поэтому из доказательства предложения 9.1.1 вытекает положительная определенность их временных компонент. Следовательно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2.1. Если метрика на многообразии $\mathbb{M}$ имеет лоренцеву сигнатуру и координата x^0 является временем, то временная компонента тензора энергии-импульса комплексного скалярного поля,

$$T_{00} = \partial_0\varphi^\dagger\partial_0\varphi + \partial_0\varphi^\dagger\partial_0\varphi - g_{00}(g^{\gamma\delta}\partial_\gamma\varphi^\dagger\partial_\delta\varphi - V), \quad (9.53)$$

при $V \geq 0$ положительно определена и, следовательно, удовлетворяет слабому энергетическому условию.

Если инвариантное действие зависит только от метрики и скалярного поля, то из инвариантности действия относительно общих преобразований координат следует зависимость уравнений движения:

$$2\tilde{\nabla}_\alpha S,^\alpha_\beta - S,^\alpha_\varphi \partial_\beta \varphi - S,^\alpha_{\varphi^\dagger} \partial_\beta \varphi^\dagger = 0. \quad (9.54)$$

Эта зависимость уравнений движения будет иметь место, например, в общей теории относительности, когда к действию Гильберта–Эйнштейна добавляется действие для комплексного скалярного поля.

Действие для комплексного скалярного поля инвариантно также относительно $\mathbb{U}(1)$ преобразований в пространстве-мишени (9.38). Эта инвариантность сохраняется и в аффинной геометрии, если компоненты метрики и связности не преобразуются. Таким образом, закон сохранения заряда для комплексного скалярного поля

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0,$$

где

$$J^\alpha = i\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}(\varphi^\dagger \partial_\beta \varphi - \varphi \partial_\beta \varphi^\dagger), \quad (9.55)$$

имеет место также на многообразиях с нетривиальной геометрией.

9.2.3. Комплексное скалярное поле в общей теории относительности. В общей теории относительности действие для комплексного скалярного поля при минимальной подстановке имеет вид

$$S = S_{\text{HE}} + S_\varphi,$$

где

$$S_\varphi = \int dx \sqrt{|g|} [g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^\dagger \partial_\beta \varphi - V(\varphi^\dagger \varphi)].$$

Уравнения Эйнштейна имеют прежний вид (9.21), где тензор энергии-импульса определен равенством (9.52). Их необходимо дополнить двумя уравнениями для скалярного поля (9.49) и (9.50).

Как и в случае действительного скалярного поля, действие оператора ковариантного дифференцирования на уравнения Эйнштейна приводит к ковариантному закону сохранения тензора энергии-импульса

$$\tilde{\nabla}^\beta T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi^\dagger (\tilde{\square} \varphi + V' \varphi) + \partial_\alpha \varphi (\tilde{\square} \varphi^\dagger + V' \varphi^\dagger) = 0.$$

Ясно, что если выполнены уравнения движения (9.49), (9.50), то тензор энергии-импульса сохраняется. Однако обратное утверждение теперь неверно, и аналога предложения 9.1.2 в комплексном случае нет.

Как и в случае действительного скалярного поля (9.22), из уравнений Эйнштейна можно исключить скалярную кривизну и переписать их в эквивалентном виде

$$\kappa \tilde{R}_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \varphi^\dagger \partial_\beta \varphi + \frac{2}{n-2} g_{\alpha\beta} (\Lambda + V). \quad (9.56)$$

При неминимальной подстановке также возможно появление инвариантности относительно преобразований Вейля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2.2. *Действие*

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^\dagger \partial_\beta \varphi - \frac{n-2}{4(n-1)} \varphi^\dagger \varphi \tilde{R} - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^{\frac{n}{n-2}} \right), \quad \lambda = \text{const}, \quad (9.57)$$

с точностью до граничных слагаемых инвариантно относительно преобразований Вейля:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}, \\ \varphi &\mapsto \bar{\varphi} = e^{-\frac{n-2}{2}\phi} \varphi, \\ \varphi^\dagger &\mapsto \bar{\varphi}^\dagger = e^{-\frac{n-2}{2}\phi} \varphi^\dagger, \end{aligned} \quad (9.58)$$

где $\phi(x) \in C^2(\mathbb{M})$ – произвольная вещественнозначная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем действие (9.57) через вещественную и мнимую части:

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \left(\partial\varphi_1^2 + \partial\varphi_2^2 - \frac{n-2}{4(n-1)} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \tilde{R} - \lambda (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{\frac{n}{n-2}} \right).$$

Первые три слагаемых инвариантны как сумма двух инвариантных слагаемых для φ_1 и φ_2 . Инвариантность последнего слагаемого просто проверяется.

9.3. Электромагнитное поле

Электромагнитное поле является важнейшим геометрическим объектом в математической физике. Оно наблюдается в экспериментах и широко используется на протяжении многих лет.

С геометрической точки зрения в природе существует следующая конструкция. Пространство-время, в котором мы живем, представляет собой четырехмерное многообразие $\mathbb{M}$. Строится главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(1))$, базой которого является пространство-время, а структурной группой – мультипликативная группа Ли комплексных чисел $\mathbb{U}(1)$, равных по модулю единице, которая изоморфна группе двумерных вращений $\mathbb{U}(1) \simeq \mathbb{SO}(2)$, и, как многообразие, диффеоморфна окружности, $\mathbb{U}(1) \approx \mathbb{S}^1$. На этом главном расслоении задается связность. Связность, в свою очередь, определяет форму связности и, после проектирования на базу с какого либо сечения, локальную форму связности:

$$\omega = dx^\alpha A_\alpha.$$

Группа $\mathbb{U}(1)$ одномерна, и поэтому форма ω принимает значения в $\mathbb{R}$, которое рассматривается как одномерное векторное пространство. Компоненты локальной формы связности $A_\alpha(x)$, после добавления уравнений Максвелла, называются в физике *потенциалом электромагнитного поля*, а соответствующие компоненты

$$F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (9.59)$$

локальной формы кривизны

$$F = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta F_{\alpha\beta} \quad (9.60)$$

– называются *напряженностью электромагнитного поля* или просто *электромагнитным полем*.

Как и любая другая форма кривизны, напряженность электромагнитного поля удовлетворяет тождествам Бианки, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (9.61)$$

Обозначим два локальных сечения главного расслоения через

$$e^{ia(x)}, e^{ia'(x)} \in \mathbb{U}(1), \quad a, a' \in [0, 2\pi].$$

Тогда существует некоторая функция $\phi(x)$, связывающая эти сечения:

$$e^{ia'(x)} = e^{i\phi(x)} e^{ia(x)}.$$

При переходе от одного локального сечения к другому компоненты локальной формы связности меняются по правилу, которое в данном случае принимает простой вид

$$A'_\alpha := A_\alpha + \partial_\alpha \phi. \quad (9.62)$$

Нетрудно видеть, что при калибровочном преобразовании (9.62) компоненты напряженности электромагнитного поля (9.59) не меняются.

Подчеркнем, что преобразование компонент локальной формы связности возникает в дифференциальной геометрии до того, как вводится понятие ковариантной производной.

Для построения полевых моделей математической физики одного электромагнитного поля недостаточно и поэтому выбирается некоторый набор дополнительных полей $\psi := \{\psi^A(x)\}$, $A = 1, \dots, N$. Если поля вещественнозначные, то группа $\mathbb{U}(1)$ действует на них тривиально, и они описывают в квантовой теории поля нейтральные частицы. Поэтому рассмотрим комплекснозначные поля. Мы предполагаем, что эти поля являются локальными сечениями некоторого векторного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}, \mathbb{U}(1), \mathbb{P})$, которое ассоциировано с главным расслоением $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(1))$. Оно имеет ту же базу $\mathbb{M}$ и структурную группу $\mathbb{U}(1)$. Типичным слоем ассоциированного расслоения является комплексное векторное пространство $\mathbb{V}$, комплексной размерности $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{V} = N$, в котором принимает значения поле $\psi \in \mathbb{V}$. Структурная группа $\mathbb{U}(1)$ действует в $\mathbb{V}$ в соответствии с некоторым представлением. Все неприводимые комплексные представления группы $\mathbb{U}(1)$ хорошо известны (см., например, [94]). Они одномерны и параметризуются произвольным целым числом k :

$$\mathbb{U}(1) \ni e^{i\phi} \mapsto e^{ik\phi} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (9.63)$$

Число k обязано быть целым, поскольку для группы $\mathbb{U}(1)$ мы отождествляем точки $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$.

Далее, мы предполагаем, что каждая компонента векторного поля ψ^A при действии структурной группы преобразуется по некоторому неприводимому представлению:

$$\mathbb{U}(1) \ni e^{i\phi} : \quad \psi^A \mapsto e^{ik_A \phi} \psi^A, \quad k_A \in \mathbb{Z}. \quad (9.64)$$

При переходе от одного локального сечения к другому, функция $\phi = \phi(x)$ является некоторой достаточно гладкой функцией на пространстве-времени, $x \in \mathbb{M}$, которая принимает значения в интервале $[0, 2\pi]$, концы которого отождествлены.

Преобразование (9.62), (9.64) является калибровочным, т.к. параметр преобразования $\phi(x)$ зависит от точки пространства-времени. Это преобразование называется также *градиентным*.

Связность в главном расслоении $\mathbb{P}$ определяет связности во всех ассоциированных расслоениях $\mathbb{E}$ и, следовательно, понятие ковариантной производной для локальных сечений. Для определения ковариантной производной, необходимо знать представление генератора группы $\mathbb{U}(1)$ в $\mathbb{C}$. Разлагая “матрицу” представления (9.64) вблизи единицы, получим

$$e^{ik_A \phi} = 1 + ik_A \phi + o(\phi).$$

Отсюда вытекает, что числа ik_A задают представления генератора группы $U(1)$, и, следовательно, ковариантная производная каждой компоненты поля ψ^A имеет вид

$$\nabla_\alpha \psi^A := (\partial_\alpha - ik_A A_\alpha) \psi^A. \quad (9.65)$$

Замечательным свойством ковариантной производной является, как легко проверить, ее тензорный характер при калибровочных преобразованиях (9.62) и (9.64):

$$\nabla_\alpha \psi^A \mapsto \nabla'_\alpha \psi'^A = e^{ik_A \phi(x)} \nabla_\alpha \psi^A,$$

где

$$\nabla'_\alpha \psi'^A := (\partial_\alpha - ik_A A'_\alpha) \psi'^A. \quad (9.66)$$

Калибровочное преобразование (9.64), (9.66) можно интерпретировать либо как переход между двумя сечениями главного и ассоциированного расслоений, которые определяют локальные формы связности и кривизны, либо как вертикальный автоморфизм. В первом случае калибровочное преобразование интерпретируется как пассивное, когда точки расслоения остаются на месте, а меняется только локальное сечение. Во втором случае калибровочное преобразование рассматривается как активное, когда точки расслоения сдвигаются под действием структурной группы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Описанная выше конструкция не зависит от того, задана ли или нет на многообразии M аффинная геометрия, т.е. метрика и аффинная связность. Ни одна из приведенных выше формул, включая тождества Бианки (9.61), не содержит метрики и аффинной связности.

При построении моделей математической физики для полей ψ необходимо написать некоторую систему уравнений. Мы предполагаем, что уравнения движения для полей, не взаимодействующих с электромагнитным полем, следуют из принципа наименьшего действия для некоторого инвариантного интеграла

$$S = \int_M dx L(\psi, \partial\psi),$$

где лагранжиан L зависит от полей $\psi = \{\psi^A\}$ и их производных $\partial\psi = \{\partial_\alpha \psi^A\}$. Как правило, лагранжиан также зависит от метрики и аффинной связности, которые используются для построения инвариантов. Тогда взаимодействие с электромагнитным полем вводится путем *минимальной подстановки*, которая заключается в замене всех частных производных на ковариантные:

$$\partial_\alpha \psi^A \mapsto \nabla_\alpha \psi^A := (\partial_\alpha - ik_A A_\alpha) \psi^A, \quad (9.67)$$

и добавлению к исходному лагранжиану лагранжиана для свободного электромагнитного поля:

$$L(\psi, \partial\psi) \mapsto -\frac{1}{4e^2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + L(\psi, \nabla\psi),$$

где подъем индексов напряженности электромагнитного поля осуществляется с помощью пространственно-временной метрики и e – универсальная постоянная электромагнитного взаимодействия.

Теперь сделаем переобозначение $A_\alpha \mapsto eA_\alpha$ для того, чтобы уравнения движения свободного электромагнитного поля не содержали константу связи e и можно было бы переходить к пределу $e \rightarrow 0$. Тогда лагранжиан примет вид

$$-\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + L(\psi, \nabla\psi),$$

где изменится выражение для ковариантной производной

$$\nabla_\alpha \psi^A := \partial_\alpha \psi^A - ie k_A A_\alpha \psi^A. \quad (9.68)$$

Коэффициент $q_A := ek_A$ описывает “силу” взаимодействия компоненты поля ψ^A с электромагнитным полем и называется *электрическим зарядом* данного поля. Для слабых электромагнитных полей именно величина q_A входит в закон Кулона (см., например, [6]).

Мы видим, что при минимальной подстановке заряды всех полей квантуются: они должны быть пропорциональны некоторому универсальному заряду e . Причина этого в том, что все неприводимые представления группы $\mathbb{U}(1)$ параметризуются целыми числами (9.63). И это соответствует действительности, т.к. заряды всех известных в настоящее время элементарных частиц кратны заряду электрона. Поэтому естественно считать, что e – это заряд электрона. Таким образом, дифференциальная геометрия диктует нам *квантование электрического заряда*.

ЗАМЕЧАНИЕ. В моделях, объединяющих электрослабые и сильные взаимодействия, существенную роль играют кварки, электрический заряд которых пропорционален одной трети заряда электрона. В этом нет ничего страшного. Если кварки будут обнаружены экспериментально, то под e надо понимать $1/3$ заряда электрона.

ЗАМЕЧАНИЕ. Электроны в квантовой электродинамике описываются спинорным полем, которое имеет четыре комплексные компоненты. В этом случае для каждой из этих компонент следует положить $k_A = -1$.

В релятивистских теориях поля пространство-время отождествляется с пространством Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ некоторого числа измерений. Поскольку пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ как многообразие диффеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, то все расслоения тривиальны:

$$\mathbb{P} \simeq \mathbb{R}^{1,n-1} \times \mathbb{U}(1), \quad \mathbb{E} \simeq \mathbb{R}^{1,n-1} \times \mathbb{V}.$$

Это означает, что топология пространства-времени в релятивистских моделях при наличии электромагнитного поля всегда тривиальна, и все поля определены глобально в соответствующей системе координат, покрывающей все пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$. Нетривиальной может быть только геометрия, если кривизна $\mathbb{U}(1)$ связности отлична от нуля.

Однако, в моделях математической физики, как правило, компоненты связности ищутся путем решения некоторых уравнений. Если окажется так, что соответствующие решения определены не во всем пространстве Минковского, а лишь на некотором подмногообразии $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{1,n-1}$, то возникает главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{U}, \pi, \mathbb{U}(1))$ с другой базой $\mathbb{U}$. В этом случае топология $\mathbb{U}$ может быть нетривиальной, и можно говорить о топологических эффектах. Такова, например, ситуация с монополем Дирака.

Точечные частицы в (псевдо)римановом пространстве движутся вдоль мировых линий $q_i(t) = \{q_i^\alpha(t)\} \in \mathbb{M}$, $i = 1, 2, \dots$. Если каждой частице приписать заряд e_i , то минимальная подстановка состоит в добавлении к лагранжиану свободной частицы (см. 6.2.5) лагранжиана взаимодействия:

$$-m\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{q}_i^\alpha\dot{q}_i^\beta} \mapsto -m\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{q}_i^\alpha\dot{q}_i^\beta} + e_i A_\alpha \dot{q}_i^\alpha,$$

где $\dot{q}_i := dq_i/dt$ – скорость частицы.

Мы считаем, что при калибровочном $\mathbb{U}(1)$ преобразовании (9.62) координаты частиц не меняются. Тогда лагранжиан минимального взаимодействия с частицей сам по себе не инвариантен:

$$e_i A_\alpha \dot{q}_i^\alpha \mapsto e_i A_\alpha \dot{q}_i^\alpha + e_i \partial_\alpha \phi \dot{q}_i^\alpha = e_i A_\alpha \dot{q}_i^\alpha + e_i \frac{d\phi}{dt}.$$

Однако при интегрировании вдоль мировой линии частицы,

$$e_1 \int_{q_1}^{q_2} dt \partial_\alpha \phi \dot{q}_1^\alpha = e_1 [\phi(q_2) - \phi(q_1)],$$

результат зависит только от положения начальной и конечной точек q_1, q_2 , но не от траектории частицы. Отсюда вытекает инвариантность действия при фиксированных граничных условиях и, следовательно, ковариантность уравнений движения для точечной частицы, минимальным образом взаимодействующей с электромагнитным полем.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если рассматривать только замкнутые траектории с началом и концом в точке q_1 , то интеграл

$$\oint dt \dot{q}^\alpha A_\alpha, \quad (9.69)$$

определяет элемент группы голономии $U(1)$ связности в главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, U(1))$ в точке $q_1 \in \mathbb{M}$.

В моделях математической физики считается, что в экспериментах можно наблюдать только калибровочно инвариантные объекты. Таковыми являются компоненты напряженности электромагнитного поля, которые, как мы увидим ниже, отождествляются с напряженностью электрического и магнитного полей. При этом сам потенциал электромагнитного поля A_α считается ненаблюдаемым, т.к. зависит от выбора калибровки. Однако, наблюдаемым также является элемент группы голономии (9.69), который инвариантен относительно калибровочных преобразований. Это свойство называется эффектом Ааронова–Бома.

Для точечных частиц заряд e_1 может быть произволен, и его квантование не вытекает из описанного выше подхода.

В настоящей главе мы не будем рассматривать взаимодействие точечных частиц с электромагнитным полем.

Теперь перейдем к описанию свободного электромагнитного поля в пространстве Минковского.

9.3.1. Лагранжева формулировка. Пусть задано пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ произвольного числа измерений и декартова система координат x^α , $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$. *Электромагнитное поле* описывается компонентами $A_\alpha(x)$ локальной формы $U(1)$ связности на пространстве Минковского. Оно является ковекторным полем по отношению к преобразованиям координат – в данном случае – по отношению к преобразованиям Лоренца. Временную и пространственные компоненты электромагнитного поля будем обозначать следующим образом:

$$A_\alpha = \{A_0, A_\mu\}, \quad \mu = 1, \dots, n-1. \quad (9.70)$$

То есть греческие буквы из середины алфавита будут пробегать только пространственные значения.

Действие для свободного электромагнитного поля, по определению, имеет вид

$$S_{\text{EM}} = \int dx L_{\text{EM}}, \quad L_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (9.71)$$

где подъем и опускание индексов производится с помощью метрики Минковского $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+ - \dots -)$ и $F_{\alpha\beta}$ – напряженность электромагнитного поля (9.59). Кроме этого мы положили заряд электрона (константу связи) равным единице. Поле $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ является антисимметричным ковариантным тензором второго ранга типа $(0, 2)$ и представляет собой компоненты локальной 2-формы кривизны (9.60) $U(1)$ связности.

Из безразмерности действия (9.71) следует, что размерность электромагнитного потенциала равна

$$[A_\alpha] = l^{1-\frac{n}{2}}. \quad (9.72)$$

В четырехмерном пространстве-времени размерность потенциала равна обратной длине, $[A_\alpha] = l^{-1}$.

Уравнения движения для действия (9.71) линейны:

$$S_{\text{ЕМ}, \alpha} := \frac{\delta S_{\text{ЕМ}}}{\delta A_\alpha} = \partial_\beta F^{\beta\alpha} = 0. \quad (9.73)$$

Поэтому мы говорим, что действие (9.71) описывает свободное электромагнитное поле.

Лагранжиан (9.71), напряженность (9.59) и уравнения движения (9.73) инвариантны относительно калибровочных преобразований (9.62) действующих только на поля и не затрагивающих координаты. Из калибровочной инвариантности, согласно второй теореме Нетер, следует, что между уравнениями движения имеется линейная зависимость:

$$\partial_\alpha S_{\text{ЕМ}, \alpha} = 0. \quad (9.74)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что добавление массового члена $-\frac{1}{2}m^2 A^\alpha A_\alpha$ к лагранжиану электромагнитного поля (9.71) нарушает калибровочную инвариантность электродинамики.

ПРИМЕР 9.3.1. Напомним, что в *четырёхмерном* пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ напряженности электрического и магнитного полей связаны с потенциалом $A_\alpha = \{A_0, \mathbf{A}\}$ известными соотношениями (см., например, [6]):

$$\mathbf{E} = \text{grad } A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (9.75)$$

где жирным шрифтом обозначены трехмерные векторы. Это значит, что временная компонента электромагнитного поля A_0 является электростатическим потенциалом, а трехмерный ковектор $\mathbf{A}$ – векторным потенциалом магнитного поля. Отсюда вытекает, что все компоненты напряженности электромагнитного поля определяются напряженностями электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.76)$$

Лагранжиан электромагнитного поля (9.71) также можно выразить через напряженности электрического и магнитного полей:

$$L_{\text{ЕМ}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2).$$

Проанализируем уравнения Эйлера–Лагранжа (9.73) в пространстве Минковского произвольного числа измерений подробнее. Для временной и пространственных компонент электромагнитного поля уравнения движения имеют вид

$$-\Delta A_0 - \partial_0 \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (9.77)$$

$$\square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\mu \partial_0 A^0 = 0, \quad (9.78)$$

где введены операторы Лапласа и Даламбера:

$$\Delta := -\partial^\mu \partial_\mu = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_{n-1}^2, \quad \square := \partial^\alpha \partial_\alpha = \partial_0^2 - \Delta.$$

Уравнение для временной составляющей (9.77) для каждого момента времени представляет собой уравнение Пуассона в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ с правой частью, определяемой пространственными компонентами. Сформулируем две теоремы о существовании и единственности решения этого уравнения во всем пространстве и в ограниченной области, доказательство которых приведено, например, в [76].

ТЕОРЕМА 9.3.1. *Если правая часть уравнения Пуассона дифференцируема и убывает на бесконечности, то решение уравнения Пуассона во всем пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$, существует и единственно в классе обобщенных функций, обращающихся в нуль на бесконечности. При этом решением уравнения Пуассона является дважды непрерывно дифференцируемая функция во всем пространстве и убывающая на бесконечности.*

ТЕОРЕМА 9.3.2. *Если правая часть уравнения Пуассона дифференцируема в ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$, с кусочно гладкой границей ∂U и непрерывна в замыкании $\bar{U}$, то решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона существует, единственно и непрерывно зависит от граничных условий на ∂U .*

Если для внешней задачи Дирихле предположить, что правая часть уравнения Пуассона и решение стремятся к нулю на бесконечности, то справедлива аналогичная теорема для внешней задачи Дирихле. Аналогичные теоремы справедливы также для задачи Неймана, когда на границе задается значение нормальной производной искомой функции. В последнем случае решение определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Приведенные теоремы показывают, что при достаточно общих предположениях оператор Лапласа в евклидовом пространстве, а также в ограниченной области с заданными граничными условиями обратим, и решение уравнения Пуассона (9.77) можно формально записать в виде

$$A_0 = -\Delta^{-1} \partial_0 \partial_\mu A^\mu, \quad (9.79)$$

где Δ^{-1} – “обратный” оператор Лапласа. Конечно, в строгом смысле оператор Лапласа необратим, т.к. решение уравнения Пуассона в общем случае определяется с точностью до произвольной гармонической функции. Тем не менее такая запись удобна и часто употребляется в физической литературе, предполагая, что решение соответствующего уравнения Пуассона однозначно выделено, например, с помощью граничных условий. Запись (9.79) означает, что в каждый момент времени временная компонента электромагнитного поля однозначно определяется пространственными компонентами.

Теперь рассмотрим уравнение для пространственных компонент (9.78). Пространственные компоненты электромагнитного поля A_μ образуют ковектор в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Если поле A_μ непрерывно дифференцируемо, то при достаточно общих граничных условиях его можно взаимно однозначно разложить на *поперечную* (соленоидальную) и *продольную* (потенциальную) составляющие:

$$A_\mu = A_\mu^T + A_\mu^L, \quad (9.80)$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\partial_\mu A^{T\mu} = 0, \quad (9.81)$$

$$\partial_\mu A_\nu^L - \partial_\nu A_\mu^L = 0. \quad (9.82)$$

Формула (9.80) однозначно определяет ковекторное поле A_μ при заданных полях A_μ^T и A_μ^L . Покажем, что пространственная часть электромагнитного поля A_μ также однозначно определяет свою продольную и поперечную составляющую. В силу леммы Пуанкаре из условия (9.82) следует, что продольная составляющая, по крайней мере локально, является градиентом от

некоторой функции $\varphi(x)$, определенной с точностью до постоянной, которая фиксируется граничными условиями. Для односвязных многообразий, как в нашем случае, это утверждение является глобальным. Запишем данное свойство в виде равенства

$$A_\mu = A_\mu^T + \partial_\mu \varphi. \quad (9.83)$$

Дифференцирование данного соотношения с учетом условия (9.81) приводит к тому, что скалярное поле, соответствующее продольной составляющей, является решением уравнения Пуассона:

$$\Delta \varphi = -\partial_\mu A^\mu, \quad \Delta := -\partial^\mu \partial_\mu, \quad (9.84)$$

которое существует и единственно при достаточно общих граничных условиях (см. теоремы 9.3.1, 9.3.2). После этого поперечная составляющая однозначно определена:

$$A_\mu^T = A_\mu - \partial_\mu \varphi. \quad (9.85)$$

Нетрудно проверить, что ее дивергенция действительно равна нулю. Таким образом, вместо $n-1$ компоненты ковекторного поля A_μ можно рассматривать скалярное поле φ , определяемое уравнением (9.84), и соленоидальное ковекторное поле A_μ^T (9.85). При таком разложении число независимых компонент сохранено, т.к. поперечное ковекторное поле имеет $n-2$ независимые компоненты в силу дополнительного условия (9.81).

В квантовой теории поля теоремы 9.3.1 и 9.3.2 часто не выполняются. В основе этой теории лежит метод вторичного квантования, который существенно опирается на преобразование Фурье. Плоские волны $A_\mu = A_{0\mu}(k) e^{ikx}$, $\mathbf{k} = \{k^\mu\} \in \mathbb{R}^3$ не убывают на бесконечности и, следовательно, условия теоремы 9.3.1 нарушаются. Если $\mathbf{k} \neq 0$, то разложение на продольную и поперечную части проводится с помощью проекционных операторов:

$$A_\mu^T := \left(\delta_\mu^\nu - \frac{k_\mu k^\nu}{\mathbf{k}^2} \right) A_\nu, \quad A_\mu^L := \frac{k_\mu k^\nu}{\mathbf{k}^2} A_\nu, \quad (9.86)$$

где $\mathbf{k}^2 := -k^\mu k^\nu \eta_{\mu\nu}$. Это значит, что ковекторы A^T и A^L соответственно перпендикулярны и параллельны направлению распространения волны. Ясно, что разложение плоской волны (9.86) взаимно однозначно. Кроме этого, разложение (9.86) согласуется с данным ранее определением (9.81), (9.82). Отсюда, кстати, и название “продольные” и “поперечные” волны.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n=2$ поперечная составляющая у электромагнитного поля отсутствует.

Перепишем уравнения движения (9.77), (9.78) для продольной и поперечной части:

$$-\Delta A_0 + \Delta \dot{\varphi} = 0, \quad (9.87)$$

$$\partial_\mu \square \varphi + \partial_\mu \Delta \varphi - \partial_\mu \ddot{\varphi} = 0, \quad (9.88)$$

$$\square A_\mu^T = 0, \quad (9.89)$$

где уравнение (9.78) также расщеплено на продольную и поперечную части. Для полей, убывающих на бесконечности, уравнение (9.87) для временной компоненты электромагнитного поля легко решается: $A_0 = \dot{\varphi}$, поскольку решение уравнения Лапласа в данном случае единственно. Уравнение (9.88) тождественно удовлетворяется. Поскольку все проделанные операции обратимы, то мы доказали следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3.1. Для полей, убывающих на бесконечности, лагранжесвы уравнения движения для электромагнитного поля (9.73) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$A_0 = \dot{\varphi}, \quad (9.90)$$

$$\square A_\mu^T = 0, \quad (9.91)$$

дополненной определением поля φ (9.83), (9.84).

Тот факт, что n лагранжевых уравнений оказались эквивалентными $n - 1$ уравнению (9.90), (9.91) не является удивительным. Как уже отмечалось, из-за калибровочной симметрии, в силу второй теоремы Нетер, между исходными уравнениями движения имеется одно линейное соотношение (9.74).

Если рассматривать задачу Коши для электромагнитного поля, то мы видим, что она может быть поставлена только для поперечных компонент электромагнитного потенциала. Следовательно, электромагнитное поле описывает только $n - 2$ физических (распространяющихся) степени свободы. При этом скалярное поле φ является произвольной функцией (непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей граничным условиям для рассматриваемой физической задачи), т.к. для нее нет ни одного уравнения. Временная компонента электромагнитного потенциала выражается через φ . Конечно, можно считать наоборот, что компонента A_0 произвольна, а функция φ находится из уравнения (9.90).

Поперечные степени свободы являются распространяющимися и соответствуют электромагнитным волнам. В двух измерениях электромагнитное поле не описывает ни одной степени свободы и электромагнитное излучение отсутствует. В пространстве Минковского трех и четырех измерений электромагнитное поле имеет соответственно одну и две степени свободы.

То обстоятельство, что мы не получили ни одного уравнения на продольную составляющую является следствием калибровочной инвариантности электродинамики относительно преобразований (9.62). Нетрудно проверить, что напряженность электромагнитного поля при выполнении уравнения движения (9.90) зависит только от поперечных компонент:

$$F_{0\mu} = \partial_0 A_\mu^T, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^T - \partial_\nu A_\mu^T. \quad (9.92)$$

Калибровочные преобразования (9.62) для компонент электромагнитного поля выглядят следующим образом:

$$A'_0 = A_0 + \partial_0 \phi, \quad (9.93)$$

$$\varphi' = \varphi + \phi, \quad (9.94)$$

$$A'^T_\mu = A^T_\mu. \quad (9.95)$$

Используя произвольную функцию $\phi(x)$ можно зафиксировать одну из компонент электромагнитного поля A_0 или φ , то есть придать им определенные наперед заданные значения, которые, конечно, должны быть согласованы с уравнением (9.90). Это называется *фиксированием калибровки* и упрощает решение уравнений Эйлера–Лагранжа, т.к. устраняет функциональный произвол в общем решении и уменьшает число неизвестных функций. Наложение калибровочных условий необходимо также для построения квантовой теории. Например, можно положить $A_0 = 0$ и $\varphi = 0$. Для полей, убывающих на бесконечности, последнее условие эквивалентно *кулоновской* калибровке $\partial_\mu A^\mu = 0$. Среди калибровок, наиболее часто использующихся в электродинамике, отметим следующие¹:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= 0 && \text{— кулоновская калибровка,} \\ \partial_\alpha A^\alpha &= 0 && \text{— лоренцева калибровка,} \\ A_0 &= 0 && \text{— временная калибровка,} \\ A_3 &= 0 && \text{— аксиальная калибровка.} \end{aligned} \quad (9.96)$$

¹Лоренцеву калибровку ввел датский физик Ludwig Lorenz в 1867 году, а не голландский физик Н. А. Lorentz (на русский язык обе фамилии в настоящее время принято переводить одинаково, хотя ранее фамилия Lorentz переводилась, как Лорентц), в честь которого названы преобразования Лоренца. По этому поводу см. [95]

Из этих калибровок только кулоновская и аксиальная являются каноническими (см. раздел 6.2.3). Лоренцева калибровка содержит производную по времени: $\partial_0 A^0 + \partial_\mu A^\mu = 0$. Временная калибровка с гамильтоновой точки зрения фиксирует множитель Лагранжа и оставляет произвол в определении пространственных компонент электромагнитного потенциала A_μ .

Мы называем поля A_0 и A_μ^L нефизическими только потому, что для них нет задачи Коши. Однако это не означает, что они всегда равны нулю и не наблюдаются. Напротив, электростатический потенциал A_0 очень даже наблюдается, например, при взаимодействии точечных зарядов в законе Кулона.

9.3.2. Законы сохранения. Действие для свободного электромагнитного поля в пространстве Минковского инвариантно относительно глобального действия группы Пуанкаре и локальных калибровочных преобразований (9.62). Из теоремы Нетер отсюда следуют законы сохранения тензора энергии-импульса, момента количества движения и вектора электромагнитного тока. Поскольку калибровочные преобразования локальны, то вторая теорема Нетер приводит также к зависимости уравнений движения (9.74), которая была отмечена раньше.

Явное выражение для тензора энергии-импульса (7.171) в случае электромагнитного поля принимает вид

$$\hat{T}_{\alpha\beta} := \hat{T}_\alpha{}^\gamma \eta_{\gamma\beta} = -\partial_\alpha A_\gamma F_\beta{}^\gamma + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F^2. \quad (9.97)$$

Первое слагаемое в этой формуле явно несимметрично относительно перестановки индексов. Воспользуемся произволом (5.39) в определении тензора энергии-импульса и определим новый симметричный тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta}^s = -F_{\alpha\gamma} F_\beta{}^\gamma + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F^2 = \hat{T}_{\alpha\beta} + \partial_\gamma A_\alpha F_\beta{}^\gamma. \quad (9.98)$$

С учетом уравнений движения для электромагнитного поля (9.73) разность между новым и старым выражением принимает вид

$$T_{\alpha}{}^\beta{}^s - \hat{T}_{\alpha}{}^\beta = \partial_\gamma (A_\alpha F^{\beta\gamma}), \quad (9.99)$$

что согласуется с видом добавочного члена (5.39). Важным обстоятельством является то, что симметричный тензор энергии-импульса (9.98) калибровочно инвариантен. Закон сохранения энергии-импульса имеет вид (5.45),

$$\partial_\beta T_{\alpha}{}^\beta{}^s = \partial_\beta \hat{T}_{\alpha}{}^\beta = 0,$$

для любого решения уравнений движения.

Лоренцевы вращения для электромагнитного поля записываются в виде

$$\delta x^\alpha = -x^\beta \omega_\beta{}^\alpha, \quad \delta A_\alpha = \omega_\alpha{}^\beta A_\beta, \quad (9.100)$$

где $\omega_{\alpha\beta} := \omega_\alpha{}^\gamma \eta_{\gamma\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ – параметр преобразования. Поэтому для спинного момента (5.54) получаем следующее выражение

$$S_{\alpha\beta}{}^\gamma = A_\alpha F_\beta{}^\gamma - A_\beta F_\alpha{}^\gamma. \quad (9.101)$$

Полный тензор момента количества движения (5.52) состоит из орбитального и спинного моментов:

$$\hat{J}_{\alpha\beta}{}^\gamma = x_\beta \hat{T}_\alpha{}^\gamma - x_\alpha \hat{T}_\beta{}^\gamma + S_{\alpha\beta}{}^\gamma. \quad (9.102)$$

Используя выражения для симметричного тензора энергии-импульса (9.98) и спинового момента (9.101) его можно переписать в виде

$$\hat{J}_{\alpha\beta}{}^\gamma = M_{\alpha\beta}{}^\gamma + \partial_\delta (x_\alpha A_\beta F^{\gamma\delta} - x_\beta A_\alpha F^{\gamma\delta}), \quad (9.103)$$

где

$$M_{\alpha\beta}{}^\gamma := x_\beta T_\alpha^{\text{s}\gamma} - x_\alpha T_\beta^{\text{s}\gamma}$$

– орбитальный момент, построенный по симметричному тензору энергии-импульса (9.99). Поскольку второе слагаемое в выражении (9.103) имеет вид (5.39), то тензор момента количества движения можно переопределить, положив

$$J_{\alpha\beta}{}^\gamma = M_{\alpha\beta}{}^\gamma = x_\beta T_\alpha^{\text{s}\gamma} - x_\alpha T_\beta^{\text{s}\gamma}, \quad (9.104)$$

который также сохраняется

$$\partial_\gamma J_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0.$$

Отметим полное отсутствие спинового момента в этом выражении.

С калибровочной инвариантностью электродинамики связан закон сохранения заряда

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0, \quad (9.105)$$

где

$$J^\alpha = \partial_\beta F^{\beta\alpha} \quad (9.106)$$

– ток, соответствующий первой теореме Нетер, то есть, когда параметр калибровочных преобразований не зависит от точки пространства-времени. В данном случае закон сохранения заряда (9.105) совпадает с зависимостью уравнений движения, вытекающей из второй теоремы Нетер (9.74). При отсутствии полей материи этот закон тривиален, т.к. ток равен нулю в силу уравнений движения (9.73).

9.3.3. Гамильтонова формулировка. Свободное электромагнитное поле является относительно простым и важным примером калибровочной модели. Ниже мы используем общий гамильтонов анализ для систем со связями, описанный в разделе 6.2.3.

Электромагнитному потенциалу A_α соответствуют канонически сопряженные импульсы

$$P^\alpha := \frac{\partial L_{\text{EM}}}{\partial(\partial_0 A_\alpha)} = F^{\alpha 0}. \quad (9.107)$$

По определению, скобки Пуассона между координатами и импульсами в каждый момент времени имеют вид

$$[A_\alpha, P'^\beta] := [A_\alpha(t, \mathbf{x}), P^\beta(t, \mathbf{x}')] = \delta_\alpha^\beta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (9.108)$$

где $(n-1)$ -мерная δ -функция зависит только от пространственных координат. Ввиду антисимметрии напряженности электромагнитного поля в теории возникает первичная связь

$$G_1 := P^0 \approx 0, \quad (9.109)$$

где волнистый знак равенства $\approx$ обозначает, что равенство должно быть выполнено на поверхности всех связей. Других первичных связей электродинамика без полей материи не содержит. Гамильтониан получается простым вычислением

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2} P^\mu P_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_0 \partial_\mu P^\mu + \lambda P^0 \right), \quad (9.110)$$

где мы добавили первичную связь (9.109) с множителем Лагранжа λ . Гамильтоновы уравнения движения для построенного гамильтониана имеют следующий вид:

$$\dot{A}_0 = \lambda, \quad (9.111)$$

$$\dot{A}_\mu = -P_\mu + \partial_\mu A_0, \quad (9.112)$$

$$\dot{P}^0 = \partial_\mu P^\mu, \quad (9.113)$$

$$\dot{P}^\mu = \partial_\nu F^{\nu\mu}, \quad (9.114)$$

которые необходимо дополнить уравнением первичной связи (9.109), возникающей при варьировании соответствующего действия по множителю Лагранжа.

В уравнении (9.111) множитель Лагранжа действительно является произвольной функцией. Чтобы убедиться в этом, необходимо проверить самосогласованность уравнений движения при произвольных λ . Поскольку в теории есть связь, то она должна сохраняться во времени. То есть правая часть уравнения (9.113) должна быть равна нулю для любого решения. Вычислим производную по времени:

$$\partial_0(\partial_\mu P^\mu) = [\partial_\mu P^\mu, \mathcal{H}] = \partial_{\mu\nu}^2 F^{\nu\mu} = 0,$$

где мы использовали антисимметрию компонент напряженности. Поэтому, если связь (9.109) выполнена в начальный момент времени, то она будет удовлетворяться и в последующие моменты времени. Таким образом, у нас имеется только четыре уравнения (9.111)–(9.114) на пять функций. Поэтому функцию λ можно рассматривать как произвольную.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3.2. *Для полей, убывающих на бесконечности, гамильтоновы уравнения движения для электромагнитного поля (9.109), (9.111)–(9.114) эквивалентны лагранжевым уравнениям (9.73).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены гамильтоновы уравнения. Из уравнения (9.112) находим импульсы

$$P_\mu = -\dot{A}_\mu + \partial_\mu A_0 = F_{\mu 0}.$$

Тогда уравнение (9.114) примет вид лагранжева уравнения

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} = 0.$$

Поскольку $P^0 = 0$, то уравнение (9.113) примет вид $\partial_\mu P^\mu$ или, с учетом выражения для импульсов

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = 0.$$

Таким образом, лагранжевы уравнения являются следствием гамильтоновых. При этом мы никак не использовали уравнение для временной компоненты (9.111).

Обратно. Пусть выполнены лагранжевы уравнения. Обозначим $P^\alpha := F^{\alpha 0}$. Тогда выполнены уравнения (9.112) и связь $P^0 = 0$. Лагранжевы уравнения в новых переменных примут вид

$$\partial_\mu P^\mu = 0, \quad -\dot{P}^\mu + \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0,$$

что эквивалентно гамильтоновым уравнениям (9.113), (9.114) с учетом условия $P^0 = 0$. Осталось показать, что уравнение (9.111) является следствием лагранжевых уравнений. Ранее мы доказали, что лагранжевы уравнения эквивалентны системе уравнений (9.90), (9.91). В уравнении (9.90) функция φ , а в уравнении (9.111) функция λ являются совершенно произвольными. Поэтому можно положить $\lambda = \ddot{\varphi}$, и тогда эти уравнения совпадут.

ЗАМЕЧАНИЕ. В гамильтониан (9.110) необходимо добавить первичную связь, т.к. в противном случае эквивалентности между гамильтоновыми и лагранжевыми уравнениями не будет.

Продолжим построение гамильтонова формализма согласно общей схеме анализа систем со связями. Производная по времени от первичной связи (9.109) равна

$$\dot{G}_1 = [P^0, \mathcal{H}] = \partial_\mu P^\mu. \quad (9.115)$$

Это приводит к вторичной связи

$$G_2 := \partial_\mu P^\mu \approx 0. \quad (9.116)$$

Нетрудно проверить, что других связей в теории нет. Связи G_1 и G_2 являются функционально независимыми связями первого рода, т.к. их скобка Пуассона равна нулю:

$$[G_1, G_2] = 0.$$

К полному гамильтониану теории мы добавляем все связи:

$$\mathcal{H}_T = \int d\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2} P^\mu P_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \lambda P^0 + \mu \partial_\mu P^\mu \right), \quad (9.117)$$

где $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ – множители Лагранжа. На поверхности связей $G_1 = 0$ и $G_2 = 0$ гамильтонова плотность, очевидно, положительно определена.

В лагранжевом формализме действие инвариантно относительно калибровочных преобразований (9.62), которые параметризуются одной произвольной функцией $\phi(x)$. Согласно второй теореме Нетер это приводит к зависимости уравнений движения (9.74). Покажем, что в гамильтоновом формализме действие инвариантно относительно калибровочных преобразований, параметризующихся не одной, а двумя произвольными функциями, по числу связей первого рода, и уравнения движения удовлетворяют двум тождествам. Удвоение числа локальных симметрий произошло потому что в гамильтоновом формализме калибровочный параметр $\phi(x)$ и его временная производная $\dot{\phi}(x)$ рассматриваются как независимые функции и параметризуют, соответственно, различные калибровочные преобразования.

Выразим полное действие для свободного электромагнитного поля через координаты и импульсы:

$$S_T = \int dx \left(P^\alpha \dot{A}_\alpha + \frac{1}{2} P^\mu P_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \lambda P^0 - \mu \partial_\mu P^\mu \right). \quad (9.118)$$

Полное действие совпадает с исходным действием (9.71) в лагранжевой формулировке только при $\lambda = 0$ и $\mu = A_0$ и поэтому является более общим. Уравнения Эйлера–Лагранжа для действия (9.118) принимают вид

$$\frac{\delta S_T}{\delta P^0} = \dot{A}_0 - \lambda = 0, \quad (9.119)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta P^\mu} = \dot{A}_\mu + P_\mu + \partial_\mu \mu = 0, \quad (9.120)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta A_0} = -\dot{P}^0 = 0, \quad (9.121)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta A_\mu} = -\dot{P}^\mu - \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (9.122)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta \lambda} = -P^0 = 0, \quad (9.123)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta \mu} = -\partial_\mu P^\mu = 0. \quad (9.124)$$

Согласно теореме 6.2.3 каждой связи первого рода соответствует калибровочное преобразование, относительно которого полное действие инвариантно. Первичной связи (9.109) соответствует генератор калибровочных преобразований

$$T_1 = \int d\mathbf{x} \, \epsilon_1 P^0$$

с некоторым малым параметром $\epsilon_1(x)$. При этом преобразуется только временная компонента электромагнитного поля A_0 и множитель Лагранжа λ :

$$\delta_1 A_0 = [A_0, T_1] = \epsilon_1, \quad \delta_1 \lambda = \dot{\epsilon}_1. \quad (9.125)$$

Все остальные поля остаются без изменения. Согласно второй теореме Нетер из инвариантности действия относительно калибровочного преобразования (9.125) следует зависимость уравнений движения

$$\frac{\delta S_T}{\delta A_0} - \partial_t \frac{\delta S_T}{\delta \lambda} = 0.$$

В справедливости этого тождества нетрудно убедиться прямой проверкой.

Вторичной связи первого рода (9.116) также соответствует генератор преобразований

$$T_2 = \int d\mathbf{x} \, \epsilon_2 \partial_\mu P^\mu,$$

где $\epsilon_2(x)$ – малый параметр второго калибровочного преобразования. В этом случае преобразуются только пространственные компоненты электромагнитного потенциала A_μ и множитель Лагранжа μ :

$$\delta_2 A_\mu = -\partial_\mu \epsilon_2, \quad \delta_2 \mu = \dot{\epsilon}_2.$$

Из инвариантности действия следует зависимость уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\partial_\mu \frac{\delta S_T}{\delta A_\mu} - \partial_t \frac{\delta S_T}{\delta \mu} = 0,$$

что также легко проверить. Таким образом, число параметров калибровочных преобразований полного действия S_T в гамильтоновом формализме по сравнению с лоренцевой формулировкой удвоилось. Эта ситуация типична для калибровочных моделей, когда в лагранжевом формализме локальные преобразования зависят как от самого параметра, так и от его производной по времени.

Генератором калибровочных преобразований в лагранжевом формализме (9.62) является линейная комбинация связей первого рода:

$$T = \int dx (\dot{\epsilon} P^0 - \epsilon \partial_\mu P^\mu).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \delta A_0 &= [A_0, T] = \dot{\epsilon}, \\ \delta A_\mu &= [A_\mu, T] = \partial_\mu \epsilon. \end{aligned}$$

Теперь проанализируем гамильтоновы уравнения движения (9.119)–(9.124) и связи (9.109), (9.116) без фиксирования какой-либо калибровки. Для определенности и простоты будем рассматривать задачу в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ для гладких функций достаточно быстро убывающих на бесконечности. По аналогии с разложением электромагнитного поля на поперечную и продольную части (9.83) разложим также импульсы:

$$P_\mu = -P^\mu = P_\mu^T + P_\mu^L,$$

где

$$\partial_\mu P^{T\mu} = 0, \quad P_\mu^L = \partial_\mu \chi.$$

В этом разложении скалярное поле $\chi(x)$ для каждого момента времени является решением уравнения Пуассона

$$\Delta \chi = -\partial_\mu P^\mu = -\partial_\mu P^{L\mu}.$$

Для широкого класса граничных условий в односвязных областях разложение импульсов на продольную и поперечную части является взаимно однозначным. Тогда связь (9.116) примет вид

$$\partial_\mu P^\mu = \partial_\mu P^{L\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \chi = 0.$$

В рассматриваемом случае мы имеем единственное решение $\chi = 0$, что влечет за собой отсутствие продольной составляющей импульса, $P^{L\mu} = 0$.

Запишем уравнение движения для электромагнитного потенциала (9.120) отдельно для продольной и поперечной компоненты:

$$\dot{A}_\mu^T = -P_\mu^T, \quad \dot{A}_\mu^L = -P_\mu^L - \partial_\mu \mu. \quad (9.126)$$

Последнее уравнение можно переписать в терминах потенциала $A_\mu^L = \partial_\mu \varphi$ и один раз проинтегрировать:

$$\dot{\varphi} = -\chi - \mu = \Delta^{-1} \partial_\mu P^\mu - \mu.$$

Отсюда следует, что эволюция продольной A_μ^L составляющей электромагнитного поля произвольна, так как определяется множителем Лагранжа.

С учетом уравнения движения для временной компоненты A_0 , мы видим, что эволюция компонент A_0 и A_μ^L совершенно произвольна, т.к. определяется множителями Лагранжа. При этом уравнения связей позволяют найти сопряженные импульсы $P^0 = 0$ и $P^{L\mu} = 0$. В то же время множители Лагранжа не входят в уравнения движения для поперечных компонент A_μ^T и $P^{T\mu}$. Мы видим, что временная и продольные компоненты соответствуют калибровочным степеням свободы и являются нефизическими.

В теории свободного электромагнитного поля связи можно решить и выписать в явном виде эффективное действие для физических степеней свободы (см. раздел 6.2.3). Ввиду важности этой процедуры, остановимся на ней подробно.

Электродинамика без полей материи содержит две связи первого рода

$$G_A = \{G_1, G_2\} = 0, \quad A = 1, 2.$$

В соответствии с общим правилом (см. раздел 6.2.3) наложим два калибровочных условия:

$$F^A = \{F^1, F^2\} = \{A_0, \partial_\mu A^\mu\} = 0.$$

Второе калибровочное условие $\partial_\mu A^\mu = 0$ является уравнением только на продольную составляющую электромагнитного поля:

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu A^{L\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \varphi = 0.$$

При нулевых граничных условиях на бесконечности это уравнение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ имеет единственное решение $\varphi = 0$, т.е. у пространственных компонент ковектора A_μ отсутствует продольная составляющая. Эта калибровка называется кулоновской.

Обобщенный гамильтониан электродинамики, который получается после добавления всех связей и калибровочных условий, примет вид

$$\mathcal{H}_E = \int d\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2} P^\mu P_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \lambda P^0 + \mu \partial_\mu P^\mu + \nu A_0 + \xi \partial_\mu A^\mu \right),$$

где λ, μ, ν, ξ – множители Лагранжа. Из условия сохранения калибровочных условий и связей во времени получаем уравнения на множители Лагранжа:

$$\lambda = 0, \quad \Delta\mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \Delta\xi = 0.$$

При сделанных предположениях уравнения на μ и ξ имеют единственное решение $\mu = 0$, $\xi = 0$. Таким образом, кулоновская калибровка является канонической, поскольку однозначно фиксирует множители Лагранжа.

Для точечных частиц отличие от нуля определителя (6.108) является необходимым и достаточным условием однозначного определения множителей Лагранжа в расширенном гамильтониане $\mathcal{CH}_E$. Вопрос о критерии однозначного определения множителей Лагранжа в теории поля сложен. Действительно, введем обозначение для полной системы связей и калибровочных условий:

$$\Phi^M = \{G_1, F^1, G_2, F^2\}, \quad M = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда матрица, составленная из скобок Пуассона, примет вид

$$[\Phi^M, \Phi^N] = \begin{pmatrix} 0 & -\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) & 0 & 0 \\ \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ 0 & 0 & -\Delta\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Вопрос о том, что такое определитель этой матрицы сложен, и мы на нем останавливаться не будем.

Фазовое пространство электродинамики $\mathbb{N}$ бесконечномерно, $\dim \mathbb{N} = 2n \times \infty$, и задается координатами $A_\alpha(\mathbf{x})$ и сопряженными импульсами $P^\alpha(\mathbf{x})$. Физическое подпространство (поверхность связей и калибровочных условий $\Phi = 0$) $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ размерности $\dim \mathbb{M} = 2(n-2) \times \infty$ определяется уравнениями $\Phi^M = 0$. Построим на $\mathbb{N}$ такую систему координат, которая фигурирует в теореме 6.2.2. Сначала заметим, что на поверхности связей и калибровочных условий $\Phi^M = 0$ продольные компоненты координат и импульсов отсутствуют:

$$A_\mu|_{\Phi=0} = A_\mu^T, \quad P^\mu|_{\Phi=0} = P^{\mu T}.$$

Исходной системой координат на $\mathbb{N}$ являются координаты A_α и сопряженные импульсы P^α с канонической скобкой Пуассона (9.108). Введем вместо пространственных компонент A_μ и P^μ их разложение на поперечную и продольную составляющую:

$$\{A_\mu, P^\mu\} \mapsto \{A_\mu^T, A_\mu^L, P^{\mu T}, P^{\mu L}\}.$$

Явные формулы для поперечных и продольных компонент имеют вид:

$$A_\mu^T = A_\mu + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Delta} A^\nu, \quad A_\mu^L = -\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Delta} A^\nu,$$

$$P^{\tau\mu} = P^\mu + \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\Delta} P^\nu, \quad P^{\iota\mu} = -\frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\Delta} P^\nu,$$

где $\partial^\mu = -\partial_\mu$. Пуассонова структура в новых координатах уже не будет иметь канонического вида, т.к. на них имеются дополнительные соотношения (9.81), (9.82) и такие же соотношения на импульсы. Простые вычисления показывают, что для пространственных компонент отличны от нуля только две скобки Пуассона:

$$[A_\mu^T, P^{\tau\nu}] = \left(\delta_\mu^\nu + \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Delta} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [A_\mu^L, P^{\iota\nu}] = -\frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Delta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (9.127)$$

В качестве независимых координат на поверхности связей и калибровочных условий $\mathbb{M}$ выберем первые $n - 2$ поперечные компоненты электромагнитного поля

$$q^* = \{A_a^T\}, \quad a = 1, \dots, n - 2.$$

Тогда последняя компонента A_{n-1} находится из уравнения поперечности (9.81)

$$A_{n-1}^T = - \int_{-\infty}^{x^{n-1}} dx' \partial_a A^{Ta}(x^0, x^1, \dots, x^{n-2}, x') := \frac{1}{\partial_{n-1}} \partial_a A^{Ta},$$

где мы ввели обозначение $1/\partial_{n-1}$ для оператора, обратного к частной производной ∂_{n-1} . При этом мы предполагаем, что все компоненты полей достаточно быстро убывают при $x^{n-1} \rightarrow -\infty$ и, следовательно, оператор частной производной ∂_{n-1} обратим. Импульсы, сопряженные к координатам q^* , должны иметь с ними каноническую скобку Пуассона. Учитывая формулу (9.127), нетрудно проверить, что импульсы, сопряженные к q^* , имеют вид

$$p^* = \left\{ P^{Ta} - \frac{1}{\partial_{n-1}} \partial^a P^{T,n-1} \right\}, \quad a = 1, \dots, n - 2.$$

Координаты q^* и сопряженные им импульсы p^* образуют систему координат на физическом подмногообразии $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ фазового пространства. Заметим, что при $x^{n-1} \rightarrow \infty$ компоненты импульсов p^* в общем случае не обязательно убывают, поскольку содержат обратный оператор $1/\partial_{n-1}$. Эта ситуация типична в теории поля, где связи представляют собой дифференциальные уравнения.

Таким образом, мы построили канонически сопряженные координаты на поверхности связей. Это – не единственный выбор. В качестве независимых координат можно было бы выбрать непосредственно компоненты $\{q^*, p^*\} = \{A_a, P^a\}$, $a = 1, \dots, n - 2$. В этом случае преобразования координат фазового пространства были бы проще, однако выражение для эффективного гамильтониана для физических степеней свободы – сложнее.

Поверхность связей и калибровочных условий $\Phi^M = 0$ можно задать канонически сопряженными координатами и импульсами:

$$Q_A = \{A_0, \partial_\mu A^\mu\}, \quad P^A = \{P^0, \Delta^{-1} \partial_\mu P^\mu\}, \quad A = 1, 2.$$

Действительно, нетрудно проверить, что скобки Пуассона имеют канонический вид:

$$[Q_A, P'^B] = \delta_A^B \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [Q_A, Q'_B] = 0, \quad [P^A, P'^B] = 0.$$

Эти координаты описывают нефизические (калибровочные) степени свободы.

Таким образом, в соответствии с теоремой 6.2.2 мы построили систему координат на фазовом пространстве $\mathbb{N}$

$$\{q^*, p^*, Q_A, P^A\}$$

такую, что канонически сопряженные координаты и импульсы q^*, p^* являются координатами на физическом подпространстве $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, а поверхность связей и калибровочных условий задается особенно просто:

$$\Phi^M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_A = 0, \quad P^A = 0.$$

ПРИМЕР 9.3.2. В четырехмерном пространстве-времени на поверхности связей и калибровочных условий физический (эффективный) гамильтониан принимает простой вид

$$\mathcal{H}_{\text{ph}} = \int d\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2} P^{\text{T}\mu} P_{\mu}^{\text{T}} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (\mathbf{E}^{\text{T}2} + \mathbf{H}^2),$$

где мы учли выражения для напряженностей электрического и магнитного полей (9.75). Напомним, что из определения напряженности магнитного поля следует, что $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\text{T}}$. Таким образом, мы получили стандартное выражение для плотности энергии свободного электромагнитного поля, которое, очевидно, положительно определено.

Построенная система координат нелокальна в том смысле, что содержит обратные дифференциальные операторы. Эта ситуация типична для калибровочных теорий поля, где связи являются дифференциальными уравнениями по пространственным координатам, поскольку их решения задаются интегралами по пространству.

Решения дифференциальных уравнений в частных производных существенно зависят от области, в которой ищется решение, и граничных условий. В частности, оператор Лапласа может быть необратим, и это может приводить к физическим следствиям.

Таким образом, электродинамика в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ описывает $n - 2$ физические (распространяющиеся) степени свободы. В четырехмерном пространстве-времени мы говорим, что фотон имеет две поляризации. При этом временная и продольная компоненты электромагнитного поля являются нефизическими (нераспространяющимися). Это не значит, что они равны нулю. Например, в электростатике временная компонента A_0 нетривиальна и наблюдаема, т.к. представляет собой электрический кулонов потенциал взаимодействия зарядов. Нефизичность в рассматриваемом контексте означает только то, что для соответствующих полей нельзя поставить задачу Коши.

В двумерном пространстве-времени, $n = 2$, пространственная часть электромагнитного поля A_{μ} имеет только одну продольную составляющую. Все координаты и импульсы находятся из решения связей и калибровочных условий. Поэтому электромагнитное поле в двух измерениях не имеет физических (распространяющихся) степеней свободы. В этом смысле модель тривиальна. Тем не менее она представляет интерес, особенно при включении взаимодействия с другими полями.

Гамильтонова формулировка свободной электродинамики на произвольном многообразии $\mathbb{M}$ с метрикой g проводится, по существу, так же как и в пространстве Минковского. Необходимо произвести замену $\eta_{\alpha\beta} \mapsto g_{\alpha\beta}$ и рассматривать компоненты метрики $g_{\alpha\beta}$ как внешнее поле. Почти все формулы останутся при этом без изменения, только в ковариантных производных появятся символы Кристоффеля, возникающие при интегрировании по частям.

9.3.4. Скалярная электродинамика. Рассмотрим простейший пример нетривиального взаимодействия полей материи с электромагнитным полем в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ произвольного числа измерений. Эта модель – *скалярная электродинамика* – описывает комплексное скалярное поле φ , минимально взаимодействующее с электромагнитным полем A_{α} . Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \varphi^{\dagger} \nabla_{\beta} \varphi - V(\varphi^{\dagger} \varphi), \quad (9.128)$$

где ковариантные производные определены следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \varphi &:= \partial_\alpha \varphi - iq A_\alpha \varphi, \\ \nabla_\alpha \varphi^\dagger &:= \partial_\alpha \varphi^\dagger + iq A_\alpha \varphi^\dagger,\end{aligned}\tag{9.129}$$

и $q = \text{const}$ – заряд поля (как мы увидим позже).

Уравнения движения для скалярной электродинамики имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta A_\alpha} = \partial_\beta F^{\beta\alpha} + iq \varphi^\dagger \nabla^\alpha \varphi - iq \varphi \nabla^\alpha \varphi^\dagger = 0,\tag{9.130}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi^\dagger} = -\nabla^\alpha \nabla_\alpha \varphi - V' \varphi = 0,\tag{9.131}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = -\nabla^\alpha \nabla_\alpha \varphi^\dagger - V' \varphi^\dagger = 0.\tag{9.132}$$

Сравнение этих уравнений с уравнениями Максвелла в той форме, как они обычно записываются в физической литературе (см., например, [6]), показывает, что константа связи q имеет физическую интерпретацию заряда поля.

Лагранжиан (9.128) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned}\varphi &\mapsto \varphi' = e^{iq\phi} \varphi, \\ \varphi^\dagger &\mapsto \varphi'^\dagger = e^{-iq\phi} \varphi^\dagger, \\ A_\alpha &\mapsto A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \phi,\end{aligned}\tag{9.133}$$

где $\phi(x)$ – локальный параметр преобразования. Согласно второй теореме Нетер отсюда вытекает линейная зависимость уравнений движения:

$$-\partial_\alpha \frac{\delta S}{\delta A_\alpha} + iq \varphi \frac{\delta S}{\delta \varphi} - iq \varphi^\dagger \frac{\delta S}{\delta \varphi^\dagger} = 0.\tag{9.134}$$

В случае свободного электромагнитного поля зависимость уравнений движения (9.74) выглядит тривиально. Для скалярной электродинамики доказать зависимость уравнений (9.130)–(9.132) без обращения к калибровочной инвариантности намного сложнее.

В пространстве Минковского лагранжиан инвариантен относительно действия группы Пуанкаре $\mathbb{SO}(1, n-1)$. Этой инвариантности, согласно первой теореме Нетер, соответствует закон сохранения энергии импульса и момента количества движения. Канонический тензор энергии-импульса равен сумме тензора энергии-импульса электромагнитного (9.97) и скалярного полей (9.37):

$$\hat{T}_{\alpha\beta}^{(c)} = -\partial_\alpha A_\gamma F_\beta{}^\gamma + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F^2 + \partial_\alpha \varphi^\dagger \nabla_\beta \varphi + \nabla_\beta \varphi^\dagger \partial_\alpha \varphi - \eta_{\alpha\beta} [\nabla^\gamma \varphi^\dagger \nabla_\gamma \varphi - V(\varphi^\dagger \varphi)],\tag{9.135}$$

который, очевидно, несимметричен. Как и в случае свободного электромагнитного поля, добавление дивергенции (9.99) с учетом уравнений движения позволяет определить симметричный и калибровочно инвариантный тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta}^{(s)} = -F_{\alpha\gamma} F_\beta{}^\gamma + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F^2 + \nabla_\alpha \varphi^\dagger \nabla_\beta \varphi + \nabla_\beta \varphi^\dagger \nabla_\alpha \varphi - \eta_{\alpha\beta} [\nabla^\gamma \varphi^\dagger \nabla_\gamma \varphi - V(\varphi^\dagger \varphi)].\tag{9.136}$$

Выражение для тензора спина в скалярной электродинамике такое же, как и для свободного электромагнитного поля (9.101). Связь полного момента количества движения с орбитальным моментом, определяемым симметричным тензором энергии-импульса также остается прежней (9.104).

Сохраняющийся вектор электромагнитного тока, соответствующий глобальным преобразованиям (9.133), имеет вид

$$J^\alpha = -\partial_\beta F^{\alpha\beta} + iq(\varphi^\dagger \nabla^\alpha \varphi - \varphi \nabla^\alpha \varphi^\dagger). \quad (9.137)$$

Заметим, что зависимость уравнений движения (9.134), вытекающая из второй теоремы Нетер, и сохранение тока $\partial_\alpha J^\alpha$ – не одно и то же.

Спектр модели, т.е. массы, спины и заряды частиц после вторичного квантования, определяется квадратичным приближением лагранжиана, которое, в свою очередь, зависит от вида потенциала самодействия скалярного поля. Если скалярное поле свободно, т.е.

$$V(\varphi^\dagger \varphi) = m^2 \varphi^\dagger \varphi, \quad m > 0,$$

то модель (9.128) в низкоэнергетическом пределе описывает заряженные скалярные частицы массы m , взаимодействующие с безмассовым электромагнитным полем.

Если потенциал скалярного поля описывает самодействие, то ситуация может сильно измениться. Продемонстрируем это на примере потенциала “ $\lambda\varphi^4$ ” (9.44). Сначала перепишем лагранжиан (9.128) через действительную и мнимую части:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \varphi_1 \nabla_\beta \varphi_1 + \nabla_\alpha \varphi_2 \nabla_\beta \varphi_2) - V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \varphi_1 &:= \partial_\alpha \varphi_1 + qA_\alpha \varphi_2, \\ \nabla_\alpha \varphi_2 &:= \partial_\alpha \varphi_2 - qA_\alpha \varphi_1. \end{aligned}$$

В таком виде скалярные поля φ_1 и φ_2 преобразуются по неприводимому двумерному вещественному представлению унитарной группы $\mathbb{U}(1)$ (векторному представлению группы вращений $\mathbb{SO}(2)$) Вакуумное решение выберем однородным и изотропным:

$$\varphi_0 = a, \quad A_\alpha = 0$$

и произведем разложение скалярного поля (9.45) вблизи вакуума. В новых переменных лагранжиан (9.128) примет вид

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \tilde{\varphi}_1 \partial_\beta \tilde{\varphi}_1 + \partial_\alpha \varphi_2 \partial_\beta \varphi_2) + \\ & + 2qA^\alpha(\varphi_2 \partial_\alpha \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_1 \partial_\alpha \varphi_2 - a \partial_\alpha \varphi_2) + q^2 A^\alpha A_\alpha (a^2 + 2a\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_1^2 + \varphi_2^2) + \\ & - \frac{1}{2}\lambda[4a^2\tilde{\varphi}_1^2 + 4a\tilde{\varphi}_1^3 + 4a\tilde{\varphi}_1\varphi_2^2 + \tilde{\varphi}_1^4 + \varphi_2^4 + 2\tilde{\varphi}_1^2\varphi_2^2]. \end{aligned}$$

Проанализируем квадратичное приближение. Мы видим, что вблизи вакуума векторное поле приобрело массовый член $q^2 a^2 A^\alpha A_\alpha$, и появилось слагаемое с перемешиванием $-2qaA^\alpha \partial_\alpha \varphi_2$. Заметим, что квадратичные слагаемые по A_α и $\partial_\alpha \varphi_2$ можно записать в виде полного квадрата:

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi_2 \partial_\beta \varphi_2 - 2qaA^\alpha \partial_\alpha \varphi_2 + q^2 a^2 A^\alpha A_\alpha = q^2 a^2 \eta^{\alpha\beta} \left(A_\alpha - \frac{1}{qa} \partial_\alpha \varphi_2 \right) \left(A_\beta - \frac{1}{qa} \partial_\beta \varphi_2 \right).$$

Поскольку замена компонент векторного поля

$$A_\alpha \mapsto B_\alpha := A_\alpha - \frac{1}{qa} \partial_\alpha \varphi_2$$

не изменяет кинетического члена, то это преобразование диагонализует квадратичную часть лагранжиана. В результате возникает лагранжиан с квадратичной частью, которая вообще не содержит голдстоуновское поле φ_2 :

$$-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^2 + q^2 a^2 B^\alpha B_\alpha + \partial\tilde{\varphi}_1^2 - 2\lambda a^2 \tilde{\varphi}_1^2, \quad (9.138)$$

где

$$F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha.$$

Теперь можно описать спектр теории. Модель описывает массивное векторное поле, взаимодействующее с нейтральным массивным скалярным полем. Таким образом, безмассовое голдстоуновское поле исчезло, а векторное поле приобрело массу. При этом общее число степеней свободы не изменилось, т.к. массивное векторное поле, как мы увидим позже в разделе 9.4, имеет на одну степень свободы больше, чем безмассовое. То есть одна степень свободы комплексного скалярного поля перешла в продольную компоненту массивного векторного поля.

Обратим внимание, что массы полей имеют правильные знаки.

Поле φ_2 при описанном преобразовании остается в высших порядках лагранжиана, однако это не влияет на спектр теории.

Появление массивного векторного поля в физическом секторе модели можно пояснить по-другому. Параметризуем комплексное векторное поле его амплитудой и фазой:

$$\varphi := \rho e^{iq\theta}, \quad \rho = \rho(x), \quad \theta = \theta(x).$$

Поскольку исходная теория калибровочно инвариантна, то физические степени свободы остаются после фиксирования калибровки. Совершим калибровочное преобразование

$$\begin{aligned} \varphi &\mapsto \varphi' = e^{-iq\theta} \varphi, \\ A_\alpha &\mapsto A'_\alpha = A_\alpha - \partial_\alpha \theta. \end{aligned}$$

Другими словами, зафиксируем калибровку $\text{im } \varphi = 0$. Тогда лагранжиан примет вид (опустив штрихи)

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^2 + \eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \rho + iqA_\alpha \rho)(\partial_\beta \rho - iqA_\beta \rho) - V(\rho^2) = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^2 + \partial\rho^2 + q^2 A^\alpha A_\alpha \rho^2 - V(\rho^2). \end{aligned}$$

Теперь разложим поля вблизи вакуумного решения

$$\rho = a + \tilde{\rho}, \quad A_\alpha = A_\alpha.$$

Тогда квадратичная часть лагранжиана примет вид

$$-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^2 + \partial\tilde{\rho}^2 + q^2 a^2 A^\alpha A_\alpha - 2\lambda a^2 \tilde{\rho}^2.$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает с полученным ранее выражением (9.138). То есть мы получили прежний спектр модели. При таком подходе голдстоуновское нефизическое поле, каковым является фаза скалярного поля, вообще исключается из лагранжиана.

Описанная выше конструкция обобщается на теорию полей Янга–Миллса, взаимодействующих со скалярными полями. При этом безмассовые голдстоуновские бозоны исчезают, а

калибровочные поля приобретают массу. Это явление приобретения масс первоначально безмассовыми векторными полями за счет спонтанного нарушения симметрии называется *механизмом Хиггса*. Оно было независимо открыто Энглертом, Броутом и Хиггсом [96, 97].

Как видим, спектр теории, который определяется низкоэнергетическим приближением, существенно меняется при спонтанном нарушении симметрии. Современные модели, объединяющие электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия, основываются на калибровочной симметрии и соответствующих полях Янга–Миллса. Поэтому теория изначально содержит большое число безмассовых векторных полей. С другой стороны, нам экспериментально известно только одно безмассовое векторное поле – электромагнитное. Чтобы устранить возникающее противоречие теории и эксперимента вводится взаимодействие со скалярными полями (хиггсовскими бозонами) таким образом, чтобы вакуумное решение уравнений движения нарушало калибровочную симметрию. В результате калибровочные поля приобретают массу за счет механизма Хиггса, и можно сказать, что мы эти поля не наблюдаем, потому что они слишком массивны.

Важно отметить, что перенормируемость квантовополевой модели определяется не низко-, а высокоэнергетическим приближением, которое у спонтанно нарушенной теории такое же, как и до нарушения симметрии. Поэтому свойство перенормируемости сохраняется при спонтанном нарушении симметрии.

9.3.5. Электромагнитное поле в аффинной геометрии. Лагранжиан электромагнитного поля на многообразии $\mathbb{M}$ с заданной аффинной геометрией при минимальной подстановке принимает вид

$$L_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta} := -\frac{1}{4}\sqrt{|g|}F^2, \quad (9.139)$$

где $F_{\alpha\beta}$ – напряженность электромагнитного поля (9.59). Ему соответствует действие

$$S_{\text{EM}} = \int_{\mathbb{M}} dx L_{\text{EM}}. \quad (9.140)$$

Поскольку метрика, по определению, безразмерна, то электромагнитный потенциал имеет ту же размерность (9.72), что и в пространстве Минковского.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как и в случае скалярных полей, лагранжиан (9.139) не зависит от аффинной связности. Это связано с тем, что $F_{\alpha\beta}$ – это компоненты локальной формы кривизны для $U(1)$ связности и являются компонентами тензора независимо от того задана или нет на многообразии $\mathbb{M}$ аффинная геометрия. С геометрической точки зрения в выражении для $F_{\alpha\beta}$ при минимальной подстановке нет никакой необходимости заменять частные производные на ковариантные, т.к. локальная форма кривизны для $U(1)$ связности уже является тензором относительно общих преобразований координат.

Если все же в определении компонент напряженности электромагнитного поля заменить частные производные на ковариантные, определяемые аффинной связностью Γ , то получим добавочное слагаемое с тензором кручения:

$$\nabla_{\alpha}A_{\beta} - \nabla_{\beta}A_{\alpha} = \partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha} - T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}A_{\gamma}.$$

Полученное выражение ковариантно относительно общих преобразований координат, однако добавочный член явно нарушает калибровочную инвариантность. Такая замена соответствует неминимальной подстановке.

ЗАМЕЧАНИЕ. В настоящее время считается, что спектр модели: массы, спины и заряды частиц, описываемых данным полем, определяется линейным приближением в уравнениях

движения. При этом метрика, как правило, раскладывается вблизи метрики Минковского. Это означает, что электромагнитное поле в аффинной геометрии описывает безмассовые нейтральные частицы со спином единица. Такой подход вызывает много вопросов. Например, если пространство-время имеет нетривиальную топологию, то говорить про метрику Лоренца не имеет никакого смысла. Мы не будем обсуждать эти важные вопросы, потому что лучших предложений пока не поступало.

Уравнения движения для электромагнитного поля и тензор энергии-импульса получаются варьированием соответствующего действия

$$\sqrt{|g|}S_{\text{EM},\alpha} := \frac{\delta S_{\text{EM}}}{\delta A_\alpha} = \partial_\beta(\sqrt{|g|}F^{\beta\alpha}) = \sqrt{|g|}\tilde{\nabla}_\beta F^{\beta\alpha} = 0, \quad (9.141)$$

$$\sqrt{|g|}S_{\text{EM},\alpha\beta} := \frac{\delta S_{\text{EM}}}{\delta g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}T_{\text{EM}\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}F_{\alpha\gamma}F_\beta{}^\gamma + \frac{1}{8}\sqrt{|g|}g_{\alpha\beta}F^2. \quad (9.142)$$

Отсюда следует выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{\text{EM}\alpha\beta} = -F_{\alpha\gamma}F_\beta{}^\gamma + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^2. \quad (9.143)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. След тензора энергии-импульса электромагнитного поля в четырехмерном пространстве-времени равен нулю, $T_{\text{EM}}{}^\alpha{}_\alpha = 0$. Здесь важна четырехмерность пространства-времени, т.к. если размерность не равна четырем, то след тензора энергии-импульса отличен от нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вариация действия по метрике (9.142) приводит к тензору энергии-импульса электромагнитного поля (9.143), стоящему в правой части уравнений Эйнштейна (7.1). Он является ковариантным обобщением симметричного канонического тензора энергии-импульса (9.98) в пространстве Минковского. В этом отношении ситуация с электромагнитным полем такая же, как и для скалярного поля. В общем случае вариация действия полей материи по метрике совсем необязательно приводит к ковариантному обобщению канонического тензора энергии-импульса, следующему из теоремы Нетер.

Если присутствуют источники электромагнитного поля, то в правой части уравнения (9.141) появляется электрический ток:

$$\tilde{\nabla}_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha, \quad (9.144)$$

где $J = \{J^\alpha\}$ – вектор тока. Происхождение электрического тока в настоящий момент не имеет значения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3.3. Если пространство-время топологически тривиально (диффеоморфно $\mathbb{R}^n$), то система уравнений второго порядка для потенциала A_α (9.144) эквивалентна системе уравнений первого порядка для компонент напряженности $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ электромагнитного поля:

$$\tilde{\nabla}_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha, \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (9.145)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Тогда из уравнения (9.144) следует система уравнений (9.145). Обратно. В силу леммы Пуанкаре из второго уравнения (9.145) для односвязных многообразий следует существование потенциала A_α . Подстановка соответствующего выражения (9.59) в первое уравнение (9.145) приводит к (9.144).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система уравнений первого порядка (9.145) для напряженности электромагнитного поля $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ называется *уравнениями Максвелла*.

Запишем действие для электромагнитного поля в еще одной форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3.4. *Уравнения движения для действия (9.140) эквивалентны уравнениям Эйлера–Лагранжа для действия*

$$S = - \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) - \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right], \quad (9.146)$$

в котором компоненты $F^{\alpha\beta}$ и A_α рассматриваются в качестве независимых переменных, по которым проводится варьирование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения движения для компонент напряженности являются алгебраическими:

$$\frac{\delta S}{\delta F^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha - F_{\alpha\beta}) = 0.$$

Их решение приводит к выражению компонент напряженности электромагнитного поля через потенциал (9.59). Согласно теореме 5.4.1 решение уравнений Эйлера–Лагранжа можно подставлять в действие. После подстановки действие (9.146) совпадает с (9.140).

Рассмотрение в качестве независимых переменных и компонент потенциала электромагнитного поля A_α , и компонент напряженности $F_{\alpha\beta}$ называется *формализмом первого порядка*.

Действие для лагранжиана (9.139) инвариантно относительно общих преобразований координат. Соответствующие вариации полей имеют вид

$$\begin{aligned} \delta A_\alpha &= -\partial_\alpha \epsilon^\beta A_\beta - \epsilon^\beta \partial_\beta A_\alpha, \\ \delta g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \epsilon^\beta + g^{\beta\gamma} \partial_\gamma \epsilon^\alpha - \epsilon^\gamma \partial_\gamma g^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно второй теореме Нетер (5.64), следует зависимость уравнений движения

$$\partial_\beta S,^\beta A_\alpha + S,^\beta F_{\beta\alpha} - \partial_\beta S,^\beta_\alpha - \partial_\beta S,^\beta_\alpha - S,_{\beta\gamma} \partial_\alpha g^{\beta\gamma} = 0. \quad (9.147)$$

Или, в ковариантном виде,

$$\tilde{\nabla}_\beta S,^\beta A_\alpha + S,^\beta F_{\beta\alpha} - 2\tilde{\nabla}^\beta S,_{\beta\alpha} = 0. \quad (9.148)$$

Если выполнены уравнения движения для электромагнитного поля (9.141), то с учетом свернутых тождеств Бианки соотношение (9.148) принимает вид

$$\tilde{\nabla}_\beta T_{\text{EM}\alpha}{}^\beta = 0. \quad (9.149)$$

Полученное равенство, выполненное для всех решений уравнений Эйлера–Лагранжа, можно интерпретировать, как ковариантное обобщение закона сохранения тензора энергии-импульса.

Действие для электромагнитного поля инвариантно также относительно калибровочных преобразований (9.62), при которых метрика не меняется. Из калибровочной инвариантности в силу второй теоремы Нетер следует зависимость уравнений движения:

$$\tilde{\nabla}_\alpha S,^\alpha = 0. \quad (9.150)$$

С учетом уравнения Максвелла (9.144) это равенство приводит к закону сохранения электрического тока: $\tilde{\nabla}_\alpha J^\alpha = 0$. Если ток возникает при варьировании некоторого калибровочно инвариантного действия для полей заряженной материи, то сохранение тока будет выполняться автоматически в силу второй теоремы Нетер. Если же электрический ток вводится в уравнения Максвелла “руками”, то условие $\tilde{\nabla}_\alpha J^\alpha = 0$ необходимо для самосогласованности уравнений.

9.3.6. Электромагнитное поле в общей теории относительности. В настоящем разделе мы ограничимся четырехмерным пространством-временем $\mathbb{M}$, в котором формулы электродинамики имеют свою специфику.

В свободной электродинамике многие формулы принимают особенно простой вид, если использовать язык дифференциальных форм. Как уже было отмечено, электромагнитный потенциал – это локальная 1-форма $\mathbb{U}(1)$ связности,

$$A := dx^\alpha A_\alpha. \quad (9.151)$$

Слово “локальная” в данном случае означает, что форма связности задана на некоторой координатной окрестности базы $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(1))$, а не на самом (пятимерном) пространстве расслоения $\mathbb{P}$. Локальная 2-форма кривизны – это внешняя производная от локальной формы связности,

$$F := dA = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha). \quad (9.152)$$

В дальнейшем слово “локальная” мы, для краткости, будем опускать.

Поскольку форма кривизны является точной, то ее внешняя производная равна нулю,

$$dF = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0. \quad (9.153)$$

Это равенство, очевидно, эквивалентно тождествам Бианки (9.61).

Приведенные выше формулы справедливы независимо от того задана ли на $\mathbb{M}$ аффинная геометрия или нет.

Если на пространстве-времени задана метрика, то можно определить 2-форму, дуальную к форме кривизны:

$$*F := \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta (*F)_{\alpha\beta}, \quad (9.154)$$

где компоненты дуальной формы кривизны заданы равенством

$$*F_{\alpha\beta} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}. \quad (9.155)$$

В приведенной формуле $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга. В определении дуальной формы кривизны метрика встречается дважды. Во-первых, с ее помощью производится подъем и опускание индексов:

$$F^{\gamma\delta} := g^{\gamma\alpha} g^{\delta\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (9.156)$$

Во-вторых, метрика входит в определение полностью антисимметричного тензора:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} := \sqrt{|g|} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность четвертого ранга, чьи компоненты равны по модулю единице.

Преобразование, обратное к преобразованию дуальности (9.155), имеет вид

$$F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (*F)^{\gamma\delta}, \quad (9.157)$$

где мы использовали формулы (19.24) для свертки антисимметричных тензоров. Полученное равенство эквивалентно следующему свойству оператора Ходжа:

$$F = **F.$$

ПРИМЕР 9.3.3. В четырехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ компоненты напряженности выражаются через компоненты электрического и магнитного полей (9.76). В этом случае нетрудно получить выражения для компоненты дуальной напряженности:

$$(*F)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_1 & H_2 & H_3 \\ -H_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -H_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -H_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.158)$$

Это означает, что преобразование дуальности меняет местами электрическое и магнитное поля:

$$\mathbf{E} \leftrightarrow -\mathbf{H}.$$

Используя дуальную форму кривизны, действие для свободного электромагнитного поля можно переписать в виде интеграла от 4-формы:

$$S_{\text{ем}} := -\frac{1}{4} \int dx \sqrt{|g|} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \int *F \wedge F, \quad (9.159)$$

поскольку

$$*F \wedge F = \frac{1}{4} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta *F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = \frac{1}{8} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta \varepsilon_{\alpha\beta\epsilon\zeta} F^{\epsilon\zeta} F_{\gamma\delta}.$$

Свернув уравнения Максвелла (9.145) с антисимметричным тензором, получим уравнение Максвелла в терминах дуальной формы кривизны:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha (*F)_{\beta\gamma} + \partial_\beta (*F)_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma (*F)_{\alpha\beta} &= J^\delta \varepsilon_{\delta\alpha\beta\gamma}, \\ \nabla_\beta (*F)^{\beta\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (9.160)$$

Поскольку преобразование дуальности меняет местами электрическое и магнитное поле, то второе из этих уравнений означает отсутствие в природе магнитных зарядов.

Первую пару уравнений Максвелла можно записать, используя оператор кограницы, который в рассматриваемом случае имеет вид

$$\delta := *d*.$$

Несложные вычисления позволяют переписать первую пару уравнений Максвелла (9.160) в виде равенства

$$\delta F = \frac{1}{2} J,$$

где $J := dx^\alpha J_\alpha$ – 1-форма электрического тока.

Остановимся на уравнениях электромагнитного поля без источников. Тогда первую пару уравнений Максвелла (9.160) можно записать в виде

$$d * F = 0. \quad (9.161)$$

Это уравнение можно получить путем варьирования действия (9.159) непосредственно в терминах форм. Поскольку $*F$ – это 2-форма, то справедлива формула

$$d(*F \wedge A) = d(*F) \wedge A + *F \wedge dA.$$

Если вариации всех полей исчезают на границе, то уравнения движения в форме (9.161) легко получить, варьируя непосредственно действие (9.159):

$$\bar{\delta} S_{\text{EM}} = - \int *F \wedge \bar{\delta}(dA) = \int d(*F) \wedge \bar{\delta}A,$$

где мы поместили вариацию формы чертой, чтобы отличить ее от оператора кограницы.

В четырехмерном пространстве-времени можно построить еще одну 4-форму

$$F \wedge F.$$

Эта форма является точной, потому что из тождеств Бианки следует равенство

$$F \wedge dA = d(F \wedge A) - dF \wedge A = d(F \wedge A).$$

Теперь изучим свойства тензора энергии-импульса в четырехмерном пространстве-времени. Из определения дуального тензора напряженности (9.154) вытекает равенство

$$*F_{\alpha\gamma} *F_{\beta}{}^{\gamma} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta} + F_{\alpha\gamma}F_{\beta}{}^{\gamma},$$

где мы воспользовались формулами свертки антисимметричных тензоров (19.25). Теперь выражение для тензора энергии-импульса можно переписать в эквивалентном виде

$$T_{\text{EM}\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[F_{\alpha\gamma}F_{\beta}{}^{\gamma} + *F_{\alpha\gamma} *F_{\beta}{}^{\gamma}]. \quad (9.162)$$

Из приведенного выражения следует, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля инвариантен относительно *дуальных* $\mathbb{SO}(2)$ *вращений*:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &\mapsto F'_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} \cos \omega - *F_{\alpha\beta} \sin \omega, \\ *F_{\alpha\beta} &\mapsto *F'_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} \sin \omega + *F_{\alpha\beta} \cos \omega, \end{aligned} \quad (9.163)$$

где $\omega \in [0, 2\pi]$ – угол вращения. Конечно, второе из этих уравнений является следствием первого.

ПРИМЕР 9.3.4. В пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ компоненты тензора напряженности и его дуального имеют вид (9.76), (9.158). Поэтому для временной компоненты тензора энергии-импульса (9.162) получаем хорошо известное выражение

$$T_{\text{EM}00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2). \quad (9.164)$$

Смешанная компонента контравариантного тензора энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T_{\text{EM}}^{\mu 0} = F^{\mu\nu} F^0{}_{\nu}.$$

Используя выражение напряженности электромагнитного поля через электрическое и магнитное поля (9.76) нетрудно получить соотношение

$$T_{\text{EM}}^{\mu 0} = \varepsilon^{\mu\nu\rho} E_{\nu} H_{\rho},$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ – полностью антисимметричный тензор третьего ранга (19.19). Полученное равенство можно записать в виде векторного произведения

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (9.165)$$

Этот вектор называется *вектором Пойнтинга* и имеет смысл плотности потока энергии электромагнитного поля. При этом закон сохранения электромагнитной энергии примет вид

$$\partial_0 T_{\text{EM}}^{00} + \partial_{\mu} T_{\text{EM}}^{\mu 0} = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3.5. Если метрика на многообразии $\mathbb{M}$ имеет лоренцеву сигнатуру и координата x^0 является временем, то временная компонента тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{\text{EM}00} = -\frac{1}{2} [F_{0\gamma} F_0^\gamma + *F_{0\gamma} *F_0^\gamma] \quad (9.166)$$

положительно определена и, следовательно, удовлетворяет слабому энергетическому условию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду антисимметрии по индексам первое слагаемое в выражении (9.166) имеет вид

$$-\frac{1}{2} F_{0\mu} F_{0\nu} g^{\mu\nu}.$$

При сделанных предположениях матрица $g^{\mu\nu}$ согласно предложению 8.2.1 отрицательно определена. То же верно и для второго слагаемого.

СЛЕДСТВИЕ. Временная компонента тензора энергии-импульса электромагнитного поля удовлетворяет сильному энергетическому условию (7.140).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку след тензора энергии-импульса равен нулю, то понятие слабого и сильного энергетического условия эквивалентны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3.6. Действие электромагнитного поля в аффинной геометрии (9.140) инвариантно относительно преобразований Вейля:

$$g_{\alpha\beta} \mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}, \quad A_\alpha \mapsto \bar{A}_\alpha = A_\alpha, \quad (9.167)$$

где $\phi(x) \in C^2(\mathbb{M})$ – произвольная вещественнозначная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из равенства

$$\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} = \sqrt{|\bar{g}|} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{g}^{\gamma\delta}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вейлевская инвариантность действия электромагнитного поля является спецификой четырехмерности пространства-времени. Если размерность пространства-времени отлична от четырех, то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля отличен от нуля.

Равенство нулю следа тензора энергии-импульса электромагнитного поля связано с наличием вейлевской калибровочной инвариантности. Этот факт является общим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3.7. Пусть действие зависит от метрики $g_{\alpha\beta}$ и некоторого набора полей материи φ^A

$$S_{\text{M}} = \int dx L_{\text{M}}(g, \varphi).$$

Если действие инвариантно относительно преобразований Вейля, не затрагивающих поля материи,

$$g_{\alpha\beta} \mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}, \quad \varphi^A \mapsto \bar{\varphi}^A = \varphi^A,$$

то след тензора энергии-импульса полей материи равен нулю, $T_{\text{M}\alpha}{}^\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку параметр преобразования Вейля зависит от точки пространства-времени, то справедлива вторая теорема Нетер. В рассматриваемом случае это означает следующее. Инвариантность действия имеет вид

$$\delta S_{\text{M}} = \int dx \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} = 0.$$

Учтем определение тензора энергии-импульса в общей теории относительности (7.10) и выражение для бесконечно малых преобразований Вейля

$$\delta g^{\alpha\beta} = -2\phi g^{\alpha\beta}.$$

Тогда равенство нулю вариации действия полей материи равносильно равенству $g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$.

ПРИМЕР 9.3.5. Бозонная струна описывается набором скалярных безмассовых полей $X^a(x)$, $a = 0, 1, \dots, D-1$, заданных на двумерном пространстве-времени (поверхности) $\mathbb{M}$ и принимающих значения в D -мерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,D-1}$:

$$X : \quad \mathbb{M} \ni \quad x = \{x^\alpha\} \mapsto X(x) = \{X^a(x)\} \quad \in \mathbb{R}^{1,D-1}.$$

Действие для бозонной струны можно записать в виде

$$S = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^a \partial_\beta X^b \eta_{ab}.$$

Знак этого действия выбран таким образом, чтобы пространственные компоненты X^i , $i = 1, \dots, D-1$, описывались обычным действием (9.13) и давали положительный вклад в гамильтониан системы. Это действие инвариантно относительно преобразований Вейля:

$$g_{\alpha\beta} \mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}, \quad X^a \mapsto X^a.$$

Тензор энергии-импульса бозонной струны имеет вид

$$T_{\alpha\beta} := \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\partial_\alpha X^a \partial_\beta X_a + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \partial_\gamma X^a \partial_\delta X_a,$$

где $X_a := X^b \eta_{ba}$. Его след, очевидно, равен нулю. Вейлевская инвариантность действия для безмассового скалярного поля является спецификой двумерия. В пространстве-времени бóльшего числа измерений она отсутствует.

9.4. Поле Прокá

Поле Прокá $A = \{A_\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$, описывает массивные векторные частицы со спином единица [98, 99]. В пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ ему соответствует лагранжиан

$$L = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 A^\alpha A_\alpha, \tag{9.168}$$

где, как и для электромагнитного поля,

$$F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

и $m > 0$ – масса поля. Он отличается от лагранжиана электромагнитного поля только массовым членом. Знак перед массовым членом выбран так, чтобы вклад пространственных компонент A_μ , $\mu = 1, \dots, n-1$, в плотность энергии был положителен.

Уравнения движения для лагранжиана (9.168) имеют вид

$$S,^\alpha := \frac{\delta S}{\delta A_\alpha} = \partial_\beta F^{\beta\alpha} + m^2 A^\alpha = 0. \tag{9.169}$$

Ввиду антисимметрии относительно перестановки индексов, $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$, дивергенция этой системы уравнений приводит к дифференциальному уравнению первого порядка на компоненты поля:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0, \quad (9.170)$$

которое должно быть выполнено для любого решения системы уравнений (9.169). Полученное условие имеет вид калибровки Лоренца (9.96) для электромагнитного поля. С учетом условия (9.170) уравнения движения (9.169) принимают вид

$$\square A^\alpha + m^2 A^\alpha = 0, \quad \square := \partial^\alpha \partial_\alpha. \quad (9.171)$$

Таким образом, для каждой компоненты векторного поля возникает уравнение Клейна–Гордона–Фока. Однако поле Прокá описывает не n распространяющихся степеней свободы, а только $n - 1$, поскольку на компоненты поля наложено дополнительное условие (9.170). Чтобы убедиться в этом проведем более детальный анализ уравнений движения.

Запишем систему уравнений (9.169) отдельно для временной и пространственных компонент:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^0 = 0, \quad (9.172)$$

$$\partial_0 F^{0\mu} + \partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 A^\mu = 0. \quad (9.173)$$

Предположим, что все поля убывают на бесконечности. Тогда согласно теореме 9.3.1 оператор Лапласа обратим и пространственные компоненты поля Прокá, как и в случае электромагнитного поля (9.81), можно взаимно однозначно разложить на поперечную и продольную составляющие:

$$A_\mu = A_\mu^T + \partial_\mu \varphi. \quad (9.174)$$

Следовательно, лагранжевы уравнения движения (9.172), (9.173) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$-\Delta A_0 + \Delta \dot{\varphi} + m^2 A_0 = 0, \quad (9.175)$$

$$\partial_\mu \ddot{\varphi} - \partial_\mu \dot{A}_0 + m^2 \partial_\mu \varphi = 0, \quad (9.176)$$

$$\square A_\mu^T + m^2 A_\mu^T = 0, \quad (9.177)$$

где мы расщепили уравнение (9.173) на продольную и поперечную части, а также ввели обозначения для производной по времени и операторов Лапласа и Даламбера:

$$\dot{\varphi} := \partial_0 \varphi, \quad \Delta := -\partial^\mu \partial_\mu, \quad \square := \partial^\alpha \partial_\alpha = \partial_0^2 - \Delta.$$

Уравнения для поперечных компонент (9.177) – это уравнения Клейна–Гордона–Фока, и они полностью отщепились. Рассмотрим уравнение (9.175) как уравнение на временную компоненту:

$$(\Delta - m^2) A_0 = \Delta \dot{\varphi}. \quad (9.178)$$

Это – уравнение Гельмгольца, решение которого существует и единственно для достаточно широкого класса граничных условий, в частности, для полей, убывающих на бесконечности [100]. Запишем его решение в виде

$$A_0 = \frac{1}{\Delta - m^2} \Delta \dot{\varphi}. \quad (9.179)$$

Для полей, убывающих на бесконечности, уравнение (9.176) можно один раз проинтегрировать:

$$\ddot{\varphi} - \dot{A}_0 + m^2\varphi = 0.$$

Подставив сюда решение для A_0 (9.179) и умножив на оператор $\Delta - m^2$, получим уравнение Клейна–Гордона–Фока на функцию φ ,

$$\square\varphi + m^2\varphi = 0. \quad (9.180)$$

Поскольку все сделанные операции обратимы, то мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4.1. *Для полей, убывающих на бесконечности, лагранжесвы уравнения движения (9.169) для поля Прокá эквивалентны $n - 1$ уравнениям Клейна–Гордона–Фока (9.177), (9.180), дополненным уравнениями для продольной составляющей (9.84) и выражением для временной компоненты (9.179).*

Для тех, у кого остались сомнения по поводу следствия уравнений движения (9.170), скажем, что подстановка решения (9.179) в это условие, что нетрудно проверить, также приводит к уравнению Клейна–Гордона–Фока (9.180).

Таким образом, чтобы поставить задачу Коши для поля Прокá, необходимо и достаточно поставить задачу Коши для $n - 2$ поперечных компонент A_μ^T и поля φ , определяющего продольную составляющую. Поэтому поле Прокá действительно описывает $n - 1$ физическую (распространяющуюся) степень свободы.

9.4.1. Гамильтонова формулировка. Векторному полю A_α соответствуют сопряженные импульсы

$$P^\alpha := \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_\alpha)} = F^{\alpha 0}. \quad (9.181)$$

Скобки Пуассона между координатами и импульсами имеют тот же вид, что и для электромагнитного поля (9.108). Как и для электромагнитного поля, из выражения для импульсов (9.181) следует первичная связь

$$G_1 = P^0 \approx 0. \quad (9.182)$$

Других первичных связей рассматриваемая модель не содержит. Несложные вычисления приводят к следующему выражению для гамильтониана

$$\mathcal{H} = \int dx \left(-\frac{1}{2} P^\mu P_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_0 \partial_\mu P^\mu - \frac{1}{2} m^2 A^\alpha A_\alpha + \lambda P^0 \right), \quad (9.183)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Гамильтоновым уравнениям движения имеют следующий вид:

$$\dot{A}_0 = \lambda, \quad (9.184)$$

$$\dot{A}_\mu = -P_\mu + \partial_\mu A_0, \quad (9.185)$$

$$\dot{P}^0 = \partial_\mu P^\mu + m^2 A_0, \quad (9.186)$$

$$\dot{P}^\mu = \partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 A^\mu. \quad (9.187)$$

Кроме этого, вариация действия по множителю Лагранжа приводит к связи (9.182). Таким образом, полная система гамильтоновых уравнений движения состоит из уравнений (9.184)–(9.187) и связи (9.182). На первый взгляд решения гамильтоновых уравнений содержат функциональный произвол, т.к. множитель Лагранжа λ произволен. Однако этот вывод не верен.

Действительно, поскольку связь $P^0 = 0$ для любого решения гамильтоновых уравнений должна выполняться в любой момент времени, то производная по времени от уравнения (9.186) должна быть равна нулю. Это приводит к уравнению

$$m^2 \dot{A}_0 + \partial_\mu \dot{P}^\mu = m^2 (\dot{A}_0 + \partial_\mu A^\mu) = 0, \quad (9.188)$$

где мы воспользовались уравнением (9.187). Сравнивая полученное равенство с уравнением (9.184), заключаем, что для любого решения гамильтоновых уравнений множитель Лагранжа имеет вид

$$\lambda = -\partial_\mu A^\mu. \quad (9.189)$$

Теперь можно доказать эквивалентность лагранжевой и гамильтоновой формулировок.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4.2. *Полная система гамильтоновых уравнений (9.184)–(9.187) и (9.182) эквивалентна лагранжевым уравнениям движения (9.169).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены гамильтоновы уравнения (9.184)–(9.187) и связь (9.182). Из уравнения (9.185) находим импульсы

$$P_\mu = \partial_\mu A_0 - \dot{A}_\mu = F_{\mu 0}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (9.187) приводит к уравнению (9.173). Уравнение (9.186) с учетом связи (9.182) дает уравнение (9.172).

Обратно. Пусть выполнены лагранжевы уравнения движения (9.172), (9.173). Введем обозначение $P^\alpha := F^{\alpha 0}$. Отсюда немедленно следует связь (9.182). А для пространственных значений индекса определение $P^\mu = F^{\mu 0}$ эквивалентно уравнению (9.185). Используя новую переменную P^μ , лагранжевы уравнения (9.173) переписываются в виде гамильтонова уравнения (9.187). Соотношение (9.170) является следствием лагранжевых уравнений движения, и оно дает уравнение (9.184) при выполнении условия (9.189). Наконец, лагранжево уравнение (9.172) сводится к уравнению (9.186) при выполнении связи (9.182).

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что для эквивалентности лагранжевой и гамильтоновой формулировок к гамильтониану необходимо добавить первичную связь (9.182). В противном случае никакой эквивалентности нет. Действительно, равенство $\lambda = 0$ явно противоречит условию (9.189).

Продолжим построение гамильтонова формализма, согласно общей схеме, рассмотренной в разделе 6.2.

Производная по времени от первичной связи (9.182) равна

$$\dot{G}_1 = [G_1, \mathcal{H}] = \partial_\mu P^\mu + m^2 A^0.$$

Поскольку первичная связь должна сохраняться во времени, то возникает вторичная связь

$$G_2 = \partial_\mu P^\mu + m^2 A^0 \approx 0. \quad (9.190)$$

Нетрудно вычислить производную по времени от вторичной связи:

$$\dot{G}_2 = [G_2, \mathcal{H}] = m^2 (\partial_\mu A^\mu + \lambda).$$

Сохранение вторичной связи во времени определяет множитель Лагранжа:

$$\lambda = -\partial_\mu A^\mu. \quad (9.191)$$

Поэтому в теории не возникает других связей.

Равенство (9.191) уже было получено ранее (9.189) при анализе гамильтоновых уравнений движения.

Скобка связей между собой имеет вид

$$[G_1, G_2] = -m^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Введем обозначение для полного набора связей:

$$\{\Phi^M\} = \{G_1, G_2\}, \quad M = 1, 2.$$

Тогда матрица скобок Пуассона для связей примет вид

$$[\Phi^M, \Phi'^N] = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Она, очевидно, невырождена, и, следовательно, связи G_1 и G_2 являются связями второго рода.

Полный гамильтониан получается после добавления всех связей:

$$\mathcal{H}_T = \int d\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2} P^\mu P_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_0 \partial_\mu P^\mu - \frac{1}{2} m^2 A^\alpha A_\alpha + \lambda P^0 + \mu (\partial_\mu P^\mu + m^2 A^0) \right). \quad (9.192)$$

Поскольку поле Прокá содержит только связи второго рода, то полный гамильтониан совпадает с расширенным, $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_E$.

Один из множителей Лагранжа уже найден (9.191). Второй множитель Лагранжа определяется из условия сохранения первичной связи во времени,

$$\dot{G}_1 = [G_1, \mathcal{H}_T] = \partial_\mu P^\mu + m^2 A^0 - m^2 \mu = 0.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\mu = A^0 + \frac{1}{m^2} \partial_\mu P^\mu. \quad (9.193)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4.3. *Гамильтоновы уравнения движения для полного гамильтониана (9.192) эквивалентны лагранжевым уравнениям (9.169).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Добавление к исходному гамильтониану (9.183) вторичной связи приводит к возникновению самой связи из вариационного принципа. Кроме того меняются два гамильтоновых уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{A}_\mu &= -P_\mu + \partial_\mu A_0 - \partial_\mu \mu, \\ \dot{P}^0 &= \partial_\mu P^\mu + m^2 A_0 - \mu m^2. \end{aligned}$$

Если выполнена вторичная связь, то из соотношения (9.193) следует равенство $\mu = 0$. Поэтому гамильтоновы уравнения для полного гамильтониана эквивалентны исходным гамильтоновым уравнениям и, в силу предложения 9.4.2, лагранжевым уравнениям (9.169).

Согласно общей схеме, описанной в разделе 6.2.2, решение связей второго рода можно подставлять в действие. В рассматриваемом случае связи легко решаются:

$$A_0 = -\frac{1}{m^2} \partial_\mu P^\mu, \quad P_0 = 0.$$

После подстановки этого решения в формулу (9.192) получим гамильтониан для физических степеней свободы

$$\mathcal{H}_{\text{ph}} = \int d\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2} P^\mu P_\mu + \frac{1}{2m^2} (\partial_\mu P^\mu)^2 + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu \right). \quad (9.194)$$

Таким образом, временная компонента поля Прокá является нефизической и может быть полностью исключена из теории путем решения пары связей второго рода. Пространственные компоненты A_μ и сопряженные импульсы P^μ являются физическими (т.е. распространяющимися). Их динамика полностью определяется гамильтонианом для физических степеней свободы (9.194). Мы видим, что поле Прокá описывает $n - 1$ степень свободы, что на единицу превышает количество степеней свободы электромагнитного поля.

Гамильтонова плотность для физических степеней свободы поля Прокá (9.194), очевидно, положительно определена. В то же время гамильтоновы плотности исходного (9.183) и полного (9.192) гамильтонианов не являются положительно определенными, т.к. содержат множители Лагранжа.

Гамильтоновы уравнения движения для физических степеней свободы, следующие из гамильтониана (9.194) имеют вид

$$\dot{A}_\mu = -P_\mu - \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu P^\nu, \quad (9.195)$$

$$\dot{P}^\mu = \partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 A^\mu. \quad (9.196)$$

Здесь проявляется важная особенность теории поля: в отличие от гамильтонового описания динамики точечных частиц, уравнение (9.195) для импульсов является не алгебраическим, а дифференциальным. Поэтому выразить импульсы через скорости, чтобы вернуться к лагранжеву описанию, не удастся.

Чтобы сравнить гамильтонову и лагранжеву динамику физических степеней свободы, разложим координаты и импульсы на поперечную и продольную составляющие. Разложение пространственных компонент векторного поля уже было введено формулой (9.174). Для импульсов мы пишем

$$P_\mu = P_\mu^\top + \partial_\mu \chi.$$

Тогда гамильтоновы уравнения (9.195), (9.196) также раскладываются на поперечные и продольные части:

$$\dot{A}_\mu^\top = -P_\mu^\top, \quad (9.197)$$

$$\partial_\mu \dot{\varphi} = -\partial_\mu \chi + \frac{\Delta}{m^2} \partial_\mu \chi, \quad (9.198)$$

$$\dot{P}_\mu^\top = -\Delta A_\mu^\top + m^2 A_\mu^\top, \quad (9.199)$$

$$\partial_\mu \dot{\chi} = m^2 \partial_\mu \varphi. \quad (9.200)$$

Гамильтоновы уравнения для поперечных компонент (9.197), (9.199) отцепились и, как легко видеть, эквивалентны уравнениям Клейна–Гордона–Фока (9.177).

Для полей, убывающих на бесконечности, уравнения (9.198) и (9.200) можно один раз проинтегрировать:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -\chi + \frac{\Delta}{m^2} \chi, \\ \dot{\chi} &= m^2 \varphi. \end{aligned}$$

Первое уравнение можно решить относительно χ ,

$$\chi = \frac{m^2}{\Delta - m^2} \dot{\varphi},$$

и подставить данное решение во второе. В результате получим уравнение Клейна–Гордона–Фока (9.180). Поскольку все проделанные операции были обратимы, то мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4.4. *Для полей, убывающих на бесконечности, гамильтоновы уравнения движения для физических степеней свободы (9.195), (9.196) эквивалентны лагранжесвым уравнениям для физических степеней свободы (9.177), (9.180).*

Сейчас проявилось очень важное преимущество гамильтонова подхода, как более гибкого. А именно, выделение физических степеней свободы на гамильтоновом языке было проведено явно, и получено локальное выражение для соответствующего гамильтониана. В то же время, выделение физических степеней свободы в лагранжевом формализме нелокально, т.к. для нахождения поля φ необходимо решить дифференциальное уравнение (9.84).

9.5. Поля Янга–Миллса

Поля Янга–Миллса (калибровочные поля) играют важную роль в математической физике, потому что лежат в основе современных моделей, объединяющих электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия.

С геометрической точки зрения у нас есть следующая конструкция. Во-первых, мы предполагаем, что пространство-время представляет собой многообразие $\mathbb{M}$. Для общности будем рассматривать пространство-время произвольной размерности n . Затем строится главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ с некоторой структурной группой Ли $\mathbb{G}$ размерности $\dim \mathbb{G} = N$, о которой мы поговорим несколько позже, и проекцией π . Мы предполагаем, что на главном расслоении задана связность, т.е. инвариантное распределение горизонтальных подпространств. Каждая связность взаимно однозначно определяется формой связности, заданной на пространстве главного расслоения $\mathbb{P}$. Если задано координатное покрытие базы $\mathbb{M} = \cup_i \mathbb{U}_i$, и семейство локальных сечений $\sigma_i : \mathbb{U}_i \rightarrow \mathbb{P}$, то форма связности взаимно однозначно определяет семейство локальных форм связности, заданных на каждой координатной окрестности $\mathbb{U}_i$, которые определяются формой связности с помощью отображений дифференциальных форм для σ_i . Локальная форма связности – это 1-форма на координатной окрестности $\mathbb{U}_i$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathbb{G}$:

$$\omega = dx^\alpha A_\alpha{}^A L_A, \quad (9.201)$$

где L_A , $A = 1, \dots, N$, – базис алгебры Ли. Компоненты локальной формы связности $A_\alpha{}^A(x)$ это и есть поля Янга–Миллса (после добавления соответствующих уравнений движения, что будет сделано позже). Базис алгебры Ли удовлетворяет некоторым коммутационным соотношениям

$$[L_A, L_B] = f_{AB}{}^C L_C,$$

где $f_{AB}{}^C$ – структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$.

При изменении локального сечения $\sigma \mapsto \sigma'$ (или при вертикальном автоморфизме) компоненты локальной формы связности меняются $A_\alpha{}^A \mapsto A'_\alpha{}^A$. Правило преобразования компонент связности известно, однако оно явно содержит функцию композиции для группы Ли $\mathbb{G}$ и поэтому неудобно. Инфинитезимальные калибровочные преобразования с параметрами $\epsilon^A(x)$ имеют вид

$$A'_\alpha{}^A = A_\alpha{}^A + \nabla_\alpha \epsilon^A, \quad (9.202)$$

где

$$\nabla_\alpha \epsilon^A := \partial_\alpha \epsilon^A - A_\alpha^B \epsilon^C f_{BC}^A.$$

Чтобы записать конечные калибровочные преобразования в удобном виде, рассмотрим произвольное точное представление группы Ли $\mathbb{G}$. Для определенности рассмотрим присоединенное представление. В этом представлении каждому элементу базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$ соответствует матрица: $L_A \mapsto f_{AB}^C$, где первый индекс A нумерует базисные векторы, а второй и третий рассматриваются, как матричные. Тогда каждой локальной форме связности можно поставить в соответствие матричнозначную 1-форму с компонентами

$$A_{\alpha B}^C := -A_\alpha^A f_{AB}^C. \quad (9.203)$$

(Знак минус не имеет принципиального значения.) Тогда поле Янга–Миллса при изменении локального сечения преобразуется по правилу

$$A_\alpha \mapsto A'_\alpha = S A_\alpha S^{-1} + \partial_\alpha S S^{-1}, \quad (9.204)$$

где $S(x) = \{S_A^B(x)\}$ – матрица присоединенного представления, и мы, для краткости, опустили матричные индексы. Это – хорошо известное калибровочное преобразование полей Янга–Миллса.

Каждой локальной форме связности соответствует локальная форма кривизны. Она представляет собой 2-форму на координатной окрестности U_i со значениями в алгебре Ли:

$$R = dx^\alpha \wedge dx^\beta F_{\alpha\beta}^A L_A, \quad (9.205)$$

где компоненты имеют вид

$$F_{\alpha\beta}^A = \partial_\alpha A_\beta^A - \partial_\beta A_\alpha^A - A_\alpha^B A_\beta^C f_{BC}^A. \quad (9.206)$$

Это есть напряженность поля Янга–Миллса. Ранее было показано, что при калибровочном преобразовании (9.204) компоненты напряженности преобразуются ковариантным образом

$$F_{\alpha\beta}^A \mapsto F'_{\alpha\beta}{}^A = F_{\alpha\beta}^B S^{-1}{}_B^A.$$

Если ввести матричнозначную форму кривизны

$$F_{\alpha\beta B}^C := -F_{\alpha\beta}^A f_{AB}^C, \quad (9.207)$$

то ее закон преобразования будет выглядеть немного иначе:

$$F_{\alpha\beta} \mapsto F'_{\alpha\beta} = S F_{\alpha\beta} S^{-1}, \quad (9.208)$$

где мы, для краткости, опустили матричные индексы.

Матричнозначные компоненты напряженности можно выразить через матричнозначные поля Янга–Миллса:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha - [A_\alpha, A_\beta], \quad (9.209)$$

где $[A_\alpha, A_\beta]$ – коммутатор матриц, и мы опустили матричные индексы. Чтобы получить данное выражение для компонент напряженности из формулы (9.206), использованы тождества Якоби для структурных констант.

Каждая локальная форма кривизны удовлетворяет тождествам Бианки:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}^A + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha}^A + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta}^A = 0, \quad (9.210)$$

где

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}^A = \partial_\alpha F_{\beta\gamma}^A - A_\alpha^B F_{\beta\gamma}^C f_{BC}^A \quad (9.211)$$

– ковариантная производная (по отношению к калибровочным преобразованиям) от компонент напряженности поля Янга–Миллса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5.1. *Для существования такого калибровочного преобразования, чтобы преобразованное поле Янга–Миллса обратилось бы в нуль в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ необходимо и достаточно, чтобы локальная форма кривизны связности была равна нулю в $\mathbb{U}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если локальная форма связности равна нулю, то локальная форма кривизны (9.206) также обращается в нуль.

Обратно. Рассмотрим правило преобразования полей Янга–Миллса (9.204) как дифференциальное уравнение на матрицу S . Если преобразованное поле Янга–Миллса равно нулю, $A'_\alpha = 0$, то матрица преобразования должна удовлетворять системе дифференциальных уравнений:

$$\partial_\alpha S = -SA_\alpha. \quad (9.212)$$

Эта система локально разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия разрешимости:

$$\partial_{[\beta} \partial_{\alpha]} S = 0,$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по индексам. Вторая частная производная от матрицы преобразования имеет вид

$$\partial_\beta \partial_\alpha S = -\partial_\beta S A_\alpha - S \partial_\beta A_\alpha = S(A_\beta A_\alpha - \partial_\beta A_\alpha),$$

где в первом слагаемом мы воспользовались исходным уравнением (9.212). Антисимметризация полученного выражения по индексам α и β приводит к равенству

$$F_{\alpha\beta} = 0.$$

Таким образом, равенство нулю локальной формы кривизны является необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений (9.212) в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Из доказанного утверждения следует, что если локальная форма кривизны равна нулю, то в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ компоненты соответствующей локальной формы связности имеют вид

$$A_\alpha = -S^{-1} \partial_\alpha S = \partial_\alpha S^{-1} S. \quad (9.213)$$

Такое поле Янга–Миллса называется *чистой калибровкой*.

Легко проверить, что напряженность поля Янга–Миллса для поля (9.213) действительно обращается в нуль.

Описанная выше геометрическая конструкция не зависит от того задана ли на базе $\mathbb{M}$ какая либо геометрия, т.е. метрика и аффинная связность, или нет. Главное расслоение, связность и кривизна определяются в дифференциальной геометрии самостоятельно. Закон преобразования компонент локальных форм связности и кривизны при изменении сечения следует из определения. Для этого не надо вводить какие либо дополнительные поля и ковариантные производные. Не смотря на отсутствие аффинной связности в частных производных при определении локальной формы кривизны (9.206) и в тождествах Бианки (9.211), все выписанные соотношения ковариантны относительно общих преобразований координат.

Следующий шаг построения моделей состоит в построении действия. Мы считаем, что действие должно быть инвариантно относительно общих преобразований координат и калибровочных преобразований (9.204). Чтобы построить соответствующий инвариант нам понадобятся две метрики: метрика $g_{\alpha\beta}$ на пространственно-временном многообразии и двусторонне инвариантная метрика η_{AB} на групповом многообразии. Соответствующее действие имеет вид

$$S_{YM} = \int_{\mathbb{M}} dx L_{YM}, \quad L_{YM} := -\frac{1}{4} \sqrt{|g|} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta}{}^A F_{\gamma\delta}{}^B \eta_{AB}. \quad (9.214)$$

В квантовой теории поля в качестве пространства-времени выбирается пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$, группа общих преобразования координат сужается до группы Пуанкаре $\mathbb{IO}(1, n-1)$, и в качестве пространственно-временной метрики выбирается метрика Лоренца, $g_{\alpha\beta} \mapsto \eta_{\alpha\beta}$.

Если калибровочная группа $\mathbb{G}$ является абелевой, как, например, в электродинамике, то в качестве двусторонне инвариантной метрики подойдет любая постоянная матрица. Действительно, при калибровочных преобразованиях (9.204) компоненты напряженности поля Янга–Миллса для абелевой группы вообще не преобразуются.

Для неабелевых групп в качестве двусторонне инвариантной метрики выберем форму Киллинга–Картана. Известно, что форма Киллинга–Картана невырождена тогда и только тогда, когда группа Ли $\mathbb{G}$ полупроста. Поэтому мы предполагаем, что структурная группа Ли $\mathbb{G}$ полупроста.

Любая полупростая группа Ли единственным образом представляется в виде прямого произведения простых групп. В этом случае для каждого сомножителя можно написать отдельный инвариант вида (9.214) со своей константой связи. Поэтому в дальнейшем, для простоты, мы ограничимся рассмотрением простых групп Ли. Если мы научимся работать с простыми группами Ли, то построить модель, соответствующую их прямому произведению, не составит труда.

В дальнейшем мы покажем, что канонический гамильтониан для физических степеней свободы, которые описываются действием (9.214), положительно определен тогда и только тогда, когда метрика η_{AB} положительно определена. Известно, что связная полупростая группа Ли компактна тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга–Картана

$$\eta_{AB} := -f_{AC}{}^D f_{BD}{}^C \quad (9.215)$$

положительно определена. Поэтому мы предполагаем, что структурная группа Ли $\mathbb{G}$ связна, проста и компактна.

Базис алгебры Ли L_A определен с точностью до невырожденных линейных преобразований

$$L_A \mapsto S_A{}^B L_B, \quad S \in \mathbb{GL}(N, \mathbb{R}).$$

При этом форма Киллинга–Картана преобразуется по тензорному закону

$$\eta_{AB} \mapsto S_A{}^C S_B{}^D \eta_{CD}.$$

Произвольную симметричную матрицу можно привести к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы. Дальнейшей растяжкой координат можно добиться того, что на диагонали формы Киллинга–Картана будут стоять единицы. Таким образом, не теряя общности, можно считать, что для связной компактной простой группы Ли форма Киллинга–Картана совпадает с единичной матрицей

$$\eta_{AB} = \delta_{AB}. \quad (9.216)$$

ПРИМЕР 9.5.1. В единых моделях теории поля используются, как правило, унитарные $\mathbb{SU}(N)$ и ортогональные $\mathbb{SO}(N)$ группы. Эти группы связны, компактны и просты.

Если вместо полей Янга–Миллса $A_\alpha{}^A$ рассматривать их точное матричное представление, то лагранжиан (9.214) можно записать, используя след матриц,

$$L_{\text{YM}} := \frac{1}{4} \sqrt{|g|} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \text{tr} (F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}).$$

Обратим внимание на изменение общего знака, что связано с определением формы Киллинга–Картана (9.215).

Для построения физически содержательных моделей математической физики, необходимо введение дополнительных полей, например, скаляров и спиноров. Мы предполагаем, что эти поля являются локальными сечениями векторного ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$, типичным слоем которого является векторное пространство $\mathbb{V}$, в котором задано представление структурной группы Ли $\mathbb{G}$. Отображение $\pi_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}$ – это проекция. Каждое сечение ассоциированного расслоения задается набором компонент $\varphi = \{\varphi^i\}$, $i = 1, \dots, \dim \mathbb{V}$. При калибровочных преобразованиях поля преобразуются по некоторому представлению структурной группы:

$$\varphi \mapsto \varphi' = \varphi S^{-1} = \{\varphi^j S^{-1}_j{}^i\}, \quad (9.217)$$

где $S_j{}^i$ – матрица представления. Ковариантная производная имеет вид

$$\nabla_{\alpha} \varphi^i = \partial_{\alpha} \varphi^i + \varphi^j A_{\alpha j}{}^i, \quad (9.218)$$

в котором

$$A_{\alpha j}{}^i := -A_{\alpha}{}^A L_{A j}{}^i,$$

где $L_{A j}{}^i$ – представление базиса алгебры Ли L_A в векторном пространстве $\mathbb{V}$. Нетрудно убедиться в том, что при калибровочных преобразованиях (9.204), (9.217) ковариантная производная ведет себя ковариантно:

$$\nabla_{\alpha} \varphi^i \mapsto \nabla'_{\alpha} \varphi'^i = \nabla_{\alpha} \varphi^j S^{-1}_j{}^i,$$

где

$$\nabla'_{\alpha} \varphi'^i = \partial_{\alpha} \varphi'^i + \varphi'^j A'_{\alpha j}{}^i,$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В физике векторное пространство $\mathbb{V}$ называется *изотопическим*, а калибровочные преобразования (9.217) – *изотопическими вращениями*.

При построении моделей математической физики мы предполагаем, что уравнения движения для полей φ , не взаимодействующих с полями Янга–Миллса, следуют из некоторого действия

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx L(\varphi, \partial\varphi),$$

где лагранжиан L зависит от полей $\varphi = \{\varphi^i\}$ и их частных производных $\partial\varphi = \{\partial_{\alpha} \varphi^i\}$. Как и для электромагнитного поля, взаимодействие с полями Янга–Миллса вводится путем *минимальной подстановки*, которая заключается в замене всех частных производных на ковариантные:

$$\partial_{\alpha} \varphi^i \mapsto \nabla_{\alpha} \varphi^i := \partial_{\alpha} \varphi^i + \varphi^j A_{\alpha j}{}^i.$$

Кроме этого, к лагранжиану добавляется лагранжиан поля Янга–Миллса

$$L(\varphi, \partial\varphi) \mapsto -\frac{1}{4e^2} F^{\alpha\beta A} F_{\alpha\beta A} + L(\varphi, \nabla\varphi),$$

который приводит к динамическим уравнениям движения для самого поля Янга–Миллса. Выше e – константа связи и

$$F^{\alpha\beta A} := g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \eta^{AB} F_{\gamma\delta B}.$$

Для построения теории возмущений удобно перейти к новым переменным $A_{\alpha}{}^A \mapsto e A_{\alpha}{}^A$. Тогда лагранжиан примет вид

$$L = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta A} F_{\alpha\beta A} + L(\varphi, \nabla\varphi), \quad (9.219)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}{}^A &= \partial_\alpha A_\beta{}^A - \partial_\beta A_\alpha{}^A - e A_\alpha{}^B A_\beta{}^C f_{BC}{}^A, \\ \nabla_\alpha \varphi^i &= \partial_\alpha \varphi^i + e \varphi^j A_{\alpha j}{}^i. \end{aligned}$$

В таком виде удобно строить теорию возмущений при малой константе связи e . В дальнейшем, для упрощения обозначений, мы положим $e = 1$.

Если лагранжиан Янга–Миллса записан в виде (9.219), то размерности следующие:

$$[A_\alpha{}^A] = l^{1-\frac{n}{2}}, \quad [e] = l^{\frac{n}{2}-2}. \quad (9.220)$$

То есть размерность поля Янга–Миллса совпадает с размерностью потенциала электромагнитного поля. Заметим, что в четырехмерном пространстве-времени константа связи e безразмерна.

9.5.1. Лагранжева формулировка. В квантовой теории поля мы предполагаем, что пространством-временем является пространство Минковского, $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^{1,n-1}$, которое топологически тривиально, т.е. диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. В этом случае расслоение тривиально

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^{1,n-1}, \pi, \mathbb{G}) \approx \mathbb{R}^{1,n-1} \times \mathbb{G}.$$

Если выбрать систему координат, например, декартову, покрывающую все пространство-время, то связность на главном расслоении будет находиться во взаимно однозначном соответствии с локальной формой связности. По этой причине в физике часто говорят, что поля Янга–Миллса это и есть связность.

Действие для полей Янга–Миллса в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ имеет вид

$$S_{\text{YM}} = \int dx L_{\text{YM}}, \quad L_{\text{YM}} := -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta A} F_{\alpha\beta A}. \quad (9.221)$$

где подъем и опускание греческих индексов производится с помощью метрики Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, а латинских – с помощью формы Киллинга–Картана η_{AB} . Из этого действия следуют нелинейные уравнения движения

$$\nabla_\beta F^{\beta\alpha A} := \partial_\beta F^{\beta\alpha A} - A_\beta{}^B F^{\beta\alpha C} f_{BC}{}^A = 0. \quad (9.222)$$

Добавление к лагранжиану Янга–Миллса массового члена $\frac{1}{2}m^2 A^{\alpha A} A_{\alpha A}$, как легко видеть, нарушает калибровочную инвариантность.

В отличие от электродинамики в пространстве Минковского для неабелевых калибровочных групп $\mathbb{G}$ уравнения (9.222) нелинейны. Поэтому говорить о “свободных” полях Янга–Миллса не имеет смысла. Взаимодействие полей Янга–Миллса есть всегда. В линейном приближении уравнения (9.222) имеют тот же вид, что и набор из N электромагнитных полей. При этом инфинитезимальные калибровочные преобразования (9.204) в линейном приближении по полям принимают вид $\mathbb{U}(1)$ преобразований:

$$A'^A_\alpha = A_\alpha{}^A + \partial_\alpha \epsilon^A,$$

где $\epsilon^A(x)$, $A = 1, \dots, N$, – параметры преобразований. Таким образом, в линейном приближении свободное поле Янга–Миллса описывает N безмассовых векторных полей.

По построению, действие калибровочно инвариантно. Согласно второй теореме Нетер в таком случае между уравнениями движения существует N линейных зависимостей по числу

параметров преобразования. Для нахождения этих зависимостей достаточно знать вид инфинитезимальных калибровочных преобразований (9.202). Из определения инвариантности следует равенство

$$\delta S_{\text{YM}} = \int dx \frac{\delta S_{\text{YM}}}{\delta A_\alpha^A} \nabla_\alpha \epsilon^A = 0.$$

После интегрирования по частям, получим зависимость уравнений движения:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta F^{\beta\alpha}_A = 0, \quad A = 1, \dots, N. \quad (9.223)$$

В справедливости полученного равенства можно убедиться с помощью прямых вычислений. Действительно, в силу антисимметрии напряженности, $F^{\alpha\beta}_A = -F^{\beta\alpha}_A$, равенство (9.223) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) F^{\beta\alpha}_A = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}^C F^{\beta\alpha\gamma}_A f_{CAB} = 0,$$

где мы воспользовались свойством коммутатора ковариантных производных, симметрией тензора $F_{\alpha\beta}^C F^{\beta\alpha\gamma}_A$ по индексам C и B и антисимметрией структурных констант.

Если в правой части уравнений движения (9.222) стоит ток,

$$\nabla_\beta F^{\beta\alpha}_A = J^\alpha_A, \quad (9.224)$$

То из тождества (9.223) следует закон ковариантного сохранения тока:

$$\nabla_\alpha J^\alpha_A = 0, \quad (9.225)$$

выполнение которого необходимо для самосогласованности уравнений движения. В свою очередь, если ток получен в результате варьирования некоторого калибровочно инвариантного действия для других полей, то равенство (9.225) будет автоматически выполнено на уравнениях движения, опять же, в силу второй теоремы Нетер. Если же ток J^α_A вводится в уравнения движения “руками”, то на него необходимо наложить условие сохранения (9.225).

Эффективным инструментом исследования свободных уравнений движения в электродинамике явилось разложение пространственных компонент электромагнитного потенциала на поперечную и продольную составляющие. Для каждого значения индекса A поле Янга–Миллса также можно разложить на поперечную и продольные части. Однако это не будет столь же эффективно, т.к. уравнения “свободного” поля Янга–Миллса (9.222) нелинейны. Такое разложение эффективно в квантовой теории поля при построении теории возмущений.

Теперь рассмотрим законы сохранения, вытекающие из первой теоремы Нетер. По построению, действие Янга–Миллса инвариантно относительно глобального действия группы Пуанкаре $\mathbb{O}(1, n-1)$. Из инвариантности относительно трансляций, согласно первой теореме Нетер, следует закон сохранения энергии-импульса (см. раздел 5.2.1),

$$\partial_\beta \hat{T}^{\alpha\beta} = 0,$$

где

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha A_{\gamma A} F_{\beta}^{\gamma A} + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F^2$$

– канонический тензор энергии-импульса поля Янга–Миллса. Это выражение страдает двумя недостатками. Во-первых, оно не инвариантно относительно калибровочных преобразований. Во-вторых, отсутствует симметрия относительно перестановки индексов. Для их устранения

используем произвол в выборе канонического тензора энергии-импульса. Заметим, что выполнено равенство

$$\partial_\gamma(A_{\alpha A}F_\beta^{\gamma A}) = \partial_\gamma A_{\alpha A}F_\beta^{\gamma A} + A_{\alpha A}\nabla_\gamma F_\beta^{\gamma A} + A_{\alpha A}A_\gamma^c f_{cB}^A F_\beta^{\gamma B}.$$

Если выполнены уравнения движения, что предполагается в первой теореме Нетер, то второе слагаемое обращается в нуль, и можно переопределить тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta}^s := \widehat{T}_{\alpha\beta} + \partial_\gamma(A_{\alpha A}F_\beta^{\gamma A}) = -F_{\alpha\gamma A}F_\beta^{\gamma A} + \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}F^2. \quad (9.226)$$

Этот тензор энергии-импульса, очевидно, калибровочно инвариантен и симметричен. На уравнениях движения он сохраняется:

$$\partial_\beta T_\alpha^s{}^\beta = 0. \quad (9.227)$$

При лоренцевых вращениях поле Янга–Миллса преобразуется, как и электромагнитное поле (9.100). Поэтому для спинового момента получаем следующее выражение

$$S_{\alpha\beta}{}^\gamma = A_{\alpha A}F_\beta^{\gamma A} - A_{\beta A}F_\alpha^{\gamma A}. \quad (9.228)$$

Полный тензор момента количества движения (5.52) состоит из орбитального и спинового моментов:

$$\widehat{J}_{\alpha\beta}{}^\gamma = x_\beta \widehat{T}_\alpha{}^\gamma - x_\alpha \widehat{T}_\beta{}^\gamma + S_{\alpha\beta}{}^\gamma. \quad (9.229)$$

Используя выражения для симметричного тензора энергии-импульса (9.226) и спинового момента (9.228) его можно переписать в виде

$$\widehat{J}_{\alpha\beta}{}^\gamma = M_{\alpha\beta}{}^\gamma + \partial_\delta(x_\alpha A_{\beta A}F^{\gamma\delta A} - x_\beta A_{\alpha A}F^{\gamma\delta A}), \quad (9.230)$$

где

$$M_{\alpha\beta}{}^\gamma := x_\beta T_\alpha^s{}^\gamma - x_\alpha T_\beta^s{}^\gamma$$

– орбитальный момент, построенный по симметричному тензору энергии-импульса (9.226). Поскольку второе слагаемое в выражении (9.230) имеет вид (5.39), то тензор момента количества движения можно переопределить, положив

$$J_{\alpha\beta}{}^\gamma = M_{\alpha\beta}{}^\gamma = x_\beta T_\alpha^s{}^\gamma - x_\alpha T_\beta^s{}^\gamma, \quad (9.231)$$

который также сохраняется

$$\partial_\gamma J_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0.$$

Отметим полное отсутствие спинового момента в этом выражении.

Поскольку действие для поля Янга–Миллса инвариантно относительно калибровочных преобразований, то оно также инвариантно относительно глобальных преобразований из калибровочной группы. Поэтому можно воспользоваться первой теоремой Нетер. С калибровочной инвариантностью действия для поля Янга–Миллса связан закон сохранения заряда

$$\partial_\alpha J^\alpha{}_A = 0, \quad (9.232)$$

где

$$J^\alpha{}_A = \nabla_\beta F^{\beta\alpha}{}_A \quad (9.233)$$

– ток, соответствующий первой теореме Нетер, то есть, когда параметр калибровочных преобразований не зависит от точки пространства-времени. При отсутствии полей материи этот закон тривиален, т.к. ток равен нулю в силу уравнений движения (9.222).

9.5.2. Гамильтонова формулировка. Рассмотрим гамильтонову формулировку поля Янга–Миллса в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ с действием (9.221). По определению, импульсы, сопряженные компонентам A_α^A , имеют вид

$$P^\alpha_A := \frac{\partial L_{\text{YM}}}{\partial \dot{A}_\alpha^A} = F^{0\alpha}_A, \quad (9.234)$$

где $\dot{A}_\alpha^A := \partial_0 A_\alpha^A$. Выпишем отличные от нуля одновременные скобки Пуассона:

$$[A_\alpha^A, P'^\beta_B] := [A_\alpha^A(x^0, \mathbf{x}), P^\beta_B(x^0, \mathbf{x}')] = \delta_\alpha^\beta \delta_B^A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Как и в случае электромагнитного поля в теории возникают первичные связи. Из определения импульсов (9.221) следует N первичных связей:

$$G_{1A} = P^0_A = 0, \quad A = 1, \dots, N. \quad (9.235)$$

Других первичных связей в модели нет. Скобки Пуассона первичных связей между собой, очевидно, равны нулю:

$$[G_{1A}, G'_{1B}] = 0.$$

Несложные вычисления приводят к гамильтониану

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2} P^{\mu A} P_{\mu A} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu A} F_{\mu\nu A} - A_0^A \nabla_\mu P^\mu_A + \lambda^A P^0_A \right), \quad (9.236)$$

где мы добавили первичные связи с множителями Лагранжа λ^A и ковариантная производная от импульсов равна

$$\nabla_\mu P^\nu_A := \partial_\mu P^\nu_A - A_{\mu A}^B P^\nu_B.$$

Гамильтоновы уравнения движения для построенного гамильтониана имеют вид

$$\dot{A}_0^A = \lambda^A, \quad (9.237)$$

$$\dot{A}_\mu^A = -P_\mu^A + \nabla_\mu A_0^A, \quad (9.238)$$

$$\dot{P}^0_A = \nabla_\mu P^\mu_A, \quad (9.239)$$

$$\dot{P}^\mu_A = \nabla_\nu F^{\nu\mu}_A + A_{0A}^B P^\mu_B, \quad (9.240)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A_0^A &:= \partial_\mu A_0^A + A_{\mu B}^A A_0^B, \\ \nabla_\nu F^{\rho\mu}_A &:= \partial_\nu F^{\rho\mu}_A - A_{\nu A}^B F^{\rho\mu}_B. \end{aligned}$$

Конечно, эти уравнения необходимо дополнить уравнениями первичных связей (9.235), которые возникают при варьировании соответствующего действия по множителям Лагранжа.

Гамильтоновы уравнения движения (9.237)–(9.240), содержат множители Лагранжа λ^A , которые в исходном действии рассматриваются в качестве произвольных функций. Однако, уравнения движения, в принципе, могут наложить на них некоторые ограничения. Чтобы проверить совместность гамильтоновых уравнений, рассмотрим эволюцию первичных связей во времени. Поскольку $P^0_A = 0$, то из уравнения (9.239) следуют равенства

$$\nabla_\mu P^\mu_A = 0, \quad (9.241)$$

которые должны быть выполнены для любого решения гамильтоновых уравнений. С учетом уравнения (9.240) производная по времени от полученных равенств имеет вид

$$\partial_0(\nabla_\mu P^\mu_A) = \nabla_\mu \nabla_\nu F^{\nu\mu}_A + \nabla_\mu A_{0A}{}^B P^\mu_B + A_{0A}{}^B \nabla_\mu P^\mu_B - \dot{A}_{\mu A}{}^B P^\mu_B. \quad (9.242)$$

Первое слагаемое обращается в нуль:

$$\frac{1}{2}(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) F^{\nu\mu}_A = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}{}^C F^{\nu\mu B} f_{CAB} = 0,$$

где мы воспользовались свойством коммутатора ковариантных производных, симметрией тензора $F_{\mu\nu}{}^C F^{\nu\mu B}$ по индексам C и B и антисимметрией структурных констант. Второе и четвертое слагаемые сокращаются с учетом уравнения (9.238). В результате возникает равенство

$$\partial_0(\nabla_\mu P^\mu_A) = A_{0A}{}^B \nabla_\mu P^\mu_B \approx 0, \quad (9.243)$$

т.к. правая часть равна нулю на уравнениях движения (9.241). На этом анализ заканчивается, и мы видим, что никаких ограничений на множители Лагранжа гамильтоновы уравнения движения не накладывают.

Продолжим общий гамильтонов анализ. Производная по времени от первичных связей равна

$$\dot{G}_1 = [G_1, \mathcal{H}] = \nabla_\mu P^\mu_A.$$

Это приводит к вторичным связям:

$$G_{2A} = \nabla_\mu P^\mu_A \approx 0. \quad (9.244)$$

Скобка Пуассона первичных и вторичных связей между собой равна нулю,

$$[G_{1A}, G'_{2B}] = 0.$$

Несложно вычислить скобки Пуассона вторичных связей между собой:

$$[G_{2A}, G'_{2B}] = -f_{AB}{}^C G_{2C}. \quad (9.245)$$

Правая часть, очевидно, обращается в нуль на поверхности связей.

Выше мы уже показали, что вторичные связи сохраняются во времени (9.243).

Таким образом, полная система связей

$$\{G_a\} := \{G_{1A}, G_{2A}\}, \quad a = 1, \dots, 2N, \quad (9.246)$$

находится в инволюции, и модель содержит $2N$ связей первого рода.

Полный гамильтониан получается после добавления всех связей:

$$\mathcal{H}_T = \int dx \left(-\frac{1}{2} P^{\mu A} P_{\mu A} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu A} F_{\mu\nu A} + \lambda^A P^0_A + \mu^A \nabla_\mu P^\mu_A \right),$$

где слагаемые $A_0^A \nabla_\mu P^\mu_A$ мы абсорбировали, переопределив множители Лагранжа μ^A . Ему соответствует полное действие

$$S_T = \int dx \left(P^\alpha_A \dot{A}_\alpha^A + \frac{1}{2} P^{\mu A} P_{\mu A} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu A} F_{\mu\nu A} - \lambda^A P^0_A - \mu^A \nabla_\mu P^\mu_A \right). \quad (9.247)$$

Это действие является более общим, чем исходное (9.221), т.к. совпадает с ним только при $\lambda^A = 0$ и $\mu^A = -A_0^A$.

Гамильтоновы уравнения движения для действия (9.247) имеют вид:

$$\frac{\delta S_T}{\delta P^0_A} = \dot{A}_0^A - \lambda^A = 0, \quad (9.248)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta P^\mu_A} = \dot{A}_\mu^A + P_\mu^A + \nabla_\mu \mu^A = 0, \quad (9.249)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta A_0^A} = -\dot{P}^0_A = 0, \quad (9.250)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta A_\mu^A} = -\dot{P}^\mu_A + \nabla_\nu F^{\nu\mu}_A - \mu^B f_{AB}{}^C P^\mu_C = 0, \quad (9.251)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta \lambda^A} = -P^0_A = 0, \quad (9.252)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta \mu^A} = -\nabla_\mu P^\mu_A = 0. \quad (9.253)$$

Согласно теореме 6.2.3 каждой связи первого рода соответствует калибровочное преобразование, относительно которого полное действие инвариантно. Первичным связям (9.235) соответствует генератор калибровочных преобразований

$$T_1 := \int dx \epsilon_1^A P^0_A$$

с некоторыми малыми параметрами $\epsilon_1^A(x)$. При этом преобразуются только временные компоненты поля Янга–Миллса A_0^A и множители Лагранжа λ^A :

$$\delta_1 A_0^A = [A_0^A, T_1] = \epsilon_1^A, \quad \delta_1 \lambda^A = \dot{\epsilon}_1^A. \quad (9.254)$$

Все остальные поля остаются без изменения. Согласно второй теореме Нетер из инвариантности действия относительно калибровочного преобразования (9.254) следует зависимость уравнений движения:

$$\frac{\delta S_T}{\delta A_0^A} - \partial_t \frac{\delta S_T}{\delta \lambda^A} = 0.$$

В справедливости этого тождества нетрудно убедиться прямой проверкой.

Вторичным связям первого рода (9.244) также соответствует генератор преобразований

$$T_2 := \int dx \epsilon_2^A \nabla_\mu P^\mu_A,$$

где $\epsilon_2^A(x)$ – малые параметры второго калибровочного преобразования. В этом случае преобразуются только пространственные компоненты поля Янга–Миллса A_μ^A , сопряженные импульсы P^μ_A и множители Лагранжа μ^A :

$$\begin{aligned} \delta_2 A_\mu^A &= [A_\mu^A, T_2] = -\nabla_\mu \epsilon_2^A, \\ \delta_2 P^\mu_A &= [P^\mu_A, T_2] = -\epsilon_2^B f_{AB}{}^C P^\mu_C, \\ \delta_2 \mu^A &= \dot{\epsilon}_2^A - \epsilon_2^B \mu^C f_{BC}{}^A. \end{aligned}$$

Согласно второй теореме Нетер, из локальной инвариантности действия следует зависимость уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\nabla_\mu \frac{\delta S_T}{\delta A_\mu^A} - \frac{\delta S_T}{\delta P^\mu_B} f_{AB}{}^C P^\mu_C - \partial_t \frac{\delta S_T}{\delta \mu^A} - \mu^B f_{AB}{}^C \frac{\delta S_T}{\delta \mu^C} = 0,$$

что также легко проверить. Таким образом, как и в электродинамике, число параметров калибровочных преобразований полного действия S_T в гамильтоновом формализме по сравнению с лоренцевой формулировкой удвоилось.

Генератором калибровочных преобразований в лагранжевом формализме (9.204) является линейная комбинация связей первого рода:

$$T = \int dx \left[(\dot{\epsilon}^A - A_0^B \epsilon^C f_{BC}^A) P_A^0 - \epsilon^A \nabla_\mu P_A^\mu \right].$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \delta A_0^A &= [A_0^A, T] = \dot{\epsilon}^A - A_0^B \epsilon^C f_{BC}^A = \nabla_0 \epsilon^A, \\ \delta A_\mu^A &= [A_\mu^A, T] = \nabla_\mu \epsilon^A, \\ \delta P_A^0 &= \epsilon^B f_{AB}^C P_C^0, \\ \delta P_A^\mu &= \epsilon^B f_{AB}^C P_C^\mu. \end{aligned}$$

По сравнению с электродинамикой возникли нетривиальные преобразования импульсов. Это связано с тем, что в электродинамике компоненты напряженности инвариантны, а для полей Янга–Миллса – ковариантны.

Решения гамильтоновых уравнений движения содержат произвол, соответствующий множителям Лагранжа λ^A и μ^A . Для того, чтобы устранить этот произвол необходимо наложить $2N$ калибровочных условий. В квантовой теории поля обычно используют такие же калибровочные условия (9.96) как и в электродинамике для каждого значения индекса A . Если зафиксировать, например, кулоновскую калибровку $\partial_\mu A^\mu = 0$, то это даст N калибровочных условий. Недостающие N калибровочных условий в гамильтоновом формализме можно получить, рассматривая эволюцию этих калибровочных условий во времени. Из уравнения (9.238) следует равенство

$$\partial_0(\partial_\mu A^\mu_A) = -\partial_\mu P^\mu_A + \partial^\mu \nabla_\mu A_{0A}.$$

Тогда кулоновскую калибровку для потенциала можно дополнить N калибровочными условиями

$$-\partial_\mu P^\mu_A + \partial^\mu \nabla_\mu A_{0A} = 0.$$

В этом случае калибровочные условия будут согласованы с гамильтоновыми уравнениями для исходного гамильтониана (9.236). Вместо этих калибровочных условий можно выбрать другие, например, $A_{0A} = 0$.

Гамильтонова формулировка поля Янга–Миллса на произвольном многообразии $\mathbb{M}$ с метрикой g проводится, по существу, так же как и в пространстве Минковского. Необходимо произвести замену $\eta_{\alpha\beta} \mapsto g_{\alpha\beta}$ и рассматривать компоненты $g_{\alpha\beta}$ как внешнее поле. Почти все формулы останутся при этом без изменения, только в ковариантных производных появятся символы Кристоффеля, возникающие при интегрировании по частям.

9.5.3. Поля Янга–Миллса в аффинной геометрии. Как уже было отмечено, для построения моделей математической физики на многообразии $\mathbb{M}$ (пространстве-времени) кроме поля Янга–Миллса желательно иметь метрику и аффинную связность, т.е. аффинную геометрию. Поскольку поле Янга–Миллса – это компоненты локальной формы связности, то действие для “свободного” поля Янга–Миллса (9.214) зависит только от метрики, но не от связности.

Уравнения движения и тензор энергии-импульса поля Янга–Миллса получаются простым варьированием действия (9.214):

$$\sqrt{|g|} S_{YM, \alpha}^{\alpha} := \frac{\delta S_{YM}}{\delta A_\alpha^\alpha} = \partial_\beta (\sqrt{|g|} F^{\beta\alpha}_A) = \sqrt{|g|} \tilde{\nabla}_\beta F^{\beta\alpha}_A = 0, \quad (9.255)$$

$$\sqrt{|g|}S_{\text{YM},\alpha\beta} := \frac{\delta S_{\text{YM}}}{\delta g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}T_{\text{YM}\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}F_{\alpha\gamma\text{A}}F_{\beta}^{\gamma\text{A}} + \frac{1}{8}\sqrt{|g|}g_{\alpha\beta}F^2, \quad (9.256)$$

где

$$\tilde{\nabla}_{\beta}F^{\beta\alpha}_{\text{A}} := \partial_{\beta}F^{\beta\alpha}_{\text{A}} + F^{\gamma\alpha}_{\text{A}}\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\beta} - A_{\beta\text{A}}^{\text{B}}F^{\beta\alpha}_{\text{B}}.$$

Слагаемое с символами Кристоффеля $\tilde{\Gamma}$ возникло при интегрировании по частям. Отсюда вытекает выражение для тензора энергии-импульса поля Янга–Миллса

$$T_{\text{YM}\alpha\beta} = -F_{\alpha\gamma\text{A}}F_{\beta}^{\gamma\text{A}} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^2. \quad (9.257)$$

Полученное выражение является ковариантным обобщением симметричного канонического тензора энергии-импульса (9.226), полученного в пространстве Минковского из первой теоремы Нетер.

Если поле Янга–Миллса взаимодействует с другими полями, то в правой части уравнений движения (9.255) возникают токи:

$$\tilde{\nabla}_{\beta}F^{\beta\alpha}_{\text{A}} = J^{\alpha}_{\text{A}}. \quad (9.258)$$

Как и в случае электродинамики, для поля Янга–Миллса можно воспользоваться формализмом первого порядка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5.2. *Уравнения движения для действия (9.214) эквивалентны уравнениям Эйлера–Лагранжа для действия*

$$S = - \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{2} F^{\alpha\beta\text{A}} (\partial_{\alpha} A_{\beta\text{A}} - \partial_{\beta} A_{\alpha\text{A}}) - \frac{1}{4} F^{\alpha\beta\text{A}} F_{\alpha\beta\text{A}} \right], \quad (9.259)$$

в котором компоненты $F^{\alpha\beta\text{A}}$ и $A_{\alpha\text{A}}$ рассматриваются в качестве независимых переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяет доказательство предложения 9.3.4 для электродинамики.

Действие для поля Янга–Миллса (9.214) инвариантно относительно общих преобразований координат. Соответствующие вариации полей имеют вид

$$\begin{aligned} \delta A_{\alpha}^{\text{A}} &= -\partial_{\alpha}\epsilon^{\beta}A_{\beta}^{\text{A}} - \epsilon^{\beta}\partial_{\beta}A_{\alpha}^{\text{A}}, \\ \delta g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\gamma}\partial_{\gamma}\epsilon^{\beta} + g^{\beta\gamma}\partial_{\gamma}\epsilon^{\alpha} - \epsilon^{\gamma}\partial_{\gamma}g^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно второй теореме Нетер (5.64), следует зависимость уравнений движения

$$\partial_{\beta}S,^{\beta\text{A}}A_{\alpha\text{A}} + S,^{\beta\text{A}}F_{\beta\alpha\text{A}} - \partial_{\beta}S,^{\beta}_{\alpha} - \partial_{\beta}S,^{\beta}_{\alpha} - S,_{\beta\gamma}\partial_{\alpha}g^{\beta\gamma} = 0. \quad (9.260)$$

Или, в ковариантном виде,

$$\tilde{\nabla}_{\beta}S,^{\beta\text{A}}A_{\alpha\text{A}} + S,^{\beta\text{A}}F_{\beta\alpha\text{A}} - 2\tilde{\nabla}^{\beta}S,_{\beta\alpha} = 0. \quad (9.261)$$

Если выполнены уравнения движения для поля Янга–Миллса (9.255), то с учетом свернутых тождеств Бианки соотношение (9.261) принимает вид

$$\tilde{\nabla}_{\beta}T_{\text{YM}\alpha}^{\beta} = 0. \quad (9.262)$$

Полученное равенство, выполненное для всех решений уравнений Эйлера–Лагранжа, можно интерпретировать, как ковариантное обобщение закона сохранения тензора энергии-импульса (9.227).

Действие для поля Янга–Миллса инвариантно также относительно калибровочных преобразований (9.202). Этой инвариантности, согласно второй теореме Нетер, соответствует зависимость уравнений движения:

$$\tilde{\nabla}_\alpha S,^\alpha_A = 0. \quad (9.263)$$

С учетом уравнения (9.258) это равенство приводит к закону сохранения тока: $\tilde{\nabla}_\alpha J^\alpha_A = 0$. Если ток возникает при варьировании некоторого калибровочно инвариантного действия для полей материи, то сохранение тока будет выполняться автоматически в силу второй теоремы Нетер. Если же ток вводится в уравнения для поля Янга–Миллса “руками”, то условие $\tilde{\nabla}_\alpha J^\alpha_A = 0$ необходимо для самосогласованности уравнений.

9.5.4. Поле Янга–Миллса в общей теории относительности. Если ограничиться рассмотрением четырехмерного пространства-времени, то в теории поля Янга–Миллса возникают определенные специфические свойства. Как и в электродинамике поле Янга–Миллса определяет локальные формы связности

$$A^A := dx^\alpha A_\alpha^A, \quad A = 1, \dots, N.$$

Теперь локальная форма кривизны (9.205) не является внешней производной от локальной формы связности. Однако ее можно записать с помощью внешней ковариантной производной,

$$R^A = DA^A := dA^A - \frac{1}{2}A^B \wedge A^C f_{BC}^A. \quad (9.264)$$

Тождества Бианки (9.210) также можно записать в компактном виде с помощью оператора внешнего ковариантного дифференцирования:

$$DR^A = 0.$$

На этом, собственно, преимущество использования обозначений дифференциальных форм в теории полей Янга–Миллса заканчивается.

В общей теории относительности для каждого значения изотопического индекса A можно ввести 2-формы, дуальные к форме локальной кривизны:

$$*F^A := \frac{1}{2}dx^\alpha \wedge dx^\beta (*F^A)_{\alpha\beta}, \quad (9.265)$$

где компоненты дуальной формы кривизны заданы равенством

$$*F_{\alpha\beta}^A := \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta A}. \quad (9.266)$$

В приведенной формуле $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга.

Используя дуальную форму кривизны, тензор энергии-импульса поля Янга–Миллса (9.257) можно переписать в виде

$$T_{\gamma\mu\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[F_{\alpha\gamma A}F_{\beta}^{\gamma A} + *F_{\alpha\gamma A} *F_{\beta}^{\gamma A}]. \quad (9.267)$$

Он, очевидно, инвариантен относительно дуальных вращений (9.163) для каждого значения индекса A . Если базис алгебры Ли выбран таким образом, что форма Киллинга–Картана совпадает с символом Кронекера, то эту инвариантность можно расширить до группы $\mathbb{SO}(2N)$.

Так же как и в электродинамике, доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5.3. Если метрика на многообразии $\mathbb{M}$ имеет лоренцеву сигнатуру и координата x^0 является временем, то временная компонента тензора энергии-импульса поля Янга–Миллса

$$T_{\text{EM}00} = -\frac{1}{2} [F_{0\gamma_A} F_0^{\gamma_A} + *F_{0\gamma_A} * F_0^{\gamma_A}] \quad (9.268)$$

положительно определена и, следовательно, удовлетворяет слабому энергетическому условию. Она также удовлетворяет сильному энергетическому условию.

Ситуация с полем Янга–Миллса во многих отношениях аналогична ситуации в электродинамике.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5.4. Действие для полей Янга–Миллса в аффинной геометрии (9.214) инвариантно относительно преобразований Вейля, не затрагивающих само поле Янга–Миллса:

$$g_{\alpha\beta} \mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}, \quad A_\alpha^A \mapsto \bar{A}_\alpha^A = A_\alpha^A, \quad (9.269)$$

где $\phi(x) \in C^2(\mathbb{M})$ – произвольная вещественнозначная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из равенства

$$\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} = \sqrt{|\bar{g}|} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{g}^{\gamma\delta}.$$

Как следствие общего утверждения 9.3.7, получаем, что след тензора энергии-импульса поля Янга–Миллса (9.257) для четырехмерного пространства-времени равен нулю, $T_{\text{YM}\alpha}{}^\alpha = 0$. Это, конечно, легко проверить.

10. Спиноры

Важнейшую роль в математической физике играют неабелевы группы (псевдо)вращений $\mathbb{O}(p, q)$, $p + q \geq 3$, и их представления. Связные компоненты единицы этих групп Ли не являются односвязными. Известно, что для каждого связного многообразия существует универсальное накрытие с накрывающим пространством той же размерности. При этом для накрытий групп можно сохранить их групповую структуру.

ПРИМЕР 10.0.1. Существуют следующие изоморфизмы:

$$\mathbb{SO}(3) \simeq \frac{\mathbb{SU}(2)}{\mathbb{Z}_2}, \quad \mathbb{SO}_0(1, 2) \simeq \frac{\mathbb{SL}(2, \mathbb{R})}{\mathbb{Z}_2}, \quad \mathbb{SO}_0(1, 3) \simeq \frac{\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}.$$

Поскольку группы $\mathbb{SU}(2)$, $\mathbb{SL}(2, \mathbb{R})$ и $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ связны и односвязны, то соответствующие накрытия:

$$\mathbb{SU}(2) \rightarrow \mathbb{SO}(3), \quad \mathbb{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{SO}_0(1, 2), \quad \mathbb{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{SO}_0(1, 3),$$

являются универсальными и двулистными.

Вещественные группы $\mathbb{PIN}(p, q)$, $\mathbb{SPIN}(p, q)$ и $\mathbb{SPIN}_0(p, q)$ дважды накрывают соответственно группы вещественных (псевдо)вращений $\mathbb{O}(p, q)$, $\mathbb{SO}(p, q)$ и $\mathbb{SO}_0(p, q)$. Группа $\mathbb{SPIN}_0(p, q)$ связна и односвязна. Группы $\mathbb{PIN}(p, q)$ и $\mathbb{SPIN}(p, q)$ при $pq \neq 0$ односвязны, но состоят соответственно из четырех и двух компонент связности, как и группы $\mathbb{O}(p, q)$ и $\mathbb{SO}(p, q)$. Поэтому данные двулистные накрытия являются универсальными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Представления групп $\mathbb{PIN}(p, q)$, $\mathbb{SPIN}(p, q)$ и $\mathbb{SPIN}_0(p, q)$ называются *спинорными представлениями* групп (псевдо)вращений $\mathbb{O}(p, q)$, $\mathbb{SO}(p, q)$ и $\mathbb{SO}_0(p, q)$. Элемент векторного пространства, в котором действует спинорное представление группы (псевдо)вращений называется *спинором*. Если вектор представления зависит от точки некоторого многообразия, то он называется *спинорным полем*.

В настоящей главе мы рассмотрим спинорные поля в пространстве Минковского, которые лежат в основе описания частиц с полуцелым спином.

Поскольку накрытие является двулистным, то каждому элементу группы (псевдо)вращений $\mathbb{SO}(p, q)$ соответствует два элемента универсальной накрывающей группы. Поэтому часто говорят, что спинорное представление является двузначным представлением группы (псевдо)вращений. Согласно общему определению отображения это утверждение неверно, т.к. образом элемента при отображении может являться один и только один элемент. Тем не менее мы также будем употреблять широко распространенный термин “спинорное представление”.

10.1. Спинорное представление группы Лоренца $\mathbb{O}(1, 3)$

Спиноры играют исключительно важную роль в квантовой теории поля, т.к. с их помощью описываются частицы с полуцелым спином. Например, электроны, протоны, нейтроны, нейтрино и многие другие элементарные частицы имеют спин $1/2$. В квантовой теории поля частицы описываются полями (после вторичного квантования) $\varphi^A(x)$, $A = 1, 2, \dots$, в пространстве Минковского $x \in \mathbb{R}^{1,3}$. При этом математические модели строятся инвариантными относительно действия группы Пуанкаре в $\mathbb{R}^{1,3}$.

В настоящее время считается, что каждая элементарная частица описывается полем, преобразующимся по некоторому неприводимому представлению группы Пуанкаре. Если частица имеет массу, то неприводимые представления группы Пуанкаре параметризуются массой $m > 0$ и спином s , который может принимать только полуцелые значения $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ (см., например, [101]). В безмассовом случае, $m = 0$, представления описываются спиральностью, которая так же, как и спин, принимает полуцелые значения.

Группа Пуанкаре не является полупростой, т.к. содержит инвариантную абелеву подгруппу сдвигов. Поэтому форма Киллинга–Картана для группы Пуанкаре вырождена, и возникает проблема с построением инвариантов из полей φ^A , если мы хотим работать с неприводимыми представлениями группы Пуанкаре.

Выход из этого положения следующий. Группа Лоренца является простой, ее форма Киллинга–Картана невырождена и никакой проблемы с построением инвариантов нет. Неприводимое представление группы Лоренца в общем случае распадается на несколько неприводимых представлений группы Пуанкаре. Например, массивное векторное поле Прокá (см. раздел 9.4) описывает векторную частицу со спином 1 (три компоненты поперечной части) и одну скалярную частицу со спином 0 (одна компонента продольной части). В квантовой теории поля модели строятся из многокомпонентных полей, образующих, возможно, приводимые представления группы Лоренца. Например, скалярное и векторное поля в каждой точке пространства-времени образуют неприводимые представления группы Лоренца, а симметричное векторное поле второго ранга является приводимым представлением. В зависимости от выбора действия для заданного поля, какие то его компоненты, соответствующие определенному представлению группы Пуанкаре могут быть физическими (распространяющимися, для которых может быть поставлена задача Коши), а какие то – нет.

Ниже будут рассмотрены спинорные представления полной группы Лоренца $\mathbb{O}(1, 3)$ и ее подгрупп: $\mathbb{SO}(1, 3)$ и $\mathbb{SO}_0(1, 3)$. При этом можно рассматривать как вещественные, так и комплексные представления.

10.1.1. γ -матрицы Дирака. Для описания частиц с полуцелым спином, в частности, со спином $1/2$, используются в общем случае комплексные 4×4 γ -матрицы Дирака. Они являются самостоятельным математическим объектом – единственным, с точностью до преобразования подобия, точным (взаимно однозначным) неприводимым представлением образующих алгебры Клиффорда $\mathfrak{cl}(1, 3, \mathbb{F})$, где $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, – и заслуживают отдельного изучения. Хотя определение γ -матриц зависит от лоренцевой метрики, сами по себе они не являются образующими какой-либо алгебры Ли. Алгебру Ли $\mathfrak{o}(1, 3, \mathbb{F})$ образуют элементы алгебры Клиффорда второй степени $\mathfrak{cl}_2^\times(1, 3, \mathbb{F})$. Используя алгебры Клиффорда, удобно строить спинорные представления полной группы Лоренца $\mathbb{O}(1, 3)$ и ее подгрупп. Этим мы займемся позже, а сейчас изучим алгебру Клиффорда $\mathfrak{cl}(1, 3, \mathbb{F})$ и ее представление.

В комплексном случае все алгебры Клиффорда с четырьмя образующими изоморфны. В частности, $\mathfrak{cl}(1, 3, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{cl}(4, 0, \mathbb{C})$. Тем не менее мы будем рассматривать сигнатуру $(1, 3)$ для облегчения перехода к вещественному случаю и для описания накрытия вещественной группы Лоренца $\mathbb{O}(1, 3)$, которая не изоморфна группе вращений $\mathbb{O}(4)$.

Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathfrak{cl}(1, 3, \mathbb{F})$ над четырехмерным векторным пространством $\mathbb{F}^4$ с квадратичной формой $\eta^{ab} := \text{diag}(+---)$, $a, b = 0, 1, 2, 3$ (метрикой Лоренца). Обозначим образующие алгебры Клиффорда через γ^a . По определению, они удовлетворяют следующим антикоммутиационным соотношениям:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} := \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab} e, \quad (10.1)$$

где фигурными скобками обозначен антикоммутатор образующих и e – единица алгебры Клиффорда. Это означает, что образующие алгебры Клиффорда с разными индексами антикоммутируют между собой, и квадрат каждой из образующих равен по модулю единице алгебры Клиффорда:

$$(\gamma^0)^2 = e, \quad (\gamma^i)^2 = -e, \quad i = 1, 2, 3.$$

Теперь построим представление алгебры Клиффорда $\text{cl}(1, 3, \mathbb{F})$ в виде матриц.

ТЕОРЕМА 10.1.1. *Алгебра Клиффорда $\text{cl}(1, 3, \mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, обладает единственным (с точностью до преобразования подобия) неприводимым комплексным представлением; его размерность равна четырем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [102], теорема Д.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование четырехмерного представления алгебры Клиффорда $\text{cl}(1, 3, \mathbb{F})$ гарантирует существование четырехмерных представлений группы Ли обратимых элементов $\text{CL}(1, 3, \mathbb{F})$ и ее подгрупп Ли $\text{PIN}(1, 3)$, $\text{SPIN}(1, 3)$ и $\text{SPIN}_0(1, 3)$. В дальнейшем мы увидим, что это представление неприводимо для групп $\text{PIN}(1, 3)$, $\text{SPIN}(1, 3)$ и приводимо для связной компоненты единицы $\text{SPIN}_0(1, 3) \simeq \text{SL}(2, \mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Четырехмерное точное неприводимое представление образующих γ^a алгебры Клиффорда $\text{cl}(1, 3, \mathbb{F})$ называется γ -матрицами Дирака.

γ -матрицы Дирака определены не однозначно. А именно, справедлива

ЛЕММА 10.1.1 ПАУЛИ. *Пусть γ^a и γ'^a – два набора матриц Дирака. Тогда существует единственная (с точностью до умножения на произвольную комплексную константу, отличную от нуля) невырожденная матрица S такая, что матрицы Дирака связаны преобразованием подобия*

$$\gamma'^a = S\gamma^a S^{-1}. \quad (10.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [103]. Мы также приведем доказательство, но несколько позже.

Лемма Паули – это доказательство единственности точного представления в теореме 10.1.1.

Класс допустимых γ -матриц необходимо сузить, если мы хотим удовлетворить важным физическим условиям при построении моделей математической физики. Поэтому наложим дополнительное условие эрмитова сопряжения для γ -матриц:

$$\gamma^{a\dagger} = \gamma^0 \gamma^a \gamma^0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^0 \gamma^{a\dagger} \gamma^0 = \gamma^a. \quad (10.3)$$

В разделе 10.1.5 будет показано, что это условие является необходимым и достаточным условием эрмитовости гамильтониана для спинорного поля. Больше никаких дополнительных условий на γ -матрицы накладывать необязательно, и все физические следствия не зависят от выбора матриц Дирака, удовлетворяющих условию (10.3).

Условие эрмитова сопряжения (10.3) означает, что γ матрицы выбраны унитарными. Действительно, легко проверить выполнение равенств

$$\gamma^{a\dagger} \gamma^a = \gamma^a \gamma^{a\dagger} = e,$$

где e – единичная 4×4 матрица (представление единичного элемента алгебры Клиффорда), и суммирование по индексу a отсутствует.

Условие эрмитова сопряжения (10.3) можно также записать в следующем виде

$$\gamma^{a\dagger} = \gamma_a := \gamma^b \eta_{ab}.$$

γ -матрицы, удовлетворяющие дополнительному условию (10.3), также определены неоднозначно.

ЛЕММА 10.1.2. Пусть γ^a и γ'^a – два набора матриц Дирака, удовлетворяющих условию эрмитова сопряжения (10.3). Тогда существует единственная (с точностью до умножения на произвольный фазовый множитель) унитарная матрица $U \in \mathbb{U}(4)$ такая, что матрицы Дирака связаны преобразованием подобия

$$\gamma'^a = U \gamma^a U^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дано ниже как следствие доказательства леммы Паули [104].

Физические следствия моделей математической физики, включающих спинорные поля, не зависят от выбора представления для γ -матриц. Поэтому в литературе используется несколько различных представлений, которые удобны для тех или иных задач. Для наших целей, а нас будут в основном интересовать трансформационные свойства, удобно воспользоваться следующим комплексным представлением

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.4)$$

где $\mathbb{1}$ – единичная 2×2 матрица, $\sigma^i := -\sigma_i$ и σ_i , $i = 1, 2, 3$, – матрицы Паули. Для этого представления условие эрмитова сопряжения (10.3) выполнено.

Представление γ -матриц (10.4) называется *представлением Вейля* или *киральным представлением*. Оно особенно удобно для изучения трансформационных свойств спиноров.

Теперь построим базис алгебры Клиффорда $\mathfrak{cl}(1, 3, \mathbb{C})$. Базис состоит из всех возможных произведений образующих γ^a . При этом каждая из образующих не может входить в произведение дважды в силу определения (10.1). Поэтому алгебра Клиффорда шестнадцатимерна, и ее базис можно выбрать в виде

$$\gamma^I = \{e, \quad \gamma^a, \quad \gamma^{[a}\gamma^b], \quad \gamma^{[a}\gamma^b\gamma^c], \quad \gamma^{[a}\gamma^b\gamma^c\gamma^d]\}, \quad I = 1, 2, \dots, 16, \quad (10.5)$$

где e – единичная 4×4 матрица и квадратные скобки обозначают антисимметризацию всех индексов. Квадрат шести базисных элементов равен единице, а десяти – минус единице. В соответствии с этим свойством разместим базисные элементы в таблице 10.1.

	$(\gamma^I)^2 = e$			$(\gamma^I)^2 = -e$		
e	e					
γ^a	γ^0			γ^1	γ^2	γ^3
$\gamma^{[a}\gamma^b]$	$\gamma^0\gamma^1$	$\gamma^0\gamma^2$	$\gamma^0\gamma^3$	$\gamma^1\gamma^2$	$\gamma^1\gamma^3$	$\gamma^2\gamma^3$
$\gamma^{[a}\gamma^b\gamma^c]$	$\gamma^1\gamma^2\gamma^3$			$\gamma^0\gamma^1\gamma^2$	$\gamma^0\gamma^1\gamma^3$	$\gamma^0\gamma^2\gamma^3$
$\gamma^{[a}\gamma^b\gamma^c\gamma^d]$				$\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$		

Таблица 10.1. Базис алгебры Клиффорда $\mathfrak{cl}(1, 3, \mathbb{C})$

Из всех базисных элементов γ^I только единичная матрица коммутирует со всеми остальными. Если элемент $\gamma^I \neq \mathbb{1}$, то он коммутирует с 8 из 16 матриц и антикоммутирует с 8 оставшимися. Последнее утверждение проверяется прямой проверкой.

Из определения γ -матриц (10.1) следует, что

$$\gamma_a := \eta_{ab}\gamma^b = (\gamma^a)^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что мы получим обратную к матрице γ^I , если в ее выражении через γ^a изменим порядок их следования на противоположный (реверс) и каждую матрицу γ^a заменим на γ_a . Обозначим получившееся выражение для обратной матрицы через γ_I с нижним индексом:

$$\gamma_I \gamma^I = \gamma^I \gamma_I = \mathbb{1} \quad (\text{суммирование по } I \text{ нет}). \quad (10.6)$$

Установим некоторые свойства базиса алгебры Клиффорда $\mathfrak{cl}(1, 3, \mathbb{C})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1.1.

$$\mathrm{tr} \gamma^I = \begin{cases} 4, & \text{если } \gamma^I = \mathbb{1}, \\ 0, & \text{если } \gamma^I \neq \mathbb{1}. \end{cases} \quad (10.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство очевидно. Предположим теперь, что $\gamma^I \neq \mathbb{1}$ и пусть γ^J – одна из 8 матриц, антикоммутирующих с γ^I :

$$\gamma^I \gamma^J = -\gamma^J \gamma^I \Leftrightarrow \gamma^I = -\gamma^J \gamma^I \gamma_J \quad (\text{суммирование по } J \text{ нет}).$$

Тогда

$$\mathrm{tr} \gamma^I = -\mathrm{tr} (\gamma^J \gamma^I \gamma_J) = -\mathrm{tr} (\gamma^I \gamma_J \gamma^J) = -\mathrm{tr} \gamma^I.$$

Откуда следует искомое равенство $\mathrm{tr} \gamma^I = 0$.

В частном случае, след всех матриц Дирака в любом представлении равен нулю:

$$\mathrm{tr} \gamma^a = 0.$$

Поскольку квадрат каждой матрицы Дирака с точностью до знака равен единичной матрице, то ее определитель равен по модулю единице. С учетом условия эрмитова сопряжения (10.3) получаем равенство

$$\det \gamma^a = 1.$$

Отсюда сразу следует, что для всех базисных элементов алгебры Клиффорда $\mathfrak{cl}(1, 3, \mathbb{F})$ выполнено равенство

$$\det \gamma^I = 1.$$

Следующее важное свойство базиса γ^I сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 10.1.3 О ПЕРЕСТРОЙКЕ. Если каждую из 16 матриц базиса γ^I умножить справа или слева на одну из них, то с точностью до знака и порядка получим те же 16 матриц, т.е. снова базис алгебры Клиффорда $\mathfrak{cl}(1, 3, \mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка.

СЛЕДСТВИЕ. Справедлива формула

$$\frac{1}{4} \mathrm{tr} (\gamma_I \gamma^J) = \delta_I^J. \quad (10.8)$$

Используя лемму о перестройке и свойства следа (10.7) легко доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1.2. Матрицы γ^I , $I = 1, \dots, 16$, линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Допустим, что выполнено равенство

$$\sum_I u_I \gamma^I = u_0 \mathbb{1} + u_a \gamma^a + u_{ab} \gamma^{[a} \gamma^{b]} + u_{abc} \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} + u_{abcd} \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^c \gamma^{d]} = 0,$$

где $\{u_I\} = \{u_0, u_a, u_{ab}, u_{abc}, u_{abcd}\}$ – некоторые комплексные числа. Взятие следа от этого равенства дает $u_0 = 0$. Умножая равенство последовательно на все γ^I и беря следы, получаем, что все коэффициенты разложения равны нулю. Следовательно, матрицы γ^I линейно независимы.

Вообще говоря, сформулированное выше утверждение можно было бы не доказывать. Действительно, поскольку представление алгебры Клиффорда $\text{cl}(1, 3, \mathbb{F})$ комплексными 4×4 матрицами является точным, то матрицы, соответствующие базису, являются линейно независимыми.

Матрицы γ^I представляют собой базис в алгебре всех комплексных 4×4 матриц $\text{mat}(4, \mathbb{C})$, рассматриваемой как линейное комплексное пространство. Так, произвольную матрицу $A \in \text{mat}(4, \mathbb{C})$ можно взаимно однозначно разложить по базису:

$$A = \sum_I u_I \gamma^I, \quad u_I = \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma_I A). \quad (10.9)$$

При этом число комплексных коэффициентов разложения u_I совпадает с числом элементов матрицы.

Мы видим, что, как линейные пространства, алгебры $\text{mat}(4, \mathbb{C})$ и $\text{cl}(1, 3, \mathbb{C})$ совпадают. Соответственно, они имеют одинаковые базисы, просто в базисе γ^I , который мы выбрали, клиффордово умножение выглядит проще.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1.3. *Если матрица A коммутирует со всеми матрицами Дирака,*

$$[A, \gamma^a] = 0, \quad a = 0, 1, 2, 3, \quad (10.10)$$

то она кратна единичной матрице, $A \sim \mathbb{1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (10.10) следует равенство нулю коммутатора $[A, \gamma^I] = 0$. Поскольку матрицы группы $\text{GL}(4, \mathbb{C})$ являются линейными комбинациями матриц γ^I , то, по лемме Шура, $A \sim \mathbb{1}$.

Используя лемму о перестройке, нетрудно доказать лемму Паули 10.1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ^a и γ'^a два набора матриц Дирака, которые необязательно удовлетворяют условию эрмитова сопряжения (10.3). Им соответствуют два базиса алгебры Клиффорда γ^I и γ'^I . Взаимно однозначное соответствие матриц Дирака $\gamma^a \leftrightarrow \gamma'^a$, $a = 0, 1, 2, 3$, влечет за собой естественное взаимно однозначное соответствие всех матриц базиса $\gamma^I \leftrightarrow \gamma'^I$.

Возьмем произвольную квадратную 4×4 матрицу A и составим сумму

$$S := \sum_{I=1}^{16} \gamma'^I A \gamma_I.$$

Выберем одну из матриц γ^J . Ей соответствует обратная матрица γ_J и матрица γ'^J из другого набора. В силу леммы о перестройке, справедлива следующая цепочка равенств

$$\gamma'^J S \gamma_J = \sum_I \gamma'^J \gamma'^I A \gamma_I \gamma_J = \sum_I \gamma'^I A \gamma_I = S.$$

Следовательно,

$$\gamma'^J S = S \gamma'^J. \quad (10.11)$$

Теперь для доказательства соотношения (10.2) достаточно доказать существование такой матрицы A , что матрица S невырождена. Построим матрицу

$$T := \sum_{I=1}^{16} \gamma^I B \gamma'_I,$$

где B – произвольная матрица. Рассуждая как и ранее, получаем равенство

$$\gamma^j T = T \gamma^j.$$

Следовательно,

$$\gamma^j T S = T \gamma^j S = T S \gamma^j$$

для любой матрицы γ^j . Так как матрица $T S$ коммутирует со всеми γ^j , то она пропорциональна единичной матрице: $T S = c \mathbb{1}$. Постоянная c (возможно нулевая) вычисляется по формуле

$$c = \frac{1}{4} \text{tr} T S = \frac{1}{4} \sum_{ij} \text{tr} (\gamma^i B \gamma_i' \gamma^j A \gamma_j) = \frac{1}{4} \text{tr} \left(B \sum_{ij} \gamma_i' \gamma^j A \gamma_j \gamma^i \right) = 4 \text{tr} B S,$$

где мы снова использовали лемму о перестройке (16 раз).

Матрицу A всегда можно выбрать так, чтобы по крайней мере один из матричных элементов S был отличен от нуля. В противном случае легко показать, что матрицы γ^i не были бы линейно независимы. После этого можно выбрать B так, чтобы $\text{tr} B S = 1/4$. Следовательно, $c = 1$ и $T S = \mathbb{1}$. Таким образом, матрица S невырождена и, умножая равенство (10.11) на S^{-1} справа, получаем соотношение подобия

$$\gamma^i = S \gamma^i S^{-1},$$

которое влечет за собой (10.2).

Если существует другая матрица S' , для которой выполнены те же соотношения, то $S^{-1} S'$ коммутирует со всеми матрицами γ^i и, следовательно, $S^{-1} S' = c \mathbb{1}$. Верно и обратное: если для S выполнены соотношения (10.2), то они выполнены и для любой матрицы, пропорциональной S . Тем самым мы доказали, что несингулярная матрица S существует и определена с точностью до множителя.

Для матриц Дирака, удовлетворяющих соотношению (10.3), справедливо следующее правило эрмитова сопряжения

$$\gamma^{a\dagger} = \gamma^{-1} = \gamma_a.$$

Следовательно, аналогичные правила справедливы для всех матриц базиса γ^i . Поэтому они эрмитовы или антиэрмитовы в зависимости от того, равен ли квадрат $(\gamma^i)^2$ единичной матрице $\mathbb{1}$ или $-\mathbb{1}$.

Для доказательства леммы 10.1.2 достаточно взять эрмитово сопряжение от равенства (10.2) и воспользоваться (анти)эрмитовостью матриц γ^i .

Из свойства эрмитова сопряжения γ -матриц (10.3) вытекает правило эрмитова сопряжения генераторов лоренцевых вращений $\gamma^{ab} := \gamma^{[a} \gamma^{b]}$ (см. раздел 10.1.3):

$$\gamma^{ab\dagger} = -\gamma^0 \gamma^{ab} \gamma^0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^0 \gamma^{ab\dagger} \gamma^0 = -\gamma^{ab}. \quad (10.12)$$

В заключение раздела приведем еще одно представление матриц Дирака, в котором матрица γ^0 диагональна:

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.13)$$

Это представление называется *представлением Дирака* или *стандартным представлением*. Оно связано с киральным представлением преобразованием подобия

$$\gamma_D^a = S \gamma^a S^{-1},$$

где унитарная матрица S имеет вид

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В представлении Дирака

$$\gamma_5 := -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

То есть матрицы γ^0 и γ^5 меняются местами. Представление Дирака удобно использовать, например, при изучении нерелятивистского предела уравнения Дирака.

10.1.2. Алгебра матриц Дирака. В настоящем разделе мы приведем ряд тождеств для матриц Дирака, которые полезны при проведении вычислений и не зависят от представления.

Исходя из определения матриц Дирака (10.1), нетрудно доказать следующие тождества:

$$\begin{aligned} \gamma^e \gamma^a \gamma_e &= -2\gamma^a, \\ \gamma^e \gamma^a \gamma^b \gamma_e &= 4\eta^{ab}, \\ \gamma^e \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma_e &= -2\gamma^c \gamma^b \gamma^a, \\ \gamma^e \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma_e &= 2(\gamma^d \gamma^a \gamma^b \gamma^c + \gamma^c \gamma^b \gamma^a \gamma^d). \end{aligned} \quad (10.14)$$

В приложениях γ -матрицы часто свертываются с лоренцевыми ко векторами $X = e^a X_a \in \mathbb{R}^{1,3}$:

$$(X\gamma) = (\gamma X) := X_a \gamma^a \in \mathbf{mat}(4, \mathbb{C}). \quad (10.15)$$

Тогда из формул (10.14) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} \gamma^a (X\gamma) \gamma_a &= -2(X\gamma), \\ \gamma^a (X\gamma) (Y\gamma) \gamma_a &= 4(X, Y), \\ \gamma^a (X\gamma) (Y\gamma) (Z\gamma) \gamma_a &= -2(Z\gamma) (Y\gamma) (X\gamma), \\ \gamma^a (X\gamma) (Y\gamma) (Z\gamma) (W\gamma) \gamma_a &= 2[(W\gamma) (X\gamma) (Y\gamma) (Z\gamma) + (Z\gamma) (Y\gamma) (X\gamma) (W\gamma)], \end{aligned} \quad (10.16)$$

где $(X, Y) := X^a Y^b \eta_{ab}$ – лоренцево скалярное произведение векторов.

Введем матрицу (элемент объема)

$$\gamma^5 = \frac{i}{24} \varepsilon^{abcd} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d, \quad (10.17)$$

где ε^{abcd} – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга (см. приложение 19.2). Эта матрица в дальнейшем будет играть важную роль. Нетрудно проверить, что матрица γ^5 имеет следующие свойства:

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad \gamma^5 \gamma^a = -\gamma^a \gamma^5, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5. \quad (10.18)$$

В киральном представлении (10.4) она является блочно диагональной:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (10.19)$$

Ранее мы построили базис алгебры Клиффорда $\mathbf{cl}(1, 3, \mathbb{C})$, состоящий из шестнадцати матриц (10.5). Используя γ^5 -матрицу, базис алгебры Клиффорда можно выбрать в виде

$$\{\mathbb{1}, \gamma^a, \gamma^{ab}, \gamma^5 \gamma^a, \gamma^5\}. \quad (10.20)$$

Между матрицами $\gamma^{abc} := \gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]}$ и $\gamma^5\gamma^a$ существует взаимно однозначное соответствие:

$$\gamma^{012} = -i\gamma^5\gamma^3, \quad \gamma^{123} = -i\gamma^5\gamma^0, \quad \gamma^{230} = -i\gamma^5\gamma^1, \quad \gamma^{301} = i\gamma^5\gamma^2, \quad (10.21)$$

где равенства отличаются циклической перестановкой индексов $(0, 1, 2, 3)$ и одним знаком. Нетрудно проверить правило эрмитова сопряжения

$$(\gamma^5\gamma^a)^\dagger = \gamma^0\gamma^5\gamma^a\gamma^0 \Leftrightarrow \gamma^0(\gamma^5\gamma^a)^\dagger\gamma^0 = \gamma^5\gamma^a.$$

Мы уже выписали явный вид матриц γ^a, γ^{ab} и γ^5 . В киральном представлении оставшиеся матрицы имеют вид:

$$\gamma^5\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5\gamma^i = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

В дальнейшем нам понадобятся свойства следов произведений γ -матриц:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^a) &= 0, & \text{tr}(\gamma^5) &= 0, \\ \text{tr}(\gamma^a\gamma^b) &= 4\eta^{ab}, & \text{tr}(\gamma^5\gamma^a) &= 0, \\ \text{tr}(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d) &= 4\eta^{ab}\eta^{cd} - 4\eta^{ac}\eta^{bd} + 4\eta^{ad}\eta^{bc}, \end{aligned} \quad (10.22)$$

которые проверяются прямой проверкой. В общем случае след произведения нечетного числа γ -матриц всегда равен нулю.

Кроме того, справедлива формула

$$\text{tr}(\gamma^5\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d) = 4i\varepsilon^{abcd}. \quad (10.23)$$

Тождества Фирца. В приложениях часто необходимо совершать алгебраические преобразования с выражениями, которые являются полиномами четвертой или более высокой степени от компонент спиноров. В этом случае удобно воспользоваться тождествами для γ -матриц, известных как *тождества Фирца* [105].

Пусть заданы две матрицы γ^K и γ^L из набора (10.5). Рассмотрим их тензорное произведение

$$\gamma_{AB}^K \gamma_{CD}^L.$$

Это – тензор четвертого ранга по спинорным индексам A, B, C и D. Воспользуемся полнотой набора γ -матриц (10.5) и разложим полученное выражение с другим порядком индексов:

$$\gamma_{AB}^K \gamma_{CD}^L = C^{KL}_{IJ} \gamma_{AD}^I \gamma_{CB}^J, \quad (10.24)$$

где C^{KL}_{IJ} – некоторые коэффициенты разложения. Из ортогональности набора матриц (10.8) следует выражение для коэффициентов разложения:

$$C^{KL}_{IJ} = \frac{1}{16} \text{tr}(\gamma_I \gamma^K \gamma_J \gamma^L). \quad (10.25)$$

Отсюда вытекает симметрия полученных коэффициентов относительно перестановки индексов:

$$C^{KL}_{IJ} = C^{LK}_{JI}.$$

Приведем несколько примеров использования тождеств Фирца, опустив промежуточные алгебраические выкладки. Можно доказать следующие тождества:

$$\begin{aligned}
\delta_{AB}\delta_{CD} &= \frac{1}{4} \left(\delta_{AD}\delta_{CB} + \gamma_{AD}^a \gamma_{aCB} + \frac{1}{2} \gamma_{AD}^{ab} \gamma_{abCB} - (\gamma^5 \gamma^a)_{AD} (\gamma^5 \gamma_a)_{CB} + \gamma_{AD}^5 \gamma_{CB}^5 \right), \\
\gamma_{AB}^a \gamma_{aCD} &= \delta_{AD}\delta_{CB} - \frac{1}{2} \gamma_{AD}^a \gamma_{aCB} - \frac{1}{2} (\gamma^5 \gamma^a)_{AD} (\gamma^5 \gamma_a)_{CB} - \gamma_{AD}^5 \gamma_{CB}^5, \\
\gamma_{AB}^{ab} \gamma_{abCD} &= 3\delta_{AD}\delta_{CB} - \frac{1}{2} \gamma_{AD}^{ab} \gamma_{abCB} + 3\gamma_{AD}^5 \gamma_{CB}^5, \\
(\gamma^5 \gamma^a)_{AB} (\gamma^5 \gamma_a)_{CD} &= -\delta_{AD}\delta_{CB} - \frac{1}{2} \gamma_{AD}^a \gamma_{aCB} - \frac{1}{2} (\gamma^5 \gamma^a)_{AD} (\gamma^5 \gamma_a)_{CB} + \gamma_{AD}^5 \gamma_{CB}^5, \\
\gamma_{AB}^5 \gamma_{CD}^5 &= \frac{1}{4} \left(\delta_{AD}\delta_{CB} - \gamma_{AD}^a \gamma_{aCB} + \frac{1}{2} \gamma_{AD}^{ab} \gamma_{abCB} + (\gamma^5 \gamma^a)_{AD} (\gamma^5 \gamma_a)_{CB} + \gamma_{AD}^5 \gamma_{CB}^5 \right). \quad (10.26)
\end{aligned}$$

Приведенные тождества Фирца используются для перестановки спиноров в произведениях. Например, для четырех спиноров $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ из второго тождества (10.26) вытекает следующее равенство

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi}_1 \gamma^a \psi_2) (\bar{\psi}_3 \gamma_a \psi_4) &= (\bar{\psi}_1 \psi_4) (\bar{\psi}_3 \psi_2) - (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_4) (\bar{\psi}_3 \gamma^5 \psi_2) - \\
&\quad - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \gamma^a \psi_4) (\bar{\psi}_3 \gamma_a \psi_2) - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \gamma^a \psi_4) (\bar{\psi}_3 \gamma^5 \gamma_a \psi_2), \quad (10.27)
\end{aligned}$$

где $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$.

10.1.3. Трансформационные свойства спиноров. В настоящем разделе мы рассматриваем комплексное точное неприводимое спинорное представление вещественной группы $\mathbb{PIN}(1, 3)$, которая дважды покрывает вещественную группу Лоренца $\mathbb{O}(1, 3)$. Это покрытие является универсальным.

Определение γ -матриц (10.1) можно переписать в виде

$$\gamma^a \gamma^b = \eta^{ab} + \gamma^{ab},$$

где

$$\gamma^{ab} := \frac{1}{2} [\gamma^a, \gamma^b] := \frac{1}{2} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a).$$

Рассмотрим матрицы

$$L_{ab} := \frac{1}{2} \gamma_{ab} := \frac{1}{2} \eta_{ac} \eta_{bd} \gamma^{cd}. \quad (10.28)$$

Пользуясь определением (10.1), нетрудно проверить, что матрицы L_{ab} являются представлением генераторов группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 3)$. Конечно, алгебра матриц L_{ab} не зависит от представления.

Для кирального представления γ -матриц (10.4) представление генераторов группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 3)$ имеет блочно диагональный вид:

$$\begin{aligned}
L_{0i} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \\
L_{ij} &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = \frac{1}{2} i \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad (10.29)
\end{aligned}$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга и $\sigma^i := -\sigma_i$.

Генераторы собственной ортохронной группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 3)$ или ее универсальной накрывающей $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ (10.29) (алгебры Ли у них одинаковые) представлены в четырехмерном комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^4$. Будем считать, что в этом пространстве действует соответствующая группа Ли $\mathbb{SPIN}_0(1, 3)$, которая изоморфна $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$. Поскольку представление генераторов (10.29) с помощью γ -матриц является блочно диагональным, то представление группы $\mathbb{SPIN}_0(1, 3) \simeq \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ является приводимым. Именно блочно диагональный вид генераторов группы Лоренца L_{ab} определяет удобство кирального представления γ -матриц (10.4) при изучении трансформационных свойств.

В киральном представлении матрицы L_{0i} эрмитовы, а L_{ij} – антиэрмитовы:

$$L_{0i}^\dagger = L_{0i}, \quad L_{ij}^\dagger = -L_{ij}.$$

Это значит, что представление пространственных вращений, которые генерируются матрицами L_{ij} , унитарно, а лоренцевых бустов с генераторами L_{0i} неунитарно. Это свойство находится в согласии с известным утверждением о том, что некомпактная группа Ли не имеет унитарных конечномерных представлений.

Теперь определим трансформационные свойства. Обозначим элемент комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^4$ через $\psi \in \mathbb{C}^4$. Он имеет четыре комплексных компоненты ψ_A , $A = 1, 2, 3, 4$, которые мы будем записывать в виде столбца. Будем считать, что в $\mathbb{C}^4$ действует группа $\mathbb{PIN}(1, 3)$:

$$\psi \mapsto \psi' = U\psi, \quad (10.30)$$

где $U \in \mathbb{PIN}(1, 3)$ – 4×4 комплексная матрица. В окрестности единицы матрица U задается элементами алгебры $\omega^{ab}L_{ab} \in \mathfrak{pin}(1, 3) = \mathfrak{o}(1, 3)$, где $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$ – “углы вращения”, с помощью экспоненты от матрицы:

$$U_{AB} = \left[\exp \left(\frac{1}{2} \omega^{ab} L_{ab} \right) \right]_{AB}, \quad (10.31)$$

где генераторы группы Лоренца определены соотношениями (10.28), и множитель $1/2$ возник из-за суммирования по всем значениям индексов, а не только по упорядоченным парам $a < b$. Поскольку мы рассматриваем вещественную группу $\mathbb{PIN}(1, 3)$, то параметры ω^{ab} вещественны.

Группа Ли $\mathbb{PIN}(1, 3)$ два раза накрывает полную группу Лоренца $\mathbb{O}(1, 3)$. Поэтому каждому лоренцеву вращению соответствует две матрицы из накрывающей группы $\mathbb{PIN}(1, 3)$.

Мы не будем различать верхние и нижние спинорные индексы $A, B, \dots$, потому что это приводит к путанице при определении операции отражения времени и зарядового сопряжения, которые будут рассмотрены в следующем разделе. Для определенности, будем писать их снизу.

Теперь рассмотрим комплексное векторное (по отношению к действию группы $\mathbb{PIN}(1, 3)$) поле $\psi(x) = \{\psi_A(x)\} \in \mathbb{C}^4$ (спинорное поле) в пространстве-времени Минковского с декартовой системой координат $x = \{x^a\} \in \mathbb{R}^{1,3}$, $a = 0, 1, 2, 3$. Мы предполагаем, что при каждом лоренцевом вращении пространства-времени

$$x^a \mapsto x'^a = x^b S_b^a, \quad S \in \mathbb{O}(1, 3) \quad (10.32)$$

компоненты спинорного поля преобразуются по правилу

$$\psi_A(x) \mapsto \psi'_A(x') = U_{AB} \psi_B(x), \quad U \in \mathbb{PIN}(1, 3). \quad (10.33)$$

Поскольку группа $\mathbb{PIN}(1, 3)$ два раза накрывает группу Лоренца $\mathbb{O}(1, 3)$, то нельзя говорить, что каждому лоренцеву вращению пространства Минковского соответствует некоторое фиксированное преобразование поля ψ . Наоборот, каждому преобразованию спинорного поля ψ

соответствует определенное лоренцево вращение. При этом двум матрицам $\pm U \in \mathbb{PIN}(1, 3)$, которые отличаются знаком, соответствует один и тот же лоренцев поворот.

В физике говорят, что векторное поле ψ преобразуется по двузначному (спинорному) представлению группы Лоренца.

Напомним, что бесконечно малые преобразования координат и полей мы записываем следующим образом

$$\begin{aligned} x^a &\mapsto x'^a = x^a + \delta x^a, \\ \psi_A(x) &\mapsto \psi'_A(x') = \psi_A(x) + \bar{\delta}\psi_A(x). \end{aligned} \quad (10.34)$$

Тогда преобразования спиноров (10.31) в инфинитезимальной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \delta x^a &= -x^b \omega_b^a, \quad \omega^{ab} = -\omega^{ba} \in \mathbb{R}, \\ \bar{\delta}\psi_A &= \frac{1}{2} \omega^{ab} L_{abAB} \psi_B. \end{aligned} \quad (10.35)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комплексное векторное поле $\psi(x) = \{\psi_A(x)\} \in \mathbb{C}^4$, с трансформационными свойствами (10.33) называется *спинором Дирака*.

Введем проекционные операторы

$$\Pi_{\pm} := \frac{1 \pm \gamma^5}{2}. \quad (10.36)$$

В киральном представлении они имеют вид

$$\Pi_+ = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

То есть

$$\psi_+ := \Pi_+ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- := \Pi_- \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Введем распространенные обозначения для спиноров Дирака в случае кирального представления γ -матриц:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \eta_{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2 \quad \text{и} \quad \dot{a} = 1, 2.$$

где введены двухкомпонентные спиноры

$$\xi := (\xi_a) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \eta := (\eta_{\dot{a}}) = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Двухкомпонентный спинор η называется *пунктирным*, что отмечено точкой над индексом, а ξ – *непунктирным*.

При преобразованиях из собственной ортохронной группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 3)$ (связной компоненты единицы) спиноры ψ_+ и ψ_- преобразуются независимо по неприводимым представлениям группы $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{SPIN}_0(1, 3)$. Рассмотрим сначала лоренцевы бусты с параметром $v^k := \omega^{0k}$. В этом случае матрица преобразования компонент спинора имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{1}{2}v^k\sigma_k\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{1}{2}v^k\sigma_k\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{v}{2} + \frac{v^k\sigma_k}{v} \operatorname{sh} \frac{v}{2} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} \frac{v}{2} - \frac{v^k\sigma_k}{v} \operatorname{sh} \frac{v}{2} \end{pmatrix}, \quad (10.37)$$

где $v := \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}$. Мы видим, что если двухкомпонентный непунктирный спинор ξ_a преобразуется по правилу

$$\xi_a \mapsto V_{ab} \xi_b,$$

где

$$V := \cosh \frac{v}{2} + \frac{v^k \sigma_k}{v} \sinh \frac{v}{2}, \quad (10.38)$$

то пунктирный спинор $\eta_{\dot{a}}$ преобразуется по представлению с помощью обратной матрицы:

$$\eta_{\dot{a}} \mapsto V_{\dot{a}\dot{b}}^{-1} \eta_{\dot{b}},$$

которая отличается от матрицы преобразований (10.38) знаком перед вторым слагаемым.

Матрица лоренцевых бустов (10.37), как легко видеть, эрмитова, $U^\dagger = U$.

Матрицу лоренцевых бустов для непунктирных спиноров можно записать в виде

$$V = \cos i \frac{v}{2} - i \frac{v^k \sigma_k}{v} \sin i \frac{v}{2}.$$

Следовательно, обратная матрица равна

$$V^{-1} = \cos i \frac{v}{2} + i \frac{v^k \sigma_k}{v} \sin i \frac{v}{2}.$$

Рассмотрим теперь подгруппу пространственных вращений $\mathbb{SO}(3) \subset \mathbb{SO}_0(1, 3)$, которая параметризуется вектором трехмерных вращений с компонентами $\omega^k := \omega_{ij} \varepsilon^{ijk}$, где ε^{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга. Используя явный вид генераторов вращений (10.29), получаем матрицу преобразования для спиноров

$$U = \begin{pmatrix} \exp \left(\frac{i}{2} \omega^k \sigma_k \right) & 0 \\ 0 & \exp \left(\frac{i}{2} \omega^k \sigma_k \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega}{2} + i \frac{\omega^k \sigma_k}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\omega}{2} + i \frac{\omega^k \sigma_k}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}, \quad (10.39)$$

где $\omega := \sqrt{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}$. Мы видим, что и непунктирные и пунктирные спиноры при пространственных вращениях преобразуются одинаково.

Матрица преобразования спиноров, соответствующая пространственным вращениям (10.39), является унитарной, $U^\dagger = U^{-1}$.

Лоренцевы бусты и пространственные вращения можно объединить, если ввести комплексный параметр преобразования

$$z^k := \omega^k - i v^k.$$

Тогда матрицу лоренцевых преобразований для непунктирных спиноров можно записать в виде

$$V(z) = \exp \left(\frac{i}{2} z^k \sigma_k \right). \quad (10.40)$$

Следовательно, матрица лоренцевых преобразований пунктирного спинора имеет вид $V(z^*)$, где $z^{k*} := \omega^k + i v^k$ обозначает комплексно сопряженный параметр преобразования.

Покажем, что представления матриц преобразования непунктирных и пунктирных спиноров не эквивалентны, т.е. что не существует такой невырожденной матрицы M , для которой выполнено равенство

$$V(z) = M V(z^*) M^{-1}.$$

Действительно, след этого равенства приводит к соотношению

$$\cos \frac{z}{2} = \cos \frac{z^*}{2},$$

которое в общем случае не выполнено.

Таким образом, при преобразованиях спинора Дирака из группы $\mathbb{SPIN}_0(1, 3)$, которые соответствуют преобразованиям из собственной ортохронной группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 3)$, спинор Дирака является приводимым. Он разлагается на два неприводимых представления: непунктирные и пунктирные спиноры, которые преобразуются по неэквивалентным представлениям группы $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$, связанным между собой комплексным сопряжением. Напомним, что группа $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ два раза накрывает связную компоненту единицы группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 3)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Спиноры

$$\psi_{\pm} := \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \psi \quad (10.41)$$

называются *спинорами Вейля*.

Определение дано безотносительно к какому бы то ни было представлению γ -матриц. В киральном представлении, как было показано выше, математический смысл спиноров Вейля прозрачен. В других представлениях приводимость представления группы $\mathbb{SPIN}_0(1, 3)$ также имеет место, но выглядит сложнее.

Вейлевские спиноры $\psi_{\pm}$ называют также *левым* и *правым*, т.к. они являются собственными векторами γ^5 -матрицы:

$$\gamma^5 \psi_{\pm} = \pm \psi_{\pm}.$$

Для них часто применяют следующее обозначение

$$\psi_L := \psi_+, \quad \psi_R := \psi_-.$$

Заметим, что пространственное вращение в пространстве Минковского на угол 2π является тождественным преобразованием. При этом из формулы преобразования (10.39) следует, что спинор Дирака меняет знак: $\psi \mapsto -\psi$. В квантовой теории поля предполагается, что сами спиноры ненаблюдаемы, а наблюдаемыми являются только их квадратичные формы. В этом случае изменение знака спинора на противоположный никак не сказывается на физических наблюдаемых.

Проанализируем квадратичные формы спиноров $\psi, \phi \in \mathbb{C}^4$. Поскольку базис алгебры Клиффорда состоит из шестнадцати матриц (10.20), то существует столько же независимых квадратичных форм, которые запишем в виде

$$(\bar{\psi}\phi), \quad (\bar{\psi}\gamma^a\phi), \quad (\bar{\psi}\gamma^{ab}\phi), \quad (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^a\phi), \quad (\bar{\psi}\gamma^5\phi), \quad (10.42)$$

где мы ввели *сопряженный спинор*

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0. \quad (10.43)$$

Этот спинор записывается в виде строки и называют также *сопряженным по Дираку*. В отличие от эрмитова сопряжения, обозначенного символом $\dagger$, сопряжение по Дираку содержит дополнительное умножение справа на матрицу γ^0 , которое необходимо для правильных трансформационных свойств.

Рассмотрим трансформационные свойства квадратичных форм (10.42). При бесконечно малых преобразованиях компонент спинора (10.35) преобразование сопряженного спинора имеет вид

$$\delta \bar{\psi} = -\frac{1}{2} \omega^{ab} (\bar{\psi} L_{ab}), \quad (10.44)$$

где мы воспользовались правилом эрмитова сопряжения (10.12). Теперь нетрудно проверить, что квадратичные формы (10.42) при лоренцевых вращениях ведут себя следующим образом

$$\bar{\delta}(\bar{\psi}\phi) = 0, \quad (10.45)$$

$$\bar{\delta}(\bar{\psi}\gamma^a\phi) = -(\bar{\psi}\gamma^b\phi)\omega_b^a, \quad (10.46)$$

$$\bar{\delta}(\bar{\psi}\gamma^{ab}\phi) = -(\bar{\psi}\gamma^{cb}\phi)\omega_c^a - (\bar{\psi}\gamma^{ac}\phi)\omega_c^b, \quad (10.47)$$

$$\bar{\delta}(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^a\phi) = -(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^b\phi)\omega_b^a, \quad (10.48)$$

$$\bar{\delta}(\bar{\psi}\gamma^5\phi) = 0. \quad (10.49)$$

То есть квадратичные формы $(\bar{\psi}\phi)$ и $(\bar{\psi}\gamma^5\phi)$ являются скалярными полями относительно собственных ортохронных преобразований Лоренца, $(\bar{\psi}\gamma^a\phi)$ и $(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^a\phi)$ – векторными, а квадратичная форма $(\bar{\psi}\gamma^{ab}\phi)$ – антисимметричным тензорным полем второго ранга.

Квадратичная форма $Q(\psi, \phi) := (\bar{\psi}\phi)$ определяет в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^4$ эрмитову квадратичную форму, которая линейна по второму аргументу и антилинейна по первому. Эта форма не является положительно определенной и инвариантна относительно действия группы $\mathbb{SPIN}_0(1, 3)$. Таким образом, матрица γ^0 определяет инвариантную эрмитову форму (метрику) в четырехмерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^4$. Заметим, что в представлении Дирака (10.13) матрица γ^0 диагональна: $\gamma^0 = \text{diag}(+ + - -)$. Это значит, что в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^4$ задана эрмитова полуторалинейная форма, инвариантная относительно унитарной группы $\mathbb{U}(2, 2)$.

Отметим свойства квадратичных форм при комплексном сопряжении, которые следуют из правила эрмитова сопряжения γ -матриц (10.3):

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\phi)^\dagger &= (\bar{\phi}\psi), \\ (\bar{\psi}\gamma^a\phi)^\dagger &= (\bar{\phi}\gamma^a\psi), \\ (\bar{\psi}\gamma^{ab}\phi)^\dagger &= -(\bar{\phi}\gamma^{ab}\psi), \\ (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^a\phi)^\dagger &= (\bar{\phi}\gamma^5\gamma^a\psi), \\ (\bar{\psi}\gamma^5\phi)^\dagger &= -(\bar{\phi}\gamma^5\psi). \end{aligned} \quad (10.50)$$

Следовательно, компоненты антисимметричного тензора $(\bar{\psi}\gamma^{ab}\psi)$ и псевдоскаляра $(\bar{\psi}\gamma^5\psi)$ являются чисто мнимыми.

В заключение раздела выпишем формулы для конечных преобразований. Спинор ψ преобразуется по правилу (10.30):

$$\psi \mapsto \psi' = U\psi, \quad U = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{ab}L_{ab}\right) \in \mathbb{SPIN}_0(1, 3). \quad (10.51)$$

В интегральной форме преобразование сопряженного спинора (10.44) имеет вид

$$\bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1}, \quad (10.52)$$

где обратное преобразование

$$U^{-1} = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^{ab}L_{ab}\right)$$

отличается от преобразования (10.51) только знаком вещественных параметров ω^{ab} .

Инфинитезимальное преобразование (10.46) в интегральной форме принимает вид

$$(\bar{\psi}U^{-1}\gamma^a U\phi) = (\bar{\psi}\gamma^b\phi)S_b^{-1a}, \quad S \in \mathbb{SO}_0(1, 3). \quad (10.53)$$

Поскольку эта формула верна для всех спиноров ψ и ϕ , то γ -матрицы удовлетворяют равенству

$$U^{-1}\gamma^a U = \gamma^b S^{-1a}_b. \quad (10.54)$$

Отсюда следует, что γ -матрицы ковариантны относительно действия группы $\text{SPIN}_0(1, 3)$ в спинорном пространстве. Кроме того, из последнего равенства следует, что двум матрицам $\pm U$ соответствует одно лоренцево вращение.

10.1.4. Дискретные преобразования P , C и T . В квантовой теории поля важную роль играют дискретные симметрии: пространственная инверсия P (преобразование четности), обращение времени T и зарядовое сопряжение C , которые мы рассмотрим в настоящем разделе.

Введем в спинорном пространстве $\mathbb{C}^4$ оператор *пространственной инверсии* (*четности*)

$$P : \quad \psi \mapsto \psi_p = P\psi, \quad (10.55)$$

где P – некоторая комплексная 4×4 матрица. Отсюда следует, что сопряженный спинор преобразуется по правилу

$$P : \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}_p = \bar{\psi}\gamma^0 P^\dagger \gamma^0.$$

Поскольку квадратичная форма $(\bar{\psi}\gamma^a\phi)$ – вектор, то для пространственных отражений необходимо потребовать выполнения следующих равенств:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma^0\phi) &\mapsto (\bar{\psi}_p\gamma^0\phi_p) = (\bar{\psi}\gamma^0 P^\dagger P\phi) = (\bar{\psi}\gamma^0\phi), \\ (\bar{\psi}\gamma^i\phi) &\mapsto (\bar{\psi}_p\gamma^i\phi_p) = (\bar{\psi}\gamma^0 P^\dagger \gamma^0 \gamma^i P\phi) = -(\bar{\psi}\gamma^i\phi), \end{aligned} \quad (10.56)$$

где ψ и ϕ – произвольные спиноры. Из первого равенства следует условие унитарности

$$P^\dagger P = 1.$$

Второе равенство имеет решение

$$P = \epsilon_p \gamma^0, \quad (10.57)$$

где $\epsilon_p \in \mathbb{C}$ – произвольный фазовый множитель, $\epsilon_p^\dagger \epsilon_p = 1$. В пространстве Минковского пространственная инверсия, примененная дважды, дает тождественное преобразование. В спинорном пространстве спинор при двойной инверсии преобразуется по правилу

$$\psi_{pp} = \epsilon_p^2 \psi.$$

При этом он может изменить знак. Поэтому для фазового множителя возможны четыре значения: $\epsilon_p = \pm 1$ и $\epsilon_p = \pm i$.

Таким образом, преобразование четности действует на спиноры следующим образом

$$P : \quad \psi(t, \mathbf{x}) \mapsto \epsilon_p \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}), \quad \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \mapsto \epsilon_p^* \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0,$$

где $x := (t, \mathbf{x})$ и мы учли также, что при преобразовании четности меняется направление пространственных осей, $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$. В этом случае квадратичные формы преобразуются по следующим правилам:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\phi) &\mapsto (\bar{\psi}\phi), & (\bar{\psi}\gamma^{0i}\phi) &\mapsto -(\bar{\psi}\gamma^{0i}\phi), \\ (\bar{\psi}\gamma^5\phi) &\mapsto -(\bar{\psi}\gamma^5\phi), & (\bar{\psi}\gamma^{ij}\phi) &\mapsto (\bar{\psi}\gamma^{ij}\phi), \\ (\bar{\psi}\gamma^0\phi) &\mapsto (\bar{\psi}\gamma^0\phi), & (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\phi) &\mapsto -(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\phi), \\ (\bar{\psi}\gamma^i\phi) &\mapsto -(\bar{\psi}\gamma^i\phi), & (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^i\phi) &\mapsto (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^i\phi), \end{aligned} \quad (10.58)$$

которые не зависят от выбора фазового множителя. Поэтому мы говорим, что $(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^a\phi)$ – это псевдовектор (аксиальный вектор), а $(\bar{\psi}\gamma^5\phi)$ – псевдоскаляр.

В киральном представлении для γ -матриц преобразование четности имеет вид

$$P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \epsilon_p \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix},$$

т.е. меняет непунктирный и пунктирный спиноры местами. Отсюда следует, что спинор Дирака преобразуется по неприводимому представлению группы $\mathbb{PIN}_0(1, 3)$, которая включает преобразование четности P и два раза накрывает группу Лоренца $\mathbb{O}_0(1, 3)$.

Теперь рассмотрим другие дискретные преобразования. Согласно общим принципам квантовой теории поля операции зарядового сопряжения и обращения времени должны быть антиунитарны ([102]). Поэтому они включают в себя комплексное сопряжение спинорных компонент.

Рассмотрим операцию *зарядового сопряжения*:

$$C : \quad \psi \mapsto \psi_c := C\psi^*,$$

где C – некоторая матрица и звездочка $*$ обозначает комплексное сопряжение компонент спинора без транспонирования. Тогда сопряженный спинор преобразуется по правилу

$$C : \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}_c = \psi^T C^\dagger \gamma^0.$$

Зарядовое сопряжение не действует на пространственные координаты $x \in \mathbb{R}^{1,3}$. Поэтому для его определения будем использовать вид действия (10.89) для спиноров, взаимодействующих с электромагнитным полем. Потребуем, чтобы квадратичные формы преобразовывались следующим образом

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi) &= (\bar{\psi}_c\psi_c), \\ (\bar{\psi}\gamma^a\psi) &= -(\bar{\psi}_c\gamma^a\psi_c). \end{aligned} \tag{10.59}$$

Второе условие означает изменение знака электромагнитного тока, что соответствует изменению знака заряда, как будет показано в следующем разделе.

Будем искать матрицу C для кирального представления γ -матриц, в котором $\gamma^{0T} = \gamma^0$. Тогда из первого условия (10.59) следует равенство

$$(\psi^T C^\dagger \gamma^0 C \psi^*) = (\psi^\dagger C^T \gamma^0 C^* \psi) = (\psi^\dagger \gamma^0 \psi),$$

где C^* обозначает комплексно сопряженную матрицу. Отсюда вытекает соотношение

$$C^T \gamma^0 C^* = \gamma^0,$$

которое после транспонирования дает равенство

$$C^\dagger = \gamma^0 C^{-1} \gamma^0. \tag{10.60}$$

После этого второе равенство (10.59) приводит к следующему уравнению

$$M^{-1} \gamma^a M = \gamma^{aT}, \tag{10.61}$$

где $M := C\gamma^0$. В киральном представлении (10.4) γ -матрицы удовлетворяют следующим правилам транспонирования:

$$\gamma^{0T} = \gamma^0, \quad \gamma^{1T} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2T} = \gamma^2, \quad \gamma^{3T} = -\gamma^3. \tag{10.62}$$

Уравнения (10.60) и (10.61) определяют матрицу зарядового сопряжения с точностью до произвольного фазового множителя ϵ_c . Нетрудно проверить, что матрица

$$M = i\epsilon_c \gamma^2 \gamma^0 \quad \Leftrightarrow \quad M^{-1} = i\epsilon_c^* \gamma^0 \gamma^2.$$

удовлетворяет уравнению (10.61). Тогда матрица зарядового сопряжения примет вид

$$C = i\epsilon_c \gamma^2. \quad (10.63)$$

Легко проверить, что эта матрица унитарна

$$C^\dagger = C^{-1}.$$

При зарядовом сопряжении декартовы координаты пространства Минковского не меняются. Поэтому зарядовое сопряжение спинора принимает вид

$$C : \quad \psi(x) \mapsto \psi_c(x) = i\epsilon_c \gamma^2 \psi^*(x). \quad (10.64)$$

Если зарядовое сопряжение применить дважды, то спинор не изменится:

$$\psi_{cc} = \epsilon_c \epsilon_c^* \gamma^2 \gamma^2 \psi = \psi.$$

То есть на фазовый множитель ϵ_c при этом никаких ограничений не возникает.

В киральном представлении (10.4) операция зарядового сопряжения принимает вид

$$C \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = i\epsilon_c \begin{pmatrix} -\sigma^2 \eta^* \\ \sigma^2 \xi^* \end{pmatrix}, \quad (10.65)$$

и перемешивает пунктирные и непунктирные спиноры.

В других представлениях γ -матриц матрица зарядового сопряжения будет связана с матрицей (10.63) преобразованием подобия. Конечно, свойство унитарности матрицы зарядового сопряжения при этом сохранится.

Аналогично вводится операция *обращения времени*, которая также включает комплексное сопряжение,

$$T : \quad \psi \mapsto \psi_t := T \psi^*, \quad (10.66)$$

где T – некоторая матрица. Отсюда вытекает правило преобразования сопряженного спинора

$$T : \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}_t = \psi^T T^\dagger \gamma^0.$$

Мы требуем, чтобы при обращении времени были выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \psi) &= (\bar{\psi}_t \psi_t), \\ (\bar{\psi} \gamma^0 \psi) &= (\bar{\psi}_t \gamma^0 \psi_t), \\ (\bar{\psi} \gamma^i \psi) &= -(\bar{\psi}_t \gamma^i \psi_t). \end{aligned}$$

Второе и третье равенство означают изменение спинорного тока, что и должно происходить при обращении времени. В отличие от преобразования четности обращение времени включает в себя комплексное сопряжение.

Как и в случае зарядового сопряжения из первого условия вытекает равенство

$$T^\dagger = \gamma^0 T^{-1} \gamma^0 \quad (10.67)$$

для кирального представления γ -матриц. После этого второе и третье условия приводят к равенствам

$$M^{-1}\gamma^0 M = \gamma^{0\top}, \quad M^{-1}\gamma^i M = -\gamma^{i\top}, \quad (10.68)$$

где $M := T\gamma^0$. Нетрудно проверить, что уравнения (10.67) и (10.68) имеют решение

$$T = i\epsilon_t \gamma^1 \gamma^3, \quad (10.69)$$

которое определено с точностью до произвольного фазового множителя ϵ_t . С учетом преобразования координат операция обращения времени принимает вид

$$T : \quad \psi(t, \mathbf{x}) \mapsto \psi_t(t, \mathbf{x}) = i\epsilon_t \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(-t, \mathbf{x}). \quad (10.70)$$

При двойном применении операции обращения времени спинор меняет свой знак:

$$\psi_{tt} = \epsilon_t \epsilon_t^* \gamma^1 \gamma^3 \gamma^{1*} \gamma^{3*} \psi = -\psi.$$

Как и в случае зарядового сопряжения никаких ограничений на фазовый множитель при этом не возникает.

В киральном представлении операция обращения времени записывается в виде

$$T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -\epsilon_t \begin{pmatrix} \sigma^2 \xi^* \\ \sigma^2 \eta^* \end{pmatrix},$$

и не перемешивает пунктирные и непунктирные спиноры.

Если применить все три рассмотренные дискретные симметрии вместе, то получим следующее преобразование спинора

$$PCT : \quad \psi(t, \mathbf{x}) \mapsto -i\epsilon_p \epsilon_c \epsilon_t^* \gamma^5 \psi(-t, -\mathbf{x}). \quad (10.71)$$

По построению, действие (10.78) для свободного поля Дирака инвариантно относительно каждого из преобразований P , C и T по отдельности.

В модели Глэшоу–Вайнберга–Салама электрослабых взаимодействий, которая является общепринятой в настоящее время и находится в хорошем согласии с экспериментальными данными, инвариантность относительно пространственной инверсии P и зарядового сопряжения C явно нарушена. Инвариантность относительно комбинированных PC -преобразований нарушается только в редких экспериментах. Нарушение PCT -преобразований на сегодняшний день не обнаружено. Поэтому полная PCT -симметрия считается точной.

В аксиоматической квантовой теории поля доказана *PCT-теорема* [106]. Эта теорема утверждает, что модели квантовой теории поля при достаточно общих условиях, включающих локальность и лоренц инвариантность, инвариантны относительно совместных PCT -преобразований. Для формулировки этой теоремы требуется введение многих новых понятий, что выходит за рамки настоящей монографии.

10.1.5. Уравнение Дирака. В настоящем разделе мы введем уравнение Дирака и изучим его простейшие свойства безотносительно к трансформационным свойствам спиноров, которые были рассмотрены в предыдущих разделах. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть те математические и физические аспекты теории, которые часто тонут в обсуждении относительно сложных трансформационных свойств.

Рассмотрим пространство-время Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ с декартовыми координатами $\{x^a\} = \{x^0 := t, \mathbf{x}\}$ и метрикой $\eta_{ab} = \text{diag}(+ - - -)$. Пусть задан дираковский спинор $\psi(x)$:

$$\mathbb{R}^{1,3} \ni \quad x \mapsto \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

с трансформационными свойствами, определенными в разделе 10.1.3. На данном этапе – это просто столбец из четырех комплекснозначных функций. *Уравнением Дирака* называется система линейных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент спинора Дирака

$$i\gamma^a \partial_a \psi - m\psi = 0, \quad (10.72)$$

где γ^a – матрицы Дирака и $m \in \mathbb{R}$ – масса спинора. Будем считать, что масса неотрицательна $m \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение Дирака играет чрезвычайно важную роль в квантовой теории поля. После вторичного квантования оно описывает две частицы: частицу со спином $1/2$ и ее античастицу, имеющую все те же характеристики, но противоположный электрический заряд. Первоначально Дирак предложил это уравнение для описания электрона [107, 108]. Позже выяснилось, что уравнение (10.72) описывает не только электрон, но и его античастицу с противоположным зарядом, которая в то время не была известна. Вскоре эту частицу обнаружили экспериментально и назвали позитроном. Это открытие стало триумфом для уравнения Дирака. В настоящее время оно используется для описания всех частиц со спином $1/2$: электронов, протонов, нейтронов, нейтрино, кварков и т.д.

Опишем некоторые свойства уравнения Дирака.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1.4. *Уравнение Дирака ковариантно относительно собственных ортохронных преобразований Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Координаты и компоненты спинора преобразуются по правилам (10.32) и (10.33):

$$x'^a = x^b S^{-1b}_a, \quad \psi'(x') = U\psi(x).$$

Учитывая свойство γ -матриц (10.54), мы видим, что после преобразования уравнение Дирака примет вид

$$i\gamma^a \partial'_a \psi' - m\psi' = U(i\gamma^a \partial_a \psi - m\psi) = 0,$$

т.е. умножится на некоторую невырожденную матрицу $U \in \mathbb{SPIN}_0(1, 3)$. Это и означает ковариантность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1.5. *Пусть спинор ψ удовлетворяет уравнению Дирака (10.72). Тогда каждая его компонента удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона–Фока (9.34).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение Дирака (10.72) слева на дифференциальный оператор $i\gamma^a \partial_a + m$ и воспользуемся определением γ -матриц (10.1)

$$(i\gamma^a \partial_a + m)(i\gamma^b \partial_b - m)\psi = -(\square + m^2)\psi = 0,$$

где $\square := \eta^{ab} \partial_a \partial_b$ – оператор Даламбера, и мы воспользовались перестановочностью частных производных, $\partial_a \partial_b = \partial_b \partial_a$.

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Не каждый набор четырех комплексных функций, удовлетворяющий уравнению Клейна–Гордона–Фока, будет удовлетворять также системе уравнений (10.72). Трансформационные свойства при этом не играют никакой роли.

Нетрудно проверить, что дифференциальные операторы $i\gamma^a \partial_a + m$ и $i\gamma^b \partial_b - m$ перестановочны между собой. Поэтому знак массы m в уравнении Дирака не является существенным.

Умножим уравнение Дирака слева на γ^0 и перепишем его в виде уравнения Шредингера

$$i\partial_0 \psi = H\psi,$$

где гамильтониан имеет вид

$$H := -i\gamma^0\gamma^k\partial_k + m\gamma^0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (10.73)$$

Мы предполагаем, что спинор $\psi(t, \mathbf{x})$ в каждый момент времени является элементом гильбертова пространства $\mathbb{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ с положительно определенным скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int d\mathbf{x} (\varphi_1^\dagger\psi_1 + \varphi_2^\dagger\psi_2 + \varphi_3^\dagger\psi_3 + \varphi_4^\dagger\psi_4), \quad \varphi, \psi \in \mathbb{H}. \quad (10.74)$$

Тогда, для сохранения нормы $\|\psi\| := \sqrt{(\psi, \psi)}$ во времени гамильтониан должен быть эрмитов $H^\dagger = H$. Из этого условия следуют равенства:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{k\dagger}\gamma^{0\dagger} = \gamma^0\gamma^k.$$

Напомним, что при эрмитовом сопряжении производная меняет знак, $\partial_i \mapsto -\partial_i$, т.к. необходимо интегрирование по частям. Эти четыре условия можно переписать в виде равенства (10.3). Таким образом, условие эрмитова сопряжения γ -матриц является необходимым и достаточным условием эрмитовости гамильтониана (10.73) для уравнения Дирака.

Возьмем эрмитово сопряжение от уравнения Дирака (10.72)

$$-i\partial_a\psi^\dagger\gamma^{a\dagger} - m\psi^\dagger = 0,$$

где $\psi^\dagger := (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger, \psi_3^\dagger, \psi_4^\dagger)$ – матрица-строка с комплексно сопряженными компонентами. Умножим его справа на γ^0 и запишем в виде

$$-i\partial_a\bar{\psi}\gamma^a - m\bar{\psi} = 0, \quad (10.75)$$

где мы воспользовались правилом эрмитова сопряжения γ -матриц (10.3) и определением сопряженного спинора (10.43). Теперь введем *спинорный ток*

$$j^a := \bar{\psi}\gamma^a\psi. \quad (10.76)$$

Каждая из четырех компонент тока является вещественным числом в силу условия эрмитова сопряжения γ -матриц. Нетрудно проверить, что если выполнено уравнение Дирака (10.72) и, следовательно, сопряженное уравнение (10.75), то ток сохраняется:

$$\partial_a j^a = 0. \quad (10.77)$$

В разделе 10.1.3 было показано, что при преобразованиях из группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 3)$ компоненты квадратичной формы преобразуются, как компоненты вектора. Поэтому после нормировки ток имеет прямую квантово-механическую интерпретацию: это плотность j^0 и поток j^k вероятности найти частицу в данной точке пространства-времени. При этом закон сохранения тока (10.77) приводит к сохранению полной вероятности:

$$\partial_0 \int d\mathbf{x} j^0 = 0, \quad j^0 = \psi_1^\dagger\psi_1 + \psi_2^\dagger\psi_2 + \psi_3^\dagger\psi_3 + \psi_4^\dagger\psi_4.$$

если мы рассматриваем решения уравнения Дирака, достаточно быстро убывающие на пространственной бесконечности. Важно, что такая интерпретация допустима, т.к. плотность вероятности

$$j^0 := \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$$

положительно определена.

Таким образом, уравнение Дирака (10.72), определение скалярного произведения в гильбертовом пространстве (10.74) и спинорного тока (10.76) допускают вероятностную квантово-механическую интерпретацию.

Законы сохранения. Уравнение Дирака (10.72) следует из принципа наименьшего действия для функционала

$$S = \int dx L = \int dx \bar{\psi} (i\gamma^a \partial_a \psi - m\psi). \quad (10.78)$$

Мы предполагаем, конечно, что этот интеграл сходится. Приведенное действие зависит от восьми вещественных функций $\text{re } \psi_A$ и $\text{im } \psi_A$, по которым проводится варьирование. Однако для вычислений удобнее выбрать в качестве независимых функций восемь комплекснозначных функций ψ_A и $\bar{\psi}_A$. Тогда вариационные производные примут вид

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}} = i\gamma^a \partial_a \psi - m\psi = 0, \quad (10.79)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \psi} = -i\partial_a \bar{\psi} \gamma^a - m\bar{\psi} = 0, \quad (10.80)$$

где мы, для краткости, опустили матричные индексы. Кроме этого мы пренебрегли всеми граничными слагаемыми.

Мы уже показали, что уравнения (10.79) и (10.80) эквивалентны. Кроме того, лагранжиан и действие обращаются в нуль на любом решении уравнений движения.

Уравнение (10.80) часто записывают в виде

$$-\bar{\psi}(i\gamma^a \overleftarrow{\partial}_a + m) = 0,$$

где стрелка $\leftarrow$ означает, что производная действует на функцию, стоящую слева.

Действие (10.78) принимает вещественные значения. Действительно, при комплексном сопряжении слагаемые в лагранжиане ведут себя следующим образом:

$$(\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi)^\dagger = (\partial_a \bar{\psi} \gamma^a \psi), \quad (\bar{\psi} \psi)^\dagger = (\bar{\psi} \psi).$$

После интегрирования по частям и с учетом равенства $i^\dagger = -i$ действие принимает прежний вид. В то же время лагранжиан в действии (10.78) является комплекснозначным. Ситуацию можно подправить, записав действие в следующем виде

$$S = \int dx \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi) - \frac{i}{2} (\partial_a \bar{\psi} \gamma^a \psi) - m(\bar{\psi} \psi) \right]. \quad (10.81)$$

Теперь лагранжиан принимает вещественные значения.

Действие в виде (10.78) или (10.81) инвариантно относительно трансляций и преобразований Лоренца. Согласно первой теореме Нетер (см. раздел 5.2) этой глобальной инвариантности соответствует закон сохранения тензора энергии-импульса и момента количества движения. Для получения вещественных выражений будем использовать действие в виде (10.81).

Тензор энергии-импульса (5.44) для действия (10.81) принимает вид

$$T_a{}^b = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^b \partial_a \psi - \frac{i}{2} \partial_a \bar{\psi} \gamma^b \psi - \delta_a^b \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^c \partial_c \psi) - \frac{i}{2} (\partial_c \bar{\psi} \gamma^c \psi) - m(\bar{\psi} \psi) \right]. \quad (10.82)$$

Поскольку на любом решении уравнений движения лагранжиан равен нулю, то, не ограничивая общности, тензор энергии-импульса можно выбрать в более простом виде

$$T_a{}^b = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^b \partial_a \psi - \frac{i}{2} \partial_a \bar{\psi} \gamma^b \psi. \quad (10.83)$$

Согласно первой теореме Нетер тензор энергии-импульса сохраняется, $\partial_b T_a{}^b = 0$, для любого решения уравнений Эйлера–Лагранжа.

При инфинитезимальных лоренцевых вращениях спиноры преобразуются по правилу (10.35). Поэтому тензор спинового момента количества движения (5.54) в рассматриваемом случае имеет вид

$$S_{ab}{}^c = -\frac{1}{4}i\bar{\psi}(\gamma_{ab}\gamma^c + \gamma^c\gamma_{ab})\psi. \quad (10.84)$$

При этом из первой теоремы Нетер следует сохранение полного момента количества движения $\partial_c J_{ab}{}^c = 0$, где

$$J_{ab}{}^c = M_{ab}{}^c + S_{ab}{}^c, \quad (10.85)$$

и орбитальный момент $M_{ab}{}^c$ определяется тензором энергии-импульса:

$$M_{ab}{}^c := x_b T_a{}^c - x_a T_b{}^c.$$

Вид спинового момента количества движения можно упростить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1.6. *Справедлива формула*

$$\gamma^a \gamma_{bc} + \gamma_{bc} \gamma^a = 2i\varepsilon^a{}_{bcd} \gamma^5 \gamma^d,$$

где ε^{abcd} – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из полноты набора матриц (10.20) следует существование разложения

$$\gamma^a \gamma_{bc} + \gamma_{bc} \gamma^a = A^a{}_{bc} \mathbb{1} + B^a{}_{bcd} \gamma^d + C^a{}_{bcde} \gamma^{de} + D^a{}_{bcd} \gamma^5 \gamma^d + E^a{}_{bc} \gamma^5,$$

где коэффициенты разложения A, B, C, D, E определяются по формуле (10.9). Поскольку след произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю, то

$$A^a{}_{bc} = 0, \quad C^a{}_{bcde} = 0, \quad E^a{}_{bc} = 0.$$

Коэффициенты B также равны нулю:

$$4B^a{}_{bcd} = \text{tr}(\gamma_d \gamma^a \gamma_{bc} + \gamma_d \gamma_{bc} \gamma^a) = \text{tr}(\gamma_{bc} \gamma_d \gamma^a + \gamma_{bc} \gamma^a \gamma_d) = 2\delta_d^a \text{tr} \gamma_{bc} = 0.$$

Наконец,

$$4D^a{}_{bcd} = \text{tr}(\gamma_d \gamma^5 \gamma^a \gamma_{bc} + \gamma_d \gamma^5 \gamma_{bc} \gamma^a) = \text{tr}(-\gamma^5 \gamma_{bc} \gamma_d \gamma^a + \gamma^5 \gamma_{bc} \gamma^a \gamma_d) = 8i\varepsilon^a{}_{bcd},$$

где мы воспользовались формулой (10.23).

Поэтому спиновый момент количества движения можно переписать в виде

$$S_{ab}{}^c = \frac{1}{2}\varepsilon^c{}_{abd} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^d \psi. \quad (10.86)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что спиновый момент количества движения для спинорного поля со всеми опущенными индексами S_{abc} антисимметричен по всем трем индексам.

Закон сохранения момента количества движения с учетом сохранения тензора энергии-импульса принимает вид

$$\partial_c J_{ab}{}^c = T_{ab} - T_{ba} + \partial_c S_{ab}{}^c = 0. \quad (10.87)$$

Мы видим, что тензор энергии-импульса для спинорного поля в общем случае несимметричен относительно перестановки индексов.

Наконец, заметим, что действие (10.81) инвариантно относительно изменения фазы спинорного поля

$$\psi \mapsto e^{iq\phi} \psi, \quad (10.88)$$

где $\phi \in \mathbb{R}$ – фаза и $q \in \mathbb{R}$ – заряд поля. Тогда сопряженный спинор преобразуется по правилу

$$\bar{\psi} \mapsto e^{-iq\phi} \bar{\psi}$$

и сохраняющийся ток имеет вид

$$J^a = \bar{\psi} \gamma^a \psi.$$

Сохранение этого тока (10.76), которое вытекает из теоремы Нетер, мы уже обсудили.

При переходе к квантовой электродинамике мы предполагаем, что преобразование (10.88) становится локальным (калибровочным), т.е. фаза $\phi \mapsto \phi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,3})$ становится произвольной функцией от точки пространства-времени. Для того, чтобы сохранить калибровочную инвариантность действия вводится калибровочное поле (электромагнитный потенциал) $A_a(x)$ и частные производные заменяются на ковариантные

$$\partial_a \psi \mapsto \nabla_a \psi := \partial_a \psi - iq A_a \psi.$$

Тогда действие примет вид

$$\begin{aligned} S &= \int dx \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a \nabla_a \psi) - \frac{i}{2} (\nabla_a \bar{\psi} \gamma^a \psi) - m(\bar{\psi} \psi) \right] = \\ &= \int dx \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi) - \frac{i}{2} (\partial_a \bar{\psi} \gamma^a \psi) + q A_a (\bar{\psi} \gamma^a \psi) - m(\bar{\psi} \psi) \right]. \end{aligned} \quad (10.89)$$

Нетрудно убедиться, что это действие инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\psi \mapsto e^{iq\phi} \psi, \quad A_a \mapsto A_a + \partial_a \phi$$

с локальным параметром преобразования $\phi(x)$.

Действие (10.89) уже было использовано для определения операции зарядового сопряжения в разделе (10.1.4). А именно, изменение знака спинорного тока эквивалентно изменению знака заряда q . При этом все остальные слагаемые в лагранжиане не меняются при зарядовом сопряжении.

Безмассовые спиноры. Важный случай представляют безмассовые спиноры, $m = 0$. Ранее считалось, что нейтрино – это безмассовые частицы со спином 1/2. Существующие в настоящее время экспериментальные данные указывают на то, что нейтрино имеет хотя и небольшую, но отличную от нуля массу. Ниже мы рассмотрим безмассовые спиноры, которые представляют интерес также с математической точки зрения.

Безмассовые спиноры описываются действием

$$S = \int dx \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi) - \frac{i}{2} (\partial_a \bar{\psi} \gamma^a \psi) \right]. \quad (10.90)$$

Все, сказанное выше относительно массивного случая, справедливо и для безмассовых спиноров. Однако в безмассовом случае возникают интересные дополнительные свойства.

Во-первых, действие (10.90) приобретает дополнительную *киральную* симметрию:

$$\psi \mapsto e^{i\gamma^5 \phi} \psi \quad (10.91)$$

с произвольной постоянной фазой $\phi \in \mathbb{R}$. Из свойств γ^5 -матрицы (10.18) следует правило преобразования сопряженного спинора

$$\bar{\psi} \mapsto \bar{\psi} e^{i\gamma^5 \phi}.$$

Поскольку

$$e^{i\gamma^5\phi}\gamma^a e^{i\gamma^5\phi} = \gamma^a,$$

то действие (10.90) инвариантно относительно киральных преобразований.

Заметим, что отсутствие массового члена в действии существенно, т.к. он нарушает киральную инвариантность:

$$(\bar{\psi}\psi) \mapsto (\bar{\psi} e^{2i\gamma^5\phi}\psi).$$

Так как действие (10.90) инвариантно относительно киральных преобразований, то из первой теоремы Нетер следует закон сохранения

$$\partial_a j^{5a} = 0,$$

где

$$j^{5a} := \bar{\psi}\gamma^a\gamma^5\psi \quad (10.92)$$

– *киральный ток*.

Поскольку справедливо равенство

$$\gamma^a \frac{1 \pm \gamma^5}{2} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \gamma^a,$$

то в безмассовом случае уравнение Дирака для спиноров Вейля (10.41) расщепляется:

$$i\gamma^a\partial_a\psi_{\pm} = 0. \quad (10.93)$$

Если для γ -матриц выбрано киральное представление (10.4), то уравнения (10.93) можно переписать для двухкомпонентных спиноров:

$$\begin{aligned} i(\partial_0 - \sigma^i\partial_i)\xi &= 0, \\ i(\partial_0 + \sigma^i\partial_i)\eta &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Вейля*.

Майорановские спиноры. Дираковский спинор описывает заряженные частицы со спином $1/2$. Если частица с полуцелым спином является нейтральной, то она описывается спинором Дирака с дополнительным условием [109].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Спинор Дирака называется *майорановским*, если он совпадает со своим зарядово сопряженным спинором:

$$\psi_c = \psi. \quad (10.94)$$

Условие (10.94) означает, что частица совпадает со своей античастицей.

В киральном представлении дираковский спинор имеет вид

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

где ξ и η являются непунктирным и пунктирным спинорами соответственно, которые совпадают со спинорами Вейля. Из формулы (10.65) следует, что условие (10.94) для майорановских спиноров устанавливает взаимно однозначное соответствие между пунктирным и непунктирным спинором:

$$\xi = -i\epsilon_c\sigma^2\eta^* \quad \Leftrightarrow \quad \eta = i\epsilon_c\sigma^2\xi^*. \quad (10.95)$$

То есть майорановский спинор в киральном представлении γ -матриц имеет вид

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ i\epsilon_c \sigma^2 \xi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\epsilon_c \sigma^2 \eta^* \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (10.96)$$

Существует чисто мнимое представление γ -матриц:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} -i\sigma^3 & 0 \\ 0 & -i\sigma^3 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10.97)$$

которое называется *представлением Майораны*. В этом представлении γ^5 -матрица также является чисто мнимой

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (10.98)$$

Допустим, что непунктирный ξ и пунктирный η спиноры вещественны. Тогда, если положить фазовый множитель зарядового сопряжения равным единице, $\epsilon_c = 1$, то майорановский спинор (10.96) также будет вещественным. В майорановском представлении γ -матриц уравнение Дирака (10.72) будет вещественным, благодаря наличию множителя i в кинетическом слагаемом. Тем самым можно ограничиться вещественными четырехкомпонентными спинорами, удовлетворяющими вещественной системе уравнений Дирака. Однако подчеркнем, что это верно только в некоторой фиксированной системе координат, потому что при преобразованиях Лоренца двухкомпонентный спинор ξ преобразуется по фундаментальному представлению группы $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$, которое комплексно.

В отличие от вейлевского спинора, майорановский спинор может быть массивным.

Каноническая формулировка. Перейдем к канонической формулировке теории дираковских спиноров. Из действия (10.81) следуют выражения для обобщенных импульсов:

$$\bar{p} := \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0, \quad p := \frac{\partial L}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} \gamma^0 \psi. \quad (10.99)$$

Одновременные скобки Пуассона, которые отличны от нуля, имеют обычный вид:

$$[\psi_A, \bar{p}'^B] = \delta_A^B \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\bar{\psi}^A, p'_B] = \delta_B^A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

где в правой части стоят трехмерные δ -функции.

Поскольку действие (10.78) зависит только от первых производных по времени, то в канонической формулировке возникает восемь первичных связей:

$$\bar{\Phi} := \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 = 0, \quad \Psi := p + \frac{i}{2} \gamma^0 \psi = 0. \quad (10.100)$$

Следовательно, канонический гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d\mathbf{x} (\bar{p} \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} p - L + \bar{\Phi} \lambda + \bar{\mu} \Psi) = \\ &= \int d\mathbf{x} \left[-\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi) + \frac{i}{2} (\partial_i \bar{\psi} \gamma^i \psi) + m(\bar{\psi} \psi) + \bar{\Phi} \lambda + \bar{\mu} \Psi \right], \end{aligned} \quad (10.101)$$

где $\lambda = \{\lambda_A\}$ и $\bar{\mu} = \{\bar{\mu}_A\}$ – неопределенные множители Лагранжа, и индекс $i = 1, 2, 3$ пробегает только пространственные значения.

Условие сохранения связей во времени приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\Phi}} &= [\bar{\Phi}, \mathcal{H}] = -\bar{\psi}(i\gamma^i \overleftarrow{\partial}_i + m) - i\bar{\mu}\gamma^0 = 0, \\ \dot{\Psi} &= [\Psi, \mathcal{H}] = (i\gamma^i \partial_i - m)\psi + i\gamma^0 \lambda = 0.\end{aligned}$$

Из этих уравнений однозначно определяются множители Лагранжа:

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= i\bar{\psi}(i\gamma^i \overleftarrow{\partial}_i + m)\gamma^0, \\ \lambda &= i\gamma^0(i\gamma^i \partial_i - m)\psi.\end{aligned}$$

Следовательно, связи (10.100) являются связями второго рода.

Ясно, что других связей в теории не возникает.

Согласно общим правилам (см. раздел 6.2), в канонической формулировке спинорного поля мы имеем $4+4+4+4 = 16$ канонически сопряженных переменных $(\psi_A, \bar{p}^A)$ и $(\bar{\psi}^A, p_A)$, на которые наложены 8 связей второго рода. Следовательно, имеется только $4+4 = 8$ физических степеней свободы. Чтобы найти гамильтониан для физических степеней свободы можно решить связи (10.100) относительно сопряженных переменных $\bar{\psi}$ и p :

$$\bar{\psi} = -2i\bar{p}\gamma^0, \quad p = -\frac{i}{2}\gamma^0\psi.$$

Подстановка решений связей в гамильтониан (10.101) приводит к следующей гамильтоновой плотности для физических степеней свободы

$$H_{\text{ph}} = -(\bar{p}\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi) + (\partial_i\bar{p}\gamma^0\gamma^i\psi) - 2im(\bar{p}\gamma^0\psi). \quad (10.102)$$

Если в полученное выражение подставить определение обобщенных импульсов (10.99), то получим выражение гамильтониана для физических степеней свободы:

$$H_{\text{ph}} = -\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi) + \frac{i}{2}(\partial_i\bar{\psi}\gamma^i\psi) + m(\bar{\psi}\psi). \quad (10.103)$$

Учитывая правила комплексного сопряжения квадратичных форм (10.50), этот гамильтониан принимает вещественные значения.

Гамильтониан (10.103) совпадает с компонентой T_0^0 тензора энергии-импульса в форме (10.82).

Кроме этого гамильтониан для физических степеней свободы с точностью до дивергенции равен

$$H_{\text{ph}} = \psi^\dagger H \psi,$$

где H – гамильтониан для уравнения Дирака, записанного в форме уравнения Шредингера (10.73).

10.1.6. Спиноры в геометрии Римана–Картана. При рассмотрении спинорных полей в различных моделях гравитации первое, что необходимо сделать, это перейти от пространства-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ к четырехмерному многообразию $\mathbb{M}$ с метрикой g лоренцевой сигнатуры. После этого группа Лоренца, действующая в пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ и в касательном пространстве, заменяется на группу общих преобразований координат, которая действует в $\mathbb{M}$, и соответствующую ей группу $\mathbb{GL}(4, \mathbb{R})$ (матрицы Якоби), действующую в касательном пространстве.

Поскольку метрика $g = (g_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, по предположению, имеет лоренцеву сигнатуру, $\text{sign } g = (+ - - -)$, то в касательном пространстве к каждой точке можно ввести ортонормальный репер e^α_a :

$$e^\alpha_a e^\beta_b g_{\alpha\beta} = \eta_{ab}, \quad \eta_{ab} = \text{diag}(+ - - -).$$

Этот репер определен с точностью до локальных лоренцевых вращений, действующих в касательном пространстве. Поэтому для описания тензорных полей в искривленном пространстве-времени (многообразии) M мы рассматриваем главное расслоение $P(M, \pi, O(1, 3))$ со структурной группой Лоренца $O(1, 3)$, а также ассоциированные с P векторные расслоения $E(M, \pi_E, W, O(1, 3), \mathbb{P})$, типичным слоем которых является векторное пространство W . Сечения ассоциированных расслоений, по предположению, описывают поля материи.

В случае спиноров ситуация другая. Мы рассматриваем главное расслоение $P(M, \pi, \mathbb{P}IN(1, 3))$ с вещественной структурной группой $\mathbb{P}IN(1, 3)$, дважды накрывающей группу Лоренца $O(1, 3)$, и ассоциированные расслоения $E(M, \pi_E, V, \mathbb{P}IN(1, 3), \mathbb{P})$. Для дираковских спиноров типичным слоем является четырехмерное комплексное векторное пространство $V = \mathbb{C}^4$, в котором действует точное представление группы $\mathbb{P}IN(1, 3)$.

Поскольку алгебры Ли групп $O(1, 3)$ и $\mathbb{P}IN(1, 3)$ совпадают, а связности на главных расслоениях определяются 1-формами со значениями в алгебре Ли структурной группы, то возникает возможность отождествить семейство локальных форм связности на главных расслоениях $P(M, \pi, O(1, 3))$ и $P(M, \pi, \mathbb{P}IN(1, 3))$; что мы и сделаем. Соответствующую связность мы будем называть *лоренцевой* или *спиновой связностью*.

Лоренцева связность на главном расслоении $P(M, \pi, \mathbb{P}IN(1, 3))$ определяется семейством локальных форм связности. То есть задается координатное покрытие базы M и в каждой карте $U \subset M$ – 1-форма со значениями в алгебре Ли

$$\omega = \frac{1}{2} dx^\alpha \omega_\alpha^{ab} L_{ab}, \quad (10.104)$$

где $\omega_\alpha^{ab}(x)$ – компоненты локальной формы связности, $L_{ab} = -L_{ba}$ – базис алгебры Ли. Множитель $1/2$ возник, потому что мы предполагаем суммирование по всем значениям индексов, а не только по упорядоченным парам $a < b$ (это удобнее при проведении вычислений). Кроме этого необходимо также предположить, что в областях пересечения карт локальные формы связности (10.104) преобразуются соответствующим образом.

Семейство локальных форм связности (10.104) определяет связность на главном расслоении $P(M, \pi, \mathbb{P}IN(1, 3))$, которая в свою очередь определяет связности на всех ассоциированных расслоениях. В ассоциированном расслоении с типичным слоем $V = \mathbb{C}^4$ базис алгебры Ли имеет представление (10.28), поэтому локальная форма связности принимает вид

$$\omega = dx^\alpha \omega_\alpha = \frac{1}{4} dx^\alpha \omega_\alpha^{ab} \gamma_{ab} \in \text{mat}(4, \mathbb{C}). \quad (10.105)$$

Пусть в области пересечения двух карт $U \cap U' \neq \emptyset$ преобразование координат задается соответствующим набором функций $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x)$. Тогда в области пересечения этих карт локальная форма связности преобразуется по следующему правилу:

$$\omega'_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} (U \omega_\alpha U^{-1} + \partial_\alpha U U^{-1}),$$

где $U(x) \in \mathbb{P}IN(1, 3)$ – некоторая матрица преобразования, которая может зависеть от точки $x \in U \cap U'$.

Мы видим, что правило преобразования связности не зависит от знака матрицы U .

В дальнейшем мы ограничимся топологически тривиальными многообразиями, $\mathbb{M} \simeq \mathbb{R}^4$, которые покрываются одной картой. При этом локальные вращения в касательном пространстве без изменения координат в $\mathbb{M}$ примут вид

$$\omega'_\alpha = U\omega_\alpha U^{-1} + \partial_\alpha U U^{-1}, \quad U(x) \in \mathbb{PIN}(1, 3). \quad (10.106)$$

Это – хорошо знакомые калибровочные преобразования локальной формы связности.

Если в пространстве-времени задан репер e_α^a и лоренцева связность $\omega_\alpha^{ab} = -\omega_\alpha^{ba}$, то это означает, что на многообразии $\mathbb{M}$ задана геометрия Римана–Картана, а переменные e, ω есть переменные Картана (см. [23], раздел 6.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если геометрия Римана–Картана задается метрикой и кручением, то главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{PIN}(1, 3))$ не определено. Поэтому для описания спинорных полей необходимо введение переменных Картана.

Ковариантная производная от дираковского спинора, по определению, имеет вид

$$\nabla_\alpha \psi = \partial_\alpha \psi - \omega_\alpha \psi = \partial_\alpha \psi - \frac{1}{4} \omega_\alpha^{ab} \gamma_{ab} \psi. \quad (10.107)$$

Нетрудно проверить, что при локальном лоренцевом вращении (точнее, $\mathbb{PIN}$ вращении),

$$\psi \mapsto \psi' = U\psi, \quad (10.108)$$

ковариантная производная преобразуется по тензорному закону

$$\nabla_\alpha \psi \mapsto \nabla'_\alpha \psi' = U \nabla_\alpha \psi, \quad (10.109)$$

где ∇'_α обозначает ковариантную производную с лоренцевой связностью (10.106).

Из правила эрмитова сопряжения для базиса алгебры Ли (10.12) следует вид ковариантной производной для сопряженного спинора

$$\nabla_\alpha \bar{\psi} = \partial_\alpha \bar{\psi} + \bar{\psi} \omega_\alpha = \partial_\alpha \bar{\psi} + \frac{1}{4} \omega_\alpha^{ab} \bar{\psi} \gamma_{ab}. \quad (10.110)$$

Отсюда следует, что квадратичная форма $\bar{\psi}\psi$ – скаляр, и ее ковариантная производная совпадает с обычной:

$$\nabla_\alpha (\bar{\psi}\psi) = \partial_\alpha (\bar{\psi}\psi).$$

Нетрудно проверить, что при локальном лоренцевом вращении (10.108) сопряженный спинор преобразуется с помощью обратной матрицы:

$$\bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^{-1}. \quad (10.111)$$

Отсюда вытекает, что скалярная квадратичная форма при лоренцевых вращениях не преобразуется:

$$\bar{\psi}\psi \mapsto \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\psi.$$

Из свойства преобразования γ -матриц (10.54) вытекает правило преобразования векторной квадратичной формы:

$$\bar{\psi} \gamma^a \psi \mapsto \bar{\psi}' \gamma^a \psi' = (\bar{\psi} \gamma^b \psi) S^{-1a}_b, \quad (10.112)$$

где $S(x) \in \mathbb{O}(1, 3)$ – матрица локальных лоренцевых вращений. Учитывая правило преобразования репера при локальных лоренцевых вращениях,

$$e^\alpha_a \mapsto e'^\alpha_a = S_a^b e^\alpha_b,$$

получаем равенство

$$\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi \mapsto \bar{\psi}' \gamma^\alpha \psi' = \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi,$$

где $\gamma^\alpha(x) := e^\alpha_a(x) \gamma^a$ – четыре матрицы, зависящие от точки $x \in \mathbb{M}$, которые не преобразуются при локальных лоренцевых вращениях и преобразуются как контравариантный вектор при замене координат на $\mathbb{M}$.

Используя явный вид ковариантных производных от спиноров (10.107), (10.110) и свойства γ -матриц, нетрудно проверить, что ковариантная производная от векторной квадратичной формы имеет вид

$$\nabla_\alpha(\bar{\psi} \gamma^a \psi) = \partial_\alpha(\bar{\psi} \gamma^a \psi) - \omega_\alpha^{ab}(\bar{\psi} \gamma_b \psi).$$

Теперь все готово для построения инвариантного действия для спинорного поля. В соответствии с общим правилом минимальной подстановки действие для спинорного поля в геометрии Римана–Картана принимает вид

$$S_s = \int dx L_s = \int dx \sqrt{|g|} \left[\frac{i}{2} e^\alpha_a (\bar{\psi} \gamma^a \nabla_\alpha \psi) - \frac{i}{2} e^\alpha_a (\nabla_\alpha \bar{\psi} \gamma^a \psi) - m(\bar{\psi} \psi) \right]. \quad (10.113)$$

Для его получения мы в выражение (10.81) ввели элемент объема $\sqrt{|g|} = \det e_\alpha^a$, заменили частные производные от спинорного поля на ковариантные и использовали репер для инвариантной свертки γ -матриц с ковариантной производной.

В геометрии Римана–Картана мы рассматриваем поля ψ , $\bar{\psi}$, e_α^a и ω_α^{ab} как независимые переменные, по которым проводится варьирование. Конечно, если мы хотим, чтобы переменные Картана e и ω удовлетворяли дифференциальным уравнениям, например, второго порядка (т.е. были бы динамическими переменными), то к действию (10.113) необходимо добавить гравитационную часть, квадратичную по тензорам кручения и кривизны.

В (псевдо)римановой геометрии лоренцева связность ω заменяется на лоренцеву связность

$$\tilde{\omega}_{abc} = \frac{1}{2}(c_{abc} - c_{bca} + c_{cab}), \quad (10.114)$$

которую мы помечаем знаком тильды, где

$$c_{\alpha\beta}^c := -\partial_\alpha e_\beta^c + \partial_\beta e_\alpha^c$$

– коэффициенты неголономности. (Переход от греческих индексов к латинским и наоборот всегда осуществляется с помощью репера.) В этом случае лоренцева связность выражается через репер и его первые производные, и независимыми переменными в действии являются поля ψ , $\bar{\psi}$ и e_α^a . В таком виде описание спинорного поля в общей теории относительности было впервые предложено Фоком [110] и Вейлем [111].

Из вида действия для спинорного поля (10.113) следуют размерности полей. По определению, координаты, метрика, репер и лоренцева связность имеют следующие размерности:

$$[x^\alpha] = l, \quad [g_{\alpha\beta}] = [e_\alpha^a] = 1, \quad [\omega_\alpha^{ab}] = l^{-1}.$$

Тогда тензоры кручения и кривизны имеют размерности

$$[T_{abc}] = l^{-1}, \quad [R_{abcd}] = l^{-2}.$$

Из безразмерности действия следуют размерности спинорного поля и его массы:

$$[\psi_A] = l^{-3/2}, \quad [m] = l^{-1}. \quad (10.115)$$

По построению, действие (10.113) инвариантно относительно общих преобразований координат x^α в пространстве-времени и локальных лоренцевых (точнее, $\mathbb{PIN}$) вращений.

Из правила комплексного сопряжения спинорного тока (10.50) следует, что лагранжиан в действии (10.113) принимает вещественные значения.

Для варьирования действия (10.113) по спинорному полю, заметим, что выполнено равенство

$$\omega_\alpha \gamma^a = \gamma^a \omega_\alpha - \omega_\alpha^{ab} \gamma_b,$$

где ω_α – компоненты матричнозначной 1-формы (10.104). Поэтому интегрирование второго слагаемого в действии (10.113) по частям с учетом формулы для дифференцирования элемента объема,

$$\partial_\alpha \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\beta\gamma} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \sqrt{|g|} \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^\beta = \sqrt{|g|} e^\beta_a \partial_\alpha e_\beta^a, \quad (10.116)$$

приводит к равенству

$$\int dx \sqrt{|g|} e^\alpha_a (\nabla_\alpha \bar{\psi} \gamma^a \psi) = - \int dx \sqrt{|g|} [e^\alpha_a (\bar{\psi} \gamma^a \nabla_\alpha \psi) + T_a (\bar{\psi} \gamma^a \psi)],$$

где $T_a := T_{\beta\alpha}^\beta e^\alpha_a$ – след тензора кручения. Поэтому уравнение Дирака и его сопряженное в геометрии Римана–Картана принимают вид

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_s}{\delta \bar{\psi}} : \quad ie^\alpha_a \gamma^a \nabla_\alpha \psi - \frac{i}{2} T_a \gamma^a \psi - m \psi = 0, \quad (10.117)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_s}{\delta \psi} : \quad -ie^\alpha_a \nabla_\alpha \bar{\psi} \gamma^a + \frac{i}{2} T_a \bar{\psi} \gamma^a - m \bar{\psi} = 0. \quad (10.118)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (10.118) получается из уравнения (10.117) сопряжением, т.е. эквивалентно уравнению (10.117).

Как и в плоском пространстве-времени действие для спинорного поля (10.113) равно нулю на уравнениях движения (10.117).

Рассмотрим подробнее член взаимодействия спиноров с лоренцевой связностью, которая содержится в ковариантных производных в действии (10.113),

$$-\sqrt{|g|} \frac{i}{8} \omega_a^{bc} [\bar{\psi} (\gamma^a \gamma_{bc} + \gamma_{bc} \gamma^a) \psi]. \quad (10.119)$$

Из этого выражения следует, что вариационная производная действия для спиноров в геометрии Римана–Картана по лоренцевой связности имеет вид

$$S_{s, \alpha}{}^{bc} := \frac{\delta S_s}{\delta \omega_\alpha^{bc}} = -\sqrt{|g|} \frac{i}{8} e^\alpha_a [\bar{\psi} (\gamma^a \gamma_{bc} + \gamma_{bc} \gamma^a) \psi] = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} S_{bc}{}^\alpha, \quad (10.120)$$

где $S_{bc}{}^\alpha = e^\alpha_a S_{bc}{}^a$ – ковариантное обобщение спинового момента количества движения (10.84).

Если к действию для спинорного поля добавить гравитационную часть $S_G(e, \omega)$, зависящую от репера и лоренцевой связности, то уравнения движения для лоренцевой связности примут вид

$$\frac{\delta S_G}{\delta \omega_\alpha^{bc}} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} S_{bc}{}^\alpha. \quad (10.121)$$

Таким образом, в случае спинорного поля спиновый момент количества движения является источником для лоренцевой связности.

Предложение (10.1.6) позволяет упростить вид действия для спинорного поля в геометрии Римана–Картана:

$$S_s = \int dx \sqrt{|g|} \left[\frac{i}{2} e^\alpha_a (\bar{\psi} \gamma^a \partial_\alpha \psi) - \frac{i}{2} e^\alpha_a (\partial_\alpha \bar{\psi} \gamma^a \psi) - \frac{3}{2} B_a (\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^a \psi) - m(\bar{\psi} \psi) \right], \quad (10.122)$$

где

$$B_a := -\frac{1}{6} \omega^{bcd} \varepsilon_{bcda} \quad (10.123)$$

– полностью антисимметричная часть лоренцевой связности (псевдовектор). Мы видим, что в геометрии Римана–Картана спиноры взаимодействуют только с одной из неприводимых компонент лоренцевой связности – полностью антисимметричной частью.

Вариация действия для спинорного поля (10.113) по реперу имеет вид

$$S_{s, \alpha}^\alpha := \frac{\delta S_s}{\delta e_\alpha^a} = -\sqrt{|g|} T^\alpha_a,$$

где

$$T^\alpha_a := \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\alpha \nabla_a \psi) - \frac{i}{2} (\nabla_a \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi) - \frac{1}{\sqrt{|g|}} e^\alpha_a L_s$$

– ковариантное обобщение канонического тензора энергии-импульса (10.82), и

$$\gamma^\alpha := e^\alpha_a \gamma^a, \quad \nabla_a := e^\alpha_a \nabla_\alpha.$$

Если к действию спинорного поля добавлено действие для репера и лоренцевой связности $S_G(e, \omega)$, то уравнения движения для репера примут вид

$$\frac{\delta S_G}{\delta e_\alpha^a} = \sqrt{|g|} T^\alpha_a.$$

Таким образом, в геометрии Римана–Картана источником в уравнениях движения для репера является ковариантное обобщение канонического тензора энергии-импульса спинорного поля.

При рассмотрении спинорного поля в аффинной геометрии возникает возможность добавления к лагранжиану неминимальных членов взаимодействия спинорного поля с репером и лоренцевой связностью. Инвариантные слагаемые неминимального взаимодействия высших размерностей квадратичны по спинорному полю. Следовательно, они представляют собой линейные комбинации ковариантных слагаемых вида (10.42). Существует два инварианта, линейных по тензору кручения,

$$\alpha_1 T_a (\bar{\psi} \gamma^a \psi), \quad \alpha_2 T^{*a} (\bar{\psi} \gamma^5 \gamma_a \psi), \quad (10.124)$$

где $T_a := T_{ba}{}^b$ – след и

$$T^{*a} := \frac{1}{6} \varepsilon^{abcd} T_{bcd}$$

– псевдослед тензора кручения (псевдовектор). При этом константы связи безразмерны:

$$[\alpha_1] = [\alpha_2] = 1.$$

Кроме того, к лагранжиану можно добавить инвариантные слагаемые с тензором кривизны:

$$\beta_1 R(\bar{\psi} \psi), \quad \beta_2 R^*(\bar{\psi} \gamma^5 \psi), \quad \beta_3 R_{ab}(\bar{\psi} \gamma^{ab} \psi),$$

где $R_{ab} := R_{acb}{}^c$ – тензор Риччи, $R := R_a{}^a$ – скалярная кривизна и

$$R^* := -\frac{1}{24}\varepsilon^{abcd}R_{abcd}$$

– полностью антисимметричная часть тензора кривизны (псевдоскаляр). Напомним, что в геометрии Римана–Картана тензор Риччи имеет нетривиальную антисимметричную часть. Константы связи имеют размерность длины:

$$[\beta_1] = [\beta_2] = [\beta_3] = l.$$

В настоящей монографии модели с неминимальным взаимодействием не рассматриваются.

Зависимость уравнений движения. Поскольку действие для спинорного поля в геометрии Римана–Картана инвариантно относительно локальных лоренцевых вращений и общих преобразований координат, то согласно второй теореме Нетер между уравнениями движения существует линейная зависимость.

При локальных лоренцевых вращении репер и лоренцева связность ведут себя следующим образом:

$$e'^\alpha{}_a = S_a{}^b e^\alpha{}_b, \quad (10.125)$$

$$\omega'_{\alpha a}{}^b = S_a{}^c \omega_{\alpha c}{}^d S_d^{-1b} + \partial_\alpha S_a{}^c S_c^{-1b}, \quad (10.126)$$

где $S(x) \in \mathbb{O}(1, 3)$ – матрица локальных вращений. В инфинитезимальной форме

$$S_a{}^b = \delta_a^b + \omega_a{}^b, \quad S_a^{-1b} = \delta_a^b - \omega_a{}^b, \quad (10.127)$$

где $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ – угол поворота. Поэтому при локальных инфинитезимальных лоренцевых вращении репер и лоренцева связность преобразуются по правилам

$$\delta e_\alpha{}^a = -e_\alpha{}^b \omega_b{}^a, \quad \delta e^\alpha{}_a = \omega_a{}^b e^\alpha{}_b, \quad (10.128)$$

$$\delta \omega_{\alpha a}{}^b = \omega_a{}^c \omega_{\alpha c}{}^b - \omega_{\alpha a}{}^c \omega_c{}^b + \partial_\alpha \omega_a{}^b. \quad (10.129)$$

Правило преобразования спиноров при локальных лоренцевых вращении следуют из уравнений (10.35) и (10.44):

$$\delta \psi_A = \frac{1}{4} \omega^{ab} (\gamma_{ab} \psi)_A, \quad \delta \bar{\psi}_A = -\frac{1}{4} \omega^{ab} (\bar{\psi} \gamma_{ab})_A. \quad (10.130)$$

В этих выражениях черта над знаком вариации отсутствует, поскольку при локальных лоренцевых вращении координаты не преобразуются.

Согласно второй теореме Нетер из инвариантности полного действия $S := S_G + S_S$ относительно локальных преобразований следует зависимость уравнений движения. Чтобы ее записать в компактном виде, введем обозначения для вариационных производных:

$$S,{}^\alpha{}_{ab} := \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha{}^{ab}}, \quad S,{}^\alpha{}_a := \frac{\delta S}{\delta e_\alpha{}^a}. \quad (10.131)$$

Тогда из инвариантности действия относительно локальных лоренцевых вращений (10.128), (10.129), следует зависимость уравнений движения:

$$\sqrt{|g|} \nabla_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} S,{}^\alpha{}_{ab} \right) - T_\alpha S,{}^\alpha{}_{ab} + \frac{1}{2} (S,{}_{ab} - S,{}_{ba}) - \frac{1}{4} \frac{\delta S}{\delta \psi} \gamma_{ab} \psi + \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma_{ab} \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}} = 0, \quad (10.132)$$

где опущены спинорные индексы и введена ковариантная производная

$$\nabla_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} S,^\alpha{}_{ab} \right) := \partial_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} S,^\alpha{}_{ab} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\Gamma_{\beta\alpha}{}^\beta S,^\alpha{}_{ab} - \omega_{\alpha a}{}^c S,^\alpha{}_{cb} - \omega_{\alpha b}{}^c S,^\alpha{}_{ac} \right).$$

В приведенные равенства введен элемент объема $\sqrt{|g|}$, чтобы из тензорных плотностей (10.131) получить тензоры, и мы воспользовались равенством (10.116).

При инфинитезимальных преобразованиях координат репер и лоренцева связность преобразуются как ковекторы по правилам (5.75), (5.76). Спиноры преобразуются как скаляры:

$$\delta\psi = -u^\alpha \partial_\alpha \psi, \quad \delta\bar{\psi} = -u^\alpha \partial_\alpha \bar{\psi},$$

где $u^\alpha(x)$ – параметр бесконечно малого преобразования координат:

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = x^\alpha + u^\alpha.$$

Из инвариантности полного действия относительно общих преобразований координат, согласно второй теореме Нетер, следует зависимость уравнений движения:

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} \nabla_\beta \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} S,^\beta{}_{ab} \right) \omega_\beta{}^{ab} - T_\beta S,^\beta{}_{ab} \omega_\alpha{}^{ab} - S,^\beta{}_{ab} R_{\alpha\beta}{}^{ab} + \\ + \sqrt{|g|} \nabla_\beta \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} S,^\beta{}_{\alpha} \right) e_\alpha{}^a - T_\beta S,^\beta{}_{\alpha} e_\alpha{}^a - S,^\beta{}_{\alpha} T_{\alpha\beta}{}^a + S,^\beta{}_{\alpha} e_\beta{}^b \omega_{\alpha b}{}^a - \\ - \frac{\delta S}{\delta\psi} \partial_\alpha \psi - \partial_\alpha \bar{\psi} \frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}} = 0, \end{aligned}$$

где $R_{\alpha\beta}{}^{ab}$ и $T_{\alpha\beta}{}^a$ – тензоры кривизны и кручения в переменных Картана

$$T_{\alpha\beta}{}^a = \partial_\alpha e_\beta{}^a - e_\alpha{}^b \omega_{\beta b}{}^a - (\alpha \leftrightarrow \beta), \quad (10.133)$$

$$R_{\alpha\beta a}{}^b = \partial_\alpha \omega_{\beta a}{}^b - \omega_{\alpha a}{}^c \omega_{\beta c}{}^b - (\alpha \leftrightarrow \beta), \quad (10.134)$$

Полученное равенство можно упростить и записать в явно ковариантном виде, если использовать равенство (10.132):

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} \nabla_\beta \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} S,^\beta{}_{\alpha} \right) e_\alpha{}^a - T_\beta S,^\beta{}_{\alpha} e_\alpha{}^a - S,^\beta{}_{\alpha} T_{\alpha\beta}{}^a - S,^\beta{}_{ab} R_{\alpha\beta}{}^{ab} - \\ - \frac{\delta S}{\delta\psi} \nabla_\alpha \psi - \nabla_\alpha \bar{\psi} \frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}} = 0. \end{aligned} \quad (10.135)$$

Таким образом, из инвариантности действия относительно локальных лоренцевых вращений согласно второй теореме Нетер вытекает шесть линейных соотношений между уравнениями движения (10.132), и четыре соотношения (10.135) являются следствием инвариантности относительно общих преобразований координат.

11. Геометрия поверхностей

Геометрия поверхностей, т.е. двумерных многообразий, является классическим разделом дифференциальной геометрии. Она относительно проста, и многие вопросы можно решить аналитически, что позволяет глубже понять проблемы, возникающие в более высоких размерностях. Кроме этого геометрия поверхностей в последние годы приобрела особую актуальность в связи с большим числом физических приложений и, в первую очередь, в связи с интересом к теории струн, мировая поверхность которых представляет собой двумерное многообразие с метрикой лоренцевой сигнатуры. Помимо этого, некоторые задачи общей теории относительности сводятся к двумерным. Например, в задачах со сферической симметрией в качестве существенных координат выступают радиус и время, которые можно рассматривать в качестве координат на некоторой поверхности.

11.1. Геометрия Римана–Картана на поверхности

Минимальная размерность многообразия, на котором возможно существование нетривиального кручения и кривизны, равна двум. Настоящая глава посвящена именно этому случаю.

Пусть на поверхности задана геометрия Римана–Картана, т.е. задана метрика и кручение, а тензор неметричности тождественно равен нулю, $Q_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Мы предполагаем, что на поверхности задана метрика g либо лоренцевой, либо евклидовой сигнатуры.

В двумерном случае многие формулы дифференциальной геометрии значительно упрощаются, благодаря наличию антисимметричного (псевдо)тензора второго ранга

$$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}, \quad \varepsilon_{01} = \varepsilon_{12} = 1. \quad (11.1)$$

Приставка “псевдо” означает, что при пространственном отражении или обращении времени ε_{ab} меняет знак. В евклидовом случае, конечно, есть только пространственное отражение одной из координат. Напомним, что в псевдоевклидовом и евклидовом случаях латинские индексы принимают значения $\{0, 1\}$ и $\{1, 2\}$ соответственно. Контравариантные компоненты этого тензора зависят от сигнатуры метрики и отличаются знаком

$$\varepsilon^{01} = -1, \quad \varepsilon^{12} = 1. \quad (11.2)$$

Свойства полностью антисимметричного тензора второго ранга приведены в приложении 19.2. Существование антисимметричного тензора второго ранга означает, что произвольное антисимметричное тензорное поле второго ранга, $X_{ab} = -X_{ba}$, взаимно однозначно определяется псевдоскалярным полем X^* :

$$X_{ab} = \bigoplus \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} X^*, \quad \text{где} \quad X^* = \varepsilon^{ab} X_{ab}. \quad (11.3)$$

Здесь и далее верхний знак внутри окружности $\bigoplus$ или $\bigotimes$ относится к римановой поверхности, а нижний – к лоренцевой.

Благодаря антисимметрии, тензор кривизны в геометрии Римана–Картана всегда можно представить в виде

$$R_{abcd} = \bigoplus \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} R = \frac{1}{2} (\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}) R, \quad (11.4)$$

где R – скалярная кривизна. Здесь и далее в этом разделе римановы и лоренцевы поверхности будут рассматриваться параллельно. Поэтому символ η_{ab} будет обозначать и символ Кронекера, и метрику Минковского. Из формулы (11.4) следует, что у тензора кривизны только одна неприводимая компонента – скалярная кривизна – отлична от нуля. Соотношение (11.4) справедливо как в римановой геометрии, так и в геометрии Римана–Картана при нетривиальном кручении. В частности, тензор Риччи всегда симметричен

$$R_{ab} = \frac{1}{2}\eta_{ab}R. \quad (11.5)$$

Отсюда следует, что вакуумные уравнения Эйнштейна (7.1) при нулевой космологической постоянной в двумерном пространстве-времени удовлетворяются тождественно.

Все квадратичные инварианты тензора кривизны выражаются через квадрат скалярной кривизны. Например,

$$R_{abcd}R^{abcd} = R^2, \quad (11.6)$$

$$R_{ab}R^{ab} = \frac{1}{2}R^2. \quad (11.7)$$

В двумерном случае упрощается также общий вид тензора кручения. Нетрудно проверить, что он взаимно однозначно представляется либо своим следом:

$$T_{abc} = \eta_{ac}T_b - \eta_{bc}T_a, \quad T_b := T_{ab}{}^a, \quad (11.8)$$

либо псевдоследом:

$$T_{abc} = \bigoplus \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}T_c^* \Leftrightarrow T_c^* := T_{abc}\varepsilon^{ab}. \quad (11.9)$$

Псевдовектор T_c^* и след T_a тензора кручения взаимно однозначно связаны между собой простыми соотношениями:

$$T_a^* = 2\varepsilon_{ab}T^b \Leftrightarrow T_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}T^{*b}.$$

Квадратичный инвариант тензора кручения имеет вид

$$T_{abc}T^{abc} = 2T_aT^a = \bigoplus \frac{1}{2}T_a^*T^{*a}. \quad (11.10)$$

При проведении вычислений часто бывает удобно переходить от ковариантной производной $\tilde{\nabla}_\alpha$, определяемой символами Кристоффеля и возникающей при интегрировании по частям, к ковариантной производной ∇_α , определяемой полной метрической связностью с кручением. Эта связь осуществляется с помощью соотношения

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} + g_{\alpha\gamma}T_\beta - g_{\alpha\beta}T_\gamma.$$

Поскольку тождества Бианки антисимметричны по трем индексам, то они автоматически удовлетворяются в двух измерениях и не накладывают никаких ограничений на тензор кривизны и кручения.

Теперь обсудим переменные Картана: репер $e_\alpha{}^a$ и лоренцеву связность $\omega_\alpha{}^{ab}$. Наличие антисимметричного псевдотензора второго ранга позволяет воспользоваться следующей параметризацией лоренцевой связности в геометрии Римана–Картана:

$$\omega_\alpha{}^{ab} = \omega_\alpha\varepsilon^{ab}. \quad (11.11)$$

1-форму ω_α также будем называть лоренцевой связностью. В евклидовом случае вместо термина “лоренцева связность” следует говорить “ $\mathbb{SO}(2)$ связность”. Для определенности, мы будем говорить лоренцева связность, имея в виду оба случая. При пространственных отражениях или обращении времени эта форма, так же как и антисимметричный тензор ϵ^{ab} , меняет знак.

Из определения (11.11) следует, что

$$\omega_a = \bigoplus \frac{1}{2} \omega_{abc} \epsilon^{bc} = \bigoplus \epsilon_a{}^b (c_b + T_b), \quad (11.12)$$

где c_b – след коэффициентов неголономности

$$c_a := c_{ba}{}^b = \partial_\alpha e^a{}_\alpha + \frac{\partial_\alpha \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}. \quad (11.13)$$

Закон преобразования связности ω_α при локальных лоренцевых вращениях неоднороден. Прямые вычисления показывают, что при вращении на угол $\omega(x)$, лоренцева связность преобразуется так же, как и электромагнитное поле

$$\omega_\alpha \mapsto \omega'_\alpha = \omega_\alpha + \partial_\alpha \omega, \quad (11.14)$$

т.к. группа $\mathbb{SO}_0(1, 1)$ абелева.

Тензор кривизны поверхности в переменных Картана представляется в виде

$$R_{\alpha\beta}{}^{ab} = F_{\alpha\beta} \epsilon^{ab}, \quad F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha \omega_\beta - \partial_\beta \omega_\alpha. \quad (11.15)$$

Отсутствие квадратичных слагаемых в тензоре кривизны связано с тем, что в двумерном случае группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 1)$ и вращений $\mathbb{SO}(2)$ являются абелевыми. При этом скалярная кривизна имеет вид

$$R = 2\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha \omega_\beta = \epsilon^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \Leftrightarrow F_{\alpha\beta} = \bigoplus \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} R. \quad (11.16)$$

где введен антисимметричный тензор

$$\epsilon^{\alpha\beta} = e^\alpha{}_a e^\beta{}_b \epsilon^{ab}, \quad \nabla_\alpha \epsilon^{\beta\gamma} = 0. \quad (11.17)$$

Выше введен репер $e_\alpha{}^a$, который в двумерном случае называется *диадой*, и определяется соотношением

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \eta_{ab}$$

с точностью до локальных лоренцевых вращений.

Приведем также явное выражение для псевдоследа тензора кручения в картановых переменных, которое часто используется в приложениях,

$$T^{*a} = 2\epsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha e_\beta{}^a + \omega_\alpha e_\beta{}^b \epsilon_b{}^a). \quad (11.18)$$

В римановом пространстве кручение равно нулю, и из уравнения (11.18) следует выражение лоренцевой связности через производные от диады:

$$\tilde{\omega}_\alpha = -e_\alpha{}^a \epsilon^{\beta\gamma} \partial_\beta e_{\gamma a}. \quad (11.19)$$

В приложениях часто используется также полностью антисимметричная тензорная плотность единичного веса

$$\hat{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon_{\alpha\beta}, \quad \hat{\epsilon}^{\alpha\beta} = \sqrt{|g|} \epsilon^{\alpha\beta}. \quad (11.20)$$

Ее компоненты во всех системах координат равны по модулю единице, и частные производные обращаются в нуль:

$$\partial_\alpha \hat{\varepsilon}_{\beta\gamma} = \partial_\alpha \hat{\varepsilon}^{\beta\gamma} = 0. \quad (11.21)$$

Определитель диады можно записать в различных видах:

$$\sqrt{|g|} = \det e_\alpha^a = e_0^a e_1^b \varepsilon_{ab} = \bigoplus \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} e_\alpha^0 e_\beta^1 = \bigoplus \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} e_\alpha^a e_\beta^b \varepsilon_{ab}. \quad (11.22)$$

Для вычислений, проводимых с мономами третьего и более высокого порядка по лоренцевым векторам, полезны следующие тождества:

$$\varepsilon_{ab}\varepsilon_{cd} + \varepsilon_{bc}\varepsilon_{ad} + \varepsilon_{ca}\varepsilon_{bd} = 0, \quad (11.23)$$

$$\eta_{ab}\varepsilon_{cd} + \eta_{da}\varepsilon_{bc} + \eta_{cd}\varepsilon_{ab} + \eta_{bc}\varepsilon_{da} = 0. \quad (11.24)$$

Тождество (11.23), в котором слагаемые отличаются циклической перестановкой первых трех индексов, следует из того, что в двумерном пространстве не существует тензора, антисимметричного по трем индексам. Тождество (11.24) аналогично тождествам Фирца для γ матриц Дирака и проверяется прямой подстановкой.

Тождество, связывающее скалярную кривизну в (псевдо)римановой геометрии со скалярной кривизной в геометрии Римана–Картана, в двумерном случае существенно упрощается:

$$R - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|g|} \varepsilon^\alpha_\beta T^{*\beta} \right) = \tilde{R}. \quad (11.25)$$

То есть скалярные кривизны отличаются на дивергенцию.

11.2. Неголономный базис в двух измерениях

В двумерном пространстве-времени Римана–Картана удобно использовать неголономный базис в касательном пространстве, определяемый диадой:

$$e_a := \partial_a := e^\alpha_a \partial_\alpha. \quad (11.26)$$

Многие геометрические объекты выражаются через коэффициенты неголономности c_{ab}^c , которые определяются коммутатором базисных векторных полей,

$$[e_a, e_b] := c_{ab}^c e_c. \quad (11.27)$$

Из выражения (11.26) следует, что коэффициенты неголономности имеют вид

$$\begin{aligned} c_{ab}^c &= \left(e^\alpha_a \partial_\alpha e^\beta_b - e^\alpha_b \partial_\alpha e^\beta_a \right) e_\beta^c = \\ &= -e^\alpha_a e^\beta_b (\partial_\alpha e_\beta^c - \partial_\beta e_\alpha^c). \end{aligned} \quad (11.28)$$

В двух измерениях они взаимно однозначно определяются следом

$$c_{ab}^c = \delta_a^c c_b - \delta_b^c c_a, \quad c_b := c_{ab}^a. \quad (11.29)$$

Из уравнения (11.28) вытекает, что коэффициенты неголономности инвариантны относительно общих преобразований координат. При локальном лоренцевом повороте на угол $\omega(x)$ они преобразуются, как лоренцева связность:

$$\delta c_b = -\omega \varepsilon_b^c c_c - \varepsilon_b^c \partial_c \omega. \quad (11.30)$$

Приведем два полезных тождества:

$$\varepsilon^{ab}\partial_a e^\alpha_b = \varepsilon^{ab}c_b, \quad \varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha e_\beta^a = -\varepsilon^{ab}c_b. \quad (11.31)$$

Лоренцева связность в неголономном базисе определяется соотношением

$$\omega_a := e_a^\alpha \omega_\alpha. \quad (11.32)$$

Скалярная кривизна R и след тензора кручения $T_b := T_{ab}^a$ в неголономном базисе имеют вид

$$R = 2\varepsilon^{ab}(\partial_a \omega_b + c_a \omega_b), \quad (11.33)$$

$$T_b = -c_b + \varepsilon_b^c \omega_c. \quad (11.34)$$

В геометрии Римана–Картана диада и лоренцева связность являются независимыми переменными. В то же время по заданной диаде всегда можно построить вторую лоренцеву связность и другие геометрические объекты, которые соответствуют нулевому кручению. В этом случае, т.е. в (псевдо)римановой геометрии, лоренцева связность взаимно однозначно определяется коэффициентами неголономности:

$$\tilde{\omega}_a = \varepsilon_a^b c_b. \quad (11.35)$$

Разность между двумя лоренцевыми связностями определяется тензором кручения:

$$\omega_a = \tilde{\omega}_a + \epsilon_a^b T_b. \quad (11.36)$$

Из уравнения (11.33) следует, что скалярная кривизна в римановой геометрии определяется коэффициентами неголономности следующей простой формулой

$$\tilde{R} = 2\partial_a c^a + 2c_a c^a \quad (11.37)$$

11.3. Выбор системы координат

В двумерном пространстве метрика содержит три независимые компоненты, при этом две из них можно фиксировать за счет выбора системы координат (фиксирования калибровки). Таким образом, после фиксирования координат многие геометрические характеристики выражаются через одну функцию, что существенно упрощает анализ двумерных моделей. В настоящем разделе приведен ряд формул в различных системах координат, которые часто встречаются в приложениях.

11.3.1. Конформная калибровка для римановых поверхностей. Для двумерной римановой метрики часто используют *конформную калибровку*, т.е. такую систему координат, в которой метрика является вейлевски евклидовой:

$$ds^2 = \Phi(dx^2 + dy^2), \quad (11.38)$$

где $\Phi = \Phi(x, y)$ – некоторая функция от координат $x = x^1$ и $y = x^2$. *Конформный множитель* Φ предполагается всюду отличным от нуля, иначе метрика будет вырождена, а соответствующая скалярная кривизна может обратиться в бесконечность (это зависит от того, как функция Φ стремится к нулю). Координаты в которых метрика имеет вид (11.38) называются *изотермическими*. Для положительно определенной метрики известна локальная теорема существования изотермических координат.

ТЕОРЕМА 11.3.1. Если метрика принадлежит классу $\mathcal{C}^3(\mathbb{M})$, тогда для любой точки $x \in \mathbb{M}$ существует окрестность, в которой можно выбрать изотермические координаты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [24], теорема 2.5.14.

Заметим, что конформный множитель не является скалярным полем, т.к. в других системах координат метрика в общем случае не будет иметь вейлевски евклидова вида.

Если метрика имеет вид (11.38), то удобно ввести комплексные координаты. Тогда интервал запишется в виде

$$ds^2 = \Phi dz d\bar{z}.$$

После конформного преобразования $z \rightarrow \zeta(z)$ интервал сохраняет вейлевски евклидову форму

$$ds^2 = \Phi \frac{dz d\bar{z}}{d\zeta d\bar{\zeta}} d\zeta d\bar{\zeta}.$$

То есть изотермические координаты определены с точностью до конформных преобразований. По этой причине калибровка (11.38) называется конформной. В изотермических координатах отличны от нуля только два символа Кристоффеля:

$$\tilde{\Gamma}_{zz}^z = \frac{\partial_z \Phi}{\Phi}, \quad \tilde{\Gamma}_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} = \frac{\partial_{\bar{z}} \Phi}{\Phi}.$$

Отличные от нуля линейно независимые компоненты тензора кривизны имеют вид

$$\tilde{R}_{z\bar{z}\bar{z}}^z = \tilde{R}_{\bar{z}zz}^{\bar{z}} = \frac{\Phi \partial_{z\bar{z}}^2 \Phi - \partial_z \Phi \partial_{\bar{z}} \Phi}{\Phi^2} \quad (11.39)$$

У тензора Риччи отличны от нуля только две компоненты:

$$\tilde{R}_{z\bar{z}} = \tilde{R}_{\bar{z}z} = \frac{\Phi \partial_{z\bar{z}}^2 \Phi - \partial_z \Phi \partial_{\bar{z}} \Phi}{\Phi^2}. \quad (11.40)$$

Это приводит к следующему выражению для скалярной кривизны

$$\tilde{R} = 4 \frac{\Phi \partial_{z\bar{z}}^2 \Phi - \partial_z \Phi \partial_{\bar{z}} \Phi}{\Phi^3} = \frac{4}{\Phi} \partial_{z\bar{z}}^2 \ln |\Phi| \quad (11.41)$$

Часто для конформного множителя используют следующую параметризацию

$$\Phi = e^{2\phi}, \quad (11.42)$$

где $\phi = \phi(x)$ – некоторая функция. Тогда

$$\tilde{R} = 2 e^{-2\phi} \Delta \phi, \quad (11.43)$$

где $\Delta \phi := 4 \partial_{z\bar{z}}^2 \phi$ – обычный лапласиан.

Для поверхностей постоянной кривизны (см. раздел 12) скалярная кривизна постоянна,

$$\tilde{R} = -2K = \text{const}, \quad (11.44)$$

где K – гауссова кривизна (произведение главных кривизн поверхности). Это уравнение в изотермических координатах сводится к уравнению Лиувилля

$$\Delta \phi + K e^{2\phi} = 0. \quad (11.45)$$

Уравнение Лиувилля является интегрируемым, и его общее решение приведено в разделе 12.4.

11.3.2. Конформная калибровка для лоренцевых поверхностей. На псевдоримановой поверхности $\mathbb{M}$ интервал в конформной калибровке имеет вид

$$ds^2 = \Phi(dt^2 - dx^2) = \Phi du dv \quad (11.46)$$

где $\Phi = \Phi(u, v)$ – конформный множитель и u и v – координаты светового конуса. Соответствующая метрика и ее обратная в конусных координатах имеют вид

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\Phi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \frac{2}{\Phi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.47)$$

ТЕОРЕМА 11.3.2. Если метрика дважды дифференцируема $g_{\alpha\beta} \in C^2(\mathbb{M})$, то каждая точка $\mathbb{M}$ имеет координатную окрестность, в которой метрика является вейлевски лоренцевой (11.46).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что преобразованием координат произвольную обратную метрику можно привести к виду (11.47). Рассмотрим преобразование координат $x^\alpha \mapsto y^\alpha(x)$ в произвольной координатной окрестности. Тогда компоненты обратной метрики преобразуются по правилу

$$g^{\alpha\beta} \mapsto \tilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta}.$$

Для упрощения формул введем обозначение

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, d \in C^2(\mathbb{M})$. Не ограничивая общности, можно считать, что исходная система координат выбрана таким образом, что $a > 0$. Потребуем, чтобы преобразованные компоненты метрики имели вид (11.47). Тогда функции перехода должны удовлетворять двум уравнениям:

$$\begin{aligned} a \left(\frac{\partial y^0}{\partial x^0} \right)^2 + 2b \frac{\partial y^0}{\partial x^0} \frac{\partial y^0}{\partial x^1} + c \left(\frac{\partial y^0}{\partial x^1} \right)^2 &= 0, \\ a \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^0} \right)^2 + 2b \frac{\partial y^1}{\partial x^0} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} + c \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Эти квадратные уравнения относительно $\partial y^0/\partial x^0$ и $\partial y^1/\partial x^0$ легко решаются. В результате получаем два эквивалентных линейных уравнения:

$$\frac{\partial y^0}{\partial x^0} + \lambda_0 \frac{\partial y^0}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial y^1}{\partial x^0} + \lambda_1 \frac{\partial y^1}{\partial x^1} = 0, \quad (11.49)$$

где

$$\lambda_0 := \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \lambda_1 := \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Поскольку метрика лоренцева, то $b^2 - ac > 0$.

Предположим, что существуют решения уравнений (11.49) такие, что $\{\partial_\alpha y^0\} \neq 0$ и $\{\partial_\alpha y^1\} \neq 0$. Тогда кривые

$$y^0(x) = C^0, \quad y^1(x) = C^1, \quad C^{0,1} = \text{const}, \quad (11.50)$$

определяют два семейства характеристик (3.62) для волнового уравнения на лоренцевой поверхности. Действительно, уравнения (11.48) это и есть уравнения характеристик.

Для дальнейшего нам понадобится

ЛЕММА 11.3.1. Пусть функция $W(x) \in \mathcal{C}^2$ такова, что $\partial W / \partial x^1 \neq 0$. Для того, чтобы семейство кривых $W = C = \text{const}$ давало семейство характеристик волнового уравнения (3.59), необходимо и достаточно, чтобы выражение $W = C$ было общим интегралом одного из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^1}{dx^0} = \lambda_0(x^0, x^1), \quad \frac{dx^1}{dx^0} = \lambda_1(x^0, x^1). \quad (11.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы о неявной функции следует, что уравнение $W = C$ при $\partial_1 W \neq 0$ определяет неявную функцию $x^1 = x^1(x^0, C)$, при этом

$$\frac{dx^1}{dx^0} = -\frac{\partial_0 W}{\partial_1 W}.$$

Если функция $W = C$ является характеристикой волнового уравнения, то она удовлетворяет квадратному уравнению

$$a\partial_0 W^2 + 2b\partial_0 W \partial_1 W + c\partial_1 W^2 = 0,$$

которое приводит к уравнению для неявной функции

$$a \left(\frac{dx^1}{dx^0} \right)^2 - 2b \frac{dx^1}{dx^0} + c = 0,$$

которое сводится к одному из двух уравнений (11.51).

Легко проверить также обратное утверждение.

Согласно общей теории дифференциальных уравнений решения обыкновенных дифференциальных уравнений (11.51) существуют в, возможно, меньшей окрестности. Согласно доказанной лемме, это означает существование двух семейств характеристик $y^0(x) = C_0$ и $y^1(x) = C_1$ класса $\mathcal{C}^1$. Поскольку $\lambda_{0,1} \in \mathcal{C}^2$, то и $y^{0,1} \in \mathcal{C}^2$.

Далее, из уравнений (11.49) следует неравенство

$$\det \frac{\partial y}{\partial x} := \partial_0 y^0 \partial_1 y^1 - \partial_1 y^0 \partial_0 y^1 = (\lambda_1 - \lambda_0) \partial_1 y^0 \partial_1 y^1 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a} \partial_1 y^0 \partial_1 y^1 \neq 0.$$

Это означает, что преобразование координат $x \mapsto y$ невырождено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное доказательство существования системы координат, в которой метрика имеет вейлевски лоренцев вид (11.46), можно обобщить на евклидов случай (см., например, [112], §1.3, раздел 4). Однако при этом нужно потребовать вещественную аналитичность компонент метрики.

Система координат, в которой метрика является вейлевски лоренцевой, определена неоднозначно. Преобразования светоподобных координат

$$u, v \mapsto u'(u), v'(v), \quad (11.52)$$

которые приводят только к изменению конформного множителя, будем, как и в евклидовом случае, называть конформными.

Выражения для символов Кристоффеля и тензора кривизны аналогичны соответствующим формулам в римановом случае. В конусных координатах отличны от нуля только два символа Кристоффеля:

$$\tilde{\Gamma}_{uu}^u = \frac{\partial_u \Phi}{\Phi}, \quad \tilde{\Gamma}_{vv}^v = \frac{\partial_v \Phi}{\Phi}. \quad (11.53)$$

Линейно независимые отличные от нуля компоненты тензора кривизны имеют вид

$$\tilde{R}_{uv}{}^v = \tilde{R}_{vu}{}^u = \frac{\Phi \partial_{uv}^2 \Phi - \partial_u \Phi \partial_v \Phi}{\Phi^2}. \quad (11.54)$$

У тензора Риччи отличны от нуля только недиагональные компоненты:

$$\tilde{R}_{uv} = \tilde{R}_{vu} = \frac{\Phi \partial_{uv}^2 \Phi - \partial_u \Phi \partial_v \Phi}{\Phi^2}. \quad (11.55)$$

Это приводит к следующему выражению для скалярной кривизны

$$\tilde{R} = 4 \frac{\Phi \partial_{uv}^2 \Phi - \partial_u \Phi \partial_v \Phi}{\Phi^3} = \frac{4}{\Phi} \partial_{uv}^2 \ln |\Phi|. \quad (11.56)$$

Если конформный множитель Φ положителен, то его можно параметризовать с помощью экспоненты

$$\Phi := e^{2\phi}, \quad (11.57)$$

где $\phi = \phi(u, v)$ – некоторая функция координат. Тогда скалярная кривизна (11.56) принимает вид

$$\tilde{R} = 2e^{-2\phi} \square \phi, \quad (11.58)$$

где $\square$ – оператор Даламбера на плоскости Минковского.

Для поверхностей постоянной кривизны (см. раздел 12) скалярная кривизна постоянна,

$$\tilde{R} = -2K = \text{const}, \quad (11.59)$$

где K – гауссова кривизна. Это уравнение в конформной калибровке сводится к *уравнению Лиувилля*

$$\square \phi + K e^{2\phi} = 0. \quad (11.60)$$

Уравнение Лиувилля является интегрируемым, и его общее решение приведено в разделе 12.4.

11.4. Координаты светового конуса

В трех предыдущих разделах мы использовали преобразования координат для уменьшения числа неизвестных компонент метрики. В настоящем разделе мы рассмотрим удобный способ введения базиса в касательном пространстве для *лоренцевой* поверхности, оставляя полную свободу в выборе координат на многообразии.

Если на поверхности задана метрика лоренцевой сигнатуры, то при проведении вычислений бывает удобно использовать координаты светового конуса для векторов касательного пространства, которые совпадают с координатами светового конуса на плоскости Минковского. Преимущество этих координат связано с тем, что локальное лоренцево вращение не перемешивает компоненты векторного поля, т.к. каждая из них преобразуется по неприводимому одномерному представлению связной компоненты единицы группы $\mathbb{SO}_0(1, 1)$.

Преобразование компонент вектора $X = X^a e_a$ относительно ортонормального базиса в касательном пространстве при переходе от декартовых координат к *координатам светового конуса* определим следующим образом:

$$X^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1), \quad (11.61)$$

Якобиан преобразования $X^0, X^1 \mapsto X^+, X^-$ равен единице. Обратное преобразование имеет вид

$$X^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^+ + X^-), \quad X^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^+ - X^-). \quad (11.62)$$

В частности, конусные координаты репера (диады) равны

$$e_\alpha^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\alpha^0 \pm e_\alpha^1). \quad (11.63)$$

Нетрудно проверить, что определитель репера можно записать в виде

$$\sqrt{|g|} = \det e_\alpha^a = e_0^- e_1^+ - e_0^+ e_1^- = \varepsilon^{\alpha\beta} e_\alpha^+ e_\beta^-, \quad (11.64)$$

что эквивалентно тождеству

$$\varepsilon^{\alpha\beta} e_\alpha^+ e_\beta^- = 1. \quad (11.65)$$

При проведении расчетов часто приходится обращаться диаду. Выпишем соответствующие формулы:

$$\begin{aligned} e^0_+ &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} e_1^-, & e^1_+ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} e_0^- \\ e^0_- &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} e_1^+, & e^1_- &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} e_0^+. \end{aligned} \quad (11.66)$$

Скалярное произведение векторов в координатах светового конуса имеет вид

$$X^a Y^b \eta_{ab} = X^- Y^+ + X^+ Y^-. \quad (11.67)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Важным является то обстоятельство, что лоренцев квадрат вектора,

$$X^2 = 2X^+ X^-, \quad (11.68)$$

линеен по компонентам, а не квадратичен, как в декартовой системе координат. Это помогает в ряде случаев записать явно решение некоторых уравнений, не извлекая квадратного корня.

Скалярное произведение можно записывать в виде $X^\pm Y^\pm \eta_{\pm\pm}$, где индекс $\pm = \{+, -\}$ пробегает два значения, а лоренцева метрика и ее обратная в координатах светового конуса имеют одинаковый вид,

$$\eta_{\pm\pm} = \eta^{\pm\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.69)$$

Ко- и контравариантные компоненты векторов связаны простыми соотношениями:

$$X^+ = X_-, \quad X^- = X_+, \quad (11.70)$$

при этом соотношения между ковариантными компонентами такие же, как и для контравариантных векторов (11.61):

$$X_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_0 \pm X_1).$$

Псевдоскаляр, построенный из двух векторов, в координатах светового конуса принимает вид

$$X^a Y^b \varepsilon_{ab} = X^\pm Y^\pm \varepsilon_{\pm\pm} = X^- Y^+ - X^+ Y^-, \quad (11.71)$$

где

$$\varepsilon_{\pm\pm} = -\varepsilon^{\pm\pm} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.72)$$

$$\varepsilon^{\pm}_{\pm} = -\varepsilon_{\pm}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.73)$$

Используя выражение для псевдоследа тензора кручения (11.18), получаем его компоненты в координатах светового конуса

$$T^{*\pm} = 2\varepsilon^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha} \mp \omega_{\alpha})e_{\beta}^{\pm}. \quad (11.74)$$

Отсюда следует, что каждая компонента репера $e_{\alpha}^{\pm}$ определяет одну компоненту псевдоследа. Тожество (11.25) в координатах светового конуса принимает вид

$$R = \tilde{R} + 2\nabla_a T^a - 4T^+ T^-, \quad (11.75)$$

где

$$\nabla_{\alpha} T^{*\pm} = \partial_{\alpha} T^{*\pm} \mp \omega_{\alpha} T^{*\pm}.$$

Координаты светового конуса играют большую роль в общем решении уравнений движения двумерной гравитации.

12. Поверхности постоянной кривизны

Поверхности постоянной кривизны являются относительно простыми объектами, которые хорошо изучены и в некоторых случаях классифицированы. Универсальными накрывающими для любой полной римановой поверхности постоянной кривизны являются либо сфера $\mathbb{S}^2$, либо евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$, либо одна компонента связности двуполостного гиперboloида $\mathbb{H}^2$, соответственно для положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. Все полные римановы поверхности постоянной кривизны получаются из этих трех как фактор пространства по действию свободной и собственно разрывной группы преобразований.

В случае псевдоримановых поверхностей, метрика которых имеет лоренцеву сигнатуру, можно не различать поверхности постоянной положительной и отрицательной кривизны, т.к. они связаны между собой простым изменением знака метрики: $g_{\alpha\beta} \mapsto -g_{\alpha\beta}$, не меняющим сигнатуру. Для нулевой кривизны, универсальной накрывающей является плоскость Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$. Если кривизна отлична от нуля, то универсальной накрывающей поверхности постоянной кривизны является универсальная накрывающая однополостного гиперboloида $\mathbb{L}^2$.

В настоящей главе мы подробно опишем все универсальные накрывающие поверхности постоянной кривизны, за исключением евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и двумерного пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$, которые хорошо известны.

12.1. Сфера $\mathbb{S}^2$

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z . Двумерная сфера $\mathbb{S}_a^2$ радиуса $a > 0$ с центром в начале системы координат задается уравнением (см. рис. 12.1, а)

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (12.1)$$

Сфера, очевидно, является связным и односвязным многообразием.

Рис. 12.1. Сфера радиуса a с центром в начале координат (а). Стереографическая проекция точки сферы на плоскость x, y (b).

Вложение сферы в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{S}_a^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, заданное уравнением (12.1), индуцирует на ней положительно определенную метрику с помощью отображения дифференциальных форм. Явный вид индуцированной метрики проще всего выглядит в сферической системе координат r, θ, φ . Чтобы получить его, в выражение для евклидовой метрики в $\mathbb{R}^3$, записанной в сферической системе координат,

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

достаточно подставить уравнение сферы $r = a$. В результате метрика, индуцированная на сфере, в сферической системе координат примет вид

$$d\Omega := a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (12.2)$$

где координаты на сфере θ и φ называются соответственно *азимутальным* и *полярным* углами. Координаты θ, φ покрывают всю сферу, но не определяют глобальную систему координат на сфере, т.к. необходимо провести отождествление, например, $\varphi \sim \varphi + 2\pi$. Соответствующую метрику и ее обратную можно записать в матричных обозначениях:

$$g_{\alpha\beta} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2}\theta \end{pmatrix}.$$

Из символов Кристоффеля (2.15) отличны от нуля только три:

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta.$$

Тензор кривизны имеет только две нетривиальные линейно независимые компоненты:

$$R_{\theta\varphi}^\varphi = -1, \quad R_{\theta\varphi}^\theta = \sin^2\theta. \quad (12.3)$$

Тензор кривизны со всеми опущенными индексами имеет только одну независимую нетривиальную компоненту

$$R_{\varphi\theta\theta\varphi} = -a^2 \sin^2\theta.$$

Тензор Риччи диагонален:

$$R_{\theta\theta} = -1, \quad R_{\varphi\varphi} = -\sin^2\theta.$$

Соответствующая скалярная кривизна (7.17) равна константе

$$R = -2K = -\frac{2}{a^2}.$$

Отсюда следует, что согласно нашему определению тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны, скалярная кривизна сферы единичного радиуса равна -2 . Поэтому мы также используем *гауссову кривизну* K , которая отличается от скалярной кривизны множителем -2 . Для сферы единичного радиуса гауссова кривизна равна единице, $K = 1$.

Экстремали (линии наименьшей длины) на сфере определяются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 12.1.1. *Сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр и только они являются экстремалими. Все экстремали полны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [113], раздел 7.

Таким образом, все экстремали на сфере являются большими окружностями и замкнуты. Ясно, что они полны, т.к. их можно проходить бесконечное число раз. Любые две точки, которые не являются диаметрально противоположными, можно соединить двумя экстремалами. Одна из них будет кратчайшей, а другая – длиннейшей. Диаметрально противоположные точки соединяются бесконечно большим числом экстремалей, которые имеют одинаковую длину.

Метрика евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ инвариантна относительно действия группы трехмерных вращений $\mathrm{SO}(3)$. Кроме того уравнение сферы (12.1) также инвариантно относительно вращений. Отсюда следует, что метрика, индуцированная на сфере, допускает по крайней мере три вектора Киллинга по числу параметров группы Ли преобразований. С другой стороны, поверхность постоянной кривизны допускает существование не более трех линейно независимых векторов Киллинга (теорема 2.3.2). Поэтому сфера представляет собой максимально симметричную поверхность постоянной положительной кривизны. Любой вектор Киллинга на сфере представляет собой линейную комбинацию векторов Киллинга, соответствующих вращениям. В декартовой системе координат $\{x^i\} = (x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, векторы Киллинга евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеют следующие компоненты:

$$K_i = \varepsilon_{ij}{}^k x^j \partial_k. \quad (12.4)$$

где ε_{ijk} – полностью симметричный тензор третьего ранга. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $\mathfrak{so}(3)$:

$$[K_i, K_j] = -\varepsilon_{ij}{}^k K_k. \quad (12.5)$$

Используя формулы перехода от декартовых координат к сферическим, получаем явный вид векторных полей Киллинга на сфере $\mathbb{S}_a^2$ в сферических координатах:

$$\begin{aligned} K_1 &= -\sin \varphi \partial_\theta - \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\ K_2 &= \cos \varphi \partial_\theta - \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\ K_3 &= \partial_\varphi. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Можно проверить, что они удовлетворяют той же алгебре (12.5), что и векторы Киллинга евклидова пространства.

В приложениях часто используются *стереографические координаты* ρ, φ на сфере $\mathbb{S}_a^2$, в которых индуцированная метрика (12.2) является вейлевски евклидовой. Они строятся следующим образом. Спроектируем точку (θ, φ) , не находящуюся на северном полюсе, на плоскость x, y из северного полюса, как показано на рис. 12.1, *b*. При этом точки нижней и верхней полусферы отображаются соответственно на внутренность и дополнение к кругу радиуса a на плоскости x, y . Тогда полярный радиус ρ на плоскости x, y связан с азимутальным углом θ следующим соотношением

$$\frac{a}{\rho} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Отсюда находим радиус

$$\rho = a \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (12.7)$$

Подставляя соотношение между дифференциалами

$$d\rho = -a \frac{1}{1 - \cos \theta} d\theta$$

в выражение для индуцированной метрики (12.2), получаем выражение для метрики на сфере в стереографических координатах

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + \rho^2/a^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2), \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (12.8)$$

Отсюда следует, что в стереографических координатах метрика на сфере является вейлевски евклидовой.

Векторы Киллинга в стереографических координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\rho^2 + a^2}{2a} \sin \varphi \partial_\rho - \frac{\rho^2 - a^2}{2a\rho} \cos \varphi \partial_\varphi, \\ K_2 &= -\frac{\rho^2 + a^2}{2a} \cos \varphi \partial_\rho - \frac{\rho^2 - a^2}{2a\rho} \sin \varphi \partial_\varphi, \\ K_3 &= \partial_\varphi. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Стереографические координаты покрывают все точки сферы, за исключением северного полюса, который отображается в бесконечность на плоскости x, y . Аналогично можно построить проекцию точек сферы из южного полюса. Тогда сфера будет покрыта двумя картами.

Рассмотрим плоскость x, y как комплексную плоскость $z = x + iy \in \mathbb{C}$. В комплексных координатах метрика (12.8) примет вид

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + z\bar{z}/a^2)^2} dz d\bar{z}. \quad (12.10)$$

При стереографической проекции северный полюс сферы отображается в бесконечно удаленную точку на комплексной плоскости. Комплексная плоскость, объединенная с бесконечно удаленной точкой, называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\mathbb{C}}$. Комплексная плоскость $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ и расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$ имеют разные топологии. Сфера $\mathbb{S}^2$, на которую взаимно однозначно отображается расширенная комплексная плоскость с помощью стереографической проекции называется *сферой Римана*.

Отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на сферу $\mathbb{S}^2$ можно записать в комплексном виде. Обозначим декартовы координаты точки, расположенной на сфере, через ξ, η, t . По определению, они удовлетворяют уравнению

$$\xi^2 + \eta^2 + t^2 = a^2,$$

т.е. в качестве координат на сфере можно выбрать координаты ξ и η или комплексную переменную $\zeta := \xi + i\eta$. Они связаны с комплексными координатами на плоскости $z = x + iy$ соотношением

$$\frac{\zeta}{z} = \frac{a - t}{a}.$$

Исключив из этих соотношений t , получим равенство

$$\zeta = \frac{2z}{1 + z\bar{z}/a^2}.$$

Выпишем также формулы, для координаты t и обратного преобразования $\xi, \eta, t \rightarrow z$

$$t = \frac{z\bar{z} - a^2}{z\bar{z} + a^2}a, \quad z = \frac{a}{a - t}\zeta.$$

Эти формулы часто используются в приложениях.

12.2. Двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^2$

Рассмотрим трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ с декартовыми координатами t, x, y . Метрика Лоренца на этом многообразии определяется квадратичной формой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2. \quad (12.11)$$

Двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^2$ “радиуса” $a > 0$, вложенный в пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$, задается уравнением

$$t^2 - x^2 - y^2 = a^2, \quad a > 0, \quad (12.12)$$

и показан на рис. 12.2, а. Это уравнение имеет решения только при $|t| \geq a$. Верхняя и нижняя полы гиперboloида соответствуют значениям $t \geq a$ и $t \leq -a$. Как многообразие двуполостный гиперboloид состоит из двух компонент связности: верхней и нижней полы. Каждая пола является связным и односвязным многообразием. Для определенности выберем верхнюю полу гиперboloида и обозначим ее $\mathbb{H}^2$. В дальнейшем, говоря про двуполостный гиперboloид, будем подразумевать именно его верхнюю полу $\mathbb{H}^2$. Верхняя (или нижняя) пола двуполостного гиперboloида называется также *плоскостью Лобачевского* или *гиперболической плоскостью*.

Рис. 12.2. Двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^2$, вложенный в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ (а). Стереографические координаты ρ, φ на двуполостном гиперboloиде (б).

Вложение $\mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$ двуполостного гиперboloида в пространство Минковского (12.12) индуцирует на нем метрику евклидовой сигнатуры (риманову метрику). Это очевидно, поскольку все касательные векторы к поверхности (12.12) пространственноподобны.

Вычисление геометрических характеристик двуполостного гиперboloида наиболее просто проводится в гиперболических координатах:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sh} \theta \cos \varphi, \\ y &= r \operatorname{sh} \theta \sin \varphi, \\ t &= \pm r \operatorname{ch} \theta, \end{aligned} \quad (12.13)$$

которые мы обозначим теми же буквами r, θ, φ , что и сферические координаты. Преобразования координат (12.13) определены при всех значениях координат r, θ, φ . В приведенных формулах знак $\pm$ в формуле для t относится к гиперболическим координатам соответственно в верхнем $t > 0$ и нижнем $t < 0$ полупространствах.

Якобиан преобразования легко вычислить

$$J = \frac{\partial(t, x, y)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \pm r^2 \operatorname{sh} \theta.$$

Таким образом, преобразование координат вырождено при $r = 0$ и $\theta = 0$, т.е. на оси времени t .

Обратные преобразования запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}, \\ \theta &= \pm \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Они определены при $t^2 \geq x^2 + y^2$, и знак $\pm$ относится соответственно к верхней и нижней полё гиперboloида. Мы видим, что внутренность светового конуса будущего, $t > 0$, с вершиной в начале координат и удаленной полуплоскостью $y = 0$, $x \geq 0$ отображается на область

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (12.15)$$

При этом внутренность светового конуса прошлого, $t < 0$, с удаленной полуплоскостью также отображается на область (12.15). Заметим, что полуплоскость необходимо удалить из-за полярного угла $0 < \varphi < 2\pi$.

В гиперболических координатах двуполостный гиперboloид (12.12) задается особенно просто: $r = a = \text{const} > 0$. Поэтому углы θ и φ можно рассматривать в качестве координат на двуполостном гиперboloиде $\mathbb{H}^2$.

Лоренцева метрика (12.11) в гиперболических координатах (12.13) принимает вид

$$ds^2 = dr^2 - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sh}^2 \theta d\varphi^2).$$

Поэтому индуцированная метрика на двуполостном гиперboloиде $\mathbb{H}^2$, $r = a = \text{const}$, задается квадратичной формой

$$dl^2 = a^2(d\theta^2 + \operatorname{sh}^2 \theta d\varphi^2). \quad (12.16)$$

При этом мы изменили общий знак двумерной индуцированной метрики для того, чтобы она стала положительно определенной. Соответствующая метрика и ее обратная в матричных обозначениях имеют вид

$$g_{\alpha\beta} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2 \theta \end{pmatrix} \quad g^{\alpha\beta} = a^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (12.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если бы мы рассматривали вложение (12.12) двуполостного гиперboloида в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, то индуцированная метрика имела бы другой вид. Поэтому важно, что рассматривается вложение именно в пространство Минковского.

Прямые вычисления показывают, что только три символа Кристоффеля (2.15) отличны от нуля:

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\operatorname{ch} \theta}{\operatorname{sh} \theta}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\operatorname{sh} \theta \operatorname{ch} \theta.$$

Полный тензор кривизны имеет две отличные от нуля независимые компоненты:

$$R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = 1, \quad R_{\varphi\varphi\theta}^\theta = -\operatorname{sh}^2 \theta \quad (12.18)$$

При этом тензор кривизны со всеми опущенными индексами имеет только одну отличную от нуля независимую компоненту

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = a^2 \operatorname{sh}^2 \theta.$$

Соответствующий тензор Риччи диагонален:

$$R_{\theta\theta} = 1, \quad R_{\varphi\varphi} = \operatorname{sh}^2 \theta,$$

и скалярная кривизна постоянна

$$\tilde{R} = -2K = \frac{2}{a^2}.$$

Для гиперboloида единичного радиуса, $a = 1$, гауссова кривизна $K = -1$. Таким образом, двуполостный гиперboloид является поверхностью постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

Очевидно, что группа Лоренца $\mathbb{O}(1, 2)$, действующая глобально в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$, является группой симметрии и лоренцевой метрики (12.11), и двуполостного гиперboloида (12.12). Поэтому группой симметрии индуцированной метрики на двуполостном гиперboloиде (12.16) является группа Ли псевдоортогональных вращений (группа Лоренца) $\mathbb{SO}(1, 2)$. Соответствующая алгебра $\mathfrak{so}(1, 2)$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ задается тремя векторами Киллинга:

$$\begin{aligned} K_0 &= -x \partial_y + y \partial_x = -\partial_\varphi, \\ K_1 &= y \partial_t + t \partial_y = \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\operatorname{ch} \theta \cos \varphi}{\operatorname{sh} \theta} \partial_\varphi, \\ K_2 &= -t \partial_x - x \partial_t = -\cos \varphi \partial_\theta + \frac{\operatorname{ch} \theta \sin \varphi}{\operatorname{sh} \theta} \partial_\varphi, \end{aligned} \quad (12.19)$$

которые мы записали в декартовых и гиперболических координатах. Векторы Киллинга в гиперболических координатах не содержат компоненты вдоль ∂_r . Это означает, что они касательны к двуполостному гиперboloиду. Коммутационные соотношения для векторных полей Киллинга имеют вид

$$[K_0, K_1] = K_2, \quad [K_2, K_0] = K_1, \quad [K_1, K_2] = -K_0. \quad (12.20)$$

Отметим, что инверсия времени $t \rightarrow -t$ преобразует $K_{1,2} \rightarrow -K_{1,2}$ и не меняет K_0 . При этом алгебра Ли полей Киллинга остается неизменной.

Введем обозначение $\{K_i\} = \{K_0, K_1, K_2\}$, $i = 0, 1, 2$. Тогда алгебру $\mathfrak{so}(1, 2)$ можно записать в компактном виде:

$$[K_i, K_j] = -\varepsilon_{ij}{}^k K_k,$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, $\varepsilon_{012} = 1$, а подъем индексов, в отличие от алгебры вращений $\mathfrak{so}(3)$, осуществляется с помощью обратной метрики Минковского $\eta^{ij} = \operatorname{diag}(+ - -)$.

Поскольку в общем случае поверхность допускает не более трех векторов Киллинга, то двуполостный гиперboloид представляет собой максимально симметричную поверхность.

ЗАМЕЧАНИЕ. Внимательный читатель, конечно, заметил, что формулы для двуполостного гиперboloида и сферы, рассмотренной в разделе 12.1, очень похожи. Соответствующие выражения отличаются частью знаков и заменой тригонометрических функций от θ на гиперболические.

Группа $\mathbb{SO}_0(1, 2)$ некомпактна и ее алгебра Ли $\mathfrak{so}(1, 2)$ имеет нетривиальную неабелеву подалгебру, натянутую на векторные поля K_1 и $K_0 + K_2$. Действительно, из коммутационных соотношений (12.20) следует равенство

$$[K_1, K_0 + K_2] = -(K_0 + K_2). \quad (12.21)$$

Отметим, что алгебра вращений $\mathfrak{so}(3)$ не имеет неабелевых подгрупп.

Легко найти интегральные кривые полей Киллинга в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$. Например, интегральными кривыми поля K_2 в плоскости t, x являются гиперболы

$$t^2 - x^2 = \pm c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Легко проверяется, что двуполостные гиперboloиды, параметризуемые “радиусом” a , являются интегральными подмногообразиями полей Киллинга (12.19).

Нетрудно проверить, что векторы Киллинга линейно зависимы:

$$tK_0 + xK_1 + yK_2 = 0. \quad (12.22)$$

С точки зрения теоремы Фробениуса векторные поля K_1 и $K_0 + K_2$ линейно независимы и определяют распределение в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$. Они находятся в инволюции и, следовательно, определяют семейство интегральных подмногообразий, которыми являются двуполостные гиперboloиды.

Двуполостный гиперboloид является римановым многообразием постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Выше было показано, что эта поверхность естественным образом вкладывается в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$, что связано с $\mathbb{SO}(1, 2)$ симметрией метрики (12.16). Можно доказать, что не существует $\mathcal{C}^2$ вложения полной поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны в трехмерное евклидово пространство [114]. В то же время в классе $\mathcal{C}^1$ вложение полной поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны уже возможно [115].

Теперь обсудим экстремали.

ТЕОРЕМА 12.2.1. *Сечения двуполостного гиперboloида $\mathbb{H}^2$ плоскостями, проходящими через начало координат, и только они являются экстремальными. Все экстремали на двуполостном гиперboloиде полны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения для экстремалей интегрируются в явном виде.

Из рис. 12.2,а ясно, что все экстремали незамкнуты. Через две произвольные точки на гиперboloиде $\mathbb{H}^2$ и начало координат проходит одна и только одна плоскость. Это означает, что две произвольные точки на гиперboloиде можно соединить единственной экстремалью, и это будет линия наименьшей длины.

При преобразовании Лоренца плоскость переходит в плоскость. Поэтому экстремаль переходит в экстремаль. Это следовало ожидать, поскольку метрика двуполостного гиперboloида (12.16) инвариантна относительно преобразований Лоренца.

Для того, чтобы записать метрику двуполого гиперboloида (12.16) в вейлевски евклидовом виде, введем стереографические координаты ρ, φ . Это делается аналогично введению стереографических координат на сфере. Сначала введем обычные полярные координаты r, φ на плоскости x, y . Выберем точку $(t, r, \varphi) \in \mathbb{H}^2$ на верхней полё гиперboloида и спроектируем ее из вершины нижней полу $x = y = 0, t = -a$ на плоскость x, y . На плоскости x, y ей будет соответствовать точка с координатами ρ, φ (см. рис. 12.2,б). Из рисунка ясно, что справедливо соотношение

$$\frac{r}{\rho} = \frac{t + a}{a}.$$

Подставив сюда время $t = \sqrt{a^2 + r^2}$ из уравнения гиперболоида (12.12), получим связь радиусов:

$$r = \frac{2a^2\rho}{a^2 - \rho^2}.$$

Это приводит к соотношению между дифференциалами

$$dr = 2a^2 \frac{a^2 + \rho^2}{(a^2 - \rho^2)^2} d\rho.$$

Чтобы записать метрику двуполостного гиперболоида в стереографических координатах, запишем ее сначала в полярных координатах (после изменения общего знака):

$$ds^2 = \frac{a^2}{a^2 + r^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (12.23)$$

Для получения этой формулы надо в евклидовой метрике (12.11) произвести замену координат $x, y \mapsto r, \varphi$ и подставить выражение для времени $t = \sqrt{a^2 + r^2}$. Замена $r \mapsto \rho$ приводит к метрике в стереографических координатах

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - \rho^2/a^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2). \quad (12.24)$$

Эта метрика является вейлевски евклидовой и определена при

$$0 \leq \rho < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Она отличается от метрики сферы (12.8) только знаком перед ρ^2 в знаменателе, и этим определяется различие в области определения стереографических координат для сферы $\mathbb{S}^2$ и двуполостного гиперболоида $\mathbb{H}^2$.

12.3. Однополостный гиперболоид $\mathbb{L}^2$

Как и раньше, будем считать, что в трехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ заданы декартовы координаты t, x, y и метрика Лоренца (12.11). Рассмотрим *однополостный гиперболоид* $\mathbb{L}^2$, вложенный в пространство-время Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$. Он задается уравнением (см. рис. 12.3).

$$t^2 - x^2 - y^2 = -a^2, \quad a > 0, \quad (12.25)$$

которое отличается от уравнения для двуполостного гиперболоида (12.12) знаком правой части. Это уравнение имеет решения только при $x^2 + y^2 \geq a^2$.

С топологической точки зрения однополостный гиперболоид является связным, но не односвязным многообразием. Его фундаментальная группа совпадает с фундаментальной группой окружности, $\pi_1(\mathbb{L}^2) = \mathbb{Z}$, а универсальная накрывающая, очевидно, диффеоморфна евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

Из рисунка ясно, что в любой точке гиперболоида касательное пространство содержит как времениподобные, так и пространственноподобные векторы по отношению к метрике Лоренца (12.11). Это значит, что вложение $\mathbb{L}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$ индуцирует на поверхности $\mathbb{L}^2$ метрику лоренцевой сигнатуры.

Для проведения вычислений удобно воспользоваться гиперболическими координатами r, θ, φ :

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{ch} \theta \cos \varphi, \\ y &= r \operatorname{ch} \theta \sin \varphi, \\ t &= r \operatorname{sh} \theta. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Рис. 12.3. Однополостный гиперболоид $\mathbb{L}^2$, вложенный в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$.

Эти формулы определены при всех значениях r, θ, φ . Якобиан преобразования координат (12.26) равен

$$J = \frac{\partial(t, x, y)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \operatorname{ch} \theta.$$

Таким образом, преобразование координат вырождено только в начале координат $r = 0$. Поскольку якобиан преобразования координат неотрицателен, то переход к новым координатам сохраняет ориентацию.

Обратные преобразования запишем в виде

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 - t^2}, \\ \theta &= \operatorname{arccth} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Они определены при $x^2 + y^2 \geq t^2$. Мы видим, что внешность светового конуса с вершиной в начале координат и удаленной полуплоскостью $y = 0, x \geq 0$ отображается на область

$$0 < r < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

В гиперболических координатах однополостный гиперболоид определяется уравнением $r = a = \text{const}$. Поэтому углы θ и φ можно выбрать в качестве координат на однополостном гиперболоиде $\mathbb{L}^2$.

Метрика Лоренца (12.11) в гиперболических координатах (12.27) принимает вид

$$ds^2 = -dr^2 + r^2(d\theta^2 - \operatorname{ch}^2 \theta d\varphi^2).$$

Следовательно, индуцированная метрика на однополостном гиперболоиде $r = a = \text{const}$ имеет вид

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 - \operatorname{ch}^2 \theta d\varphi^2). \quad (12.28)$$

Она имеет, очевидно, лоренцеву сигнатуру.

В матричных обозначениях метрика и ее обратная имеют вид

$$g_{\alpha\beta} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}^2 \theta \end{pmatrix} \quad g^{\alpha\beta} = a^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (12.29)$$

Из символов Кристоффеля только три отличны от нуля:

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch} \theta}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \operatorname{sh} \theta \operatorname{ch} \theta.$$

У полного тензора кривизны только две линейно независимые компоненты отличны от нуля:

$$R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = 1, \quad R_{\theta\varphi\varphi}^\theta = \operatorname{ch}^2 \theta.$$

Тензор кривизны со всеми опущенными индексами имеет только одну линейно независимую компоненту

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = -a^2 \operatorname{ch}^2 \theta.$$

Тензор Риччи диагонален:

$$R_{\theta\theta} = 1, \quad R_{\varphi\varphi} = -\operatorname{ch}^2 \theta.$$

Наконец, скалярная кривизна равна

$$R = -2K = \frac{2}{a^2}.$$

Таким образом, однополостный гиперboloид $\mathbb{L}^2$ является поверхностью постоянной отрицательной гауссовой кривизны, $K = -1/a^2$. Чтобы получить поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны с метрикой лоренцевой сигнатуры, можно рассмотреть тот же однополостный гиперboloид, но вложенный в трехмерное пространство с метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2,$$

что приведет к изменению знака метрики на поверхности, а, значит, и знака скалярной кривизны.

Метрика трехмерного пространства Минковского (12.11) и уравнение гиперboloида (12.25) инвариантны относительно трехмерной группы лоренцевых вращений $\mathbb{SO}(1, 2)$. Это означает, что преобразования из этой группы являются изометриями. Группа Лоренца $\mathbb{SO}(1, 2)$ трехмерна, и ее действие в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ задается тремя векторами Киллинга, которые в декартовых координатах имеют тот же вид, что и в случае двуполостного гиперboloида (12.19):

$$\begin{aligned} K_0 &= -x \partial_y + y \partial_x, \\ K_1 &= y \partial_t + t \partial_y, \\ K_2 &= -t \partial_x - x \partial_t. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Конечно, они удовлетворяют той же алгебре Ли $\mathfrak{so}(1, 2)$ (12.20), поскольку пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ не изменилось. Изменится только их вид в гиперболических координатах:

$$\begin{aligned} K_0 &= -\partial_\varphi, \\ K_1 &= \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\operatorname{sh} \theta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \theta} \partial_\varphi, \\ K_2 &= -\cos \varphi \partial_\theta + \frac{\operatorname{sh} \theta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \theta} \partial_\varphi. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Поскольку максимальное число полей Киллинга для поверхности равно трем, то для однополостного гиперboloида векторы Киллинга (12.31) определяют максимальный набор изометрий.

Как и в предыдущем разделе, векторы Киллинга (12.31) на однополостном гиперboloиде линейно зависимы (12.22). Векторы K_1 и $K_0 + K_2$ образуют подалгебру в $\mathfrak{so}(1, 2)$ и определяют двумерное инволютивное распределение в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$. Согласно теореме Фробениуса это распределение определяет семейство интегральных подмногообразий, которыми являются однополостные гиперboloиды.

Теперь исследуем экстремали (3.24) на однополостном гиперboloиде $\mathbb{L}^2$.

ТЕОРЕМА 12.3.1. *Сечения однополостного гиперboloида $\mathbb{L}^2$ плоскостями, проходящими через начало координат, и только они являются экстремалими. Все экстремали на однополостном гиперboloиде полны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [116].

Обозначим угол между секущей плоскостью, проходящей через начало координат, и плоскостью x, y через ψ . В зависимости от величины этого угла все экстремали делятся на три класса:

$$\begin{aligned} \psi \in [0, \pi/4) & \quad - \text{пространственноподобные,} \\ \psi = \pi/4 & \quad - \text{светоподобные,} \\ \psi \in (\pi/4, \pi/2] & \quad - \text{времениподобные.} \end{aligned}$$

Пространственноподобные экстремали замкнуты, а остальные – нет.

Через любые две различные точки на гиперboloиде $\mathbb{L}^2$ и начало координат можно провести одну и только одну плоскость. Это значит, что две произвольные точки однополостного гиперboloида можно соединить по крайней мере одной экстремалью. Если экстремали, соединяющие две точки пространственноподобны, то таких экстремалей две, причем по крайней мере одна из них имеет минимальную длину. В остальных случаях экстремаль, соединяющая две точки, единственна.

При преобразовании Лоренца плоскость переходит в плоскость. Следовательно, экстремаль отображается в экстремаль.

Вычислим длину пространственноподобной замкнутой экстремали. Рассмотрим плоскость

$$t = kx, \quad 0 < k < 1,$$

которая параллельна оси y и определяет пространственноподобную экстремаль. В гиперболических координатах это уравнение принимает вид

$$\operatorname{th} \theta = k \cos \varphi.$$

Отсюда следует равенство для дифференциалов

$$d\theta = -\frac{k \sin \varphi}{1 - k^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Подставив это выражение в метрику (12.28), получим квадрат элемента длины пространственноподобной экстремали

$$ds^2 = -a^2 \frac{1 - k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \theta)^2} d\varphi^2.$$

Чтобы вычислить длину экстремали, надо извлечь квадрат из $|ds^2|$ и проинтегрировать:

$$L := a\sqrt{1 - k^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - k^2 \cos^2 \varphi} = 2\pi a.$$

Поскольку задача симметрична относительно вращений вокруг оси t , то отсюда следует, что длина произвольной пространственноподобной экстремали не зависит от угла, под которым плоскость пересекает двуполостный гиперболоид, и равна длине окружности, по которой гиперболоид пересекает плоскость x, y .

Теперь обсудим *стереографические координаты*, для однополостного гиперболоида, в которых она является конформно плоской. Их введение в данном случае не так наглядно, как для сферы, и сложнее. Определим стереографические координаты τ, σ для гиперболоида, как координаты точки на плоскости t, x , которая является центральной проекцией точки гиперболоида из точки $t = x = 0, y = -a$.

Рис. 12.4. Стереографические координаты τ, σ на однополостном гиперболоиде. Проекция на плоскости t, y (a) и x, y (b).

Чтобы явно построить функции перехода требуется некоторое геометрическое построение. Пусть точка на гиперболоиде имеет координаты t, x, y . По определению, они удовлетворяют равенству (12.25), т.е. в качестве координат на гиперболоиде можно выбрать, например, декартовы координаты t, x , которые покрывают половину гиперболоида. Соединим эту точку с точкой $t = x = 0, y = -a$ прямой. Соответствующие проекции на плоскости t, y и x, y показаны на рис. 12.4 a и b. Из рисунков следуют равенства:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{y + a}{a}, \quad \frac{x}{\sigma} = \frac{y + a}{a}. \quad (12.32)$$

Из этих уравнений выразим t и x и подставим в уравнение гиперболоида (12.25). В результате возникнет квадратное уравнение на y , которое можно решить:

$$y = a \frac{a^2 + \tau^2 - \sigma^2}{a^2 - \tau^2 + \sigma^2},$$

где мы выбрали больший корень. Тогда

$$\frac{y + a}{a} = \frac{2a^2}{a^2 - \tau^2 + \sigma^2}.$$

Теперь уравнения (12.32) дают функции перехода:

$$t = \tau \frac{2a^2}{a^2 - \tau^2 + \sigma^2}, \quad x = \sigma \frac{2a^2}{a^2 - \tau^2 + \sigma^2}. \quad (12.33)$$

Якобиан преобразования координат $\tau, \sigma \mapsto t, x$ легко вычислить

$$J = \frac{\partial(t, x)}{\partial(\tau, \sigma)} = 4a^4 \frac{a^2 + \tau^2 - \sigma^2}{(a^2 - \tau^2 + \sigma^2)^3}.$$

Он равен нулю и обращается в бесконечность соответственно на гиперболах $\tau^2 - \sigma^2 = -a^2$ и $\tau^2 - \sigma^2 = a^2$ и имеет разный знак по разные стороны гипербол. Таким образом, стереографические координаты пробегают всю плоскость $-\infty < \tau, \sigma < \infty$ за исключением четырех ветвей гипербол.

На гиперболах $\tau^2 - \sigma^2 = -a^2$ из формул преобразования координат (12.33) следуют равенства $t = \tau$ и $x = \sigma$, и, следовательно, $t^2 - x^2 = -a^2$. То есть гиперболы $\tau^2 - \sigma^2 = -a^2$ соответствует сечениям гиперboloида плоскостью $y = 0$.

Отображение однополостного гиперboloида на плоскость τ, σ показано на рис. 12.5. Для наглядности изображен гиперboloид конечной высоты. Мы предполагаем, что его верхняя и нижняя граничные окружности бесконечно удалены. Также для наглядности мы сжали плоскость τ, σ вдоль светоподобных направлений

$$\xi = \tau + \sigma, \quad \eta = \tau - \sigma, \quad (12.34)$$

и изобразили ее в виде квадрата. Этого можно добиться с помощью невырожденной замены координат, например,

$$\xi \mapsto \operatorname{arctg} \xi, \quad \eta \mapsto \operatorname{arctg} \eta.$$

Мы также приняли следующие обозначения. Закрашенные черным кружки обозначают точки, находящиеся на бесконечном расстоянии, а полые – на конечном. Точке $t = x = 0$, $y = -a$, из которой ведется проектирование, соответствуют четыре незакрашенные вершины квадрата. Кривые между выделенными точками на гиперboloиде и их образы обозначены одинаковыми цифрами. Стрелки показывают выбранную ориентацию кривых.

При отображении на плоскость τ, σ весь гиперboloид разбивается на три области, ограниченные кривыми (1,5,3,2,6,4), (2,5,4) и (1,6,3). То есть гиперboloид разрезается вдоль двух прямых $t = \pm x$, $y = -a$. Центральной точке $t = x = 0$, $y = -a$ при стереографической проекции соответствуют четыре точки – вершины квадрата – и их необходимо отождествить. Проще всего проследить отображение областей, рассмотрев отображение их границ. Область, ограниченная кривыми (1,5,3,2,6,4) отображается на среднюю часть плоскости τ, σ между гиперболами $\tau^2 - \sigma^2 = a^2$. Области, ограниченные кривыми (2,5,4) и (1,6,3), отображаются соответственно в области на плоскости τ, σ , расположенные ниже гиперболы $\tau = -\sqrt{a^2 + \sigma^2}$ и выше гиперболы $\tau = \sqrt{a^2 + \sigma^2}$.

Каждая точка гиперboloида из областей (1,5,3,2,6,4), (2,5,4) и (1,6,3) имеет единственные стереографические координаты. При этом две светоподобные прямые $t^2 = x^2$, $y = -a$ (линии 3,4 и 5,6 на рис. 12.5) отображаются в бесконечность на плоскости τ, σ . Точки прямых $t^2 = x^2$, $y = -a$ лежат на конечном расстоянии, и поэтому стороны квадрата на плоскости τ, σ нарисованы пунктиром. Напротив, бесконечно удаленная граница гиперboloида отображается на гиперболы $\tau^2 - \sigma^2 = a^2$, и поэтому нарисованы жирной сплошной линией.

Противоположные стороны квадрата на τ, σ плоскости лежат на конечном расстоянии и отображаются в одну прямую на гиперboloиде. Это означает, что их необходимо отождествить (за исключением бесконечно удаленных точек $\xi = 0$, $\eta = \pm\infty$ и $\xi = \pm\infty$, $\eta = 0$).

Чтобы получить метрику однополостного гиперboloида в стереографических координатах, сначала запишем ее в координатах t, x . Это легко сделать путем исключения координаты y из метрики Лоренца (12.11) с помощью уравнения (12.25). В результате метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{(a^2 - x^2)dt^2 + 2tx dt dx - (a^2 + t^2) dx^2}{a^2 + t^2 - x^2}. \quad (12.35)$$

Рис. 12.5. Стереографические координаты на однополостном гиперboloиде. Центральная проекция гиперboloида с координатами t, x (a). Стереографические координаты τ, σ (b).

Подставив сюда выражения для дифференциалов из формул преобразования координат (12.33), мы получим, что в стереографических координатах метрика однополостного гиперboloида является вейлевски лоренцевой:

$$ds^2 = \frac{4}{\left(1 - \frac{\tau^2 - \sigma^2}{a^2}\right)^2} (d\tau^2 - d\sigma^2). \quad (12.36)$$

В светоподобных координатах (12.34) метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{4}{\left(1 - \xi\eta/a^2\right)^2} d\xi d\eta. \quad (12.37)$$

Произведем еще одну замену координат так, чтобы интервал зависел только от времениподобной координаты. В этой системе координат двумерное пространство-время является однородным и анализ экстремалей значительно упрощается. Сначала с помощью дробно линейного преобразования преобразуем светоподобные координаты $\xi, \eta \mapsto u, v$:

$$\xi := a \frac{u+a}{u-a}, \quad \eta := a \frac{v+a}{v-a}. \quad (12.38)$$

На рис. 12.6 показан однополостный гиперboloид в новых координатах. Цифрами обозначены образы соответствующих кривых на рис. 12.5. Ось абсцисс нарисована жирной линией, что означает ее полноту (бесконечную удаленность). Верхняя и нижняя вершины квадрата также лежат на бесконечном расстоянии и показаны закрашенными кружками. Противоположные стороны квадрата (за исключением вершин) лежат на конечном расстоянии и показаны пунктиром. Их необходимо отождествить, т.к. они соответствуют одним и тем же точкам гиперboloида. Все четыре вершины квадрата также отождествляются. Центральная точка стереографической проекции $t = x = 0, y = -a$ (четыре вершины квадрата на рис. 12.5,b) отображается в точку $u = v = a$. Следуя стрелкам, легко проследить отображение областей (1,5,3,2,6,4), (2,5,4) и (1,6,3).

Рис. 12.6. Координаты на однополостном гиперболоиде, в которых метрика зависит только от времени.

Из формул преобразования координат (12.38) вытекают формулы преобразования дифференциалов:

$$d\xi = -2a^2 \frac{du}{(u-a)^2},$$

$$d\eta = -2a^2 \frac{dv}{(v-a)^2}.$$

Якобиан преобразования координат сингулярен на линиях $u = a$ и $v = a$:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = \frac{4a^2}{(u-a)^2(v-a)^2}.$$

В новых светоподобных координатах интервал принимает вид

$$ds^2 = \frac{4a^2}{(u+v)^2} du dv. \quad (12.39)$$

Теперь снова введем временную T и пространственную X координаты с помощью соотношений:

$$u := T + X, \quad v := T - X.$$

Тогда метрика однополостного гиперболоида примет вид

$$ds^2 = \frac{a^2}{T^2} (dT^2 - dX^2). \quad (12.40)$$

Она является вейлевски лоренцевой, а соответствующее пространство – однородным.

При решении уравнений движения в различных моделях гравитации мы получаем для метрики некоторое выражение, например, формулу (12.36) или (12.40). То есть мы имеем плоскость τ, σ или T, X с заданной на ней метрикой. Восстановить по этой метрике глобальную структуру пространства-времени (однополостный гиперболоид) довольно сложно, но можно. В разделе 13 будет описан общий подход к этой проблеме, основанный на анализе экстремалей. Если окажется, что экстремали для найденного решения уравнений движения неполны, то решение необходимо продолжить и восстановить глобальную структуру. Это можно сделать с помощью метода конформных блоков. Процедура восстановления поверхности по виду метрики, допускающей один вектор Киллинга, конструктивна, и в результате возникает диаграмма Картера–Пенроуза, представляющая глобальную структуру пространства-времени.

12.4. Уравнение Лиувилля

Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y или, что эквивалентно, комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с координатами $z := x + iy$ и $\bar{z} := x - iy$. Пусть задана вещественнозначная достаточно гладкая функция $\phi(z, \bar{z})$. Тогда *уравнением Лиувилля* для функции ϕ называется нелинейное уравнение второго порядка в частных производных

$$\Delta\phi + K e^{2\phi} = 0, \quad K = \text{const}, \quad (12.41)$$

где $\Delta := 4\partial_{z\bar{z}}^2$ – оператор Лапласа.

Уравнение Лиувилля часто встречается в моделях математической физики и является одним из немногих нелинейных явно интегрируемых уравнений.

ТЕОРЕМА 12.4.1. *Общее решение уравнения Лиувилля в односвязной области имеет вид*

$$e^{2\phi} = \frac{4F'\bar{F}'}{(aF\bar{F} + bF + \bar{b}\bar{F} + d)^2}, \quad (12.42)$$

где $F = F(z)$ – произвольная голоморфная функция, введены обозначения:

$$F' := \partial_z F, \quad \bar{F} := \bar{F}(\bar{z}), \quad \bar{F}' := \partial_{\bar{z}} \bar{F},$$

и произвольные постоянные $a, d \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{C}$ удовлетворяют одному условию

$$ad - b\bar{b} = K. \quad (12.43)$$

При этом, если $K = 0$, то по крайней мере одна из постоянных a, b , или d должна быть отлична от нуля. Мы также предполагаем, что $F' \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [117].

Таким образом, произвольное решение уравнения Лиувилля параметризуется одной голоморфной функцией $F(z)$, двумя вещественными (a, d) и одной комплексной (b) постоянными, на которые наложено одно условие (12.42).

Если задана поверхность $\mathbb{M}$ с римановой метрикой $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{M})$, то согласно теореме 11.3.1 локально существует изотермическая система координат, в которой метрика является вейлевски евклидовой:

$$ds^2 = e^{2\phi} dz d\bar{z}.$$

Если поверхность имеет постоянную кривизну, то ее гауссова кривизна также постоянна, $K = \text{const}$. Это условие в изотермических координатах сводится к уравнению Лиувилля (12.41) (см. раздел 11.3.2). Отсюда вытекает следующая

ТЕОРЕМА 12.4.2. *Любая поверхность с римановой метрикой $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{M})$ постоянной кривизны локально изометрична сфере $\mathbb{S}^2$ ($K > 0$), евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ ($K = 0$) или двуполостному гиперболоиду $\mathbb{H}^2$ ($K < 0$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При умножении метрики на положительную постоянную k , $g_{\alpha\beta} \mapsto kg_{\alpha\beta}$, гауссова кривизна делится на ту же постоянную, $K \mapsto K/k$. Поэтому достаточно рассмотреть три случая $K = 1, 0, -1$. Выберем произвольную точку на поверхности. Тогда в некоторой окрестности этой точки существуют изотермические координаты. Следовательно, для конформного множителя возникнет уравнение Лиувилля. Рассмотрим три случая.

$K = 1$. Положим в общем решении уравнения Лиувилля

$$d = 1, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad F = z.$$

Тогда решение (12.42) примет вид

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + z\bar{z})^2} dz d\bar{z}.$$

Это – метрика сферы единичного радиуса (12.10).

$K = 0$. Положим

$$d = 1, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad F = z/2.$$

Тогда получим евклидову метрику $ds^2 = dz d\bar{z}$.

$K = -1$. Положим

$$d = 1, \quad a = -1, \quad b = 0, \quad F = z.$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - z\bar{z})^2} dz d\bar{z}.$$

Это – метрика (12.24) двуполостного гиперболоида единичного “радиуса” в комплексных координатах.

СЛЕДСТВИЕ. Риманова метрика поверхности постоянной кривизны бесконечно дифференцируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $F(z)$ голоморфна, то функция (12.42) бесконечно дифференцируема.

Доказанная теорема локальна. Каждая поверхность имеет единственную с точностью до диффеоморфизма универсальную накрывающую поверхность. Поскольку поверхности $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{H}^2$ связны и односвязны, то они являются универсальными накрывающими поверхностями для всех поверхностей соответственно положительной, нулевой и отрицательной кривизны. Кроме того, они полны, т.е. любую экстремаль можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны. Чтобы найти все полные поверхности постоянной кривизны, для поверхностей $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{H}^2$ необходимо найти все группы преобразований $\mathbb{G}$, действующие собственноразрывно и свободно. Тогда все полные поверхности постоянной кривизны будут являться фактор-пространствами $\tilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$, где $\tilde{\mathbb{M}} = \mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2$.

Теперь рассмотрим уравнение Лиувилля на плоскости Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$. Обозначим декартовы координаты через t, x . Введем также конусные координаты

$$u := t + x, \quad v := t - x.$$

Тогда аналогом уравнения Лиувилля (12.41) будет являться нелинейное уравнение в частных производных

$$\square\phi + Ke^{2\phi} = 0, \quad K = \text{const.} \quad (12.44)$$

где $\square := 4\partial_{uv}^2$ – оператор Даламбера на плоскости Минковского. Это уравнение также будем называть *уравнением Лиувилля*.

Уравнение Лиувилля на плоскости Минковского также явно интегрируется. Его общее решение имеет вид

$$e^{2\phi} = \frac{4F'G'}{(aFG + bF + cG + d)^2}, \quad (12.45)$$

где $F = F(u)$ и $G = G(v)$ – произвольные дифференцируемые монотонные функции от светоподобных координат u и v соответственно, $F'G' \neq 0$. Четыре вещественные постоянные a, b, c и d , должны удовлетворять одному условию

$$ad - bc = K. \quad (12.46)$$

Если $K = 0$, то хотя бы одна из постоянных a, b, c или d должна быть отлична от нуля.

Рассмотрим псевдориманову поверхность. Пусть метрика дважды непрерывно дифференцируема. Тогда согласно теореме 11.3.2 в некоторой окрестности произвольной точки поверхности существует система координат, в которой метрика является вейлевски лоренцевой (11.46). Если поверхность имеет постоянную кривизну, то для конформного множителя возникает уравнение Лиувилля (11.60).

ТЕОРЕМА 12.4.3. *Любая псевдориманова поверхность с метрикой $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$ постоянной кривизны локально изометрична однополостному гиперboloиду $\mathbb{L}^2$ ($K \neq 0$) или плоскости Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ ($K = 0$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для лоренцевых поверхностей изменение знака метрики меняет знак гауссовой кривизны. С другой стороны, это эквивалентно перестановке местами времени и пространства. Поэтому можно не различать псевдоримановы поверхности положительной и отрицательной кривизны. Так же, как и для римановых поверхностей метрику можно умножить на положительную постоянную. Следовательно, достаточно рассмотреть два случая $K = 1$ и $K = 0$.

$K = 1$. Положим в решении уравнения Лиувилля

$$d = 1, \quad a = 1, \quad b = c = 0, \quad F = u, \quad G = v.$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + uv)^2} du dv.$$

Это – метрика однополостного гиперboloида (12.37) единичного “радиуса” (с точностью до замены общего знака метрики).

$K = 0$. Положим

$$d = 1, \quad a = 0, \quad b = c = 0, \quad F = u/2, \quad G = v/2.$$

Тогда получим метрику Лоренца $ds^2 = dudv$.

Доказанная теорема локальна. Как и в случае римановых поверхностей любая полная псевдориманова поверхность является фактор пространством $\tilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$, где $\tilde{\mathbb{M}} = \mathbb{L}^2, \mathbb{R}^{1,1}$ для поверхностей соответственно ненулевой и нулевой гауссовой кривизны, а $\mathbb{G}$ – группа преобразований, действующая собственно разрывно и свободно.

Произвольные функции $F(u)$ и $G(v)$, входящие в решение (12.45) уравнения Лиувилля, соответствуют конформным преобразованиям светоподобных координат (11.52), в которых метрика является вейлевски лоренцевой. Поскольку $F' \neq 0$ и $G' \neq 0$, то всегда можно совершить конформное преобразование координат $u, v \mapsto F, G$, в которых метрика примет вид

$$ds^2 = e^{2\phi} du dv = \frac{4 dF dG}{(aFG + bF + cG + d)^2}. \quad (12.47)$$

Область определения решения уравнения Лиувилля (12.45) зависит от выбора функций F и G , а также от значения постоянных a, b, c и d .

При $K > 0$, положим в решении (12.45)

$$F = u, \quad G = v, \quad a = d = 0, \quad b = -c = \sqrt{K}.$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{4 du dv}{K(u - v)^2} = \frac{1}{K} \frac{dt^2 - dx^2}{x^2}. \quad (12.48)$$

Эта метрика определена либо в правой, $x > 0$, либо в левой, $x < 0$, полуплоскости.

Аналогично, при $K < 0$ положим

$$F = u, \quad G = v, \quad a = d = 0, \quad b = c = \sqrt{|K|}.$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{4 du dv}{|K|(u+v)^2} = \frac{1}{|K|} \frac{dt^2 - dx^2}{t^2}. \quad (12.49)$$

В таком виде метрика определена в верхней, $t > 0$, или нижней, $t < 0$, полуплоскости. Она уже была получена ранее (12.40).

Два последних выражения для метрики связаны между собой перестановкой координат $t \leftrightarrow x$ и изменением знака метрики $g_{\alpha\beta} \rightarrow -g_{\alpha\beta}$. Это означает, что поверхности постоянной положительной и отрицательной кривизны, как уже отмечалось, в случае псевдоримановой метрики эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Модели математической физики, как правило, помимо метрики включают также другие поля. Поэтому может случиться так, что суммарное действие для всех полей не будет инвариантно относительно изменения знака метрики. В этом случае знак гауссовой кривизны является существенным.

При любом значении гауссовой кривизны K мы можем положить

$$F = \frac{u}{2}, \quad G = \frac{v}{2}, \quad a = K, \quad d = 1, \quad b = c = 0.$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{du dv}{(1 + \frac{K}{4}uv)^2}.$$

Эта метрика определена на всей плоскости за исключением двух ветвей гиперболы $uv = -4/K$.

Положим $F = u$ и $G = v$ в общем решении уравнения Лиувилля (12.45). Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{4 du dv}{(auv + bu + cv + d)^2}. \quad (12.50)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.4.1. При дробно линейном преобразовании светоподобных координат

$$u \mapsto u' := \frac{\alpha_1 u + \beta_1}{\gamma_1 u + \delta_1}, \quad v \mapsto v' := \frac{\alpha_2 v + \beta_2}{\gamma_2 v + \delta_2}, \quad (12.51)$$

где $\alpha_1, \dots, \delta_1, \alpha_2, \dots, \delta_2$ — некоторые постоянные, такие что $\det_1 := \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 \neq 0$ и $\det_2 := \alpha_2 \delta_2 - \beta_2 \gamma_2 \neq 0$, метрика (12.50) принимает вид

$$ds^2 = \frac{4 \det_1 \det_2 du' dv'}{(a'u'v' + b'u' + c'v' + d')^2}, \quad (12.52)$$

где

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha_1\alpha_2 + b\alpha_1\gamma_2 + c\gamma_1\alpha_2 + d\gamma_1\gamma_2, \\ b' &= a\alpha_1\beta_2 + b\alpha_1\delta_2 + c\gamma_1\beta_2 + d\gamma_1\delta_2, \\ c' &= a\beta_1\alpha_2 + b\beta_1\gamma_2 + c\delta_1\alpha_2 + d\delta_1\gamma_2, \\ d' &= a\beta_1\beta_2 + b\beta_1\delta_2 + c\delta_1\beta_2 + d\delta_1\delta_2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямые вычисления.

Дробно линейные преобразования (12.51) образуют подгруппу группы конформных преобразований координат (11.52). Если $\det_1 = \det_2 = 1$, то соответствующие дробно линейные преобразования образуют подгруппу (модулярная группа), которая сохраняет вид метрики (12.50). Эти преобразования можно использовать для фиксирования некоторых постоянных из a , b , c и d .

13. Лоренцевы поверхности с одним вектором Киллинга

Перед тем, как приступить к построению глобальных решений в моделях гравитации, дадим определение, что значит “продолжение решения”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим два (псевдо)римановых многообразия (M_1, g_1) и (M, g) одинаковой размерности с метриками g_1 и g соответственно. Пусть задано вложение $M_1 \xrightarrow{f_1} M$. Отображение дифференциальных форм индуцирует на многообразии M_1 метрику f_1^*g . Если индуцированная метрика совпадает с исходной, $f_1^*g = g_1$, то мы говорим, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) является *продолжением* (псевдо)риманова многообразия (M_1, g_1) .

Пусть задано еще одно (псевдо)риманово многообразие (M_2, g_2) той же размерности и вложение $M_2 \xrightarrow{f_2} M$. Пусть также $f_2^*g = g_2$. Если

$$M = \overline{f_1(M_1)} \cup \overline{f_2(M_2)} \quad \text{и} \quad f_1(M_1) \cap f_2(M_2) = \emptyset,$$

где черта обозначает замыкание в топологии M , то мы говорим, что (псевдо)римановы многообразия (M_1, g_1) и (M_2, g_2) *склеены вдоль* $f_1(M_1) \cap f_2(M_2)$.

Данное определение продолжения (псевдо)римановых многообразий аналогично определению сужения и продолжения функции. Разница заключается лишь в том, что при отображении вложения метрика преобразуется нетривиально.

Ясно, что продолжений (псевдо)римановых многообразий существует бесконечно много. В общей теории относительности метрика ищется как решение уравнений Эйнштейна. Поэтому мы требуем дополнительно, чтобы при продолжении и метрика g_1 на M_1 , и метрика g на M удовлетворяли одним и тем же уравнениям Эйнштейна. В этом случае мы говорим о продолжении решений уравнений Эйнштейна. Допустим, что решения уравнений Эйнштейна единственны в том смысле, что если две метрики g_1 и g_2 , определенные в некоторой области $U \subset M$, удовлетворяют уравнениям Эйнштейна и совпадают в некоторой подобласти $V \subset U$, то они совпадают на всем U . В этом случае продолжение решений уравнений Эйнштейна является единственным. Такое продолжение аналогично аналитическому продолжению функций на комплексной плоскости. Поэтому часто говорят об аналитическом продолжении решений уравнений Эйнштейна. Однако даже аналитическое продолжение функций на неодносвязном двумерном многообразии является неоднозначной операцией.

Поскольку среди уравнений Эйнштейна есть гиперболические, то ожидать однозначности решений в указанном выше смысле не приходится. Насколько известно автору, в настоящее время единственность *статических* решений уравнений Эйнштейна не доказана даже для односвязных многообразий. В то же время не известно ни одного примера неоднозначности статических решений. Поэтому термин “аналитическое продолжение” следует употреблять с большой осторожностью.

Теперь возникает вопрос о том, до каких пор следует продолжать найденное решение уравнений Эйнштейна? Ответ на данный вопрос однозначен: решение необходимо продолжить настолько, на сколько это возможно. Критерием здесь является полнота геодезических (экстремалей).

Согласно общим теоремам о единственности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений через каждую точку (псевдо)риманова многообразия (M, g) в данном

направлении проходит одна и только одна геодезическая (экстремаль). Поэтому при склейке двух многообразий задается канонический способ продолжения геодезических многообразия (M_1, g_1) в геодезические многообразия (M_2, g_2) . Поэтому можно говорить, что решение уравнений Эйнштейна продолжается вдоль геодезических. Конечно, и в этом случае единственность продолжения определяется единственностью решений уравнений Эйнштейна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара (M, g) , где M – многообразие и g – заданная на нем метрика, называется *глобальным решением* в данной модели гравитации, если метрика удовлетворяет соответствующим уравнениям движения на M , а само многообразие M является максимально продолженным.

Напомним, что максимальное продолжение означает, что любую экстремаль (геодезическую) можно либо продолжить в обе стороны до бесконечного значения канонического параметра, либо при конечном значении канонического параметра она попадает в сингулярную точку, где один из геометрических инвариантов становится сингулярным. Это определение инвариантно и не зависит от выбора системы отсчета, т.к. канонический параметр инвариантен относительно общих преобразований координат и определен с точностью до линейного преобразования.

ПРИМЕР 13.0.1. Нетривиальным глобальным решением в общей теории относительности является расширение Крускала–Секереша [118, 119] решения Шварцшильда [120] (независимо найденного также Дросте [121, 122, 123]) (см. главу 17). В этом случае четырехмерное пространство-время представляет собой топологическое произведение сферы S^2 на псевдориманову поверхность с одним вектором Киллинга, которая обычно изображается в виде диаграммы Картера–Пенроуза и будет описана в настоящем разделе.

В настоящей главе развит конструктивный метод конформных блоков построения глобальных решений (M, g) для двумерных метрик лоренцевой сигнатуры специального вида, обладающих одним вектором Киллинга.

Необходимость построения глобальных решений, т.е. одновременного построения и самих многообразий и заданных на них метрик, связана с инвариантностью моделей гравитации относительно общих преобразований координат. Действительно, для решения уравнений движения, как правило, фиксируется некоторая система координат, что уменьшает число искомых функций. Но, с другой стороны, фиксирование системы отсчета означает, что, за исключением тривиальных случаев, найденное решение является только локальным и представляет собой, как правило, только часть некоторого большего пространства-времени. Отметим также, что только глобальная структура многообразия позволяет дать физическую интерпретацию решений уравнений движения для метрики.

Построение глобальных решений в гравитации является трудной задачей, поскольку, помимо решения уравнений движения, что само по себе сложно, предполагает решение уравнений для экстремалей, анализ их полноты и продолжения многообразия, если оно оказалось неполным. В общей теории относительности из-за сложности уравнений движения известно лишь небольшое число глобальных решений. Некоторые из них будут описаны в главе 16. В двумерных моделях гравитации ситуация проще и удалось построить все глобальные решения [116] в двумерной гравитации с кручением [124], а также в широком классе моделей дилатонной гравитации [125, 126, 127]. Конструктивный метод конформных блоков построения глобальных решений для псевдоримановых поверхностей был предложен в [116] для двумерной гравитации с кручением в конформной калибровке. Для поверхностей с римановой метрикой метод конформных блоков был развит в статье [128].

ЗАМЕЧАНИЕ. В настоящей главе мы рассматриваем продолжение решений только вдоль экстремалей. В аффинной геометрии с кручением и неметричностью геодезические и экстремали в общем случае различны. Поэтому имеет смысл рассматривать максимальное продолжение многообразий как вдоль экстремалей, так и вдоль геодезических. Если геодезические и экстремали совпадают как, например, в общей теории относительности, то продолжение решения вдоль экстремалей автоматически влечет за собой продолжение вдоль геодезических.

13.1. Локальный вид лоренцевой метрики

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами $\{\zeta^\alpha\} = (\tau, \sigma)$, $\alpha = 0, 1$. Пусть в некоторой области на плоскости задана метрика лоренцевой сигнатуры, которая имеет вейлевски плоский вид

$$ds^2 = |\Phi(q)|(d\tau^2 - d\sigma^2). \quad (13.1)$$

Будем считать, что конформный множитель $\Phi(q) \in \mathcal{C}^l$, $l \geq 2$, является l раз непрерывно дифференцируемой функцией одного аргумента $q \in \mathbb{R}$ за исключением конечного числа степенных особенностей и нулей. Этого достаточно для того, чтобы компоненты метрики (13.1) могли удовлетворять некоторой системе уравнений второго порядка вне особых точек. Пусть аргумент q зависит только от одной из координат, τ или σ , и эта связь задается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\left| \frac{dq}{d\zeta} \right| = \pm \Phi(q), \quad (13.2)$$

где выполняется следующее правило знаков:

$$\begin{aligned} \Phi > 0 : \quad \zeta &= \sigma, & \text{знак } + & \text{(статическое локальное решение),} \\ \Phi < 0 : \quad \zeta &= \tau, & \text{знак } - & \text{(однородное локальное решение).} \end{aligned} \quad (13.3)$$

На первый взгляд двумерная метрика (13.1)–(13.3) имеет очень специфический вид. Однако, это – метрика достаточно общего вида. В дальнейшем будет показано, что некоторые модели гравитации при решении полной системы уравнений движения приводят к двумерной метрике вида (13.1). Например, при отыскании сферически симметричных вакуумных решений уравнений Эйнштейна в четырехмерном пространстве-времени (см. следующую главу), метрика (13.1) возникает на двумерных поверхностях, точки которых параметризуются временем и радиусом. Метрика вида (13.1) возникает также при решении уравнений движения двумерной гравитации. По этой причине в настоящей главе мы будем, для краткости, называть метрику вида (13.1) просто локальным решением.

Мы допускаем, что конформный множитель метрики (13.1) может обращаться в нуль и иметь особенности в конечном числе точек, которые мы пронумеруем в порядке возрастания: q_i , $i = 1, \dots, k$. В эту последовательность включены также бесконечно удаленные точки $q_1 = -\infty$ и $q_k = \infty$. Будем считать, что вблизи каждой точки q_i конформный множитель ведет себя степенным образом:

$$|q_i| < \infty : \quad \Phi(q) \sim (q - q_i)^m, \quad (13.4)$$

$$|q_i| = \infty : \quad \Phi(q) \sim q^m. \quad (13.5)$$

При конечных значениях q_i показатель степени не равен нулю, $m \neq 0$, т.к. конформный множитель в этой точке, по предположению, либо равен нулю, либо сингулярен.

Строго говоря, показатель m различен для различных точек, и мы должны были бы писать m_i , а не просто m . Однако эта упрощенная запись не приводит к недоразумениям, поскольку

при анализе полноты экстремалей будет рассматриваться одна конкретная точка q_i . Показатель степени m может быть любым вещественным числом, для которого правые части (13.4), (13.5) определены.

В промежутках между нулями и особенностями, где функция Φ или положительна, или отрицательна, локальное решение соответственно статично с вектором Киллинга $K = \partial_\tau$ или однородно с вектором Киллинга $K = \partial_\sigma$. Квадрат длины вектора Киллинга в обоих случаях равен конформному множителю, $K^2 = \Phi$. На горизонтах, которые, как будет показано ниже, соответствуют нулям конформного множителя, $\Phi(q) = 0$, вектор Киллинга является светоподобным. При этом он отличен от нуля, что будет продемонстрировано в координатах Эддингтона–Финкельштейна (см. раздел 13.6).

При конформных преобразованиях вид метрики (13.1), (13.2) меняется, т.к. переменная q становится зависящей от обеих координат на плоскости. При растяжке координат $\zeta \mapsto \tilde{\zeta} = k\zeta$, $k = \text{const} \neq 0$, которые образуют подгруппу группы конформных преобразований, метрика сохраняет свой вид с $\tilde{q} = k^{-1}q$, $\tilde{\Phi} = k^{-2}\Phi$.

По сути дела, формулы (13.1), (13.2) задают четыре различные метрики: из-за наличия знака модуля у производной в (13.2) есть две области со статической метрикой и две области с однородной метрикой, отличающиеся знаком производной $dq/d\zeta$. Будем обозначать эти области римскими цифрами:

$$\begin{aligned} \text{I :} & \quad \Phi > 0, & dq/d\sigma > 0, \\ \text{II :} & \quad \Phi < 0, & dq/d\tau < 0, \\ \text{III :} & \quad \Phi > 0, & dq/d\sigma < 0, \\ \text{IV :} & \quad \Phi < 0, & dq/d\tau > 0. \end{aligned} \tag{13.6}$$

Порядок следования областей будет ясен из дальнейшего построения.

Статическое локальное решение в области III получается из локального решения в области I пространственным отражением $\sigma \rightarrow -\sigma$, а однородное локальное решение в области IV связано с локальным решением в области II обращением времени $\tau \rightarrow -\tau$. Поскольку изменение знака конформного множителя у метрики можно компенсировать перестановкой пространственной и временной координаты $\tau \leftrightarrow \sigma$, то однородные локальные решения в областях II и IV можно получить из стационарных локальных решений для конформного множителя $-\Phi$ в областях III и I с последующим поворотом плоскости τ, σ на угол $\pi/2$ по часовой стрелке.

ПРИМЕР 13.1.1. Рассмотрим t, r компоненты метрики Шварцшильда вне горизонта при $r > 2M > 0$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}}.$$

Эту двумерную метрику можно записать в вейлевски плоском виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 - d\sigma^2),$$

преобразовав радиальную координату $r = r(\sigma)$, где функция $r(\sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\left| \frac{dr}{d\sigma} \right| = 1 - \frac{2M}{r}.$$

Это – статические области I, III. Здесь роль параметра q играет радиус r .

Если координата r лежит в интервале $0 < r < 2M$, то ее следует назвать временем, т.е. произвести замену $r \leftrightarrow t$. Следовательно, при $0 < t < 2M$ (под горизонтом) метрика Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{1 - \frac{2M}{t}} + \left(1 - \frac{2M}{t}\right) dr^2.$$

Ее также можно записать в вейлевски плоском виде

$$ds^2 = \left|1 - \frac{2M}{t}\right| (d\tau^2 - dr^2),$$

где

$$\left|\frac{dt}{d\tau}\right| = -\left(1 - \frac{2M}{t}\right).$$

Таким образом мы получили однородную метрику в областях II, IV. В этом случае роль параметра q играет параметр t .

Как видим, двумерная t, r часть метрики Шварцшильда в точности имеет вид (13.1) с конформным множителем

$$\Phi(q) = 1 - \frac{2M}{q}, \quad (13.7)$$

где $q = r, t$. Конформный множитель $\Phi(q)$ для метрики Шварцшильда имеет простой полюс при $q = 0$ и простой нуль (горизонт) в точке $q = 2M$.

Для метрики (13.1) в областях I и III можно перейти к координатам τ, q , в которых метрика примет вид

$$ds^2 = \Phi(q) d\tau^2 - \frac{dq^2}{\Phi(q)}.$$

В областях II и IV можно перейти к координатам q, σ :

$$ds^2 = -\frac{dq^2}{\Phi(q)} + \Phi(q) d\sigma^2.$$

Координаты τ, q в областях I, III и q, σ в областях II, IV называются *координатами Шварцшильда*. Метрика в этих координатах имеет простой вид, причем все компоненты метрики заданы явно. Недостатком координат Шварцшильда является то, что они не различают между собой области I и III, а также II и IV. Это существенно, потому что для построения глобальных решений необходимо использовать все области.

Перейдем к вычислению геометрических объектов для метрики (13.1). Символы Кристоффеля имеют различный вид в различных областях. Ниже приведены явные выражения только для ненулевых компонент:

$$\text{I: } \Gamma_{\tau\tau}^{\sigma} = \Gamma_{\tau\sigma}^{\tau} = \Gamma_{\sigma\tau}^{\tau} = \Gamma_{\sigma\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{2}\Phi', \quad (13.8)$$

$$\text{II: } \Gamma_{\tau\tau}^{\tau} = \Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} = \Gamma_{\sigma\tau}^{\sigma} = \Gamma_{\sigma\sigma}^{\tau} = \frac{1}{2}\Phi', \quad (13.9)$$

$$\text{III: } \Gamma_{\tau\tau}^{\sigma} = \Gamma_{\tau\sigma}^{\tau} = \Gamma_{\sigma\tau}^{\tau} = \Gamma_{\sigma\sigma}^{\sigma} = -\frac{1}{2}\Phi', \quad (13.10)$$

$$\text{IV: } \Gamma_{\tau\tau}^{\tau} = \Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} = \Gamma_{\sigma\tau}^{\sigma} = \Gamma_{\sigma\sigma}^{\tau} = -\frac{1}{2}\Phi', \quad (13.11)$$

где штрих обозначает производную по q . В статичных областях отличны от нуля символы Кристоффеля с нечетным числом пространственных индексов, а в однородных областях – с нечетным числом временных индексов. В статичных и однородных областях символы Кристоффеля отличаются знаком. Это является следствием того, что однотипные области связаны преобразованием $\zeta \rightarrow -\zeta$, а символы Кристоффеля линейны по производным. У тензора кривизны в каждой области отличны от нуля только четыре компоненты:

$$\text{I, III: } R_{\tau\sigma\tau}{}^{\sigma} = -R_{\sigma\tau\tau}{}^{\sigma} = R_{\tau\sigma\sigma}{}^{\tau} = -R_{\sigma\tau\sigma}{}^{\tau} = -\frac{1}{2}\Phi''\Phi, \quad (13.12)$$

$$\text{II, IV: } R_{\tau\sigma\tau}{}^{\sigma} = -R_{\sigma\tau\tau}{}^{\sigma} = R_{\tau\sigma\sigma}{}^{\tau} = -R_{\sigma\tau\sigma}{}^{\tau} = \frac{1}{2}\Phi''\Phi. \quad (13.13)$$

Тензор Риччи диагонален:

$$\text{I, III: } R_{\tau\tau} = -R_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2}\Phi''\Phi, \quad (13.14)$$

$$\text{II, IV: } R_{\tau\tau} = -R_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2}\Phi''\Phi. \quad (13.15)$$

При этом во всех четырех областях скалярная кривизна одинакова,

$$\text{I, II, III, IV: } R = -\Phi''. \quad (13.16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При заданном конформном множителе Φ это алгебраическое уравнение связывает q с R . Отсюда вытекает, что функция $q = q(\tau, \sigma)$, так же как и скалярная кривизна, может рассматриваться, как функция на плоскости. В той области, где уравнение (13.16) разрешимо относительно q в качестве одной из координат можно выбрать скалярную кривизну R .

Максимальное продолжение многообразия означает, что, если у поверхности (пространства-времени) с метрикой (13.1) есть край, лежащий на конечном расстоянии, т.е. соответствующий конечному значению канонического параметра для экстремалей, то он может быть только сингулярным. В противном случае многообразие можно и необходимо продолжить.

Поскольку в двумерном случае все компоненты тензора кривизны определяются скалярной кривизной, то проанализируем ее поведение подробнее.

Сначала рассмотрим

ПРИМЕР 13.1.2. Из уравнения (13.16) вытекает, что для поверхностей постоянной кривизны, которые рассмотрены в разделе 13.5.5, конформный множитель представляет собой квадратичный полином:

$$\Phi(q) = -(aq^2 + bq + c), \quad a, b, c = \text{const}. \quad (13.17)$$

При этом $R = 2a$.

Из уравнения (13.16) следует, что скалярная кривизна сингулярна вблизи точки q_i при следующих показателях степени асимптотического поведения (13.4):

$$|q_i| < \infty : \quad m < 0, \quad 0 < m < 1, \quad 1 < m < 2, \quad (13.18)$$

$$|q_i| = \infty : \quad m > 2. \quad (13.19)$$

Отметим, что ненулевое значение кривизны в конечной точке $|q_i| < \infty$ может возникнуть и при $m = 1$ за счет поправок следующего порядка в разложении (13.4). При бесконечных значениях параметра, $q \rightarrow \pm\infty$, скалярная кривизна стремится к отличной от нуля постоянной при $m = 2$ и к нулю при $m < 2$.

13.2. Конформные блоки

При построении глобальных решений будет использовано понятие конформного блока, который ставится в соответствие каждому интервалу (q_i, q_{i+1}) . Внутри каждого интервала конформный множитель Φ либо строго положителен, либо строго отрицателен.

Сначала найдем область определения соответствующей метрики (13.1) на плоскости τ, σ . Для определенности, рассмотрим статическое локальное решение I на интервале (q_i, q_{i+1}) . Тогда временная координата пробегает всю числовую ось, $\tau \in \mathbb{R}$. Уравнение (13.2) для пространственной координаты σ принимает вид

$$\frac{dq}{d\sigma} = \Phi(q). \quad (13.20)$$

Постоянная интегрирования этого уравнения соответствует сдвигу пространственной координаты, $\sigma \mapsto \sigma + \text{const}$, т.е. выбору начала отсчета σ . Из уравнения (13.20) следует, что область изменения координаты σ зависит от сходимости интеграла

$$\sigma_{i,i+1} \sim \int^{q_i, q_{i+1}} \frac{dq}{\Phi(q)} \quad (13.21)$$

в граничных точках. Интеграл (13.21) сходится или расходится в зависимости от показателя степени m :

$$\begin{array}{lll} |q_i| < \infty : & \begin{cases} m < 1 & - \text{сходится,} & \text{прямая,} \\ m \geq 1 & - \text{расходится,} & \text{угол,} \end{cases} \\ |q_i| = \infty : & \begin{cases} m \leq 1 & - \text{расходится,} & \text{угол,} \\ m > 1 & - \text{сходится,} & \text{прямая.} \end{cases} \end{array} \quad (13.22)$$

В этой таблице справа указана форма границы соответствующих конформных блоков, которые будут введены ниже. Если на обоих концах интервала (q_i, q_{i+1}) интеграл расходится, то $\sigma \in (-\infty, \infty)$, и метрика определена на всей плоскости τ, σ . Если на одном из концов q_{i+1} или q_i интеграл сходится, то метрика определена на полуплоскости $\sigma \in (-\infty, \sigma_{i+1})$ или $\sigma \in (\sigma_i, \infty)$ соответственно. При этом выбор граничных точек σ_{i+1} и σ_i произволен, и, не ограничивая общности, можно положить $\sigma_{i,i+1} = 0$. Если на обоих концах интервала (q_i, q_{i+1}) интеграл сходится, то локальное решение определено в полосе $\sigma \in (\sigma_i, \sigma_{i+1})$, при этом совместить с началом координат можно только один из концов интервала.

Для наглядного изображения максимально продолженных решений введем понятие конформного блока. С этой целью отобразим плоскость τ, σ на квадрат вдоль светоподобных направлений:

$$\xi = \tau + \sigma, \quad \eta = \tau - \sigma. \quad (13.23)$$

Для этого произведем конформную замену переменных:

$$u = u(\xi), \quad v = v(\eta), \quad u, v \in \mathcal{C}^{l+1}, \quad (13.24)$$

где функции u и v ограничены на всей оси, а их первые производные положительны. Например, $u = \text{arctg } \xi$, $v = \text{arctg } \eta$. Предположение о классе гладкости функций перехода сохраняет класс гладкости метрики после преобразования координат. Тогда статическому локальному решению, определенному на всей плоскости τ, σ , будет поставлен в соответствие квадратный конформный блок, изображенный на рис. 13.1, а.

В общем случае под конформным блоком понимается конечная часть плоскости u, v и заданная на ней метрика (13.1) в координатах (13.23), (13.24). Если потребовать, чтобы экстремали подходили к границе конформного блока под всеми возможными углами, то это однозначно фиксирует асимптотическое поведение функций перехода (13.24) [116]. В остальном

Рис. 13.1. Конформные блоки для статических (a, b, c) и однородных (d, e, f) локальных решений. Края конформных блоков показаны пунктиром, а тонкие сплошные линии обозначают траектории Киллинга.

функции перехода остаются произвольными. Мы не будем останавливаться на этом вопросе подробно, т.к. гладкость метрики на горизонтах будет доказана путем перехода к координатам Эддингтона–Финкельштейна в разделе 13.6.

Значение переменной q и, значит, скалярной кривизны постоянно вдоль времениподобных траекторий Киллинга, которые внутри блока показаны тонкими сплошными линиями. Переменная q непрерывно меняется слева направо: монотонно возрастает в области I и монотонно убывает в области III. При этом на двух левых сторонах квадрата она принимает значение q_i , а на двух правых – значение q_{i+1} . Нижняя и верхняя вершины квадрата являются существенно особыми точками, т.к. в этих точках предел q зависит от пути, по которому произвольно выбранная последовательность подходит к вершине. Будем говорить, что у статического конформного блока есть две границы: левая и правая, на которых переменная q принимает значения q_i и q_{i+1} соответственно.

Если решение уравнения (13.20) определено на полуинтервале ($\sigma_i = 0, \sigma_{i+1} = \infty$), то статическому локальному решению ставится в соответствие треугольный конформный блок, пример которого показан на рис. 13.1, b . При этом конечной граничной точкой $\sigma_i = 0$ ставится в соответствие вертикальная прямая. Этого всегда можно добиться путем выбора функций $u(\xi)$ и $v(\eta)$.

В случае, когда решение уравнения (13.20) определено на конечном интервале (σ_i, σ_{i+1}), конформный блок изображается в виде линзы, изображенной на рис. 13.1, c . За счет выбора функций $u(\xi)$ и $v(\eta)$ левую или правую границу этого конформного блока можно сделать вертикальной, но не обе границы одновременно.

Напомним, что каждому статическому интервалу (q_i, q_{i+1}) ставится в соответствие два конформных блока, т.к. благодаря знаку модуля, уравнение (13.2) инвариантно относительно инверсии пространственной координаты $\sigma \leftrightarrow -\sigma$.

Аналогично каждому однородному локальному решению ставится в соответствие один из конформных блоков, изображенных на рис. 13.1, d, e, f , или перевернутый блок, полученный обращением времени $\tau \leftrightarrow -\tau$. Для этих конформных блоков переменная q постоянна вдоль пространственноподобных траекторий Киллинга и монотонно возрастает или убывает от значения q_i на нижней границе, до значения q_{i+1} на верхней границе. Левая и правая вершины однородных конформных блоков являются существенно особыми точками.

Конформные блоки для статических и однородных локальных решений будем называть соответственно статическими и однородными.

Итак, мы показали, что лоренцева поверхность, на которой задана конформно плоская метрика (13.1) на каждом интервале (q_i, q_{i+1}) диффеоморфна одному из конформных блоков. Для построения максимально продолженных решений необходимо найти и проанализировать экстремали на этих поверхностях, при необходимости продолжить многообразие и метрику, а

также доказать дифференцируемость метрики при склеивании конформных блоков. Использование конформных блоков для построения глобальных решений удобно и наглядно, т.к. все светоподобные экстремали изображаются в виде двух семейств прямых линий, проходящих под углом $\pm\pi/4$ к оси времени. Поэтому при продолжении поверхности конформные блоки можно склеивать вдоль ребер, сохраняя гладкость светоподобных экстремалей.

13.3. Экстремали

13.3.1. Форма экстремалей. Для того, чтобы понять, как устроено глобальное решение для метрики (13.1), необходимо проанализировать поведение экстремалей $\{\zeta^\alpha(t)\} = \{\tau(t), \sigma(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, которые подчиняются системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{\zeta}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{\zeta}^\beta \dot{\zeta}^\gamma, \quad (13.25)$$

где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру t и $\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha$ – символы Кристоффеля.

Исследуем подробно поведение экстремалей для статического локального решения в области

$$I: \quad ds^2 = \Phi(q)(d\tau^2 - d\sigma^2), \quad \frac{dq}{d\sigma} = \Phi(q) > 0. \quad (13.26)$$

Используя выражение для символов Кристоффеля (13.8), получаем уравнения для экстремалей

$$\ddot{\tau} = -\Phi' \dot{\tau} \dot{\sigma}, \quad (13.27)$$

$$\ddot{\sigma} = -\frac{1}{2}\Phi'(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2). \quad (13.28)$$

Эта система уравнений имеет два первых интеграла (см. раздел 3.3):

$$\Phi(\dot{\tau}^2 - \dot{\sigma}^2) = C_0 = \text{const}, \quad (13.29)$$

$$\Phi\dot{\tau} = C_1 = \text{const}. \quad (13.30)$$

Интеграл движения (13.29) существует для любой метрики, поскольку для параметризации экстремалей используется канонический параметр. Значение постоянной C_0 определяет тип экстремали:

- $C_0 > 0$ – времениподобные экстремали,
- $C_0 = 0$ – светоподобные экстремали,
- $C_0 < 0$ – пространственноподобные экстремали.

Отметим, что тип экстремали не может меняться от точки к точке. Второй из интегралов (13.30) связан с наличием вектора Киллинга, т.е. с симметрией задачи, и для произвольной метрики он отсутствует.

В системе уравнений для экстремалей (13.27), (13.28) конформный множитель Φ рассматривается, как сложная функция от σ : $\Phi = \Phi(q(\sigma))$, где $q(\sigma)$ – решение уравнения (13.26). Если форма экстремали $\sigma(\tau)$ найдена, то конформный множитель можно рассматривать так же, как сложную функцию от τ вдоль каждой экстремали: $\Phi = \Phi(\sigma(\tau))$. В дальнейшем анализе это будет подразумеваться.

ТЕОРЕМА 13.3.1. Любая экстремаль в статическом пространстве-времени типа I, III принадлежит одному из следующих четырех классов.

1) Светоподобные экстремали

$$\tau = \pm\sigma + \text{const}, \quad (13.31)$$

для которых канонический параметр определен уравнением

$$\dot{\tau} = \frac{1}{\Phi}. \quad (13.32)$$

2) Экстремали общего вида, форма которых определена уравнением

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - C_2\Phi}}, \quad (13.33)$$

где C_2 – произвольная отличная от нуля постоянная, причем значения $C_2 < 0$ и $C_2 > 0$ описывают соответственно пространственно- и времениподобные экстремали. Канонический параметр определяется любым из двух уравнений:

$$\dot{\tau} = \frac{1}{\Phi}, \quad (13.34)$$

$$\dot{\sigma} = \pm \frac{\sqrt{1 - C_2\Phi}}{\Phi}. \quad (13.35)$$

При этом в уравнениях (13.33) и (13.35) знаки плюс или минус выбираются одновременно.

3) Прямые пространственноподобные экстремали, параллельные оси σ и проходящие через каждую точку $\tau = \text{const}$. Канонический параметр определен уравнением

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}. \quad (13.36)$$

4) Прямые вырожденные времениподобные экстремали, параллельные оси τ и проходящие через критические точки $\sigma_0 = \text{const}$, в которых

$$\Phi'(\sigma_0) = 0. \quad (13.37)$$

Канонический параметр для них совпадает с временной координатой,

$$t = \tau. \quad (13.38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы сводится к интегрированию системы уравнений (13.27), (13.28). При получении интеграла движения (13.30) необходимо делить на $\dot{\tau}$ и $\dot{\sigma}$, поэтому эти вырожденные случаи рассматриваются отдельно.

Начнем с вырожденных случаев. Для $\tau = \text{const}$ уравнение (13.27) выполняется автоматически, а уравнение (13.28) после интегрирования приводит к условию

$$-\Phi\dot{\sigma}^2 = C_0 < 0.$$

Это уравнение сводится к (13.36) растяжкой канонического параметра.

Второй вырожденный случай соответствует $\dot{\sigma} = 0$. При этом уравнение (13.28) выполняется только в тех точках $\sigma = \sigma_0$, в которых $\Phi'(\sigma_0) = 0$, а уравнение (13.27) сводится к уравнению $\ddot{\tau} = 0$. Отсюда вытекает, что координату τ можно выбрать в качестве канонического параметра. Здесь можно лишь заметить справедливость равенства

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = \Phi \frac{d\Phi}{dq} = 0,$$

и, поскольку $\Phi > 0$, то в уравнении (13.37) дифференцирование по q можно заменить дифференцированием по σ . Таким образом исчерпываются оба специальных случая.

Остальные экстремали можно получить из анализа интегралов (13.29), (13.30), причем константа C_0 может быть произвольной, а $C_1 \neq 0$, т.к. случай $C_1 = 0$ относится к прямым экстремалиям третьего класса. Уравнение (13.29) с учетом (13.30) приводит к равенству

$$\dot{\sigma} = \pm \frac{C_1}{\Phi} \sqrt{1 - C_2 \Phi}, \quad (13.39)$$

где

$$C_2 := \frac{C_0}{C_1^2}. \quad (13.40)$$

Уравнение для формы экстремалей общего вида (13.33) является следствием (13.30) и (13.39), причем значение постоянной C_2 определяет тип экстремали. Уравнения для канонического параметра получаются из (13.30) и (13.39) после растяжки. В частном случае $C_2 = 0$ получаем светоподобные экстремали (13.31).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из уравнения (13.33) следует, что постоянная C_2 параметризует угол, под которым экстремаль общего вида проходит через заданную точку. Можно проверить, что через произвольную точку в каждом направлении проходит одна и только одна экстремаль. Это подтверждает тот факт, что найдены все экстремали.

Доказанная теорема позволяет качественно понять поведение экстремалей для произвольного конформного множителя.

На рис. 13.2 в первом ряду показано типичное поведение конформного множителя $\Phi(q)$ с одним и тремя локальными экстремумами между двумя нулями и с двумя локальными экстремумами между нулем и особенностью для статических конформных блоков. Во втором ряду показана зависимость этих конформных множителей $\Phi(\sigma)$ от пространственной координаты. В третьем ряду показано качественное поведение времени- и пространственноподобных экстремалей. Чтобы не загромождать рисунок, мы опустили светоподобные экстремали, проходящие через каждую точку пространства-времени, а также экстремали, параллельные оси σ . Все экстремали можно сдвигать вдоль времениподобной координаты τ .

Если обе граничные точки интервала q_i и q_{i+1} являются нулями, то из непрерывности конформного множителя Φ следует, что у него есть по крайней мере один максимум, через который проходит вырожденная экстремаль d . В общем случае через каждый локальный экстремум функции $\Phi(\sigma)$ проходит вертикальная экстремаль. На рисунках они помечены буквой d .

Пространственноподобные экстремали общего вида соответствуют отрицательным значениям постоянной C_2 в уравнении (13.33), и, поскольку $\Phi > 0$, подынтегральное выражение всюду определено. Они начинаются на левой границе конформного блока и заканчиваются на правой. Пространственноподобные экстремали общего вида показаны на рисунке без каких либо пометок.

Времениподобные экстремали общего вида имеют качественно различное поведение при различных значениях постоянной $C_2 > 0$. Они помечены буквами a, b, c и o .

Если постоянная C_2 достаточно мала,

$$C_2 < \frac{1}{\max \Phi(\sigma)},$$

то времениподобная экстремаль общего вида определена при всех значениях $\sigma \in (\sigma_i, \sigma_{i+1})$. Такие экстремали соединяют левую и правую границу конформного блока, пересекая все вырожденные экстремали, и помечены на рисунке буквой a .

Рис. 13.2. Типичное поведение конформного множителя $\Phi(q)$ между двумя нулями и нулем и сингулярностью для статического локального решения (верхний ряд). Зависимость конформного множителя $\Phi(\sigma)$ от пространственной координаты (средний ряд). Типичные времени- и пространственно-подобные экстремали (нижний ряд). Буквами отмечены времениподобные экстремали, имеющие качественно разное поведение при разных значениях постоянной C_2 . Через каждый локальный экстремум проходит вырожденная экстремаль d . Во втором и третьем случае имеются осциллирующие экстремали o .

Во втором ряду рис. 13.2 горизонтальными линиями показаны области определения координаты σ ,

$$C_2 \Phi(\sigma) \leq 1, \quad (13.41)$$

при различных значениях постоянной C_2 .

Если у функции Φ имеется локальный минимум, которому также соответствует вырожденная экстремаль, то среди экстремалей общего вида существуют времениподобные экстремали, осциллирующие вблизи локального минимума, которые помечены буквой o . Это следует из уравнения (13.33), т.к. при достаточно больших положительных значениях C_2 область изменения координаты σ определяется неравенством (13.41). Критические точки σ_* , в которых $\Phi(\sigma_*) = 1/C_2$, являются точками поворота при конечном значении $\tau = \tau_*$ тогда и только тогда, когда интеграл

$$\int^{\tau_*} d\tau = \pm \int^{\sigma_*} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - C_2 \Phi}} \quad (13.42)$$

сходится. Этот интеграл сходится, если точка σ_* не совпадает с локальным максимумом. То есть поворот экстремали происходит при конечном значении τ_* и канонического параметра, что вытекает из уравнения (13.35).

При том же значении постоянной C_2 существуют времениподобные неосциллирующие экстремали общего вида, которые приходят и уходят на одну и ту же (левую или правую) границу.

У них есть точка поворота при конечных значениях τ . Такие экстремали на рисунке помечены буквой c .

Если критическая точка σ_* совпадает с локальным максимумом, то

$$\Phi \simeq \frac{1}{C_2} - C_3(\sigma - \sigma_*)^2 + \dots, \quad C_3 = \text{const} > 0,$$

и интеграл (13.42) расходится. Это означает, что критическая точка достигается при бесконечном значении τ_* и канонического параметра. То есть соответствующая экстремаль в этом направлении полна. На рисунке такие экстремали помечены буквой b .

Приведенная теорема описывает все экстремали для статических локальных решений. Поведение экстремалей для однородных локальных решений аналогично. Они получаются заменой $\Phi \mapsto -\Phi$, перестановкой временной и пространственной координат $\tau \leftrightarrow \sigma$ и поворотом на угол $\pi/2$ всей плоскости.

13.3.2. Асимптотика экстремалей. Для решения вопроса о том является ли метрика, определенная на τ, σ плоскости, полной по экстремалиям или локальное решение следует продолжить, необходимо исследовать асимптотику и полноту экстремалей вблизи границы конформного блока. Забегая вперед, заметим, что все экстремали, за исключением осциллирующих, имеют асимптотику при приближении к границе конформного блока.

Рассмотрим квадратный конформный блок. В верхнюю и нижнюю вершины конформного блока попадают все экстремали, для которых

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{d\tau}{d\sigma} \right| > 1,$$

если предел существует. В левую и правую вершины конформного блока попадают экстремали, для которых

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{d\tau}{d\sigma} \right| < 1. \quad (13.43)$$

На стороны квадратного конформного блока могут попасть только экстремали, имеющие светоподобную асимптотику:

$$\lim_{\tau, \sigma \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{d\tau}{d\sigma} \right| = 1. \quad (13.44)$$

В принципе, в вершину конформного блока могут попасть также экстремали, имеющие светоподобную асимптотику. Однако, как будет показано ниже, этого не происходит.

Если одна из границ q_i , например, статического конформного блока прямая, то на нее попадают экстремали со светоподобной (13.44) и пространственноподобной (13.43) асимптотикой.

Осциллирующие экстремали всегда зажаты прямыми вырожденными экстремалиями. Поэтому они попадают в ту же вершину конформного блока, что и прямые вырожденные экстремали 4) из теоремы 13.3.1.

Рассмотрим асимптотику экстремалей вблизи границы статических конформных блоков. Любая светоподобная экстремаль на квадратном конформном блоке начинается и заканчивается на противоположных сторонах. В случае треугольного конформного блока или блока типа линзы светоподобные экстремали начинаются или заканчиваются на времениподобных границах.

Для статических локальных решений типа I, III прямые экстремали, параллельные пространственной оси σ начинаются в левой и заканчиваются в правой вершине квадратного конформного блока. В случае треугольного блока и блока типа линзы эти экстремали начинаются или (и) заканчиваются на времениподобной границе. Вырожденные экстремали начинаются

в нижней и заканчиваются в верхней вершине статического конформного блока. Осциллирующие экстремали зажаты вырожденными экстремальными и поэтому также начинаются и заканчиваются в нижней и верхней вершине.

Таким образом, мы поняли в какие граничные точки конформного блока попадают все прямые экстремали, а также осциллирующие экстремали общего вида.

Осталось рассмотреть поведение неосциллирующих экстремалей общего вида вблизи границы. Сначала определим точки границы конформного блока, в которые они попадают. Допустим, что граница q_i конформного блока является нулем, $\Phi(q_i) = 0$, $|q_i| < \infty$. Этому соответствует положительный показатель $m > 0$ (13.4). Соответствующая граница конформного блока является углом при $m \geq 1$ и прямой при $0 < m < 1$ (13.22). В этом случае из уравнения для экстремалей (13.33) следует, что векторы, касательные к ним, имеют светоподобную асимптотику

$$\lim_{q \rightarrow q_i} \left| \frac{d\tau}{d\sigma} \right| = 1.$$

Если граница конформного блока является углом, то экстремали общего вида попадают на стороны угла, а не в вершину. Действительно, из уравнений (13.34), (13.35) для экстремалей, идущих в правую верхнюю сторону квадратного конформного блока, следует равенство

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1 - \sqrt{1 - C_2\Phi}}{1 + \sqrt{1 + C_2\Phi}}.$$

Для малых $\Phi \ll 1$ разложим правую часть этого равенства в ряд. В первом порядке по Φ получим равенство

$$\frac{d\eta}{d\xi} \simeq \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{C_2\Phi}{2} \right) \right] = \frac{C_2}{4}\Phi.$$

Откуда вытекает, что интеграл

$$\int d\eta \sim \int d\xi \Phi \sim \int d\sigma \Phi \sim \int^{q_i} dq = q_i$$

сходится. Это означает, что точка $\xi \rightarrow \infty$ достигается при конечных значениях η , и это соответствует некоторой точке на стороне угла, а не вершине. Если граница q_i конформного блока является времениподобной, то экстремали общего вида попадают на нее.

Пусть теперь на границе $\Phi(q_i) = \infty$, $|q_i| < \infty$. В этом случае $m < 0$, граница времениподобна и достигается при конечных σ_i . Из равенства (13.33) следует, что касательный вектор к пространственноподобной экстремали при $\Phi \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$\frac{d\tau}{d\sigma} \sim \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \rightarrow 0.$$

То есть, они попадают на границу $|\sigma_i| < \infty$ под прямым углом.

Времениподобные экстремали общего вида не могут попасть на времениподобную границу, потому что правая часть в (13.33) при $C_2 > 0$ вблизи особенности $\Phi(q_i) = \infty$ становится отрицательной. Эти экстремали вблизи границы $|\sigma_i| < \infty$ имеют точку поворота при конечных значениях τ , по той же причине, что и осциллирующие экстремали.

13.3.3. Полнота экстремалей. Теорема 13.3.1 позволяет проанализировать полноту экстремалей при подходе к границе конформного блока. Для определенности рассмотрим стационарное локальное решение. Прежде всего заметим, что вырожденные экстремали всегда полны, т.к. канонический параметр для них совпадает с временем (13.38). Осциллирующие экстремали также полны поскольку делают бесконечное число осцилляций, каждая из которых

соответствует конечному изменению канонического параметра. Если же экстремаль общего вида при $\tau \rightarrow \pm\infty$ приближается к вырожденной экстремали, то она полна, поскольку из уравнения для канонического параметра (13.34) следует, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0} t \rightarrow \int^{\infty} d\tau \Phi(\sigma_0) \rightarrow \infty.$$

Для стационарного локального решения в нижнюю и верхнюю вершины попадают только вырожденные и осциллирующие экстремали, и поэтому они всегда полны. Возможна ситуация, когда эти экстремали отсутствуют. В этом случае будем считать эти вершины полными, потому что любая времениподобная кривая имеет бесконечную длину при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Это означает, что нижняя и верхняя вершины стационарного блока всегда полны, т.е. представляют собой временную бесконечность прошлого и будущего соответственно.

Полнота светоподобных экстремалей определяется уравнением (13.32), которое позволяет вычислить предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} t \rightarrow \int^{\sigma_i} d\sigma \Phi = \int^{q_i} dq = q_i. \quad (13.45)$$

Это значит, что при приближении к границе конформного блока они неполны при конечных q_i и полны при $|q_i| = \infty$.

Полнота неосциллирующих экстремалей общего вида, попадающих на границу конформного блока, соответствующую значению q_i , вытекает из уравнения (13.35):

$$\lim_{q \rightarrow q_i} t \rightarrow \int^{\sigma_i} d\sigma \frac{\Phi}{\sqrt{1 - C_2 \Phi}} \sim \int^{q_i} \frac{dq}{\sqrt{1 - C_2 \Phi}}. \quad (13.46)$$

Вблизи нулей $\Phi \rightarrow 0$ поведение экстремалей общего вида такое же, как и у светоподобных экстремалей (13.45). Особенность $\Phi \rightarrow \infty$ достигается только пространственноподобными экстремалими, $C_2 < 0$, полнота которых определяется интегралом

$$\lim_{q \rightarrow q_i} t \rightarrow \int^{q_i} \frac{dq}{\sqrt{\Phi}}. \quad (13.47)$$

Эти экстремали неполны в конечных точках $|q_i| < \infty$ при $m < 0$. В бесконечно удаленных точках $|q_i| = \infty$ пространственноподобные экстремали полны при $0 < m \leq 2$ и неполны при $m > 2$.

Полнота прямых экстремалей, параллельных оси σ , определяется уравнением (13.36) и при приближении к границе q_i дается интегралом (13.47). Это значит, что их полнота вблизи особенностей такая же, как и у экстремалей общего вида. Вблизи нулей они всегда полны за исключением случая простого нуля в конечной точке, где они неполны.

Таким образом проанализирована полнота всех элементов границы. Итог анализа приведен на рис. 13.3. Здесь в зависимости от показателя степени m (13.4) для конечных и бесконечных значений q_i показаны соответствующие элементы границы конформных блоков. Для определенности, показана правая граница статических конформных блоков типа I. На рисунке времениподобная граница показана вертикальной линией, а светоподобная – углом. Если на границе скалярная кривизна сингулярна (13.18), (13.19), то на ней присутствуют выступы. Неполные и полные границы показаны соответственно пунктиром и жирной сплошной линией. Исключение составляет полуполная граница, соответствующая $|q_i| = \infty$ при $m > 2$, рис. 13.3. Светоподобные экстремали, попадающие на эту сингулярную границу полны, а пространственноподобные экстремали – неполны. Нижние и верхние вершины всех статических конформных блоков (временноподобные бесконечности прошлого и будущего) являются существенно

Рис. 13.3. Форма правой границы статических конформных блоков в зависимости от показателя степени m . В верхнем и нижнем рядах показаны границы для конечных и бесконечных значений q_i соответственно.

особыми точками и всегда полны, что отмечено закрашенными окружностями. Полнота или неполнота правых вершин границы в форме угла отмечена закрашенной или незакрашенной окружностью соответственно. Левые границы статических конформных блоков имеют такое же строение, только углы нужно отразить относительно вертикальной прямой.

Качественное поведение всех экстремалей в однородном пространстве-времени типа II, IV определяется нулями и особенностями конформного множителя так же, как и для стационарного локального решения. При этом соответствующие конформные блоки должны быть повернуты на угол $\pi/2$.

13.4. Построение глобальных решений

В разделе 13.2 каждому локальному решению типа I-IV был сопоставлен конформный блок, определенный на интервале (q_i, q_{i+1}) . Затем в разделе 13.3.3 из анализа экстремалей была доказана полнота или неполнота границ этих блоков. В результате оказалось, что нули конформного множителя, которые соответствуют *горизонтам* пространства-времени, и только они определяют неполную по экстремалам границу конформного блока, на которой кривизна конечна. Во всех остальных случаях граница либо полна, либо на ней кривизна сингулярна.

Поэтому решения вида (13.1) необходимо продолжить только через нули функции $\Phi(q)$. Напомним, что нулям конформного множителя (горизонтам) соответствуют границы в виде угла (см. рис. 13.3).

Сформулируем правила, по которым осуществляется максимальное продолжение поверхности с метрикой (13.1) при заданной функции $\Phi(q)$. Дифференцируемость максимально продолженной по экстремалиям псевдоримановой поверхности, построенной по этим правилам дается приведенной ниже теоремой 13.4.1.

1. Каждое глобальное решение для метрики (13.1) соответствует некоторому интервалу значений переменной $q \in (q_-, q_+)$, где $q_{\pm}$ либо бесконечно удаленные точки $q_{\pm} = \pm\infty$, либо сингулярности кривизны, определяемые условием (13.18). Внутри интервала сингулярности должны отсутствовать.
2. Если внутри интервала (q_-, q_+) конформный блок не имеет нулей, то соответствующий конформный блок представляет собой глобальное решение.
3. Если внутри интервала (q_-, q_+) нули существуют, то пронумеруем их в порядке возрастания, $\Phi(q_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$, и поставим в соответствие каждому интервалу $(q_-, q_1), \dots, (q_n, q_+)$ пару статических или однородных конформных блоков для $\Phi > 0$ и $\Phi < 0$ соответственно.
4. Склеим конформные блоки вдоль границ, соответствующих нулям q_j , причем склеиваются только блоки, соответствующие соседним интервалам (q_{j-1}, q_j) и (q_j, q_{j+1}) .
5. Диаграмма Картера–Пенроуза получается склеиванием всех соседних конформных блоков. Она представляет собой связную фундаментальную область, если внутри интервала (q_-, q_+) конформный множитель меняет знак. Если $\Phi \geq 0$ или $\Phi \leq 0$ всюду внутри интервала (q_-, q_+) , то получим две фундаментальные области, которые получаются друг из друга отражением пространства или времени.
6. При наличии в интервале (q_-, q_+) только одного нуля нечетного порядка граница фундаментальной области состоит из границ конформных блоков, соответствующих точкам q_- и q_+ , и диаграмма Картера–Пенроуза представляет глобальное решение.
7. При наличии одного нуля четного порядка или двух и более нулей произвольного порядка граница фундаментальной области включает нули конформного множителя, и ее необходимо либо продолжить периодически в пространстве и (или) во времени, либо отождествить противоположные стороны вдоль горизонтов.
8. Если у диаграммы Картера–Пенроуза фундаментальная группа тривиальна, то она представляет собой универсальную накрывающую глобального решения.
9. Если у диаграммы Картера–Пенроуза фундаментальная группа нетривиальна, то следует построить соответствующую универсальную накрывающую.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Диаграммой Картера–Пенроуза* называется образ на плоскости максимально продолженной поверхности, соответствующей интервалу (q_-, q_+) и полученный в результате склеивания всех конформных блоков для интервала (q_-, q_+) по правилам 1)–9).

Диаграммы Картера–Пенроуза являются наглядным изображением максимально продолженной поверхности, т.к. оба класса непересекающихся между собой светоподобных экстремалей изображаются двумя классами перпендикулярных прямых, как на плоскости Минковского.

Поясним приведенные правила. Утверждение 1) является следствием того, что продолжение решения через точки $q_{\pm}$ невозможно, т.к. эти точки либо полны, либо сингулярны. Решения продолжают только через горизонты $|q_j| < \infty$ с $m = 1$ или $m \geq 2$. В этих случаях граница конформного блока является углом. Если точка q_j – нуль нечетного порядка, то все четыре конформных блока, соответствующих интервалам (q_{j-1}, q_j) и (q_j, q_{j+1}) склеиваются согласно правилам 3) и 4) вокруг вершины q_j , причем эта точка является седловой

для конформного множителя $\Phi(q)$, рассматриваемого как функция на диаграмме Картера–Пенроуза. Если q_j – нуль четного порядка, то вдоль соответствующего горизонта склеиваются между собой только области одного типа, например, I-I или III-III. Если внутри интервала (q_-, q_+) функция Φ не меняет знака, то возникают две несвязные между собой фундаментальные области, каждую из которых можно периодически продолжить. При изменении знака Φ возникает седловая точка, и области различных типов образуют связную фундаментальную область, которую можно либо периодически продолжить, либо нет, в зависимости от значений q на границе. Это составляет содержание правил 5) и 6).

Правила 5), 6) и 7) являются утверждениями, которые будут доказаны дальнейшим построением.

Сформулируем основную теорему, оправдывающую приведенные выше правила построения глобальных решений.

ТЕОРЕМА 13.4.1. *Универсальное накрывающее пространство, построенное по правилам 1)–9), представляет собой максимально продолженную вдоль экстремалей дифференцируемую псевдориманову поверхность класса $\mathcal{C}^{l+1}$ с метрикой класса $\mathcal{C}^l$, $l \geq 2$, такую, что внутренность каждого конформного блока изометрична поверхности с метрикой (13.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению, внутренность каждого конформного блока покрывается одной картой и является многообразием класса $\mathcal{C}^{l+1}$, что следует из (13.24). Поэтому внутри конформного блока метрика принадлежит тому же классу гладкости, что и конформный множитель. При этом функции перехода (13.24) изометрично отображают плоскость τ, σ или ее часть, на которой определена метрика, на внутренность конформного блока. Поэтому необходимо доказать дифференцируемость многообразия и метрики только на горизонтах и в седловых точках. Это сделано путем перехода к новым системам координат в разделах 13.6 и 13.7 соответственно.

Перед завершением доказательства теоремы рассмотрим несколько примеров, чтобы пояснить, как пользоваться правилами построения глобальных решений в конкретных случаях, и какие глобальные решения могут возникнуть.

13.5. Примеры

Если в результате решения уравнений движения какой-либо модели гравитации возникает двумерная метрика вида (13.1), то, следуя правилам 1)–9) из предыдущего раздела можно построить глобальное решение, не заботясь о переходе к новым координатным системам, покрывающим большие области. Достоинством рассматриваемого метода является его конструктивность, т.к. для построения глобальных решений достаточно элементарного анализа конформного множителя $\Phi(q)$. Начнем с трех известных примеров из общей теории относительности.

13.5.1. Решение Шварцшильда. Конформный множитель для решения Шварцшильда имеет вид (13.7). Он имеет простой полюс в точке $q = 0$ ($m = -1$), который соответствует сингулярности кривизны (13.18). Точка $q_1 = 2M$ ($m = 1$) является простым нулем и соответствует горизонту. При $M > 0$ нуль лежит на положительной полуоси. Значения $q = \pm\infty$ ($m = 0$) соответствуют асимптотически плоской пространственной бесконечности ($R = 0$). Поведение конформного множителя показано на рис. 13.4 слева.

Бесконечному интервалу $q \in (-\infty, \infty)$ соответствует два глобальных решения для положительных и отрицательных q . Рассмотрим случай $M > 0$. Для положительных значений $q \in (0, \infty)$ имеем $q_- = 0$, $q_1 = 2M$ и $q_+ = \infty$. Каждому интервалу $(q_-, q_1) = (0, 2M)$ и

Рис. 13.4. Поведение конформного множителя для решения Шварцшильда для положительной и отрицательной массы. При $M < 0$ существует два глобальных решения, представленных треугольными диаграммами Картера–Пенроуза. При $M > 0$ четыре конформных блока, соответствующих двум интервалам $(0, 2M)$ и $(2M, \infty)$, склеиваются в одно глобальное решение.

$(q_1, q_+) = (2M, \infty)$ соответствует по два однородных (II, IV) и статических (I, III) конформных блока, показанных на рис. 13.4 внизу в центре. При этом элементы границы определяются по рис. 13.3. Из этих четырех конформных блоков по правилу 4) единственным образом склеивается глобальное решение, показанное на рис. 13.4. Эта диаграмма Картера–Пенроуза представляет собой расширение Крускала–Секереша решения Шварцшильда [118, 119]. Напомним, что расширение Крускала–Секереша представляет собой запись метрики Шварцшильда в такой системе координат, которая покрывает сразу все области I–IV. Картер впервые изобразил это расширение в виде конечной области на плоскости [129].

Поскольку фундаментальная группа для полученной диаграммы тривиальна, то построенное глобальное решение является универсальной накрывающей для других глобальных решений. Оба статических конформных блока I или III диффеоморфны внешнему решению Шварцшильда при $r > 2M$. Теорема 13.4.1 обеспечивает, в данном случае, гладкость соответствующего глобального решения, и нет необходимости в явном построении глобальной системы координат.

Аналогичные глобальные решения будут возникать для широкого класса метрик, у которых конформный множитель ведет себя качественно так же, как и нижняя ветвь на рис. 13.4. То есть определен на полуинтервале (q_-, ∞) , имеет особенность в q_- , один нуль и стремится к постоянной на бесконечности.

Отметим, что поверхность, представленная диаграммой Картера–Пенроуза имеет непостоянную скалярную кривизну,

$$R = \frac{4M}{q^3}. \quad (13.48)$$

Это – двумерная скалярная кривизна на лоренцевой поверхности. Скалярная кривизна, соответствующая четырехмерной метрике Шварцшильда с учетом угловой зависимости тождественно равна нулю в силу уравнений Эйнштейна. Заметим, что двумерная скалярная кривизна (13.48) совпадает с инвариантным собственным значением четырехмерного тензора Вейля

[6]. Центр диаграммы Картера–Пенроуза является седловой точкой для переменной q и, следовательно, для скалярной кривизны (13.48). Эта точка неполна и отмечена незакрашенной окружностью.

Физическая интерпретация диаграммы Картера–Пенроуза для решения Шварцшильда состоит в следующем. В общей теории относительности пространство-время четырехмерно. Поэтому максимально продолженное сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна представляет собой топологическое произведение сферы $\mathbb{S}^2$ на диаграмму Картера–Пенроуза, изображенную на рис. 13.4 и представляющую собой ту часть пространства-времени, которая описывается координатами t и r . Нижняя и верхняя сингулярные границы диаграммы Картера–Пенроуза, умноженные на сферу, называются соответственно *белой* и *черной дырой*. Сфера $r = 2M$ называется *горизонтом* черной дыры. Конформный блок II, лежащий под горизонтом черной дыры, соответствует внутренности черной дыры. Если выбрать произвольную точку в области II, то любая времениподобная или светоподобная кривая неизбежно попадет на сингулярную пространственноподобную границу (черную дыру) за конечное собственное время. При этом нет никакой возможности пересечь горизонт. Внешние области I и III соответствуют двум разным вселенным для одной и той же черной дыры. Эти вселенные причинно не связаны между собой, поскольку их точки можно соединить только пространственноподобными кривыми. Если наблюдатель находится, например, во вселенной I, то у него есть две возможности: либо за конечное время упасть на черную дыру, либо жить бесконечно долго, поскольку бесконечность будущего (верхняя вершина конформного блока I) полна.

Для отрицательных значений q горизонты отсутствуют. Поэтому треугольные конформные блоки, показанные на рис. 13.4 вверху справа, представляют собой максимально продолженные решения. В этом пространстве-времени сингулярность кривизны располагается вдоль времениподобной границы, находящейся на конечном расстоянии и не окруженной горизонтом. Такие сингулярности в общей теории относительности называются *голыми*. Заметим, однако, что на голые сингулярности попадают только свето- и пространственноподобные экстремали при конечном значении канонического параметра. Времениподобные экстремали отражаются вблизи сингулярности (см. рис. 13.2).

Глобальное решение для отрицательных q можно рассматривать как решение для положительных q (что соответствует интерпретации координаты q , как радиуса), но с отрицательной массой, $M < 0$. Эти решения рассматриваются в общей теории относительности, как нефизические.

13.5.2. Решение Рейснера–Нордстрема. Конформный множитель для решения Рейснера–Нордстрема [130, 131], описывающего заряженную черную дыру, имеет вид

$$\Phi = 1 - \frac{2M}{q} + \frac{Q^2}{q^2}, \quad 0 < Q < M, \quad (13.49)$$

где M и Q – масса и заряд черной дыры. Функцию Φ при заданных соотношениях между константами можно записать в виде

$$\Phi = \frac{(q - q_1)(q - q_2)}{q^2}, \quad (13.50)$$

где

$$q_{1,2} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}.$$

Отсюда следует, что конформный множитель имеет полюс второго порядка при $q = 0$ и два положительных простых нуля (горизонта) $q_{1,2}$. Его поведение для положительных q показано на рис. 13.5 слева.

Рис. 13.5. Конформный множитель и фундаментальная область для решения Рейснера–Нордстрема. Стрелки показывают возможное продолжение или отождествление решения вдоль горизонтов.

Глобальная структура решения для положительных q , по сравнению с решением Шварцшильда, меняется качественно из-за наличия двух горизонтов. Каждому из интервалов $(0, q_1)$, (q_1, q_2) и (q_2, ∞) соответствует по два конформных блока. Поскольку внутри интервала $(0, \infty)$ конформный множитель меняет знак, то по правилу 6) диаграмма Картера–Пенроуза, склеенная из шести конформных блоков, рис. 13.5, представляет собой фундаментальную область для решения Рейснера–Нордстрема. Ее граница состоит не только из сингулярных и бесконечно удаленных точек, но также включает отрезки, соответствующие горизонтам. В соответствии с правилом 7) ее можно периодически продолжить, склеивая одинаковые фундаментальные области вдоль горизонтов в направлениях, показанных стрелками. В этом случае мы получим универсальную накрывающую для решения Рейснера–Нордстрема. Другая возможность заключается в том, что после склеивания произвольного конечного числа фундаментальных областей, граничные точки на горизонтах снизу и сверху можно отождествить. Тогда глобальное решение с топологической точки зрения будет представлять собой цилиндр.

Сингулярности в решении Рейснера–Нордстрема являются голыми.

Скалярная кривизна (13.16) для решения Рейснера–Нордстрема непостоянна:

$$R = \frac{4M}{q^3} - \frac{6Q^2}{q^4}. \quad (13.51)$$

Это – двумерная скалярная кривизна поверхности, а не четырехмерного пространства-времени.

Левая ветвь конформного множителя $-\infty < q < 0$ для решения Рейснера–Нордстрема соответствует голой сингулярности и рассматриваться не будет, т.к. изменение порядка полюса не влияет на структуру глобального решения.

13.5.3. Экстремальная черная дыра. Экстремальная черная дыра возникает из решения Рейснера–Нордстрема (13.49) в том случае, когда заряд равен массе, $Q = M$. Соответствующий конформный множитель,

$$\Phi = \frac{(q - M)^2}{q^2}, \quad (13.52)$$

имеет полюс второго порядка при $q = 0$ и положительный нуль $q = M$ также второго порядка. Его поведение показано на рис. 13.6 слева. Левая ветвь $-\infty < q < 0$, как и в предыдущих

Рис. 13.6. Конформный множитель и две фундаментальные области для экстремальной черной дыры. Стрелками показаны направления, вдоль которых решения периодически продолжают-ся.

случаях, описывает голую сингулярность.

Положительные значения q разбиваются на два интервала $(q_-, q_1) = (0, M)$ и $(q_1, q_+) = (M, \infty)$. Этим интервалам ставятся в соответствие два конформных блока и их пространственное отражение. Поскольку конформный множитель не меняет знак, то в соответствии с правилом 6) имеются две несвязные фундаментальные области, показанные на рис. 13.6. Вторая фундаментальная область, построенная из областей типа III, получается пространственным отражением из области типа I. Как и в случае решения Рейснера–Нордстрема границы фундаментальных областей включают горизонты и их можно либо склеивать до бесконечности, либо отождествить, что приводит к универсальной накрывающей и цилиндрам соответственно.

13.5.4. Плоскость Минковского. Предыдущие примеры демонстрируют правила построения глобальных лоренцевых поверхностей непостоянной кривизны с одним вектором Киллинга. Следующие два примера показывают, как эти правила работают в случае поверхностей постоянной кривизны, которые имеют по три вектора Киллинга. Пример плоскости Минковского важен также потому, что будет использован в дальнейшем для доказательства дифференцируемости глобальных решений в седловых точках.

Для плоскости Минковского скалярная кривизна равна нулю, а конформный множитель является линейной функцией

$$\Phi = bq + c, \quad b, c = \text{const}. \quad (13.53)$$

При этом возможны два качественно отличных случая: $b = 0$ и $b \neq 0$.

При $b = 0$ метрика (13.1) является метрикой Минковского

$$ds^2 = c(d\tau^2 - d\sigma^2), \quad (13.54)$$

где, для определенности, будем считать, что $c > 0$. Конформный множитель $\Phi = c$ не имеет ни особенностей, ни нулей. При этом уравнение (13.2) имеет общее решение

$$q = \pm c\sigma,$$

где мы отбросили несущественную постоянную интегрирования, соответствующую сдвигу σ . Знак $\pm$ соответствует различной ориентации переменной q относительно пространственной координаты. Поскольку эта переменная не входит в метрику, то ее можно исключить из рассмотрения. Поэтому интервалу $q \in (-\infty, \infty)$ ставится в соответствие один квадратный конформный блок, показанный на рис. 13.7 слева.

Рис. 13.7. Два представления плоскости Минковского при отсутствии и наличии одного горизонта. В последнем случае плоскость Минковского склеивается из четырех конформных блоков.

Теперь рассмотрим случай $b \neq 0$. Не ограничивая общности, положим $b > 0$. Тогда конформный множитель (13.53) имеет один простой нуль в точке $q_1 = -c/b$. Интервалам $(-\infty, q_1)$ и (q_1, ∞) соответствует по два квадратных конформных блока, которые склеиваются вдоль горизонтов, как показано на рис. 13.7 справа.

Покажем, как связано это глобальное решение с предыдущим представлением плоскости Минковского в виде одного конформного блока. Не ограничивая общности, положим $c = 0$, т.е.

$$ds^2 = b|q|(d\tau^2 - d\sigma^2), \quad b > 0. \quad (13.55)$$

Этого всегда можно добиться путем сдвига $q \rightarrow q + \text{const}$, который не влияет на глобальную структуру решения. Рассмотрим по очереди все четыре области.

Область I. Уравнение (13.2) для $\Phi = bq$ имеет следующее решение

$$q = e^{b\sigma} \quad (13.56)$$

с точностью до сдвига σ . Соответствующая метрика статична,

$$ds^2 = b e^{b\sigma} (d\tau^2 - d\sigma^2), \quad \tau, \sigma \in \mathbb{R}^2, \quad (13.57)$$

и определена на всей плоскости. Переход к конусным координатам (13.23) и конформное преобразование

$$u = \frac{2}{b} e^{\frac{b\xi}{2}} > 0, \quad v = -\frac{2}{b} e^{-\frac{b\eta}{2}} < 0 \quad (13.58)$$

приводит к метрике Минковского

$$ds^2 = b dudv, \quad (13.59)$$

определенной в первом квадранте.

Область III. Для переменной q и метрики справедливы равенства:

$$q = e^{-b\sigma}, \quad (13.60)$$

$$ds^2 = b e^{-b\sigma} (d\tau^2 - d\sigma^2), \quad \tau, \sigma \in \mathbb{R}^2. \quad (13.61)$$

Конформное преобразование, приводящее к метрике Минковского (13.59), имеет вид

$$u = -\frac{2}{b} e^{-\frac{b\xi}{2}} < 0, \quad v = \frac{2}{b} e^{\frac{b\eta}{2}} > 0, \quad (13.62)$$

что соответствует третьему квадранту плоскости Минковского.

Область II. Эта область однородна:

$$q = -e^{b\tau}, \quad (13.63)$$

$$ds^2 = b e^{b\tau} (d\tau^2 - d\sigma^2), \quad \tau, \sigma \in \mathbb{R}^2. \quad (13.64)$$

Конформное преобразование, приводящее к метрике Минковского (13.59), имеет вид

$$u = \frac{2}{b} e^{\frac{b\xi}{2}} > 0, \quad v = \frac{2}{b} e^{\frac{b\eta}{2}} > 0, \quad (13.65)$$

что соответствует второму квадранту.

Область IV. Аналогично, для переменной q и метрики справедливы равенства

$$q = -e^{-b\tau}, \quad (13.66)$$

$$ds^2 = b e^{-b\tau} (d\tau^2 - d\sigma^2), \quad \tau, \sigma \in \mathbb{R}^2. \quad (13.67)$$

Конформное преобразование, приводящее к метрике Минковского имеет вид

$$u = -\frac{2}{b} e^{-\frac{b\xi}{2}} < 0, \quad v = -\frac{2}{b} e^{-\frac{b\eta}{2}} < 0, \quad (13.68)$$

что соответствует четвертому квадранту.

Для всех четырех областей горизонт $q_1 = 0$ соответствует координатным прямым $u = 0$ и $v = 0$. Простые вычисления показывают, что во всех областях

$$q = -\frac{b^2}{4} (t^2 - x^2), \quad (13.69)$$

где

$$u = t + x, \quad v = t - x.$$

Эти координаты дают простейший пример координат Крускала–Секереша для метрики (13.55). То есть с точностью до знака переменная q представляет собой квадрат радиуса гиперболической полярной системы координат на плоскости Минковского. Для гиперболического полярного угла в статичных областях

$$\varphi = \operatorname{arcth} \left(\frac{t}{x} \right),$$

справедливы равенства:

$$\text{I: } \varphi = \frac{b}{2}\tau, \quad \text{III: } \varphi = -\frac{b}{2}\tau.$$

В однородных областях

$$\varphi = \operatorname{arcth} \left(-\frac{x}{t} \right),$$

и

$$\text{II: } \varphi = -\frac{b}{2}\sigma, \quad \text{IV: } \varphi = \frac{b}{2}\sigma.$$

Поскольку конформные преобразования (13.58), (13.62), (13.65) и (13.68) во всех четырех областях дают одну и ту же метрику Минковского (13.59), но в разных квадрантах, то это доказывает гладкость метрики на горизонтах и в седловой точке для переменной q (13.69).

Таким образом, линейный конформный множитель (13.53) при $b \neq 0$ описывает плоскость Минковского, рис. 13.7 справа, в гиперболической полярной системе координат.

13.5.5. Поверхности постоянной кривизны. Рассмотрим поверхности постоянной ненулевой кривизны, для которых конформный множитель является квадратичным полиномом (13.17). Для определенности, рассмотрим поверхности положительной скалярной кривизны, $a > 0$. Поверхности отрицательной скалярной кривизны получаются из поверхностей положительной кривизны преобразованием $\tau \leftrightarrow \sigma$, т.е. поворотом всех диаграмм на угол $\pi/2$.

В зависимости от значений постоянных a, b, c уравнение $\Phi(q) = 0$ может не иметь решений или иметь один или два корня. Рассмотрим последовательно все три случая, которые приводят к разным метрикам и различным диаграммам Картера–Пенроуза для поверхностей постоянной кривизны. Не ограничивая общности, положим $b = 0$, чего всегда можно добиться сдвигом переменной q .

Отсутствие горизонта. Рассмотрим конформный множитель вида

$$\Phi = -(aq^2 + c), \quad a > 0, c > 0. \quad (13.70)$$

Поскольку $\Phi < 0$, а сингулярности и нули отсутствуют, то глобальное решение соответствует бесконечному интервалу $q \in (-\infty, \infty)$. Оно представляется однородным конформным блоком типа линзы II или IV, показанными на рис. 13.8 слева. В области IV уравнение (13.2) для

Рис. 13.8. Диаграммы Картера–Пенроуза для поверхностей постоянной положительной скалярной кривизны. Возможно три случая: отсутствие, один или два горизонта.

конформного множителя (13.70) приводит к равенству

$$q = \sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg}(\sqrt{ac}\tau) \quad (13.71)$$

с точностью до сдвига τ . Временная координата меняется в конечном интервале

$$-\frac{\pi}{2} < \sqrt{ac}\tau < \frac{\pi}{2},$$

что соответствует диаграмме типа линзы. Метрика в плоскости τ, σ имеет вид

$$ds^2 = \frac{c}{\cos^2(\sqrt{ac}\tau)}(d\tau^2 - d\sigma^2). \quad (13.72)$$

Эта метрика является глобальной и определена на всей универсальной накрывающей постоянной кривизны.

В области II метрика имеет такой же вид, меняется только ориентация переменной q по отношению к τ .

Один горизонт. Пусть конформный множитель имеет вид

$$\Phi = -aq^2, \quad a > 0. \quad (13.73)$$

В точке $q_1 = 0$ он имеет нуль второго порядка, соответствующий горизонту. В области IV для обоих интервалов $q \in (-\infty, 0)$ и $q \in (0, \infty)$ получаем следующую метрику

$$q = -\frac{1}{a\tau}, \quad (13.74)$$

$$ds^2 = \frac{1}{a\tau^2}(d\tau^2 - d\sigma^2). \quad (13.75)$$

Фундаментальная область в этом случае состоит из двух треугольных конформных блоков, показанных на рис. 13.8 в центре. Чтобы получить универсальную накрывающую поверхность, диффеоморфную диаграмме типа линзы из предыдущего случая, фундаментальную область необходимо продолжить в обе стороны. Если отождествить левую и правую границы фундаментальной области, то получим поверхность, диффеоморфную однополостному гиперболоиду, рассмотренному в разделе 12.3.

Два горизонта. Пусть конформный множитель имеет вид

$$\Phi = -(aq^2 + c), \quad a > 0, \quad c < 0. \quad (13.76)$$

Он имеет два простых нуля в точках $q_{1,2} = \mp\sqrt{-c/a}$, которые соответствуют горизонтам. Поэтому трем интервалам $(-\infty, q_1)$, (q_1, q_2) и (q_2, ∞) соответствует шесть конформных блоков. Из симметрии конформного множителя $q \mapsto -q$ следует, что однородные конформные блоки II, IV и стационарные конформные блоки I, III связаны преобразованием $q \mapsto -q$. Для однородной области типа IV получаем метрику в виде

$$q = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \operatorname{cth}(\sqrt{-ac}\tau), \quad (13.77)$$

$$ds^2 = \frac{-c}{\operatorname{sh}^2(\sqrt{-ac}\tau)}(d\tau^2 - d\sigma^2). \quad (13.78)$$

Для стационарной области I метрика имеет вид

$$q = \sqrt{-\frac{c}{a}} \operatorname{th}(\sqrt{-ac}\sigma), \quad (13.79)$$

$$ds^2 = \frac{-c}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{-ac}\sigma)}(d\tau^2 - d\sigma^2). \quad (13.80)$$

На рис. 13.8 справа изображены конформные блоки и их склейка (диаграмма Картера–Пенроуза) для поверхностей постоянной кривизны.

Различные виды метрики при отсутствии или наличии горизонтов обусловлены различным выбором систем координат. Выпишем формулы преобразования координат, которые связывают между собой метрики в отсутствие горизонта, а также с одним и двумя горизонтами. Поскольку все метрики являются вейлевски плоскими, то связь между ними осуществляется конформным преобразованием координат. Запишем метрику с одним горизонтом (13.75) в конусных координатах (13.23) и совершим конформное преобразование $\xi \mapsto u(\xi)$, $\eta \mapsto v(\eta)$, тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{1}{a\tau^2}(d\tau^2 - d\sigma^2) = \frac{4}{a(\xi + \eta)^2} \frac{d\xi}{du} \frac{d\eta}{dv} du dv. \quad (13.81)$$

Преобразование конусных координат

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{ac}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{ac}}{2} u \right), \quad \eta = -\frac{2}{\sqrt{ac}} \operatorname{ctg} \left(\frac{\sqrt{ac}}{2} v \right) \quad (13.82)$$

дает метрику (13.72), которая соответствует отсутствию горизонта. Преобразования конусных координат

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{-ac}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{-ac}}{2} u \right), \quad \eta = \frac{2}{\sqrt{-ac}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{-ac}}{2} v \right) \quad (13.83)$$

и

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{-ac}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{-ac}}{2} u \right), \quad \eta = -\frac{2}{\sqrt{-ac}} \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt{-ac}}{2} v \right) \quad (13.84)$$

приводят к однородной (13.78) и статической (13.80) метрикам при наличии двух горизонтов.

Рассмотренные примеры показывают, что одной и той же поверхности могут соответствовать различные вейлевски плоские метрики, связанные конформным преобразованием координат. Однако независимо от выбора исходной метрики метод конформных блоков позволяет восстановить всю поверхность целиком единственным образом.

13.6. Координаты Эддингтона–Финкельштейна

В теореме 13.4.1 был описан конструктивный метод конформных блоков построения максимально продолженных поверхностей с одним вектором Киллинга. Дифференцируемость метрики внутри каждого конформного блока следует из построения. Конформные блоки склеиваются вдоль горизонтов q_j (нулей конформного множителя $\Phi(q_j) = 0$) с показателями асимптотики $m = 1$ (простой нуль) и $m \geq 2$. В настоящем разделе мы докажем дифференцируемость метрики на горизонтах после склейки, записав ее в новой системе координат, которая покрывает горизонты.

Пусть внутри интервала (q_-, q_+) есть нуль q_j нечетного порядка. Для определенности, будем считать, что в соседних интервалах (q_{j-1}, q_j) и (q_j, q_{j+1}) конформный множитель положителен и отрицателен соответственно. В соответствии с правилом 4) стационарный конформный блок типа I должен быть склеен с двумя однородными блоками типа II и IV. Соответствующие горизонты можно накрыть координатами Эддингтона–Финкельштейна [132, 133], которые вводятся следующим образом.

Склейка I–II. Для доказательства дифференцируемости метрики в склеенных областях I и II, включая горизонт, введем координаты Эддингтона–Финкельштейна $\tau, \sigma \mapsto \xi, q$. Эти координаты полностью покрывают указанные области, при этом функции перехода внутри областей I и II принадлежат классу $\mathcal{C}^{l+1}$, а метрика в новых координатах – классу $\mathcal{C}^l$.

В области I метрика для $q \in (q_{j-1}, q_j)$ имеет вид

$$\text{I:} \quad ds^2 = \Phi(q)(d\tau^2 - d\sigma^2), \quad \frac{dq}{d\sigma} = \Phi(q) > 0. \quad (13.85)$$

перейдем от декартовых координат τ, σ к координатам Эддингтона–Финкельштейна ξ, q :

$$\tau := \xi - \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}, \quad \sigma := \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}. \quad (13.86)$$

Интегралы в этих формулах на горизонте $q \rightarrow q_j$ расходятся, однако это не важно, т.к. преобразование координат (13.86) рассматривается только во внутренних точках области I. Координата $\xi = \tau + \sigma$ – это обычная “светоподобная” координата на плоскости τ, σ , а в качестве второй координаты выбрана сама переменная q . Эпитет светоподобная взят в кавычки, т.к. вскоре мы увидим, что координатные линии ξ в действительности не являются светоподобными.

Очевидно, что во внутренних точках функции перехода принадлежат классу $\mathcal{C}^{l+1}$.

Подставляя выражения для дифференциалов

$$d\tau = d\xi - \frac{dq}{\Phi}, \quad d\sigma = \frac{dq}{\Phi}, \quad (13.87)$$

в выражение для метрики (13.85), получим квадратичную форму

$$ds^2 = \Phi d\xi^2 - 2dq d\xi. \quad (13.88)$$

Определитель этой метрики равен $\det g_{\alpha\beta} = -1$, и поэтому метрика (13.88) определена для всех $\xi \in (-\infty, \infty)$ и, что важно, при всех $q \in (q_-, q_+)$, а не только при $q \in (q_{j-1}, q_j)$. Вектор ∂_q , касательный к координатным линиям q , имеет нулевую длину, $(\partial_q, \partial_q) = 0$, и, следовательно, координатные линии q светоподобны. Вектор ∂_ξ , касательный к координатным линиям ξ , не является светоподобным. Его квадрат равен $(\partial_\xi, \partial_\xi) = \Phi$. Он положителен в статичных областях и стремится к нулю при приближении к горизонту.

Метрика (13.88) определена в большей области, чем исходная метрика (13.1). Эта область – диагональная цепочка конформных блоков, идущих сверху слева вниз направо и склеенных вдоль координаты q (см. рис. 13.9 справа). При этом гладкость метрики (13.88) совпадает с гладкостью конформного множителя всюду, включая горизонты.

Отметим, что световые конусы в исходных координатах τ, σ были такими же, как и на плоскости Минковского, т.е. их образующие – это прямые линии, идущие под углом $\pm 45^\circ$. В координатах ξ, q так, как они показаны на рисунке, образующие световых конусов будут отличаться. Одна из образующих будет параллельна оси q , а вторая будет иметь наклон

$$\frac{d\xi}{dq} = \frac{2}{1 - \frac{2M}{q}}.$$

В однородной области для $q \in (q_j, q_{j+1})$ типа

$$\text{II:} \quad ds^2 = -\Phi(q)(d\tau^2 - d\sigma^2), \quad \frac{dq}{d\tau} = \Phi(q) < 0, \quad (13.89)$$

Рис. 13.9. Эквивалентные диаграммы Картера–Пенроуза для решения Рейснера–Нордстрема. Координаты Эддингтона–Финкельштейна покрывают диагональные цепочки конформных блоков, идущие снизу слева направо (в центре) или снизу справа налево (справа).

перейдем к координатам Эддингтона–Финкельштейна ξ, q :

$$\tau := \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}, \quad \sigma := \xi - \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}. \quad (13.90)$$

Преобразование координат в области II отличается от преобразования (13.86). Тем не менее метрика (13.89) снова принимает вид (13.88). Это означает, что координаты Эддингтона–Финкельштейна и заданная в них метрика (13.88) изометрично покрывают области I и II и, кроме того, метрика определена на их объединении и горизонте. Это доказывает, что на горизонте дифференцируемость метрики на продолженной поверхности совпадает с дифференцируемостью конформного множителя.

Можно также проверить, что горизонт q_j в координатах Эддингтона–Финкельштейна сам является светоподобной экстремалью.

Метрика (13.88) в координатах Эддингтона–Финкельштейна имеет вектор Киллинга ∂_ξ . Квадрат его длины равен конформному множителю $(\partial_\xi, \partial_\xi) = \Phi(q)$. Поэтому на горизонте длина вектора Киллинга равна нулю.

Склейка III–IV. Области III–IV склеиваются аналогично областям I и II. Приведем явные формулы перехода к координатам Эддингтона–Финкельштейна:

$$\text{III:} \quad \tau := \xi + \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}, \quad \sigma := - \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}. \quad (13.91)$$

и

$$\text{IV:} \quad \tau := - \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}, \quad \sigma := \xi + \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}. \quad (13.92)$$

При этом в обеих областях метрика имеет одинаковый вид

$$ds^2 = \Phi d\xi^2 + 2 dq d\xi. \quad (13.93)$$

Эта метрика определена на всей диагональной цепочке конформных блоков $q \in (q_-, q_+)$, идущей снизу справа направо (см. рис. 13.9 справа).

Между собой метрики (13.88) и (13.93) связаны преобразованием $\xi \mapsto -\xi$.

Склейка I–IV. В области I перейдем к координатам Эддингтона–Финкельштейна η, q :

$$\text{I:} \quad \tau := \eta + \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}, \quad \sigma := \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}, \quad (13.94)$$

где $\eta = \tau - \sigma$ – светоподобная координата. В новых координатах метрика принимает вид

$$ds^2 = \Phi d\eta^2 + 2 dq d\eta. \quad (13.95)$$

Эта метрика определена на всей диагональной цепочке конформных блоков $q \in (q_-, q_+)$, идущей снизу слева направо (см. рис. 13.9 в центре).

К этой же метрике в области IV приводят координаты

$$\text{IV:} \quad \tau := - \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}, \quad \sigma := -\eta - \int^q \frac{dr}{\Phi(r)}. \quad (13.96)$$

Аналогичные координаты вводятся при склейке областей II и III, при этом соответствующая метрика связана с метрикой (13.95) преобразованием $\eta \mapsto -\eta$.

Если горизонт q_j имеет четный порядок, и в обоих интервалах (q_{j-1}, q_j) и (q_j, q_{j+1}) конформный множитель, например, положителен, то, согласно правилу 4), склеиваются только однотипные блоки. Для доказательства дифференцируемости склейки на блоках типа I и III вводятся координаты (13.86) и (13.91) соответственно.

Таким образом доказывается дифференцируемость метрики и, следовательно, символов Кристоффеля и тензора кривизны на всех горизонтах. Метрика в координатах Эддингтона–Финкельштейна (13.88) при $q \in (q_-, q_+)$ покрывает всю диагональную цепочку конформных блоков типа I и II для фундаментальной области. Для этой цепочки блоков координата q убывает с возрастанием времени τ . Цепочка блоков представляет собой многообразие класса $\mathcal{C}^{l+1}$, т.к. функции перехода (13.86), (13.90) принадлежат этому классу. Метрика (13.93) покрывает параллельную цепочку блоков типа III и IV. Метрика в виде (13.95) покрывает перпендикулярную диагональную цепочку конформных блоков типа I и IV. Внутри каждой цепочки метрика в координатах Эддингтона–Финкельштейна невырождена и класса $\mathcal{C}^l$.

Если внутри интервала (q_-, q_+) , который соответствует глобальному решению, имеется n нулей, то для получения фундаментальной области необходимо склеить $2(n+1)$ конформных блоков (удвоенное число интервалов (q_j, q_{j+1})). Их можно склеить в две диагональных цепочки блоков, например, идущих снизу слева направо, как показано на рис. 13.9 в центре. В каждой цепочке склеиваются между собой либо только блоки I, IV, либо только блоки II, III. По построению, каждая цепочка является связным многообразием. Если внутри интервала есть хотя бы один нуль нечетного порядка, то вокруг него происходит склейка цепочек, как для решения Шварцшильда. При этом достаточно одного нуля нечетного порядка, чтобы превратить фундаментальную область в связное многообразие. Если же конформный множитель внутри интервала (q_-, q_+) знак не меняет, то диагональные цепочки блоков представляет собой две компоненты связности фундаментальной области. Это доказывает утверждение в правиле 5).

Нетрудно проверить, что переход от декартовых координат τ, σ к координатам Эддингтона–Финкельштейна вырожден на всех горизонтах.

Координаты Эддингтона–Финкельштейна являются естественными в следующем смысле. Прежде всего отметим, что продолжать локальное решение надо по переменной q , т.к. именно она определяет полноту многообразия и сингулярности кривизны. Поскольку для стационарного решения переменная q зависит от σ , то вместо σ можно выбрать само q (13.86), (13.91),

(13.94), при этом связь координат определяется уравнением (13.2) взаимно однозначно для каждого типа области с точностью до несущественного сдвига σ . После этого вместо временной координаты вводится светоподобная координата (13.23). При этом существует две возможности, и обе они реализуются, задавая координаты на взаимно перпендикулярных диагональных цепочках конформных блоков. Аналогично вводятся координаты Эддингтона–Финкельштейна на однородных блоках.

13.7. Дифференцируемость метрики в седловой точке

Координаты Эддингтона–Финкельштейна не покрывают седловых точек, расположенных в местах пересечения горизонтов. Седловые точки соответствуют нулям конформного множителя $\Phi(q_j) = 0$, расположенным в конечных точках, $|q_j| < \infty$ с показателем степени $m = 1$ или $m \geq 2$ (см. рис. 13.3). Если точка q_j является нулем кратности два или больше, то седловая точка полна, и доказывать ничего не надо. Если точка q_j – простой нуль, то можно ввести координаты, покрывающие окрестность седловой точки. Поскольку поведение конформного множителя вблизи простого нуля такое же, как и на плоскости Минковского, то перейдем к светоподобным координатам Крускала–Секереша $\tau, \sigma \mapsto u, v$. Явные формулы преобразования в областях I–IV имеют вид (13.58), (13.65), (13.62) и (13.68) соответственно. При этом мы положим $b := \Phi'(q_j)$ (см. раздел 13.5.4).

Рассмотрим область I более подробно. Метрика имеет вид

$$ds^2 = \Phi(d\tau^2 - d\sigma^2) = \Phi d\xi d\eta,$$

где ξ, η – светоподобные координаты (13.23). Преобразуем светоподобные координаты $\xi, \eta \mapsto u, v$ по формулам (13.58). Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \Phi e^{-b\sigma} du dv = \Phi \exp\left(-b \int^q \frac{dp}{\Phi(p)}\right) du dv,$$

где мы учли связь σ с q , которая дается уравнением

$$\frac{dq}{d\sigma} = \Phi.$$

Проведем аналогичное преобразование координат во всех четырех квадрантах и везде положим $b := \Phi'(q_j)$. Тогда во всех четырех квадрантах метрика (13.1) примет одинаковый вид

$$ds^2 = |\Phi| \exp\left(-\int^q dp \frac{\Phi'(q_j)}{\Phi(p)}\right) du dv = \exp\left(\int^q dp \frac{\Phi'(p) - \Phi'(q_j)}{\Phi(p)}\right) du dv. \quad (13.97)$$

Как и в случае плоскости Минковского координаты u, v покрывают окрестность седловой точки, состоящую из областей всех четырех типов, склеенных вдоль горизонтов.

Вблизи седловой точки при $m = 1$ справедливо разложение

$$\Phi(p) = \Phi_1(p - q_j) + \frac{1}{2}\Phi_2(p - q_j)^2 + o((p - q_j)^2), \quad \Phi_{1,2} = \text{const}, \quad \Phi_1 \neq 0.$$

Поэтому

$$\lim_{p \rightarrow q_j} \frac{\Phi'(p) - \Phi'(q_j)}{\Phi(p)} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

Поскольку в седловой точке предел подынтегрального выражения конечен, то интеграл является достаточно гладкой функцией. Это доказывает невырожденность и дифференцируемость

метрики в седловой точке, которая совпадает с дифференцируемостью конформного множителя.

Очевидно, что вблизи каждой седловой точки первого порядка можно ввести координаты Крускала–Секереша. Поскольку функции перехода к координатам Крускала–Секереша класса C^∞ , то класс гладкости универсальной накрывающей поверхности определяется гладкостью функций перехода к координатам Эддингтона–Финкельштейна, C^{l+1} . Тем самым доказательство основной теоремы 13.4.1 завершено.

Таким образом, мы показали, что локальное решение вида (13.1) имеет максимальное продолжение класса C^l . Описанная процедура является однозначной. Однако, это не доказывает единственность продолжения. Дело в том, что преобразование координат к координатам Эддингтона–Финкельштейна и Крускала–Секереша вырождено на горизонтах. Поэтому нельзя утверждать, что указанное продолжение решения вдоль экстремалей является единственным.

Метод построения глобальных решений для двумерных метрик лоренцевой сигнатуры, рассмотренный в настоящей главе, является простым и конструктивным. Если уравнения теории гравитации приводят к метрике (13.1) с некоторым конформным множителем, то для построения глобального решения достаточно проанализировать его нули и особенности. При этом восстанавливается универсальная накрывающая поверхность. Остальные глобальные решения являются факторпространствами универсальной накрывающей по группе преобразований, действующей собственно разрывно и свободно. Выше мы отметили возможность построения решений с нетривиальной фундаментальной группой путем отождествления элементов границы (горизонтов) фундаментальной области. В общем случае нахождение групп преобразований, действующих собственно разрывно и свободно, зависит от конкретного вида конформного множителя и является предметом самостоятельного исследования.

14. Римановы поверхности с одним вектором Киллинга

Римановы поверхности с одним вектором Киллинга включают в себя как частный случай римановы поверхности постоянной кривизны, которые имеют по три вектора Киллинга. Этот более широкий класс поверхностей имеет важное значение для общей теории относительности, т.к. позволяет дать физическую интерпретацию многим точным решениям уравнений Эйнштейна.

14.1. Локальный вид римановой метрики

Чтобы преобразовать лоренцеву метрику (13.1) к метрике евклидовой сигнатуры, совершим поворот в комплексной плоскости той из координат τ или σ , от которой конформный множитель не зависит. Поскольку метрика вида (13.1), по предположению, возникает в результате решения системы уравнений движения для некоторой модели гравитации, то соответствующая риманова метрика также будет являться локальным решением той же системы уравнений после поворота в комплексной плоскости.

В явном виде комплексный поворот задается следующим образом. Введем новую координату $\tau := i\rho$ в статичных областях I, III и $\sigma := i\rho$ – в однородных областях II, IV. В результате получим метрику

$$ds^2 = -\Phi(q)(d\sigma^2 + d\rho^2), \quad (14.1)$$

где в областях II и IV мы переобозначили координату $\tau \mapsto \sigma$. Знак конформного множителя $\Phi(q)$ не фиксирован, т.е. рассматриваются как положительно, так и отрицательно определенные метрики. После комплексного поворота аргумент конформного множителя q зависит только от σ , и эта связь задается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\left| \frac{dq}{d\sigma} \right| = |\Phi(q)|. \quad (14.2)$$

Знаки модуля в этом уравнении раскрываются следующим образом:

$$\begin{array}{lll} \text{I : } & \Phi > 0, & dq/d\sigma > 0, & \text{sign } g_{\alpha\beta} = (--), \\ \text{II : } & \Phi < 0, & dq/d\sigma < 0, & \text{sign } g_{\alpha\beta} = (++) , \\ \text{III : } & \Phi > 0, & dq/d\sigma < 0, & \text{sign } g_{\alpha\beta} = (--), \\ \text{IV : } & \Phi < 0, & dq/d\sigma > 0, & \text{sign } g_{\alpha\beta} = (++) , \end{array} \quad (14.3)$$

где в последней колонке показана сигнатура метрики (14.1).

Как и в случае метрики лоренцевой сигнатуры, у нас есть четыре области: две области с положительно определенной и две области с отрицательно определенной метрикой. Метрики в областях I и III, а также II и IV по существу одинаковы, т.к. связаны между собой простым преобразованием $\sigma \mapsto -\sigma$.

Метрика вида (14.1) обладает по крайней мере одним вектором Киллинга $K = \partial_\rho$, квадрат длины которого равен $(\partial_\rho, \partial_\rho) = -\Phi(q)$.

Риманова метрика, заданная уравнениями (14.1), (14.2), и будет предметом исследования в настоящем разделе. Мы допускаем, что конформный множитель может обращаться в нуль

и иметь особенности в конечном числе точек q_i , $i = 1, \dots, k$. В эту последовательность включены также бесконечно удаленные точки $q_1 = -\infty$ и $q_k = \infty$. Таким образом, вещественная ось q разбивается точками q_i на интервалы, внутри которых конформный множитель либо строго больше, либо строго меньше нуля. Будем считать, что вблизи граничных точек q_i конформный множитель ведет себя, как и в лоренцевом случае, степенным образом (13.4), (13.5). При конечных значениях q_i показатель степени не равен нулю, $m \neq 0$, так как конформный множитель в этой точке, по предположению, либо равен нулю, либо сингулярен.

Символы Кристоффеля имеют следующие нетривиальные компоненты:

$$\text{I, II:} \quad \Gamma_{\sigma\sigma}^{\sigma} = \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} = \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} = -\Gamma_{\rho\rho}^{\sigma} = \frac{1}{2}\Phi', \quad (14.4)$$

$$\text{III, IV:} \quad \Gamma_{\sigma\sigma}^{\sigma} = \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} = \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} = -\Gamma_{\rho\rho}^{\sigma} = -\frac{1}{2}\Phi', \quad (14.5)$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу, $\Phi' := d\Phi/dq$, и никакого суммирования по индексам ρ и σ не проводится. Тензор кривизны одинаков для всех областей и имеет только одну независимую компоненту

$$R_{\sigma\rho}^{\rho} = \frac{1}{2}\Phi\Phi'' \quad (14.6)$$

Тензор Риччи диагонален. Его ненулевые компоненты и скалярная кривизна равны

$$R_{\sigma\sigma} = R_{\rho\rho} = \frac{1}{2}\Phi\Phi'', \quad (14.7)$$

$$R = -\Phi''. \quad (14.8)$$

Отсюда следует, что для поверхностей постоянной кривизны, $R = \text{const}$, как и в лоренцевом случае, конформный множитель Φ является квадратичным полиномом.

Из уравнения (14.8) следует, что скалярная кривизна сингулярна вблизи граничной точки q_i при тех же показателях (13.18), (13.19), что и в лоренцевом случае. В граничных точках $q_i = \pm\infty$ скалярная кривизна стремится к отличной от нуля постоянной при $m = 2$ и к нулю при $m < 2$. Отметим, что ненулевое значение кривизны в конечной точке $|q_i| < \infty$ может возникнуть и при $m = 1$ за счет поправок следующего порядка в разложении (13.4).

Значение переменной q и, значит, скалярной кривизны постоянно вдоль траекторий Киллинга $\sigma = \text{const}$. В соответствии с определением областей (14.3) q монотонно возрастает по σ в областях I, IV и монотонно убывает в областях II, III.

Область определения метрики (14.1) на плоскости σ, ρ зависит от вида конформного множителя. Координата $\rho \in \mathbb{R}$ пробегает всю вещественную прямую, поскольку от нее ничего не зависит, а область изменения координаты σ определяется уравнением (14.2). Каждому интервалу переменной $q \in (q_i, q_{i+1})$ соответствует конечный, полубесконечный или бесконечный интервал координаты σ в зависимости от сходимости или расходимости интеграла

$$\sigma_{i,i+1} \sim \int^{q_i, q_{i+1}} \frac{dq}{\Phi(q)} \quad (14.9)$$

в граничных точках. Сходимость интеграла определяется показателем степени m :

$$\begin{aligned} |q_i| < \infty : & \quad \begin{cases} m < 1, & \text{сходится,} \\ m \geq 1, & \text{расходится,} \end{cases} \\ |q_i| = \infty : & \quad \begin{cases} m \leq 1, & \text{расходится,} \\ m > 1, & \text{сходится,} \end{cases} \end{aligned} \quad (14.10)$$

Если на обоих концах интервала (q_i, q_{i+1}) интеграл расходится, то координата σ пробегает всю вещественную ось, $\sigma \in (-\infty, \infty)$, и метрика определена на всей плоскости $\sigma, \rho \in \mathbb{R}^2$. Если на одном из концов q_{i+1} или q_i интеграл сходится, то метрика определена на полуплоскости $\sigma \in (-\infty, \sigma_{i+1})$ или $\sigma \in (\sigma_i, \infty)$ соответственно. При этом выбор граничных точек σ_{i+1} и σ_i произволен, и, не ограничивая общности, можно положить $\sigma_{i,i+1} = 0$. Если на обоих концах интервала интеграл сходится, то локальное решение определено в полосе $\sigma \in (\sigma_i, \sigma_{i+1})$, при этом можно приравнять нулю только один из концов интервала.

В лоренцевом случае для построения максимально продолженных поверхностей каждому интервалу (q_i, q_{i+1}) ставятся в соответствие конформные блоки определенной формы, которые затем склеиваются между собой. При евклидовой сигнатуре метрики в этом нет необходимости, поскольку “светоподобные” экстремали с асимптотикой $\rho = \pm\sigma + \text{const}$, как будет показано ниже, в общем случае отсутствуют.

14.2. Экстремали

Для того чтобы описать максимально продолженную поверхность для римановой метрики (14.1) с одним вектором Киллинга, необходимо проанализировать поведение экстремалей $\{\zeta^\alpha(t)\} = \{\sigma(t), \rho(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, которые задаются системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (13.25), где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру t .

Для определенности, рассмотрим область I. Используя выражение для символов Кристоффеля (14.4), получаем систему уравнений для экстремалей:

$$\ddot{\sigma} = \frac{1}{2}\Phi'(\dot{\rho}^2 - \dot{\sigma}^2), \quad (14.11)$$

$$\ddot{\rho} = -\Phi'\dot{\sigma}\dot{\rho}. \quad (14.12)$$

Эта система уравнений имеет два первых интеграла:

$$-\Phi(\dot{\sigma}^2 + \dot{\rho}^2) = C_0 = \text{const}, \quad (14.13)$$

$$-\Phi\dot{\rho} = C_1 = \text{const}. \quad (14.14)$$

Существование интеграла движения (14.13) позволяет выбрать длину экстремали в качестве канонического параметра. Второй интеграл (14.14) связан с наличием вектора Киллинга. На этом этапе проявляется важность наличия у метрики одного вектора Киллинга, т.к. существование двух интегралов позволяет проанализировать экстремали в общем случае, не конкретизируя вид конформного множителя $\Phi(q)$.

В системе уравнений для экстремалей (14.11), (14.12) конформный множитель Φ рассматривается, как сложная функция от σ : $\Phi = \Phi(q(\sigma))$, где $q(\sigma)$ – решение уравнения (14.2). Если форма экстремали $\sigma(\rho)$ найдена, то конформный множитель можно рассматривать так же, как сложную функцию от ρ вдоль каждой экстремали: $\Phi = \Phi(\sigma(\rho))$. В дальнейшем анализе это будет подразумеваться.

ТЕОРЕМА 14.2.1. *Любая экстремаль в области I принадлежит одному из следующих четырех классов.*

1. *Прямые экстремали вида (аналог светоподобных экстремалей)*

$$\rho = \pm\sigma + \text{const}, \quad (14.15)$$

существуют только для евклидовой метрики $\Phi = \text{const}$, при этом канонический параметр можно выбрать в виде $\sigma = t$.

2. Экстремали общего вида, форма которых определена уравнением

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \pm \frac{1}{\sqrt{-1 - C_2\Phi}}, \quad (14.16)$$

где $C_2 < 0$ – отрицательная постоянная. Соответствующий канонический параметр определяется любым из двух уравнений:

$$\dot{\sigma} = \pm \frac{\sqrt{-1 - C_2\Phi}}{\Phi}, \quad (14.17)$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\Phi}. \quad (14.18)$$

При этом в уравнениях (14.16) и (14.17) знаки плюс или минус выбираются одновременно.

3. Прямые экстремали, параллельные оси σ и проходящие через каждую точку $\rho = \text{const}$. Канонический параметр определен уравнением

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}. \quad (14.19)$$

4. Прямые вырожденные экстремали, параллельные оси ρ и проходящие через критические точки $\sigma_0 = \text{const}$, в которых

$$\Phi'(\sigma_0) = 0. \quad (14.20)$$

Канонический параметр для них можно выбрать в виде

$$t = \rho. \quad (14.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Почти дословное повторение доказательства теоремы 13.3.1 в лоренцевом случае.

Постоянная C_2 , как и в лоренцевом случае, определяется интегралами (14.13) и (14.14):

$$C_2 := \frac{C_0}{C_1^2}. \quad (14.22)$$

Для области I $\Phi > 0$ и, следовательно, $C_0 < 0$ и $C_2 < 0$. Из уравнения (14.16) следует, что постоянная C_2 параметризует угол, под которым экстремаль общего вида проходит через заданную точку.

Подчеркнем качественное отличие в поведении экстремалей для метрик евклидовой и лоренцевой сигнатуры. Во-первых, для римановой метрики в общем случае отсутствует аналог светоподобных экстремалей. Это важно, так как в лоренцевом случае светоподобные экстремали были неполны на горизонтах и их необходимо было продолжить. Для римановых метрик эта проблема снимается. Во-вторых, уравнения для экстремалей общего вида (14.16) и (14.17) отличаются от соответствующих уравнений в лоренцевом случае знаком перед единицей, стоящей под знаком корня. Это небольшое на первый взгляд отличие приводит к тому, что у экстремалей общего вида уже нет светоподобной асимптотики при $q \rightarrow q_i$ вблизи нулей конформного множителя $\Phi(q_i) = 0$, которые определяют горизонты.

Качественное поведение экстремалей общего вида анализируется в общем случае, для чего достаточно знать поведение конформного множителя $\Phi(q)$ вблизи граничных точек q_i . Поскольку конформный множитель в области I положителен, то экстремали общего вида существуют только при отрицательных значениях постоянной C_2 , т.к. в противном случае правая часть уравнения (14.18) становится мнимой. При этом должно быть выполнено неравенство

$$\Phi(q) \geq -1/C_2.$$

При достаточно больших значениях модуля C_2 это неравенство определяет интервал изменения переменной $q \in (q', q'')$, где граничные точки q' и q'' определяются уравнением $\Phi(q) = -1/C_2$. Точкам q', q'' соответствуют некоторые точки σ' и σ'' . Экстремаль общего вида не может выйти за пределы полосы $\sigma \in (\sigma', \sigma'')$, $\rho \in (-\infty, \infty)$. Несложный анализ уравнения (14.18) показывает, что экстремали общего вида осциллируют между значениями σ' и σ'' , как показано на рис. 14.1 a_3, b_3 . Осциллирующие экстремали всегда полны, поскольку правая часть уравнения (14.18) ограничена сверху значением $1/\Phi(q')$ или $1/\Phi(q'')$ и снизу $1/\max \Phi(q)$.

Если конформный множитель $\Phi(q)$ равен бесконечности в точке q_{i+1} , как показано на рис. 14.1 b , то экстремаль общего вида может начинаться и заканчиваться на границе, где $\Phi(q_{i+1}) = \infty$. Эта граница соответствует конечному значению σ_{i+1} при $|q_{i+1}| < \infty$, $m < 1$ и $|q_{i+1}| = \infty$, $m > 1$. При этом все экстремали подходят к границе $\Phi = \infty$ под прямым углом, т.к. правая часть уравнения (14.16) стремится к нулю. Полнота экстремалей общего вида, подходящих к границе $\Phi = \infty$, определяется интегралом

$$\lim_{q \rightarrow q_{i+1}} t \rightarrow \int^{q_{i+1}} \frac{dq}{\sqrt{\Phi}}, \quad (14.23)$$

что следует из уравнений (14.17) и (14.2). Тем самым полнота экстремалей общего вида, подходящих к сингулярной границе, такая же, как и прямых экстремалей, параллельных оси σ (14.19). Они полны только при $|q_{i+1}| = \infty$ и $1 < m \leq 2$.

В лоренцевом случае в области I к границе $\Phi = \infty$ подходят только прямые и пространственноподобные экстремали (см. раздел 13.3). Их полнота связана с показателем степени m так же, как и для римановой метрики.

На рис. 14.1 в верхнем ряду (a_1, b_1) показано типичное поведение конформного множителя с одним экстремумом между двумя нулями и с двумя локальными экстремумами между нулем и особенностью. В последнем случае мы предполагаем, что $|q_{i+1}| < \infty$ и $m < 0$, что соответствует сингулярной кривизне. В среднем ряду (a_2, b_2) представлена зависимость этих конформных множителей от координаты σ . На рис. 14.1, b_2 значение координаты σ_{i+1} конечно, что следует из сходимости интеграла (14.9). В нижнем ряду (a_3, b_3) показано качественное поведение экстремалей на σ, ρ плоскости. Через каждый локальный экстремум конформного множителя проходит вырожденная экстремаль (d). Экстремали общего вида (o) осциллируют вблизи локального максимума $\Phi(\sigma_0)$ между значениями σ' и σ'' , которые определяются постоянной C_2 . Экстремали общего вида (r) могут также начинаться и заканчиваться на границе $\Phi(\sigma_{i+1}) = \infty$, имея при этом конечную длину. Существуют также экстремали общего вида (s), которые асимптотически приближаются при $\rho \rightarrow \pm\infty$ к вырожденной экстремали, проходящей через локальный минимум σ'_0 . Часть из этих экстремалей заканчивается на границе $\Phi(\sigma_{i+1}) = \infty$ при конечном значении канонического параметра.

Все экстремали можно произвольно сдвигать вдоль оси ρ . Через каждую точку ρ проходит также экстремаль (p), параллельная оси σ .

Если обе граничные точки интервала q_i и q_{i+1} являются нулями, то из непрерывности конформного множителя Φ следует, что у него есть по крайней мере один экстремум, через который проходит вырожденная экстремаль (d). Вырожденные экстремали всегда полны, т.е. имеют бесконечную длину, т.к. канонический параметр совпадает с координатой ρ (14.21).

Проведенный анализ экстремалей показывает, что неполнота экстремалей в полосе $\sigma \in (\sigma_i, \sigma_{i+1})$, $\rho \in (-\infty, \infty)$ полностью определяется поведением экстремалей, параллельных оси σ , при подходе к граничным точкам σ_i, σ_{i+1} . Что, в свою очередь, определяется сходимостью интеграла (14.23). Эти экстремали неполны в конечных точках $|q_i| < \infty$ при $m < 2$. В бесконечно удаленных точках $|q_i| = \infty$ они неполны при $m > 2$ и полны во всех остальных случаях.

Рис. 14.1. Верхний ряд (a_1, b_1): типичное поведение конформного множителя $\Phi(q)$ между двумя нулями и нулем и сингулярностью. Средний ряд (a_2, b_2): зависимость конформного множителя $\Phi(\sigma)$ от координаты σ . Точка σ_{i+1} может находиться как на конечном, так и на бесконечном расстоянии от начала координат. Нижний ряд (a_3, b_3): типичные экстремали общего вида при разных значениях постоянной C_2 . Вблизи локального максимума экстремали (o) осциллируют между σ' и σ'' . Через каждый локальный экстремум проходит вырожденная экстремаль (d). Существуют экстремали (s), которые асимптотически приближаются к вырожденной экстремали в локальном минимуме σ'_0 и могут заканчиваться на сингулярной границе σ_{i+1} . Экстремали (r) конечной длины начинаются и заканчиваются на сингулярной границе. Все экстремали можно произвольно сдвигать вдоль оси ρ . Через каждую точку ρ проходит также экстремаль (p), параллельная оси σ .

$ q_i < \infty$						
	$m < 0$	$0 < m < 1$	$m = 1$	$1 < m < 2$	$m = 2$	$m > 2$
R	∞	∞	const	∞	const	0
σ_i	const	const	∞	∞	∞	∞
P^2	∞	0	0	0	0	0
Полнота	—	—	—	—	+	+

$ q_i = \infty$						
	$m < 0$	$m = 0$	$0 < m \leq 1$	$1 < m < 2$	$m = 2$	$m > 2$
R	0	0	0	0	const	∞
σ_i	∞	∞	∞	const	const	const
P^2	0	const	∞	∞	∞	∞
Полнота	+	+	+	+	+	—

Таблица 14.1. Свойства граничных точек в зависимости от показателя степени m . Символ **const** в строках для скалярной кривизны и длины направляющей окружности обозначает отличную от нуля константу.

Учитывая, что продолжать поверхность необходимо только при конечных значениях кривизны, приходим к выводу, что продолжение поверхности необходимо только в случае простого нуля, $m = 1$, у конформного множителя в конечной точке $|q_i| < \infty$. Напомним, что простой нуль конформного множителя в лоренцевом случае соответствует горизонту.

14.3. Построение глобальных решений

Чтобы построить максимальное продолжение поверхностей с римановой метрикой (14.1), имеющей по крайней мере один вектор Киллинга, произведем следующее построение, которое будет также полезно для наглядного изображения поверхностей. Поскольку конформный множитель не зависит от ρ , то можно отождествить прямые ρ и $\rho + L$, где $L > 0$ — произвольная положительная постоянная. При таком отождествлении плоскость σ, ρ сворачивается в цилиндр. Длина направляющей окружности P определяется конформным множителем и на границе $q \rightarrow \pm\infty$ равна либо постоянной, либо бесконечности:

$$P^2 = -L^2 \Phi(q) \xrightarrow{q \rightarrow \pm\infty} \begin{cases} 0, & \Phi(\pm\infty) = 0, \\ \text{const} \neq 0, & \Phi(\pm\infty) = \text{const} \neq 0, \\ \mp\infty & \Phi(\pm\infty) = \pm\infty. \end{cases} \quad (14.24)$$

В конечных точках $q \rightarrow q_i \neq \pm\infty$ квадрат длины направляющей окружности может принимать только два значения:

$$P^2 = -L^2 \Phi(q) \xrightarrow{q \rightarrow q_i} \begin{cases} 0, & \Phi(q_i) = 0, \\ \mp\infty & \Phi(q_i) = \pm\infty. \end{cases} \quad (14.25)$$

При этом плоскость σ, ρ является универсальным накрывающим пространством цилиндра.

Подытожим в таблице 14.1 свойства граничных точек q_i . В зависимости от показателя степени m здесь указаны значения скалярной кривизны R на соответствующей границе, конечность значения координаты σ_i в точке q_i , квадраты длин направляющих окружностей цилиндров P^2 (с точностью до знака) и полнота экстремалей, параллельных оси σ .

На рис. 14.2 показан вид поверхностей вблизи граничной точки q_{i+1} после отождествления $\rho \sim \rho + L$. Поверхности вблизи точки q_i имеют такой же вид, но повернуты в другую сторону. Поверхность, соответствующая всему интервалу (q_i, q_{i+1}) , получается после склейки двух

таких поверхностей для граничных точек q_i и q_{i+1} . Из таблицы 14.1 следует, что точка q_i является неполной по экстремалиям, и при этом кривизна несингулярна в единственном случае, когда $|q_i| < \infty$ при $m = 1$. Таким образом, мы видим, что необходимо продолжить экстремали только вблизи точки $|q_i| < \infty$ при $m = 1$. Поскольку эта точка при лоренцевой сигнатуре метрики соответствует горизонту, то и в евклидовом случае оставим это же название.

Продолжение поверхности через горизонт проводится следующим образом. Прежде всего отметим, что горизонт в евклидовом случае представляет собой точку, так как длина направляющей окружности стремится к нулю. Кроме того, эта “бесконечно удаленная” точка $\sigma = \infty$ в плоскости ρ, σ на самом деле находится на конечном расстоянии, т.к. все экстремали достигают этой точки при конечном значении канонического параметра. В окрестности точки q_i с точностью до членов более высокого порядка конформный множитель имеет вид

$$\Phi(q) = \Phi'_i(q - q_i), \quad (14.26)$$

где $\Phi'_i := \Phi'(q_i) = \text{const} \neq 0$. В области I при $\Phi'_i > 0$ и $q > q_i$ уравнение (14.2) легко интегрируется

$$q - q_i = e^{\Phi'_i \sigma},$$

где отброшена несущественная постоянная интегрирования, соответствующая сдвигу σ . Таким образом, граничная точка $|q_i| < \infty$ достигается при $\sigma \rightarrow -\infty$. В координатах q, ρ , которые играют роль шварцшильдовских координат в лоренцевом случае, метрика (14.1) принимает вид

$$-ds^2 = \frac{dq^2}{\Phi'_i(q - q_i)} + \Phi'_i(q - q_i)d\rho^2. \quad (14.27)$$

В полярных координатах r, φ , определенных формулами

$$q - q_i := \frac{\Phi'_i}{4}r^2, \quad \rho := \frac{2}{\Phi'_i}\varphi, \quad (14.28)$$

метрика становится евклидовой

$$-ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

При этом полярный угол, что важно, меняется в интервале $\varphi \in (0, L\Phi'_i/2)$ при $\rho \in [0, L]$, а радиус r определен в окрестности граничной точки q_i соотношением (14.28). Рассмотренное преобразование координат отображает “бесконечно удаленную” точку $\sigma_i = -\infty$ в начало координат евклидовой плоскости. Поскольку полярный угол меняется в интервале, который в общем случае отличен от интервала $(0, 2\pi)$, то в начале координат возможно наличие конической сингулярности. Соответствующий угол дефицита равен

$$2\pi\theta := \frac{L\Phi'_i}{2} - 2\pi. \quad (14.29)$$

Таким образом, мы получили евклидову метрику на плоскости $\mathbb{R}^2$ с конической сингулярностью. При

$$L = 4\pi/\Phi_i \quad (14.30)$$

угол дефицита равен нулю, коническая сингулярность отсутствует, и мы получаем плоскую евклидову метрику, гладкость которой в начале координат очевидна. В общем случае конформный множитель (14.26) вблизи граничной точки q_i содержит поправки более высокого порядка, и переход к полярным координатам при нулевом угле дефицита дает метрику того же класса гладкости, что и конформный множитель.

Рис. 14.2. Вид поверхности вблизи граничной точки q_{i+1} после отождествления $\rho \sim \rho + L$. Мы предполагаем, что координата σ возрастает слева направо и $\sigma_{i+1} > \sigma_i$. Поверхности вблизи точки q_i имеют такой же вид, но повернуты в другую сторону. Поверхность для интервала q_i, q_{i+1} получается после склейки двух таких поверхностей для точек q_i и q_{i+1} .

Таким образом, в общем случае продолжение решения через точку $|q_i| < \infty$ при $m = 1$ не имеет смысла, так как эта точка соответствует конической сингулярности. Мы считаем, что точка, в которой находится коническая сингулярность, как и носитель всякой другой сингулярности, не принадлежит многообразию. Поэтому универсальной накрывающей для такого решения будет плоскость σ, ρ или ее часть с метрикой (14.1). В исключительном случае отсутствия конической сингулярности при $L = 4\pi/\Phi'_i$ продолжение необходимо. При этом прямые экстремали, параллельные оси σ и проходящие через точки ρ и $\rho + L/2$, представляют собой две половины одной экстремали, как показано на рис. 14.3. При отсутствии конической син-

Рис. 14.3. Продолжение прямых экстремалей, проходящих через точки ρ и $\rho + L/2$ в отсутствие конической сингулярности $L = 4\pi/|\Phi'_i|$. Отождествление происходит в бесконечно удаленной точке $\sigma_i = -\infty$.

гулярности фундаментальная группа поверхности тривиальна, и поэтому соответствующая поверхность сама представляет собой универсальную накрывающую.

Если на обоих концах интервала (q_i, q_{i+1}) конформный множитель имеет асимптотики $\Phi \sim (q - q_i)$ и $\Phi \sim (q_{i+1} - q)$, то поверхность необходимо продолжить в обеих точках $\sigma = \pm\infty$. После отождествления $\rho \sim \rho + L$ в общем случае в граничных точках возникают конические сингулярности. Если $L\Phi'_i = 4\pi$ и $L\Phi'_{i+1} = 4\pi$, то конические сингулярности отсутствуют. На рис. 14.4 показаны три возможных вида глобальных поверхностей, соответствующих наличию или отсутствию конических сингулярностей. Эти поверхности имеют топологию цилиндра, плоскости и сферы соответственно.

Рис. 14.4. Три возможных вида поверхностей, соответствующих интервалу (q_i, q_{i+1}) , когда конформный множитель имеет асимптотику $\Phi \sim q - q_{i,i+1}$ в граничных точках. При отождествлении $\rho \sim \rho + L$ в общем случае возникают две конические сингулярности. При $L|\Phi'_{i,i+1}| = 4\pi$ конические сингулярности отсутствуют.

Сформулируем правила построения максимально продолженных решений с метрикой вида (14.1)

1. После отождествления $\rho \sim \rho + L$ каждому интервалу (q_i, q_{i+1}) соответствует максимально продолженное решение, которое получается склеиванием двух поверхностей, изображенных на рис. 14.2 и соответствующих граничным точкам q_i и q_{i+1} .
2. Во всех случаях, кроме отсутствия конической сингулярности $|q_i| < \infty$, $L\Phi'_i \neq 4\pi$ или $|q_{i+1}| < \infty$, $L|\Phi'_{i+1}| \neq 4\pi$, полоса $\sigma \in (\sigma_i, \sigma_{i+1})$, $\rho \in \mathbb{R}$ с метрикой (14.1) является универсальным накрывающим пространством для соответствующего максимально продолженного решения.
3. При отсутствии одной из конических сингулярностей, $|q_i| < \infty$, $L\Phi'_i = 4\pi$, или $|q_{i+1}| < \infty$, $L|\Phi'_{i+1}| = 4\pi$, поверхность, полученная из плоскости σ, ρ путем отождествления $\rho \sim \rho + L$, представляет собой максимально продолженное решение с тривиальной фундаментальной группой.

Отметим, что в общем случае при построении максимально продолженных решений нам не приходилось склеивать карты. Это значит, что соответствующие поверхности принадлежат классу C^∞ . При отсутствии конической сингулярности переход к полярным координатам (14.28) не использует явный вид конформного множителя, и возникающая поверхность, так же как и евклидова плоскость, является бесконечно дифференцируемым многообразием. Тем самым мы доказали теорему, оправдывающую приведенные выше правила построения глобальных решений.

ТЕОРЕМА 14.3.1. *Универсальное накрывающее пространство, построенное по правилам 1–3, является максимально продолженным гладким многообразием класса C^∞ с римановой метрикой класса C^l , $l \geq 2$, таким, что область вне горизонта изометрична (части) плоскости ρ, σ с метрикой (14.1).*

Таким образом построены глобальные решения для широкого класса двумерных метрик евклидовой сигнатуры, которые имеют один вектор Киллинга. Доказана гладкость возникающих двумерных поверхностей и дифференцируемость метрики. Этот метод конструктивен и является аналогом метода конформных блоков для двумерных метрик лоренцевой сигнатуры. Почти всегда каждый конформный блок представляет собой универсальное накрывающее пространство для максимально продолженной римановой поверхности. Исключение составляют поверхности с горизонтом, который в евклидовом случае представляет собой точку.

14.4. Решение Шварцшильда

В качестве примера рассмотрим решение Шварцшильда. Для этого решения t, r часть метрики имеет вид

$$ds^2 = |\Phi(q)|(d\tau^2 - d\sigma^2), \quad (14.31)$$

где

$$\Phi(q) = 1 - \frac{2M}{q}, \quad q = \begin{cases} r, & \Phi(q) > 0 \\ t, & \Phi(q) < 0. \end{cases}$$

При этом связь переменной q с одной из координат τ или σ задается дифференциальным уравнением (13.2). Максимально продолженное решение Шварцшильда имеет вид топологического произведения двух поверхностей $\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$, где $\mathbb{S}^2$ – сфера и $\mathbb{U}$ – двумерная лоренцева поверхность, которая наглядно изображается в виде диаграммы Картера–Пенроуза, рис. 14.5 слева.

Диаграмма Картера–Пенроуза после изменения сигнатуры метрики распадается на четыре отдельные поверхности, которые показаны на рис. 14.5 справа. Областям вне горизонта черной дыры соответствуют две римановы поверхности I и III с отрицательно определенной метрикой. Четырехмерная метрика является отрицательно определенной, $\text{sign } g_{\mu\nu} = (----)$. Отрицательная определенность евклидовой метрики связана с выбором сигнатуры для метрики Шварцшильда (14.31) и может быть изменена. Это решение обычно рассматривается, как евклидова версия решения Шварцшильда. Области под горизонтами черной и белой дыр соответствуют поверхностям II и IV соответственно. При этом сигнатура полной метрики равна $\text{sign } g_{\mu\nu} = (++--)$.

Рис. 14.5. Диаграмма Картера–Пенроуза для решения Шварцшильда при евклидовой сигнатуре метрики распадается на четыре отдельные поверхности. Областям вне горизонта соответствуют две поверхности с отрицательно определенной метрикой I, III, а областям внутри горизонта – две поверхности с положительно определенной метрикой.

Ситуация с евклидовой версией решения Шварцшильда типична. Связная диаграмма Картера–Пенроуза в лоренцевом случае разрезается вдоль всех горизонтов и переходит в несвязные римановы поверхности с отрицательно или положительно определенной метрикой. При этом переход через горизонт с нечетным m соответствует изменению знака римановой метрики.

15. Двумерная гравитация

Модели двумерной гравитации привлекают большое внимание в последнее время по трем причинам. Во-первых, эти модели являются эффективными моделями гравитации в двух измерениях после редукции многомерных теорий гравитации. Например, сферически симметричная общая теория относительности сводится к двумерной гравитации, где в качестве координат выступают время и радиус. Во-вторых, модели двумерной гравитации относительно просты и поддаются аналитическому анализу, что позволяет глубже понять многомерные модели. В-третьих, интерес к двумерным моделям гравитации возрос после появления теории струн, в которых метрика на мировой поверхности струны становится новой динамической переменной.

В настоящей главе мы опишем модель двумерной гравитации довольно общего вида. Проведем гамильтонов анализ и проинтегрируем уравнения движения. В качестве примера мы построим все глобальные решения в квадратичной модели гравитации с кручением. В заключительных разделах будет рассмотрена пуассонова сигма модель и двумерная теория полей Янга–Миллса.

15.1. Двумерная гравитация с кручением

Рассмотрим двумерное многообразие (поверхность) $\mathbb{M}$. Пусть x^α , $\alpha = 0, 1$, – локальная система координат. Предположим, что на $\mathbb{M}$ задана геометрия Римана–Картана, т.е. метрика $g_{\alpha\beta}$ и кручение $T_{\alpha\beta}{}^\gamma := \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma$, где $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ – компоненты аффинной связности (см. [23], раздел 6.2). Предположим также, что метрика имеет лоренцеву сигнатуру, $\text{sign } g_{\alpha\beta} = (+ -)$.

Метрика и кручение полностью определяют геометрию на $\mathbb{M}$. В геометрии Римана–Картана они однозначно задают аффинную связность $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ и соответствующий тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$ (7.19). Конечно, поскольку на поверхности задана метрика, то определены также символы Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$ и построенный по ним тензор кривизны $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$. Эти геометрические объекты, построенные при нулевом тензоре кручения, мы будем, как и раньше, помечать знаком тильды.

В двумерном случае геометрия существенно упрощается ввиду наличия полностью антисимметричного тензора второго ранга $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$. Действительно, поскольку тензор кривизны в геометрии Римана–Картана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ со всеми опущенными индексами антисимметричен как по первой, так и по второй паре индексов, то он всегда представим в виде

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}R, \quad (15.1)$$

где $R := R_{\alpha\beta\gamma}{}^\beta g^{\alpha\gamma}$ – скалярная кривизна. Такому же равенству удовлетворяет тензор кривизны, построенный только по метрике

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}\tilde{R}. \quad (15.2)$$

Поскольку тензор кручения антисимметричен по первой паре индексов, то он всегда представим в виде

$$T_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}T^{*\gamma}, \quad (15.3)$$

где $T^{*\gamma} := T_{\alpha\beta}{}^\gamma \varepsilon^{\alpha\beta}$ – псевдослед тензора кручения. Приставка “псевдо-” в данном случае означает, что вектор $T^{*\gamma}$ относительно общих преобразований координат меняет знак при пространственных отражениях $x^1 \mapsto -x^1$, когда координаты выбраны соответствующим образом.

Таким образом, в геометрии Римана–Картана на поверхности тензор кривизны имеет только одну независимую компоненту, в качестве которой мы выбираем скалярную кривизну R , а тензор кручения – две $T^{*\alpha}$.

Хорошо известно, что в двумерном действии Гильберта–Эйнштейна

$$S_{\text{HE}} = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \tilde{R}, \quad (15.4)$$

подынтегральное выражение $\sqrt{|g|} \tilde{R} = \partial_\alpha (\dots)^\alpha$ представляет собой полную дивергенцию (в дальнейшем мы это увидим), и интеграл является топологическим инвариантом, который пропорционален эйлеровой характеристике поверхности. Отсюда следует, что вариация действия Гильберта–Эйнштейна (15.4) по метрике в двумерном случае не дает никаких уравнений движения. В этом также можно убедиться непосредственно. Действительно, из выражения для тензора кривизны (15.2) следует, что равенство

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} = 0$$

в двумерном случае является тождеством. В этом смысле общая теория относительности в двумерном пространстве-времени является тривиальной.

Мы видим, что для того, чтобы построить нетривиальную модель гравитации в двумерном пространстве-времени требуется какое либо обобщение. Простейшим геометрическим обобщением является рассмотрение на $\mathbb{M}$ не псевдоримановой геометрии, на которой основана общая теория относительности, а геометрии более общего вида. Ниже мы покажем, что нетривиальную двумерную модель гравитации можно построить в рамках геометрии Римана–Картана.

Чтобы выполнить построение, перейдем от переменных метрика $g_{\alpha\beta}$, кручение $T_{\alpha\beta}{}^\gamma = -T_{\beta\alpha}{}^\gamma$ к переменным Картана: репер (диада) $e_\alpha{}^a$, лоренцева связность $\omega_\alpha{}^{ab} = -\omega_\alpha{}^{ba}$. Эти переменные определяются следующими равенствами (см. [23], раздел 6.9):

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \eta_{ab}, \quad (15.5)$$

$$\nabla_\alpha e_\beta{}^a = \partial_\alpha e_\beta{}^a - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma{}^a - \omega_\alpha{}^{ab} e_{\beta b} = 0, \quad (15.6)$$

где $\eta_{ab} = \text{diag}(+,-)$ – двумерная метрика Лоренца. Первое равенство определяет репер с точностью до локальных лоренцевых вращений, а второе – взаимно однозначное соответствие между тензором кручения и лоренцевой связностью (при заданном репере).

Напомним, что переход от греческих индексов к латинским и наоборот всегда осуществляется с помощью репера и его обратного. Подъем и опускание греческих индексов производится с помощью метрики $g_{\alpha\beta}$, а латинских – с помощью метрики Лоренца η_{ab} . Кроме того, переход от греческих индексов к латинским можно выполнять под знаком ковариантного дифференцирования в силу условия метричности (15.6).

Тензоры кривизны и кручения в переменных Картана имеют вид (10.133), (10.134),

$$R_{\alpha\beta}{}^{ab} = \partial_\alpha \omega_\beta{}^{ab} - \omega_\alpha{}^{ac} \omega_{\beta c}{}^b - (\alpha \leftrightarrow \beta), \quad (15.7)$$

$$T_{\alpha\beta}{}^a = \partial_\alpha e_\beta{}^a - \omega_\alpha{}^{ab} e_{\beta b} - (\alpha \leftrightarrow \beta). \quad (15.8)$$

В двумерном случае лоренцева связность взаимно однозначно определяется псевдо вектором ω_α :

$$\omega_\alpha{}^{ab} = \omega_\alpha \epsilon^{ab}. \quad (15.9)$$

Поскольку собственная ортохронная двумерная группа Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 1)$ является абелевой, то нелинейные слагаемые в выражении для тензора кривизны (15.7) сокращаются. Прямые вычисления приводят к следующему выражению

$$R_{\alpha\beta}{}^{ab} = F_{\alpha\beta}\epsilon^{ab}, \quad F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha\omega_\beta - \partial_\beta\omega_\alpha, \quad (15.10)$$

которое напоминает выражение для напряженности электромагнитного поля.

Нетрудно также вычислить скалярную кривизну и псевдослед тензора кручения, умноженные на элемент объема, в новых переменных:

$$\hat{R} := \sqrt{|g|}R = 2\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\omega_\beta, \quad (15.11)$$

$$\hat{T}^{*a} = \sqrt{|g|}T^{*a} = 2\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha e_\beta{}^a - \omega_\alpha\epsilon^a{}_b e_\beta{}^b), \quad (15.12)$$

где $\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \sqrt{|g|}\varepsilon^{\alpha\beta} = \sqrt{|g|}\varepsilon^{ab}e^a{}_\alpha e^b{}_\beta$ — полностью антисимметричная тензорная плотность второго ранга, $\hat{\varepsilon}^{01} = -\hat{\varepsilon}^{10} = -1$. Из выражения (15.11) следует, что действие Гильберта–Эйнштейна в двумерном случае, как уже отмечалось, представляет собой дивергенцию $\sqrt{|g|}\tilde{R} = 2\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\tilde{\omega}_\beta$.

Теперь все готово для построения действия для двумерной гравитации с кручением. Из выражений для тензора кривизны и кручения в переменных Картана (15.7), (15.8) следует, что для того, чтобы уравнения движения для репера и лоренцевой связности были второго порядка, достаточно рассмотреть инварианты, квадратичные по тензору кривизны и кручения. Более высокие степени этих геометрических объектов в общем случае будут давать уравнения более высокого порядка. Поскольку тензор кривизны имеет только одну независимую компоненту, то среди квадратичных инвариантов только один является независимым. Аналогично, среди инвариантов, квадратичных по тензору кручения, также только один является независимым. Поэтому наиболее общий квадратичный лагранжиан можно записать в следующем виде

$$L = -\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{4}\gamma R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4}\beta T^{\alpha\beta\gamma}T_{\alpha\beta\gamma} + \lambda\right), \quad (15.13)$$

где γ, β — некоторые константы связи и λ — космологическая постоянная. Это есть лагранжиан двумерной гравитации с кручением.

Из равенств (15.1) и (15.3) следует, что лагранжиан (15.13) можно переписать в терминах неприводимых компонент тензоров кривизны и кручения:

$$L = -\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{4}\gamma R^2 - \frac{1}{8}\beta T^{*\alpha}T^*_{\alpha} + \lambda\right). \quad (15.14)$$

Действие для лагранжиана (15.13) инвариантно относительно общих преобразований координат и локальных лоренцевых вращений.

Лагранжиан (15.13) был предложен в [124, 134, 135] в качестве обобщения теории струн, когда метрика на мировой поверхности бозонной струны становится независимой динамической переменной. Вскоре было найдено общее решение уравнений движения, вытекающих из лагранжиана (15.13) в конформной калибровке для репера [136, 137]. Был также проведен анализ экстремалей и геодезических [138] и построены все глобальные (максимально продолженные вдоль геодезических) решения квадратичной двумерной гравитации с кручением [116].

В следующих разделах мы рассмотрим действие для двумерной гравитации общего вида и решим явно соответствующие гамильтоновы уравнения движения без полей материи и без фиксирования какой-либо калибровки.

15.2. Действие и уравнения движения

Действие для двумерной гравитации с кручением общего вида задается интегралом

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx (L_G + L_X), \quad (15.15)$$

где гравитационную часть лагранжиана запишем в формализме первого порядка

$$L_G := -\frac{1}{2}(\pi \hat{R} + p_a \hat{T}^{*a}) - \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} p_a p^a U + V \right). \quad (15.16)$$

Здесь плотности скалярной кривизны $\hat{R}$ и псевдоследа тензора кручения $\hat{T}^{*a}$ заданы равенствами (15.11), (15.12). Этот лагранжиан зависит от двух произвольных дифференцируемых функций $U = U(\pi)$ и $V = V(\pi)$ от π . В качестве независимых переменных, по которым производится варьирование, мы рассматриваем репер $e_\alpha^a(x)$, лоренцеву связность $\omega_\alpha(x)$, а также поля $\pi(x)$ и $p_a(x)$.

В действии (15.15) мы добавили к лагранжиану двумерной гравитации скалярное поле $X(x)$ с лагранжианом

$$L_X := -\frac{1}{2} \rho \sqrt{|g|} (\partial X^2 - m^2 X^2), \quad (15.17)$$

где $m = \text{const}$ – масса скалярного поля, введено сокращенное обозначение для кинетической части

$$\partial X^2 := g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X,$$

и в общем случае $\rho = \rho(\pi)$ – некоторая функция от π . Если $\rho = 1$, то скалярное поле связано с гравитацией минимальной связью. Тогда лагранжиан легко обобщается на случай бозонной струны, движущейся в D -мерном пространстве-времени. Для этого достаточно заменить одно скалярное поле на несколько: $X(x) \mapsto X^\mu(x)$, $\mu = 0, 1, \dots, D-1$ и положить $m = 0$. При метрике объемлющего пространства $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ \dots -)$, в котором распространяется струна, общий знак минус в лагранжиане (15.17) обеспечивает положительную определенность канонического гамильтониана для пространственных компонент струны X^μ . В любом случае общий знак лагранжиана можно изменить, переопределив ρ . Если $\rho(\pi)$ – нетривиальная функция, то мы имеем неминимальную связь скалярного поля с гравитацией. Такая связь возникает, например, при редукции многомерных моделей гравитации.

Мы также предполагаем, что π является скалярным, а p^a – псевдовекторным полями на $\mathbb{M}$. Тогда действие для двумерной гравитации (15.15) инвариантно относительно общих преобразований координат, локальных лоренцевых вращений и пространственных отражений.

Уравнения движения для действия (15.15) имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta \pi} : \quad -\frac{1}{2} R - \left(\frac{1}{2} p^a p_a U' + V' \right) - \frac{1}{2} \rho' (\partial X^2 - m^2 X^2) = 0, \quad (15.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta p_a} : \quad -\frac{1}{2} T^{*a} - p^a U = 0, \quad (15.19)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\beta\alpha} \frac{\delta S}{\delta \omega_\beta} : \quad \partial_\alpha \pi - p_a \varepsilon^a_b e_\alpha^b = 0, \quad (15.20)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\beta\alpha} \frac{\delta S}{\delta e_\beta^a} : \quad \nabla_\alpha p_a + \varepsilon_{\alpha a} \left(\frac{1}{2} p^b p_b U + V \right) + \rho T^\beta_a \varepsilon_{\beta\alpha} = 0, \quad (15.21)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta X} : \quad \rho (g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta X + m^2 X) + \rho' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \pi \partial_\beta X = 0, \quad (15.22)$$

где $U' := dU/d\pi$ и $V' := dV/d\pi$, введено обозначение для ковариантной производной

$$\nabla_\alpha p_a := \partial_\alpha p_a - \omega_\alpha \varepsilon_a^b p_b$$

и

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\partial X^2 - m^2 X^2) \quad (15.23)$$

– тензор энергии-импульса скалярного поля.

Вариации действия по $\pi(x)$ и $p_a(x)$ приводит к алгебраическим уравнениям (15.18), (15.19) для $\pi(x)$ и $p_a(x)$. Если эти уравнения можно решить в явном виде, то после подстановки найденных решений в исходное действие получим действие для двумерной гравитации в формализме второго порядка. Соответствующее действие в формализме второго порядка будет некоторой функцией от скалярной кривизны и квадрата тензора кручения, которая определяется функциями $U(\pi)$ и $V(\pi)$.

Случай $U = 0$ и $V = 0$ в отсутствие полей материи, $X = 0$, описывает поверхности нулевой кривизны и кручения, и не представляет интереса с геометрической точки зрения. Поэтому мы предположим, что по крайней мере одна из функций U или V отлична от нуля.

Лагранжиан (15.16) представляет собой лагранжиан очень общего вида, т.к. зависит от двух произвольных функций U и V .

ПРИМЕР 15.2.1. Если $U = 0$, то кручение равно нулю, что следует из уравнения (15.19). Тогда уравнение (15.18) неявно определяет функцию $\pi = \pi(R)$ при отсутствии скалярного поля, $X = 0$, или минимальной связи, $\rho' = 0$. После подстановки этого решения в исходный лагранжиан получим действие в формализме второго порядка. Соответствующий гравитационный лагранжиан представляет собой произвольную функцию от скалярной кривизны $\tilde{R}$, определяемую функцией $V(\pi)$.

ПРИМЕР 15.2.2. Если

$$U = \frac{1}{\beta}, \quad V = -\frac{1}{4\gamma} \pi^2 + \lambda, \quad (15.24)$$

то уравнения движения (15.18) и (15.19) при $X = 0$ или $\rho' = 0$ решаются в явном виде:

$$\pi = \gamma R, \quad p^a = -\frac{\beta}{2} T^{*a}.$$

после подстановки этого решения в исходное действие, получим лагранжиан квадратичной двумерной гравитации с кручением в формализме второго порядка (15.14).

К модели двумерной гравитации (15.15) можно подойти с другой стороны. При произвольных функциях $U(\pi)$ и $V(\pi)$ лоренцеву связность ω_α можно исключить из рассмотрения, решив алгебраические уравнения движения (см. далее раздел 15.4). Это приводит к дилатонной двумерной гравитации общего вида, причем функция $\pi(x)$ играет роль поля дилатона. Среди этих моделей важную роль играет сферически редуцированная общая теория относительности со скалярным полем, для которой

$$U = \frac{1}{2\pi}, \quad V = -2\kappa K - \frac{\Lambda\pi}{\kappa}, \quad \rho = \frac{\pi}{2\kappa}, \quad (15.25)$$

где $K = 1, 0, -1$ для сферической, планарной и гиперболической редукции соответственно [139] (см. раздел 16), Λ – четырехмерная космологическая постоянная и κ – гравитационная постоянная в четырех измерениях.

Отметим, что при произвольных функциях U и V алгебраические уравнения (15.18) и (15.19) не всегда можно решить в явном виде относительно π и p^a . В таких случаях действие

нельзя записать в формализме второго порядка. С другой стороны, действие в формализме второго порядка всегда можно записать в формализме первого порядка. С этой точки зрения действие (15.15) в формализме первого порядка является более общим действием для двумерной гравитации.

В разделе 15.6.1 при отсутствии скалярного поля, $X = 0$, мы решим в явном виде полную систему уравнений движения (15.18)–(15.21) для произвольных функций U и V и без фиксирования какой-либо калибровки.

Остановимся на общих свойствах системы уравнений движения (15.18)–(15.22). Действие (15.15) инвариантно относительно локальных лоренцевых вращений и общих преобразований координат. Согласно второй теореме Нетер эта локальная инвариантность приводит к зависимости уравнений движения (см. раздел 5.3).

Бесконечно малые локальные вращения на угол $\omega(x) \ll 1$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \delta e_\alpha^a &= -e_\alpha^b \varepsilon_b^a \omega, & \delta \omega_\alpha &= \partial_\alpha \omega, \\ \delta p_a &= \varepsilon_a^b p_b \omega, & \delta \pi &= 0, & \delta X &= 0. \end{aligned} \quad (15.26)$$

Согласно второй теореме Нетер из инвариантности действия относительно этих преобразований вытекает зависимость уравнений движения:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha} + \frac{\delta S}{\delta e_\alpha^a} e_\alpha^b \varepsilon_b^a - \frac{\delta S}{\delta p_a} \varepsilon_a^b p_b = 0, \quad (15.27)$$

где $\tilde{\nabla}_\alpha$ обозначает ковариантную производную с символами Кристоффеля.

Кроме этого действие (15.15) инвариантно относительно общих преобразований координат, которые в инфинитезимальной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \delta e_\alpha^a &= -\partial_\alpha \epsilon^\beta e_\beta^a - \epsilon^\beta \partial_\beta e_\alpha^a, & \delta \omega_\alpha &= -\partial_\alpha \epsilon^\beta \omega_\beta - \epsilon^\beta \partial_\beta \omega_\alpha, \\ \delta p_a &= -\epsilon^\beta \partial_\beta p_a, & \delta \pi &= -\epsilon^\beta \partial_\beta \pi, & \delta X &= -\epsilon^\beta \partial_\beta X, \end{aligned} \quad (15.28)$$

где $\epsilon^\alpha(x)$ – инфинитезимальный параметр преобразования $x^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon^\alpha(x)$. Вместе с тождеством (15.27) это приводит к двум линейным соотношениям между уравнениями движения:

$$e_\alpha^a \nabla_\beta \frac{\delta S}{\delta e_\beta^a} - \frac{\delta S}{\delta e_\beta^a} T_{\alpha\beta}^a + \frac{1}{2} \frac{\delta S}{\delta \omega_\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} R - \frac{\delta S}{\delta \pi} \partial_\alpha \pi - \frac{\delta S}{\delta p_a} \nabla_\alpha p_a - \frac{\delta S}{\delta X} \partial_\alpha X = 0, \quad (15.29)$$

где ковариантная производная действует с символами Кристоффеля на греческие индексы и лоренцевой связностью – на латинские.

15.3. Каноническая формулировка

Анализ уравнений движения двумерной гравитации с действием (15.15) оказывается значительно проще в канонической формулировке. Более того, общее решение уравнений движения для двумерной гравитации без полей материи удастся выписать только в каноническом формализме. При этом обобщенные импульсы играют роль произвольных функций, параметризующих общие преобразования координат и локальные лоренцевы вращения.

Будем считать, что координаты на $\mathbb{M}$ выбраны таким образом, что координата x^0 является временем, т.е. векторное поле ∂_0 времениподобно, и все сечения $x^0 = \text{const}$ пространственно-подобны. Для краткости введем обозначения

$$x^0 := \tau, \quad x^1 := \sigma.$$

Двумерная гравитация представляет собой калибровочную модель, т.к. инвариантна относительно локальных преобразований. Мы увидим, что эта инвариантность приводит к возникновению в гамильтоновом формализме связей первого рода. Общий подход к гамильтоновой формулировке моделей со связями описан в разделе 6.2.

Обобщенные импульсы, сопряженные лоренцевой связности ω_α , реперу e_α^a и скалярным полям X , имеют вид

$$\pi^0 := \frac{\partial(L_G + L_X)}{\partial(\partial_0 \omega_0)} = 0, \quad (15.30)$$

$$\pi^1 := \frac{\partial(L_G + L_X)}{\partial(\partial_0 \omega_1)} = \pi, \quad (15.31)$$

$$p^0_a := \frac{\partial(L_G + L_X)}{\partial(\partial_0 e_0^a)} = 0, \quad (15.32)$$

$$p^1_a := \frac{\partial(L_G + L_X)}{\partial(\partial_0 e_1^a)} = p_a, \quad (15.33)$$

$$P := \frac{\partial(L_G + L_X)}{\partial(\partial_0 X)} = \frac{\rho}{\sqrt{|g|}} (g_{11} \partial_0 X - g_{01} \partial_1 X). \quad (15.34)$$

Мы видим, что гравитационный лагранжиан в формализме первого порядка (15.16) уже записан в гамильтоновой форме. Прямые вычисления приводят к следующему гамильтониану

$$\begin{aligned} H &:= \int d\sigma (p \partial_0 \omega_1 + p_a \partial_0 e_1^a + P \partial_0 X - L_G - L_X) = \\ &= \int d\sigma (\omega_0 G + e_0^a G_a), \end{aligned} \quad (15.35)$$

где

$$G := -\partial_1 \pi + p_a \varepsilon^a_b e_1^b, \quad (15.36)$$

$$\begin{aligned} G_a &:= -\partial_1 p_a - \omega_1 p_b \varepsilon^b_a + e_1^b \varepsilon_{ab} \left(\frac{1}{2} p^c p_c U + V - \frac{\rho}{2} m^2 X^2 \right) \\ &+ \frac{e_1^b \varepsilon_{ab}}{g_{11}} \left(\frac{1}{2\rho} P^2 + \frac{\rho}{2} \partial_1 X^2 \right) + \frac{e_{1a}}{g_{11}} P \partial_1 X. \end{aligned} \quad (15.37)$$

Функции G и G_a являются лоренцевым скаляром и вектором соответственно. Для полиномиальных функций $U(\pi)$ и $V(\pi)$ гамильтониан (15.35) является полиномиальным при отсутствии скалярных полей. Добавление скалярных полей нарушает полиномиальность из-за присутствия компоненты метрики g_{11} в знаменателе и возможной неминимальной связи $\rho(\pi)$.

По определению, одновременные скобки Пуассона имеют вид

$$\begin{aligned} [e_1^a, p_b'] &= \delta_b^a \delta(\sigma, \sigma'), \\ [\omega_1, \pi'] &= \delta(\sigma, \sigma'), \\ [X, P'] &= \delta(\sigma, \sigma'), \end{aligned} \quad (15.38)$$

где штрих обозначает, что соответствующее поле рассматривается в точке σ' .

Из определения обобщенных импульсов следует, что равенства (15.30) и (15.32) представляют собой первичные связи в двумерной гравитации. Для самосогласованности уравнений движения первичные связи (15.30) должны сохраняться со временем. Это приводит к следующим условиям:

$$\partial_0 \pi^0 = [\pi^0, H] = -G = 0, \quad (15.39)$$

$$\partial_0 p^0_a = [p^0_a, H] = -G_a = 0. \quad (15.40)$$

Полученные равенства представляют собой вторичные связи. Таким образом, гамильтониан (15.35) представляет собой линейную комбинацию вторичных связей.

Прямые довольно громоздкие вычисления показывают, что вторичные связи образуют замкнутую алгебру относительно скобок Пуассона:

$$[G_a, G'_b] = \varepsilon_{ab} \left[U p^c G_c + \left(\frac{1}{2} p^c p_c U' + V' - \frac{\rho'}{\rho \sqrt{|g|}} L_x \right) G \right] \delta(\sigma, \sigma'), \quad (15.41)$$

$$[G_a, G'] = \varepsilon_a^b G_b \delta(\sigma, \sigma'), \quad (15.42)$$

$$[G, G'] = 0, \quad (15.43)$$

где U' , V' и ρ' обозначают производные по аргументу π и L_x – лагранжиан скалярного поля (15.17), выраженный через канонические переменные:

$$L_x = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{\rho g_{11}} P^2 + \frac{\rho}{g_{11}} \partial_1 X^2 - m^2 X^2 \right).$$

Скобки Пуассона первичных связей между собой и с вторичными связями, очевидно, равны нулю. Поэтому двумерная гравитация с действием (15.15) содержит шесть связей первого рода и других связей нет. Таким образом, гамильтониан (15.35) представляет собой линейную комбинацию трех вторичных связей первого рода.

На этом этапе мы в состоянии вычислить число независимых физических (распространяющихся) степеней свободы согласно общим правилам, сформулированным в разделе 6.2. Предположим, что имеется D скалярных полей. Гравитационное поле в формализме второго порядка описывается репером e_a^a (четыре компоненты) и лоренцевой связностью ω_a (две компоненты). Поэтому число физических степеней свободы равно $D + 4 + 2 - 6 = D$. Чистая же двумерная гравитация (без полей материи) вообще не имеет физических степеней свободы. Это обстоятельство является причиной интегрируемости двумерной гравитации.

Заметим, что алгебра скобок Пуассона (15.41)–(15.43) замыкается на δ -функции, и не содержит их производных в отличие от алгебры скобок Пуассона в общей теории относительности (8.71)–(8.73). Кроме того “структурные функции” зависят не только от полей, но и от функций $U(\pi)$, $V(\pi)$ и $\rho(\pi)$, которые входят в действие. В этом смысле алгебра скобок Пуассона зависит от динамики полей. Напомним, что в обычной гамильтоновой формулировке моделей гравитации, инвариантных относительно общих преобразований координат, алгебра скобок Пуассона замыкается на первые производные от δ -функции.

Алгебра скобок Пуассона (15.41)–(15.43) имеет (не инвариантную) подалгебру, генерируемую связью с векторным индексом

$$\tilde{G}_a := G_a + k_a \omega_1 G, \quad (15.44)$$

где мы ввели светоподобный вектор

$$k_a := \frac{e_{1a} + e_1^b \varepsilon_{ba}}{g_{11}}, \quad k^a k_a = 0, \quad (15.45)$$

с компонентами

$$k_0 = k_1 = \frac{e_{10} + e_{11}}{g_{11}}.$$

Прямые вычисления приводят к следующим скобкам Пуассона

$$[\tilde{G}_a, \tilde{G}'_b] = \varepsilon_{ab} (U p^c + \omega_1 k^c) \tilde{G}_c \delta(\sigma, \sigma'), \quad (15.46)$$

$$[\tilde{G}_a, G'] = \varepsilon_a^b \tilde{G}_b \delta(\sigma, \sigma') - k_a G \delta'(\sigma, \sigma'). \quad (15.47)$$

где введена производная δ -функции

$$\delta'(\sigma', \sigma) := \frac{\partial}{\partial \sigma'} \delta(\sigma', \sigma).$$

Первая скобка Пуассона (15.46) показывает, что связи $\tilde{G}_a$ генерируют подалгебру, а вторая (15.47) – что подалгебра не инвариантна.

Напомним, что конформная алгебра скобок Пуассона генерируется двумя скалярными функциями (относительно лоренцевых вращений) H_0 и H_1 и имеет вид

$$\begin{aligned} [H_0, H'_0] &= -(H_1 + H'_1) \delta'(\sigma', \sigma), \\ [H_0, H'_1] &= -(H_0 + H'_0) \delta'(\sigma', \sigma), \\ [H_1, H'_1] &= -(H_1 + H'_1) \delta'(\sigma', \sigma). \end{aligned} \quad (15.48)$$

Эта алгебра связей возникает, например, в теории струн. В двумерной гравитации конформной алгебре (15.48) удовлетворяют связи

$$H_0 := -e_1^a \varepsilon_a^b \tilde{G}_b = -e_1^a \varepsilon_a^b G_b + \omega_1 G, \quad (15.49)$$

$$H_1 := e_1^a \tilde{G}_a = e_1^a G_a + \omega_1 G. \quad (15.50)$$

Связи H_1 и H_0 являются лоренц инвариантными проекциями векторной связи $\tilde{G}_a$ на направления, параллельное и перпендикулярное вектору e_1^a соответственно. Оставшиеся скобки Пуассона имеют вид

$$[H_0, G'] = [H_1, G'] = -G \delta'(\sigma', \sigma). \quad (15.51)$$

Связи H_0 и H_1 образуют хорошо известную конформную алгебру (15.48). Полная же алгебра связей (15.48)–(15.51) представляет собой “полупрямое произведение” конформной алгебры с инвариантной абелевой подалгеброй, генерируемой связью G , которая соответствует локальным лоренцевым вращениям [140].

Преобразование связей, обратное к формулам (15.49) и (15.50) выглядит следующим образом

$$G_0 = \frac{1}{g_{11}} [-e_1^1 (H_0 - \omega_1 G) + e_1^0 (H_1 - \omega_1 G)], \quad (15.52)$$

$$G_1 = \frac{1}{g_{11}} [e_1^0 (H_0 - \omega_1 G) - e_1^1 (H_1 - \omega_1 G)]. \quad (15.53)$$

В дальнейшем нам понадобится явное выражение для связей H_0 и H_1 через канонические переменные

$$\begin{aligned} H_0 &= -\partial_1 p_a \varepsilon^a_b e_1^b - \omega_1 p_a e_1^a + \omega_1 (-\partial_1 \pi + p_a \varepsilon^a_b e_1^b) - \\ &\quad - g_{11} \left(\frac{1}{2} p^a p_a U + V - \frac{\rho}{2} m^2 X^2 \right) - \frac{1}{2\rho} P^2 - \frac{\rho}{2} \partial_1 X^2, \end{aligned} \quad (15.54)$$

$$H_1 = -e_1^a \partial_1 p_a - \omega_1 \partial_1 \pi + P \partial_1 X. \quad (15.55)$$

Заметим, что третье слагаемое в H_0 пропорционально связи G (15.36).

Из выражений для связей (15.54), (15.55) следует их геометрический смысл. Рассмотрим вариации полей, которые генерируются связью H_1 . По определению, эта связь является генератором калибровочного преобразования

$$\delta F := -[F, \int d\sigma \epsilon^1 H_1],$$

где $F(\omega_1, \pi, \dots)$ – дифференцируемая функция канонических переменных и $\epsilon^1(x) \ll 1$ – параметр преобразования. Простые вычисления приводят к равенствам

$$\begin{aligned} \delta e_1^a &= -\partial_1 \epsilon^1 e_1^a - \epsilon^1 \partial_1 e_1^a, & \delta p_a &= -\epsilon^1 \partial_1 p_a, & \delta X &= -\epsilon^1 \partial_1 X, \\ \delta \omega_1 &= -\partial_1 \epsilon^1 \omega_1 - \epsilon^1 \partial_1 \omega_1, & \delta \pi &= -\epsilon^1 \partial_1 \pi, & \delta P &= -\partial_1 \epsilon^1 P - \epsilon^1 \partial_1 P. \end{aligned}$$

Сравнение этих преобразований с формулами (15.28) показывает, что связь H_1 генерирует общие преобразования координат вдоль пространственного направления σ .

Аналогично, связь G (15.36) генерирует калибровочные преобразования

$$\delta F := [F, \int d\sigma \omega G]$$

с параметром $\omega(x) \ll 1$ (знак правой части не играет роли, т.к. его можно отнести к параметру преобразования). Простые вычисления дают следующие калибровочные преобразования:

$$\begin{aligned} \delta e_1^a &= -e_1^b \varepsilon_b^a \omega, & \delta p_a &= \varepsilon_a^b p_b \omega, & \delta X &= 0, \\ \delta \omega_1 &= \partial_1 \omega, & \delta \pi &= 0, & \delta P &= 0. \end{aligned}$$

Из сравнения полученных формул с преобразованиями (15.26) следует, что связь G генерирует локальные лоренцевы вращения.

Таким образом, двумерная гравитация содержит три вторичные связи первого рода. Связь H_0 является динамической и, как мы увидим в дальнейшем, по существу определяет динамику системы. Связи H_1 и G являются кинематическими и генерируют калибровочные преобразования.

Если рассматривается только бозонная струна ($\rho = 1$, $m = 0$), то связи принимают хорошо известный вид

$$\begin{aligned} H_0 &\mapsto -\frac{1}{2}P^2 - \frac{1}{2}\partial_1 X^2, \\ H_1 &\mapsto P\partial_1 X, \end{aligned}$$

которые удовлетворяют конформной алгебре (15.48).

15.3.1. Каноническое преобразование. На классическом уровне две гамильтоновы модели, связанные каноническим преобразованием являются эквивалентными. На квантовом уровне это в общем случае не так: существуют канонические преобразования, которые после квантования приводят к неэквивалентным квантовым теориям. При этом особое внимание следует уделять нелинейным каноническим преобразованиям. Это значит, что правильный выбор канонических переменных чрезвычайно важен. До сих пор не известен правильный выбор канонических переменных, в которых гравитацию можно было бы проквантовать. Поэтому мы вправе выбирать те или иные канонические переменные из соображений удобства. В настоящем разделе мы введем новые канонические переменные, которые существенно упрощают их вид.

Совершим каноническое преобразование репера, оставив другие канонические переменные без изменения,

$$e_1^a, p_a \mapsto q, q_\perp, p, p_\perp,$$

которое в явном виде выделяет лоренцев угол поворота $q_\perp$ и упрощает многие формулы [140]. Рассмотрим производящую функцию канонического преобразования, зависящую от старых координат и новых импульсов (см. раздел 6.1.11),

$$F := \frac{1}{2} \int d\sigma \left(p \ln |g_{11}| + p_\perp \ln \left| \frac{e_1^0 + e_1^1}{e_1^0 - e_1^1} \right| \right). \quad (15.56)$$

Вариация F по старым координатам приводит к соотношению между старыми и новыми импульсами:

$$p_a = p \frac{e_{1a}}{g_{11}} + p_\perp \frac{e_1^b \varepsilon_{ba}}{g_{11}}. \quad (15.57)$$

Отсюда вытекают выражения для новых импульсов

$$p = e_1^a p_a, \quad p_\perp = p_a \varepsilon^a_b e_1^b,$$

т.е. функции p и $p_\perp$ являются соответственно проекциями импульса p_a на вектор e_1^a и перпендикулярное направление. Вариация производящего функционала (15.56) по импульсам дает соотношения между координатами:

$$\begin{aligned} e_1^0 &= e^q \operatorname{sh} q_\perp, \\ e_1^1 &= e^q \operatorname{ch} q_\perp. \end{aligned} \quad (15.58)$$

Для того, чтобы отбросить знак модуля во втором слагаемом в равенстве (15.56) мы предположим, для определенности, что

$$e_1^1 > 0 \quad \text{и} \quad e_1^1 > e_1^0. \quad (15.59)$$

Тогда пространственная компонента метрики равна

$$g_{11} = -e^{2q}$$

и всегда отрицательна, что соответствует нашему выбору координат на M .

Мы видим, что новая координата $q_\perp$ совпадает с углом лоренцева поворота, а q параметризует длину вектора e_1^a .

Квадрат старого импульса в новых переменных имеет вид

$$p^a p_a = (p_\perp^2 - p^2) e^{-2q}. \quad (15.60)$$

Вторичные связи двумерной гравитации в новых канонических переменных выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} H_0 &= -\partial_1 p_\perp + p \partial_1 q_\perp + p_\perp \partial_1 q - \omega_1 p + \omega_1 (-\partial_1 \pi + p_\perp) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (p_\perp^2 - p^2) U + e^{2q} \left(V - \frac{\rho}{2} m^2 X^2 \right) - \frac{1}{2\rho} P^2 - \frac{\rho}{2} \partial_1 X^2, \end{aligned} \quad (15.61)$$

$$H_1 = -\partial_1 p - \omega_1 \partial_1 \pi + p \partial_1 q + p_\perp \partial_1 q_\perp + P \partial_1 X, \quad (15.62)$$

$$G = -\partial_1 \pi + p_\perp. \quad (15.63)$$

Если $U = \text{const}$, то квадратичная часть импульсов $\frac{1}{2}(p_\perp^2 - p^2)$ в динамической связи H_0 имеет тот же вид, что и для двух свободных частиц со закононеопределенной метрикой. Это значит, что каноническое преобразование “сдвигает” неполиномиальность с кинетического слагаемого в потенциал.

15.4. Дилатонизация

В предыдущих разделах мы рассматривали нетривиальные модели гравитации в двух измерениях, основанные на геометрии Римана–Картана. Однако существуют и распространены другие нетривиальные модели двумерной гравитации, которые основаны на псевдоримановой геометрии, но содержат дополнительное скалярное поле – поле *дилатона*. В настоящем разделе мы докажем эквивалентность двумерной гравитации с кручением и двумерной дилатонной гравитации [126, 141, 142].

Если лоренцева связность не входит в лагранжиан полей материи, тогда ее можно исключить из теории, решив соответствующие ей уравнения движения. В результате мы получим обобщенную дилатонную модель двумерной гравитации, в которой роль дилатона играет импульс $\pi(x)$, который сопряжен к пространственной компоненте лоренцевой связности ω_1 .

Прежде всего заметим, что в двумерном случае справедливо тождество

$$\sqrt{|g|}R = \sqrt{|g|}\tilde{R} + \partial_\alpha(\sqrt{|g|}\varepsilon^\alpha_\beta T^{*\beta}), \quad (15.64)$$

где $\tilde{R}$ – скалярная кривизна поверхности, построенная только по символам Кристоффеля (при нулевом кручении). После замены $R \mapsto \tilde{R}$ и интегрирования по частям гравитационная часть лагранжиана (15.16) принимает вид

$$L_G = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\pi\tilde{R} + \frac{1}{2}\partial_\alpha\pi\varepsilon^\alpha_a\hat{T}^{*a} - \frac{1}{2}p_a\hat{T}^{*a} - \sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}p_ap^aU + V\right). \quad (15.65)$$

Теперь лоренцева связность входит в лагранжиан только через псевдослед тензора кручения $\hat{T}^{*a}$, и они связаны между собой обратимым алгебраическим соотношением

$$\omega_\alpha = e_{\alpha a}\left(\frac{1}{2}T^{*a} - \varepsilon^{\beta\gamma}\partial_\beta e_\gamma^a\right). \quad (15.66)$$

Поэтому вместо лоренцевой связности можно выбрать компоненты кручения T^{*a} в качестве новых переменных, по которым производится варьирование. В результате возникает алгебраическое уравнение на импульс p_a , которое имеет решение

$$p_a = \partial_\alpha\pi\varepsilon^\alpha_a.$$

Подстановка этого решения в исходное действие приводит к лагранжиану двумерной дилатонной гравитации

$$L_D := -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\pi\tilde{R} + \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\partial\pi^2U - \sqrt{|g|}V, \quad (15.67)$$

где использовано сокращенное обозначение $\partial^2\pi := g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\pi\partial_\beta\pi$. Мы видим, что поле π является полем дилатона, и лагранжиан зависит от двух произвольных функций $U(\pi)$ и $V(\pi)$, которые определяют кинетическую и потенциальную части лагранжиана дилатонного поля.

Отметим, что первое слагаемое в лагранжиане (15.67) не равно дивергенции, т.к. скалярная кривизна умножается на поле дилатона, что соответствует неминимальной связи дилатона с гравитационным полем.

Таким образом, если лагранжиан полей материи не содержит лоренцевой связности, то двумерная гравитация с кручением эквивалентна двумерной дилатонной гравитации. На самом деле мы доказали, что если исходные переменные e_α^a , ω_α , p_a , π и X удовлетворяют уравнениям движения (15.18)–(15.22), то переменные $g_{\alpha\beta}$, π и X удовлетворяют уравнениям движения, вытекающим из лагранжиана $L_D + L_X$. Обратное утверждение следующее. Пусть переменные

$g_{\alpha\beta}$, π и X удовлетворяют уравнениям движения для лагранжиана $L_D + L_X$. После этого решим алгебраическое уравнение $e_\alpha^a e_\beta^b \eta_{ab} = g_{\alpha\beta}$ для репера (решение определено с точностью до локальных лоренцевых вращений), построим импульс p_a , используя уравнение (15.20), и решим уравнения (15.19) и (15.66) для T^{*a} и ω_α соответственно. Тогда исходные уравнения (15.18)–(15.22) будут удовлетворены.

Эквивалентность рассмотренных моделей гравитации является не только локальной, но и глобальной, поскольку преобразование переменных (15.66) невырождено, что следует из невырожденности репера.

Доказанная эквивалентность двумерных моделей гравитации дает геометрический смысл дилатонному полю: это импульс, сопряженный пространственной компоненте лоренцевой связности ω_1 .

Чтобы получить уравнения движения для двумерной дилатонной гравитации удобно воспользоваться формулой (7.22). Вариация лагранжиана (15.67) по метрике и дилатонному полю дает следующие уравнения движения:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta L_D}{\delta g_{\alpha\beta}} : \quad -\frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} \tilde{\square} \pi - \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}^\beta \pi) - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\alpha \pi \tilde{\nabla}^\beta \pi U + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \partial \pi^2 U - V \right) = 0, \quad (15.68)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta L_D}{\delta \pi} : \quad -\frac{1}{2} R - \tilde{\square} \pi U - \frac{1}{2} \partial \pi^2 U' - V' = 0, \quad (15.69)$$

where $\tilde{\square} := g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta$ – двумерный волновой оператор. В настоящее время неизвестно, как решить непосредственно данную систему нелинейных уравнений для произвольных функций U и V и без фиксирования системы координат. В следующем разделе мы решим эквивалентную систему уравнений двумерной гравитации с кручением.

15.5. Размерности полей

Вычисления, проведенные в следующих разделах, сложны и громоздки. Поэтому мы припишем в настоящем разделе всем полям и константам связи определенные размерности. Это позволяет контролировать вычисления на каждом этапе, подсчитывая и сравнивая размерности получаемых выражений.

По определению, все координаты имеют размерность длины, а компоненты репера, метрики и действие безразмерны:

$$[x^\alpha] := l, \quad [g_{\alpha\beta}] := 1, \quad [e_\alpha^a] := 1, \quad [S] := 1.$$

Кроме этого мы предполагаем, что компоненты лоренцевой связности имеют ту же размерность, что и частная производная ∂_α :

$$[\omega_\alpha] := [\partial_\alpha] = l^{-1}.$$

Отсюда вытекают размерности компонент тензора кручения и скалярной кривизны:

$$[T^{*a}] = l^{-1}, \quad [R] = l^{-2}.$$

Мы предположим также, что скалярное поле имеет ту же размерность, что и в четырехмерном пространстве-времени,

$$[X] := l^{-1}. \quad (15.70)$$

После этого размерности всех остальных полей и констант связи однозначно определены.

Лагранжиан в двумерном случае имеет размерность $[L] = l^{-2}$. Поэтому размерность обобщенных импульсов равна

$$[\pi] = 1, \quad [p_a] = l^{-1}. \quad (15.71)$$

Произвольные функции $U(\pi)$ и $V(\pi)$, входящие в лагранжиан (15.16), имеют размерности

$$[U] = 1, \quad [V] = l^{-2}. \quad (15.72)$$

Поэтому можно было бы ввести размерную константу перед $V(\pi)$. Размерность массы скалярного (15.17) поля одинакова во всех размерностях пространства-времени

$$[m] = l^{-1}.$$

Размерность функции ρ определена размерностью скалярного поля (15.70) и безразмерностью действия:

$$[\rho] = l^2.$$

Импульс скалярного поля безразмерен, $[P] = 1$.

Четырехмерная гравитационная константа связи κ и космологическая постоянная Λ имеют размерности

$$[\kappa] = l^{-2}, \quad [\Lambda] = l^{-4}.$$

Минимально взаимодействующие скалярные поля в двух измерениях имели бы размерность

$$[X] = 1, \quad [\rho] = 1.$$

Эти размерности удобны при анализе бозонной струны с динамической геометрией, когда гравитационный лагранжиан (15.16) добавляется к действию бозонной струны.

15.6. Общее решение без полей материи

Важным свойством двумерной модели гравитации, описываемой только лагранжианом (15.16), является ее интегрируемость. Решение уравнений движения имеет длинную историю. Первоначально, уравнения движения были решены для квадратичной модели в конформной калибровке [143, 137] и калибровке светового конуса [144]. В статьях [145, 146, 147] решение для квадратичной модели было найдено без фиксирования калибровки. После этого решение уравнений движения было упрощено и обобщено в статьях [148, 142]. В настоящем разделе мы приведем конечный результат и выпишем общее решение уравнений движения для произвольных функций U и V в отсутствие полей материи. Решение естественным образом записывается в канонической формулировке модели. Это решение имеет один вектор Киллинга (аналог теоремы Бирхгоффа). Поэтому, используя метод конформных блоков, описанный в главе 14, можно построить все глобальные (максимально продолженные вдоль геодезических) решения двумерных моделей гравитации. В настоящем разделе мы полагаем $X = 0$.

15.6.1. Локальное решение. Интегрирование уравнений движения наиболее просто проводится для конусных компонент векторов в касательном пространстве

$$p_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(p_0 \pm p_1), \quad e_{\alpha}^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{\alpha}^0 \pm e_{\alpha}^1). \quad (15.73)$$

Метрика Лоренца и антисимметричный тензор второго ранга имеют следующие конусные компоненты

$$\eta_{\pm\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\pm\pm} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15.74)$$

Подъем и опускание конусных индексов проводится по правилам $p^+ = p_-$ и $p^- = p_+$. Тогда полная система уравнений движения (15.18)–(15.21) примет вид

$$-\frac{1}{2}R - p_+p_-U' - V' = 0, \quad (15.75)$$

$$-\frac{1}{2}T^{*+} - p^+U = 0, \quad (15.76)$$

$$-\frac{1}{2}T^{*-} - p^-U = 0, \quad (15.77)$$

$$\partial_\alpha \pi - e_\alpha^+ p_+ + e_\alpha^- p_- = 0, \quad (15.78)$$

$$\partial_\alpha p_+ + \omega_\alpha p_+ + e_\alpha^-(p_+p_-U + V) = 0, \quad (15.79)$$

$$\partial_\alpha p_- - \omega_\alpha p_- - e_\alpha^+(p_+p_-U + V) = 0, \quad (15.80)$$

где

$$T^{*\pm} = 2\varepsilon^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \mp \omega_\alpha)e_\beta^\pm. \quad (15.81)$$

Любое локальное решение приведенной системы уравнений для $U \neq 0$ и $V \neq 0$ принадлежит одному из двух классов. Первый класс соответствует нулевому импульсу $p_- = 0$ или, что эквивалентно, $p_+ = 0$.

ТЕОРЕМА 15.6.1. *Если в области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ импульс $p_- = 0$ или, что эквивалентно $p_+ = 0$, то общее решение уравнений движения (15.75)–(15.81) описывает поверхности нулевого кручения, $T^{*\alpha} = 0$, и постоянной кривизны, $R = \text{const}$. Поле дилатона π при этом постоянно в $\mathbb{U}$, и его значение определяется уравнением*

$$V(\pi) = 0. \quad (15.82)$$

Значение скалярной кривизны определяется равенством

$$R = -2V'(\pi). \quad (15.83)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $p_- = 0$ поле дилатона постоянно $\pi = \text{const}$ причем постоянная определяется уравнением (15.82), что следует из уравнения (15.80). Тогда $p_+ = 0$, благодаря уравнению (15.78), и уравнение (15.79) выполнено. То есть условия $p_- = 0$ и $p_+ = 0$ эквивалентны. Оставшиеся уравнения (15.75)–(15.77) показывают, что поверхность $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ (пространство-время) является поверхностью с нулевым кручением и постоянной кривизной

$$T^{*\pm} = 0, \quad R = -2V'(\pi) = \text{const}. \quad (15.84)$$

Лоренцевы поверхности постоянной кривизны были описаны в разделе (12.3). Для этих поверхностей можно восстановить репер e_α^a и лоренцеву связность ω_α , которые входят в систему уравнений (15.75)–(15.81), однозначно с точностью до локальных лоренцевых вращений.

Из теоремы 15.6.1 следует, что двумерные модели гравитации, в основу которых положено постоянство кривизны [149, 150, 151], образуют один из классов решений уравнений движения двумерной гравитации с кручением.

Другой класс решений соответствует нетривиальным импульсам $p_- \neq 0$ или $p_+ \neq 0$ и отличному от нуля кручению. Для определенности, предположим, что $p_- \neq 0$ в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Случай $p_+ \neq 0$ рассматривается аналогично.

Интегрируемость уравнений движения обязана двум нетривиальным наблюдениям.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.6.1. Уравнения движения (15.75)–(15.80) имеют интеграл движения

$$M := p_+ p_- e^{-Q} - W = \frac{1}{2}(p_+^2 - p_-^2) e^{-2q-Q} - W = \text{const}, \quad (15.85)$$

где Q и W являются первообразными:

$$Q(\pi) := \int^\pi ds U(s), \quad W(\pi) := \int^\pi ds V(s) e^{-Q(s)}. \quad (15.86)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство

$$\partial_\alpha M = 0.$$

доказывается прямыми вычислениями с использованием уравнений движения (15.78)–(15.80). Постоянные интегрирования в определении (15.86) несущественны, т.к. M является интегралом движения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначение интеграла движения буквой M не случайно. Для сферически редуцированной общей теории относительности интеграл движения M совпадает с массой в решении Шварцшильда с точностью до постоянного множителя.

Для контроля дальнейших вычислений выпишем размерности

$$[Q] = 1, \quad [W] = [M] = l^{-2},$$

что является следствием размерностей полей (15.72) и (15.71).

Заметим, что интеграл движения зависит только от импульсов p_a и π , и его сохранение является следствием трех уравнений (15.78)–(15.80).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.6.2. 1-форма

$$dx^\alpha f_\alpha := \sqrt{\kappa} \frac{dx^\alpha e_\alpha^+}{p_-} e^Q, \quad p_- \neq 0 \quad (15.87)$$

является замкнутой на уравнениях движения.

В определении (15.87) мы ввели размерную постоянную $\kappa > 0$, $[\kappa] = l^{-2}$, для того, чтобы компоненты формы f_α были безразмерными, $[f_\alpha] = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать замкнутость формы (15.87), необходимо доказать равенство

$$\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} \partial_\alpha f_\beta = 0.$$

Его нетрудно проверить, используя уравнения движения (15.76), (15.78) и (15.80).

Согласно лемме Пуанкаре из замкнутости 1-формы (15.87) следует, что в области $\mathbb{U}$ форму можно записать в виде градиента

$$f_\alpha = \partial_\alpha f \quad (15.88)$$

от некоторой достаточно гладкой функции f .

Теперь можно выписать общее решение уравнений движения.

ТЕОРЕМА 15.6.2. Если в области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ импульс $p_- \neq 0$, то общее решение уравнений движения (15.75)–(15.80) имеет вид

$$e_\alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} p_- e^{-Q} \partial_\alpha f, \quad (15.89)$$

$$e_{\alpha}^{-} = \frac{1}{p_{-}} \left[\frac{1}{\sqrt{\kappa}} (M + W) \partial_{\alpha} f - \partial_{\alpha} \pi \right], \quad (15.90)$$

$$\omega_{\alpha} = \frac{\partial_{\alpha} p_{-}}{p_{-}} - \frac{1}{\sqrt{\kappa}} [(M + W)U + e^{-Q}V] \partial_{\alpha} f, \quad (15.91)$$

$$p_{+} = \frac{1}{p_{-}} (M + W) e^Q, \quad (15.92)$$

где M – постоянная; функции Q, W определены равенствами (15.86), f – произвольная функция с отличным от нуля градиентом, $\partial_{\alpha} f \neq 0$ и функции π и $p_{-} \neq 0$ произвольны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение компонент репера (15.89) является следствием уравнений (15.87) и (15.88). Выражение (15.90) следует из уравнений (15.78) и (15.85). Выражение для лоренцевой связности (15.91) вытекает из уравнений (15.80) и (15.85). Выражение для импульса (15.92) является простым переписыванием равенства (15.85). Последний шаг доказательства заключается в проверке того, что оставшиеся уравнения движения (15.75)–(15.77) и (15.79) удовлетворяются для произвольных функций f, π и p_{-} . Это проверяется прямыми вычислениями и является следствием линейной зависимости уравнений движения (15.27) и (15.29).

Второй класс решений уравнений движения, который описан теоремой 15.6.2, соответствует лоренцевым поверхностям с нетривиальным кручением и непостоянной кривизной, которые проще всего вычислить, воспользовавшись уравнениями (15.75)–(15.77). На этих поверхностях метрика определена репером (15.89), (15.90):

$$ds^2 = 2e_{\alpha}^{+} e_{\beta}^{-} dx^{\alpha} dx^{\beta} = 2e^{-Q} \left[\frac{1}{\kappa} (M + W) df^2 - \frac{1}{\sqrt{\kappa}} df d\pi \right]. \quad (15.93)$$

Мы видим, что функции f и π аналогичны координатам Эддингтона–Финкельштейна [132, 133] для решения Шварцшильда (см. раздел 17.2). При этом поле дилатона $\pi(x)$ является светоподобной координатой.

Общее решение уравнений движения (15.89)–(15.92) было получено без фиксирования какой-либо калибровки и содержит три произвольные функции $f(x), \pi(x)$ и $p_{-}(x)$. Из вида решения (15.89)–(15.92) и метрики (15.93) следует, что первые две функции соответствуют инвариантности модели относительно преобразования координат. Поэтому на них необходимо наложить условие

$$d\pi \wedge df \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \pi \partial_{\beta} f \neq 0. \quad (15.94)$$

Третья произвольная функция p_{-} соответствует локальным лоренцевым вращениям и должна быть либо строго положительной $p_{-} > 0$, либо строго отрицательной $p_{-} < 0$, что соответствует предположению $p_{-} \neq 0$ в условии теоремы.

Компоненты метрики (15.93) зависят только от поля дилатона π и поэтому все решения уравнений движения из второго класса имеют векторное поле Киллинга

$$K = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{\partial}{\partial f}. \quad (15.95)$$

Квадрат вектора Киллинга равен

$$K^2 = \frac{2}{\kappa^2} e^{-Q} (M + W) \quad (15.96)$$

и может быть времениподобным или пространственноподобным в зависимости от знака $M + W$. Горизонты определяются равенством $M + W = 0$, где вектор Киллинга светоподобен.

Существование вектора Киллинга для решений уравнений движения из второго класса является обобщением хорошо известной теоремы Бирхгоффа в общей теории относительности, утверждающей, что у любого сферически симметричного решения вакуумных уравнений Эйнштейна существует дополнительный вектор Киллинга, не связанный с вращательной симметрией.

Общее решение (15.89)–(15.92) в новых канонических переменных, введенных в разделе 15.3.1, имеет вид

$$p = \frac{2}{\sqrt{\kappa}}(M + W)\partial_1 f - \partial_1 \pi, \quad (15.97)$$

$$p_{\perp} = \partial_1 \pi, \quad (15.98)$$

$$e^{2q} = \frac{2}{\kappa} \partial_1 f [\sqrt{\kappa} \partial_1 \pi - (M + W) \partial_1 f] e^{-Q}, \quad (15.99)$$

$$e^{2q_{\perp}} = \frac{p_{\perp}^2 \partial_1 f}{\sqrt{\kappa} \partial_1 \pi - (M + W) \partial_1 f} e^{-Q}. \quad (15.100)$$

Это решение определено только для тех функций π и f , которые обеспечивают положительность правой части равенств (15.99) и (15.100) в соответствии со сделанным ранее предположением (15.59).

Решение уравнений движения в теореме 15.6.2 получено при условии $p_{-} \neq 0$. Если в области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ выполнено другое условие $p_{+} \neq 0$, то функция (15.85) все еще будет интегралом движения, однако 1-форму (15.87) необходимо заменить, т.к. функция p_{-} может иметь нули. Нетрудно проверить, что 1-форма

$$df := \sqrt{\kappa} \frac{dx^{\alpha} e_{\alpha}^{-}}{p_{+}} e^Q$$

является замкнутой на уравнениях движения (15.77), (15.78) и (15.79). Аналогичные вычисления показывают, что в случае $p_{+} \neq 0$ общее решение имеет вид

$$e_{\alpha}^{-} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} p_{+} e^{-Q} \partial_{\alpha} f, \quad (15.101)$$

$$e_{\alpha}^{+} = \frac{1}{p_{+}} \left[\frac{1}{\sqrt{\kappa}} (M + W) \partial_{\alpha} f + \partial_{\alpha} \pi \right], \quad (15.102)$$

$$\omega_{\alpha} = -\frac{\partial_{\alpha} p_{+}}{p_{+}} - \frac{1}{\sqrt{\kappa}} [(M + W)U + e^{-Q}V] \partial_{\alpha} f, \quad (15.103)$$

$$p_{-} = \frac{1}{p_{+}} (M + W) e^Q, \quad (15.104)$$

где произвольная функция $p_{+}(x) \neq 0$ параметризует решение (вместо p_{-}). Соответствующая метрика отличается от метрики (15.93) знаком перед вторым слагаемым

$$ds^2 = 2 e^{-Q} \left[\frac{1}{\kappa} (M + W) df^2 + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} df d\pi \right]. \quad (15.105)$$

Различие можно устранить переопределением $f \mapsto -f$.

Второй класс решений уравнений движения описывает поверхности непостоянной кривизны и нетривиального кручения. Из уравнения (15.75) следует выражение для скалярной кривизны в этом случае

$$R = -2(p^{+}p^{-}U' + V') = -2[(M + W)e^QU' + V']. \quad (15.106)$$

Квадрат тензора кручения, который является геометрическим инвариантом, определяется уравнениями (15.76), (15.77):

$$T^{*a}T^*{}_a = 2T^{*+}T^{*-} = 8p^+p^-U^2 = 8(M+W)e^QU^2. \quad (15.107)$$

Хотя общее решение уравнений движения из второго класса определяется тремя произвольными функциями π , f и p_- (или p_+), в правых частях равенств (15.106), (15.107) стоят функции только от π . Это является следствием наличия векторного поля Киллинга $\partial/\partial f$.

В заключение раздела рассмотрим отношение интеграла движения M к вторичным связям, имеющимся в теории. Уравнение

$$M = \text{const} \quad (15.108)$$

представляет собой связь первого рода. В этом можно убедиться после вычисления пространственной производной:

$$\partial_1 M = e^{-Q} \left[-p^a G_a + \left(\frac{1}{2} p^a p_a U + V \right) G \right]. \quad (15.109)$$

Скобка Пуассона связи (15.108) с вторичными связями обращается в нуль

$$[M, G'_a] = [M, G'] = 0.$$

Следовательно, связь M принадлежит центру алгебры (15.41)–(15.43). Прямые вычисления приводят к следующим скобкам Пуассона связи M с другими связями:

$$\begin{aligned} [M, \tilde{G}'_a] &= \left[k^c p_c \omega_1 + \frac{1}{2} p^c p_c U + V \right] k_a e^{-Q} G \delta, \\ [M, \tilde{G}'_0] &= [M, \tilde{G}'_1] = \left[(p_\perp - p) e^{-2q} \omega_1 + \frac{1}{2} (p_\perp^2 - p^2) e^{-2q} U + V \right] e^{-(q+q_\perp+Q)} G \delta, \\ [M, H'_0] &= \left[-\frac{e_1^a p_a}{g_{11}} H_0 - \frac{e_1^a \varepsilon_a^b p_b}{g_{11}} H_1 + \left(k^a p_a \omega_1 + \frac{1}{2} p^a p_a U + V \right) G \right] e^{-Q} \delta = \\ &= \left[p e^{-2q} H_0 - p_\perp e^{-2q} H_1 + \left((p_\perp - p) e^{-2q} \omega_1 + \frac{1}{2} (p_\perp^2 - p^2) e^{-2q} U + V \right) G \right] e^{-Q} \delta, \\ [M, H'_1] &= \left[\frac{e_1^a \varepsilon_a^b p_b}{g_{11}} H_0 + \frac{e_1^a p_a}{g_{11}} H_1 + \left(-k^a p_a \omega_1 + \frac{1}{2} p^a p_a U + V \right) G \right] e^{-Q} \delta = \\ &= \left[p_\perp e^{-2q} H_0 - p e^{-2q} H_1 + \left(-(p_\perp - p) e^{-2q} \omega_1 + \frac{1}{2} (p_\perp^2 - p^2) e^{-2q} U + V \right) G \right] e^{-Q} \delta, \end{aligned}$$

где, для краткости, мы опустили аргументы δ -функции в правых частях. Выше мы выписали скобки Пуассона в переменных до и после канонического преобразования для сравнения. Мы видим, что связь (15.108) не образует замкнутой подалгебры со связями H_0 и H_1 .

15.6.2. Глобальные решения. В предыдущем разделе мы нашли все локальные решения двумерной гравитации без полей материи. Решения из первого класса описывают поверхности постоянной кривизны и нулевого кручения. Глобальная структура этих поверхностей хорошо известна: это либо однополостный гиперboloид, описанный в разделе 12.3, либо плоскость Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$. Решения из второго класса описывают лоренцевы поверхности ненулевого кручения и непостоянной кривизны. На этих поверхностях определена метрика, имеющая один вектор Киллинга. Поэтому для построения глобальных решений (поверхностей, максимально продолженных вдоль экстремалей и геодезических) можно воспользоваться методом

конформных блоков, описанным в главе 13. Однако для его применения необходимо преобразовать полученную ранее метрику к нужному виду. Этой задачей мы займемся в настоящем разделе.

Для применения метода конформных блоков двумерную метрику необходимо переписать в конформно плоском виде. Это необходимо сделать в каждой области, где определено решение уравнений движения.

Запишем сначала метрику (15.93) в диагональном виде, который будет полезен для сравнения со случаем наличия скалярного поля. В области, где $M + W > 0$ мы оставим координату π без изменения, но заменим координату f :

$$(\pi, f) \mapsto (\pi, \tau), \quad f := \frac{1}{2}\tau + g(\pi), \quad (15.110)$$

где функция $g(\pi)$ определена уравнением

$$g' = \frac{\sqrt{\kappa}}{2(M + W)}. \quad (15.111)$$

Это преобразование определено по крайней мере между горизонтами, которые определяются уравнением $M + W = 0$. Тогда метрика (15.93) станет диагональной

$$ds^2 = \frac{1}{2} e^{-Q} \left[\frac{1}{\kappa} (M + W) d\tau^2 - \frac{d\pi^2}{M + W} \right]. \quad (15.112)$$

В области $M + W > 0$ координата τ является времениподобной, а π – пространственноподобной.

Эту метрику легко переписать в конформно плоском виде, который нужен для построения глобальных решений. С этой целью введем пространственную координату σ , определенную уравнением

$$\frac{d\pi}{d\sigma} = \pm \frac{M + W}{\sqrt{\kappa}},$$

и оставив координату τ без изменения. В результате получим конформно плоскую метрику

$$ds^2 = \frac{1}{2\kappa} e^{-Q} (M + W) (d\tau^2 - d\sigma^2), \quad M + W > 0. \quad (15.113)$$

Теперь введем инвариантную переменную $\hat{q}(\pi)$, связанную с π обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\hat{q}}{d\pi} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} e^{-Q}. \quad (15.114)$$

Тогда метрика (15.113) примет следующую форму

$$ds^2 = \Phi(\hat{q}) (d\tau^2 - d\sigma^2), \quad \Phi(\hat{q}) > 0, \quad (15.115)$$

где

$$\pm \frac{d\hat{q}}{d\sigma} = \Phi(\hat{q}), \quad (15.116)$$

и конформный множитель имеет вид

$$\Phi(\hat{q}) = \frac{1}{2\kappa} e^{-Q} (M + W). \quad (15.117)$$

Это и есть необходимый вид метрики в статической области $M + W > 0$. Данная область является статической, т.к. конформный множитель Φ не зависит от времени τ .

В области $M + W < 0$ мы вводим новую пространственную координату σ :

$$(\pi, f) \mapsto (\pi, \sigma), \quad f := \frac{1}{2}\sigma + g(\pi),$$

где функция $g(\pi)$ определена прежним уравнением (15.111). Тогда метрика (15.93) примет диагональный вид

$$ds^2 = -\frac{1}{2}e^{-Q} \left[\frac{d\pi^2}{M+W} - \frac{1}{\kappa}(M+W)d\sigma^2 \right].$$

Поскольку в рассматриваемом случае $M+W < 0$, то координата π является времениподобной, а σ – пространственноподобной. Теперь введем новую временную координату τ с помощью уравнения

$$\frac{d\pi}{d\tau} = \pm \frac{M+W}{\sqrt{\kappa}}.$$

Тогда метрика примет конформно плоский вид

$$ds^2 = -\frac{1}{2\kappa}e^{-Q}(M+W)(d\tau^2 - d\sigma^2), \quad M+W < 0.$$

В терминах инвариантной переменной $\hat{q}(\pi)$ (15.114) эта метрика запишется в виде

$$ds^2 = -\Phi(\hat{q})(d\tau^2 - d\sigma^2), \quad \Phi(\hat{q}) < 0, \quad (15.118)$$

где конформный множитель определен прежним уравнением (15.117) и

$$\pm \frac{d\hat{q}}{d\tau} = -\Phi(\hat{q}).$$

Эта метрика однородна, т.к. конформный множитель зависит только от времени τ .

Решения для метрики в статическом $M+W > 0$ и $M+W < 0$ однородном случае можно объединить

$$ds^2 = |\Phi(\hat{q})| (d\tau^2 - d\sigma^2),$$

$$\left| \frac{d\hat{q}}{d\zeta} \right| = \pm \Phi(\hat{q}),$$

где $\zeta = \sigma$ и $\zeta = \tau$ соответственно для положительных и отрицательных значений конформного множителя $\Phi(\hat{q})$. Метод конформных блоков был разработан для метрик именно такого вида. Конечно, глобальная структура решений зависит от функций U и V , определяющих модель. В любом случае можно построить максимально продолженные решения путем анализа нулей и особенностей конформного множителя $\Phi(\hat{q})$.

Глобальные решения строятся путем анализа нулей и особенностей конформного множителя $\Phi(\hat{q})$. Для упрощения вида конформного множителя переменную $\hat{q}$ можно сдвинуть $\hat{q} \mapsto \hat{q} + \text{const}$. При этом вид метрики не изменится. Кроме того, переменную $\hat{q}$ и координаты τ, σ можно одновременно умножить на отличную от нуля постоянную a :

$$\hat{q} \mapsto \hat{q}' := a\hat{q} \quad \text{и} \quad \tau, \sigma \mapsto \tau' := a\tau, \quad \sigma' := a\sigma.$$

В результате метрика умножится на a^2 . Конечно, такое преобразование не изменит глобальной структуры пространства-времени. В частности, можно выбрать $a = -1$. Таким образом, без ограничения общности можно совершить линейное преобразование переменной $\hat{q}$ для упрощения вида конформного множителя $\Phi(\hat{q})$.

15.7. Квадратичная модель

В качестве примера интегрирования уравнений движения двумерной гравитации рассмотрим квадратичную модель (15.13) без скалярного поля [124, 134, 135].

Начнем с локального решения. Для квадратичной модели произвольные функции, входящие в лагранжиан, имеют вид (15.24). Теорема 15.6.1 дает первый класс решений уравнений движения. Условие (15.82) определяет значение поля дилатона

$$V(\pi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi = \pm 2\sqrt{\lambda\gamma}.$$

Далее, из равенств (15.84) находим кручение и кривизну:

$$T^{*a} = 0, \quad R = \pm 2\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}. \quad (15.119)$$

Таким образом, квадратичная модель описывает поверхности нулевого кручения и постоянной кривизны. Такие решения существуют только при $\lambda/\gamma > 0$.

Второй класс решений уравнений движения описывает поверхности с нетривиальным кручением и непостоянной кривизной. Эти решения зависят от двух первообразных (15.86):

$$Q := \int^\pi ds \frac{1}{\beta} = \frac{\pi}{\beta}, \quad (15.120)$$

$$W := \int^\pi ds \left(-\frac{s^2}{4\gamma} + \lambda \right) e^{-\frac{\pi}{\beta}} = \left(\frac{\beta}{4\gamma} \pi^2 + \frac{\beta^2}{2\gamma} \pi + \frac{\beta^3}{2\gamma} - \beta\lambda \right) e^{-\frac{\pi}{\beta}}. \quad (15.121)$$

После этого общее решение из второго класса принимает вид (15.89)–(15.92), куда надо подставить найденные функции Q , W и постоянную M . Это решение записано в произвольной системе координат (функции f , π) и при произвольном лоренцевом повороте (функция p_-). Соответствующая метрика на лоренцевой поверхности принимает вид (15.93).

Скалярную кривизну и псевдослед тензора кручения находим из уравнений (15.75)–(15.77):

$$R = \frac{\pi}{\gamma}, \quad T^{*\pm} = -\frac{2p^\pm}{\beta}. \quad (15.122)$$

Мы видим, что поле дилатона в квадратичной модели с точностью до множителя совпадает со скалярной кривизной.

Вид решения можно упростить, зафиксировав калибровку. Положим, например,

$$f = \tau, \quad \pi = \sigma, \quad p_- = 1.$$

Тогда общее локальное решение уравнений движения примет вид (для простоты положим также $\kappa = 1$)

$$\begin{aligned} e_0^+ &= 0, \\ e_1^+ &= e^{-Q}, \\ e_0^- &= M + W, \\ e_1^- &= -1, \\ \omega_0 &= -\frac{M + W}{\beta} + \left(\frac{\sigma^2}{4\gamma} - \lambda \right) e^{-Q}, \\ \omega_1 &= 0, \\ p_+ &= (M + W) e^Q, \end{aligned} \quad (15.123)$$

где

$$Q = \frac{\sigma}{\beta}, \quad W = \left(\frac{\beta}{4\gamma} \sigma^2 + \frac{\beta^2}{2\gamma} \sigma + \frac{\beta^3}{2\gamma} - \beta\lambda \right) e^{-\frac{\sigma}{\beta}}.$$

В этой калибровке скалярная кривизна не зависит от времени τ и пропорциональна σ :

$$R = \frac{\sigma}{\gamma}.$$

Псевдослед тензора кручения имеет следующие компоненты:

$$T^{*+} = -\frac{2}{\beta}, \quad T^{*-} = -\frac{2}{\beta}(M + W) e^Q.$$

Метрика на этой поверхности имеет вид

$$ds^2 = 2 e^{-Q} [(M + W) d\tau^2 - d\tau d\sigma]. \quad (15.124)$$

Нахождение общего локального решения уравнений движения является важным этапом исследования модели, но это далеко не все. Используя метод конформных блоков, изложенный в разделе 13, мы в состоянии описать глобальную структуру лоренцевых поверхностей двумерной гравитации. Чтобы это сделать, метрику надо переписать в конформно плоском виде, как было указано в разделе 15.6.2. Для простоты, в дальнейшем анализе мы положим $\kappa = 0$.

Переменная $\hat{q}$ связана с полем дилатона уравнением (15.114). В рассматриваемом случае его решение имеет вид

$$\hat{q} = -\beta e^{-\frac{\pi}{\beta}} \Leftrightarrow \pi = -\beta \ln \left(-\frac{\hat{q}}{\beta} \right). \quad (15.125)$$

Теперь можно выписать конформный множитель (15.117)

$$\Phi = \frac{\beta}{8\gamma} \hat{q} \left\{ \left[\ln^2 \left(-\frac{\hat{q}}{\beta} \right) - 2 \ln \left(-\frac{\hat{q}}{\beta} \right) + 2 - \Lambda \right] \hat{q} - \frac{4\gamma}{\beta^2} M \right\},$$

где

$$\Lambda := \frac{4\lambda\gamma}{\beta^2}.$$

Для упрощения анализа нулей и особенностей конформного множителя мы, не ограничивая общности, можем совершить линейное преобразование переменной $\hat{q}$. Положив

$$\hat{q} := -\frac{\beta q}{e}, \quad M \mapsto \frac{\beta^3 e}{4\gamma} M$$

и отбросив несущественный постоянный множитель, получим следующий конформный множитель

$$\Phi = q [(\ln^2 q + 1 - \Lambda)q + M]. \quad (15.126)$$

Глобальная структура решений уравнений движения двумерной гравитации соответствуют интервалу $q \in (0, \infty)$ и определяются нулями конформного множителя. В статье [116] классифицированы все глобальные решения квадратичной модели двумерной гравитации и, в частности, построены соответствующие диаграммы Картера–Пенроуза.

15.8. Пуассоновы сигма модели

Пуассоновы сигма модели представляют собой широкий класс интегрируемых моделей в двумерном пространстве. Они были введены в [152] под названием нелинейные калибровочные модели. Смысл этого названия будет пояснен далее в разделе 15.8.3. В дальнейшем модель была сформулирована на языке дифференциальных форм [153], и теперь известна как *пуассонова сигма модель*.

Пусть дано два многообразия $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ размерностей: $\dim \mathbb{M} = 2$ и $\dim \mathbb{N} = n \geq 2$. Двумерное многообразие $\mathbb{M}$ (поверхность) является произвольным, а многообразие $\mathbb{N}$ предполагается пуассоновым (см. раздел 4.3). Обозначим локальные координаты на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ соответственно

$$(x^\alpha) \in \mathbb{M}, \quad \alpha = 0, 1; \quad (X^A) \in \mathbb{N}, \quad A = 1, \dots, n.$$

Будем рассматривать многообразие $\mathbb{N}$ в качестве пространства-мишени:

$$X : \mathbb{M} \ni x \mapsto X(x) \in \mathbb{N}.$$

Локально это отображение задается n достаточно гладкими функциями $X^A(x)$.

Можно представлять себе многообразие $\mathbb{M}$ как двумерное пространство-время, хотя для формулировки пуассоновых сигма моделей задание метрики на $\mathbb{M}$ необязательно.

Пуассоновость пространства-мишени $\mathbb{N}$ означает, что на нем задана пуассонова структура

$$J = \frac{1}{2} J^{AB} \partial_A \wedge \partial_B,$$

которая была определена в разделе 4.3. Компоненты антисимметричного контравариантного тензора второго ранга $J^{AB}(X)$, которые задают пуассонову структуру в координатах, зависят от точки многообразия пространства-мишени $\mathbb{N}$ и являются сложными функциями на $\mathbb{M}$, поскольку $X = X(x)$.

Будем также предполагать, что на $\mathbb{M}$ задан набор 1-форм $A_A = dx^\alpha A_{\alpha A}$, которые по индексу A образуют ковектор относительно преобразований координат в $\mathbb{N}$. Тогда пуассоновой сигма модель определяется следующим действием

$$S := \int_{\mathbb{M}} \left(A_A \wedge dX^A + \frac{1}{2} J^{AB} A_A \wedge A_B \right). \quad (15.127)$$

Подынтегральное выражение представляет собой 2-форму и поэтому интеграл определен. Конечно, мы также предполагаем, что интеграл сходится. Подчеркнем, что действие (15.127) вообще не зависит от какой-либо метрики ни на $\mathbb{M}$, ни на $\mathbb{N}$.

Действие (15.127) можно переписать в координатах:

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx L, \quad (15.128)$$

где лагранжиан пуассоновой сигма модели имеет вид

$$L = -\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} \left(A_{\alpha A} \partial_\beta X^A + \frac{1}{2} J^{AB} A_{\alpha A} A_{\beta B} \right), \quad (15.129)$$

и $\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ — полностью антисимметричная тензорная плотность второго ранга: $\hat{\varepsilon}^{01} = -\hat{\varepsilon}^{10} = -1$.

Здесь видна специфика двумерия, т.к. для построения пуассоновой сигма модели существенно используется существование полностью антисимметричного тензора второго ранга.

Попытки обобщения пуассоновой сигма модели на многообразия $\mathbb{M}$ более высоких размерностей пока ни к чему не привели.

По построению, действие (15.127) инвариантно относительно общих преобразований координат на $\mathbb{M}$ и не зависит от того, задана на $\mathbb{M}$ метрика или нет. Действие (15.127) инвариантно также относительно преобразований координат в $\mathbb{N}$, т.к. при преобразовании координат $X^A \mapsto X^{A'} = X^{A'}(X)$ по правилу дифференцирования сложной функции справедливы следующие равенства

$$dX^{A'} = dx^\alpha \partial_\alpha X^A \partial_A X^{A'} = dX^A \partial_A X^{A'}.$$

Пуассонова структура J^{AB} и 1-формы A_A при этом преобразуются по тензорному закону:

$$J^{A'B'} = J^{AB} \partial_A X^{A'} \partial_B X^{B'}, \quad A_{A'} = \partial_{A'} X^A A_A,$$

что следует из их определения. Отметим, что поля X^A сами по себе не образуют вектора относительно преобразований координат в $\mathbb{N}$, т.к. являются координатными функциями.

Уравнения Эйлера–Лагранжа пуассоновой сигма модели имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta A_{\alpha A}} = -\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} (\partial_\beta X^A + J^{AB} A_{\beta B}) = 0, \quad (15.130)$$

$$\frac{\delta S}{\delta X^A} = -\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha A_{\beta A} + \frac{1}{2} \partial_A J^{BC} A_{\alpha B} A_{\beta C} \right) = 0. \quad (15.131)$$

Используя обозначения дифференциальных форм и внешнего дифференцирования d , эти уравнения можно переписать в эквивалентном более компактном виде

$$dX^A + J^{AB} A_B = 0, \quad (15.132)$$

$$dA_A + \frac{1}{2} \partial_A J^{BC} A_B \wedge A_C = 0. \quad (15.133)$$

Внешний дифференциал от уравнения (15.132) равен нулю,

$$d(15.132) = -\frac{1}{2} (J^{AD} \partial_D J^{BC} + J^{BD} \partial_D J^{CA} + J^{CD} \partial_D J^{AB}) A_B \wedge A_C = 0,$$

в силу определения пуассоновой структуры,

$$d(J^{AB} A_B) = \partial_D J^{AB} dX^D \wedge A_B + J^{AB} dA_B.$$

Внешний дифференциал от второго уравнения также равен нулю, $d(15.133) = 0$, т.к. любая 3-форма на двумерном многообразии равна нулю. Тем самым условия интегрируемости системы уравнений в частных производных (15.132), (15.133) выполнены.

Действие пуассоновой сигма модели (15.127) при локальных инфинитезимальных преобразованиях с малым параметром $\epsilon_A(x)$:

$$\begin{aligned} \delta X^A &= J^{AB} \epsilon_B, \\ \delta A_{\alpha A} &= -\partial_\alpha \epsilon_A - \partial_A J^{BC} A_{\alpha B} \epsilon_C, \end{aligned} \quad (15.134)$$

в линейном приближении по ϵ меняется на полную производную:

$$\delta L = -\partial_\alpha (\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} \epsilon_A \partial_\beta X^A).$$

В этом можно убедиться прямой проверкой. Согласно второй теореме Нетер наличие локальной инвариантности приводит к зависимости уравнений движения (см. раздел 5.3)

$$\partial_\alpha \frac{\delta S}{\delta A_{\alpha A}} - \partial_B J^{CA} A_{\alpha C} \frac{\delta S}{\delta A_{\alpha B}} + J^{AB} \frac{\delta S}{\delta X^B} = 0.$$

Преобразования симметрии (15.134) содержат в себе общие преобразования координат в инфинитезимальной форме. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим инфинитезимальные преобразования (15.134) специального вида

$$\epsilon_A := \xi^\alpha A_{\alpha A}.$$

Тогда для преобразования полей с учетом уравнений Эйлера–Лагранжа (15.130), (15.131) получим следующие равенства:

$$\delta X^A = -\xi^\alpha \partial_\alpha X^A, \quad \delta A_{\alpha A} = -\xi^\beta \partial_\beta A_{\alpha A} - \partial_\alpha \xi^\beta A_{\beta A}.$$

Это и есть общие преобразования координат на $\mathbb{M}$, записанные в инфинитезимальной форме: $x^\alpha \mapsto x^\alpha + \xi^\alpha(x)$.

Рассмотрим коммутатор двух локальных преобразований (15.134) с параметрами ϵ_1 и ϵ_2 . Прямые вычисления приводят к равенствам:

$$[\delta_2, \delta_1]X^A = \delta_3 X^A, \quad (15.135)$$

$$[\delta_2, \delta_1]A_{\alpha A} = \delta_3 A_{\alpha A} + \partial_{AB}^2 J^{CD} \epsilon_{2C} \epsilon_{1D} (\partial_\alpha X^B + J^{BE} A_{\alpha E}), \quad (15.136)$$

где параметр результирующего преобразования (15.134) равен

$$\epsilon_{3A} := \partial_A J^{BC} \epsilon_{2B} \epsilon_{1C}.$$

Мы видим, что “алгебра” локальных преобразований (15.134) замыкается только на уравнениях движения, если пуассонова структура нелинейна по координатам.

15.8.1. Гамильтонова формулировка. Сформулируем пуассонову сигма модель на гамильтоновом языке. С этой целью проинтегрируем первое слагаемое в действии (15.128) по частям. Тогда лагранжиан пуассоновой сигма модели (15.129) примет вид

$$L = \partial_0 A_{1A} X^A - \partial_1 A_{0A} X^A + J^{AB} A_{0A} A_{1B}.$$

Теперь вычислим импульсы, сопряженные полям $A_{\alpha A}$,

$$P^{0A} := \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_{0A})} = 0, \quad (15.137)$$

$$P^{1A} := \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_{1A})} = X^A. \quad (15.138)$$

Отсюда следует, что поля $X^A(x)$ являются импульсами, сопряженными пространственным компонентам A_{1A} , а действие пуассоновой сигма модели после интегрирования по частям уже записано в гамильтоновом виде.

Переобозначим для краткости координаты: $x^0 = \tau$, $x^1 = \sigma$. Говорить о том, что координаты τ и σ являются временной и пространственной не имеет никакого смысла, т.к. на $\mathbb{M}$ отсутствует метрика. Мы рассматриваем координату τ просто как некоторый параметр эволюции.

Одновременные скобки Пуассона для координат и импульсов имеют канонический вид:

$$\begin{aligned} [A_{\alpha A}, P'^{\beta B}] &= \delta_\alpha^\beta \delta_A^B \delta(\sigma, \sigma'), \\ [A_{\alpha A}, A'_{\beta B}] &= 0, \quad [P^{\alpha A}, P'^{\beta B}] = 0, \end{aligned}$$

где штрих у поля означает, что оно рассматривается в точке σ' .

Нетрудно вычислить гамильтониан пуассоновой сигма модели

$$H = - \int d\sigma A_{0A} G^A, \quad (15.139)$$

где

$$G^A := \partial_1 X^A + J^{AB} A_{1B}. \quad (15.140)$$

Равенства нулю импульсов (15.137), сопряженных временным компонентам A_{0A} , являются первичными связями пуассоновой сигма модели. Условие их сохранения во времени приводит к вторичным связям:

$$\dot{P}^{0A} = [P^{0A}, H] = G^A = 0,$$

где точка обозначает дифференцирование по τ . Прямые вычисления показывают, что вторичные связи удовлетворяют замкнутой алгебре скобок Пуассона:

$$[G^A, G'^B] = G^C \partial_C J^{AB} \delta(\sigma, \sigma'). \quad (15.141)$$

Скобки Пуассона первичных связей (15.137) между собой и с вторичными связями, очевидно, равны нулю. Это значит, что пуассонова сигма модель содержит n первичных и n вторичных связей первого рода, а гамильтониан (15.139) равен линейной комбинации связей. Временные компоненты A_{0A} играют при этом роль множителей Лагранжа.

Как известно, все связи первого рода являются генераторами локальных преобразований симметрии действия (см. раздел 6.2.3). Преобразования симметрии для первичных связей задаются интегралом

$$T_\zeta = \int d\sigma \zeta_A P^{0A},$$

где $\zeta(x)$ – параметр преобразования. Эти преобразования действуют только на 0-компоненты полей. Явный вид преобразований задается скобками Пуассона:

$$\begin{aligned} \delta P^{0A} &:= [P^{0A}, T_\zeta] = 0, \\ \delta A_{0A} &:= [A_{0A}, T_\zeta] = \zeta_A. \end{aligned}$$

Аналогично, преобразования симметрии для вторичных связей с параметром ϵ_A задаются интегралом

$$T_\epsilon = \int d\sigma \epsilon_A G^A.$$

В явном виде имеем следующие инфинитезимальные преобразования:

$$\begin{aligned} \delta X^A &:= [X^A, T_\epsilon] = J^{AB} \epsilon_B, \\ \delta A_{1A} &:= [A_{1A}, T_\epsilon] = -\partial_1 \epsilon_A - \partial_A J^{BC} A_{1B} \epsilon_C. \end{aligned}$$

Эти преобразования симметрии совпадают с инфинитезимальными преобразованиями (15.134) для пространственных компонент полей.

Следуя общим правилам, описанным в разделе 6.2.3, посчитаем число физических (распространяющихся) степеней свободы. Модель содержит $4n$ полей: $A_{\alpha A}$ и $P^{\alpha A}$. Пуассонова сигма модель является калибровочной и содержит $2n$ связей первого рода. Чтобы однозначно зафиксировать решение уравнений движения необходимо наложить такое же число калибровочных условий. Поскольку $4n - 2n - 2n = 0$, то пуассонова сигма модель не описывает ни одной физической степени свободы. Такие модели часто называют *топологическими*.

15.8.2. Общее решение уравнений движения. Докажем, что пуассоновы сигма модели являются интегрируемыми. Допустим, что пуассонова структура (т.е. матрица J^{AB}) имеет постоянный ранг $2m < n$ на $\mathbb{N}$. Поскольку матрица J^{AB} антисимметрична, то ранг пуассоновой структуры должен быть четным. Согласно теореме Дарбу на пуассоновом многообразии существует такая система координат, что пуассонова структура имеет канонический вид. Обозначим эти координаты через

$$(X^A) \mapsto (X^M, X^I), \quad M = 1, \dots, 2m < n, \quad I = 2m + 1, \dots, n.$$

Тогда в координатах Дарбу пуассонова структура примет канонический вид

$$J^{AB} = \begin{pmatrix} \varpi^{-1MN} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15.142)$$

где $\varpi^{-1} = -\varpi$ – матрица, обратная к канонической симплектической форме

$$\varpi := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbb{1}$ обозначает единичную $m \times m$ матрицу. Координатные функции X^I являются $n - 2m$ функциями Казимира пуассонова многообразия, а $2m$ -мерное подмногообразие, определяемое уравнениями $X^I = \text{const}$, – симплектическим.

ТЕОРЕМА 15.8.1. *Общее решение уравнений движения (15.132), (15.133) пуассоновой сигма модели в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ имеет вид*

$$A_M = -\varpi_{MN} dX^N, \quad A_I = df_I, \quad X^I = \text{const}, \quad (15.143)$$

где $X^M(x)$ и $f_I(x)$ – произвольные функции, а X^I – произвольный набор постоянных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пуассонова сигма модель инвариантна относительно общих преобразований координат в пространстве-мишени, то перейдем к координатам Дарбу (они всегда существуют в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$). Тогда уравнения движения (15.132), (15.133) примут простой вид

$$dX^M + \varpi^{-1MN} A_N = 0, \quad (15.144)$$

$$dX^I = 0, \quad (15.145)$$

$$dA_M = 0, \quad (15.146)$$

$$dA_I = 0. \quad (15.147)$$

Уравнение (15.144) решим относительно 1-форм $A_M = -\varpi_{MN} dX^N$. Тогда уравнение (15.146) тождественно удовлетворяется. Уравнение (15.145) имеет решение $X^I = \text{const}$. Последнее уравнение (15.147) означает, что 1-формы A_I должны быть замкнуты. Тогда из леммы Пуанкаре следует, что в области $\mathbb{U}$ существуют такие функции $f_I(x)$, что $A_I = df_I$. Отсюда вытекает, что общее решение уравнений Эйлера–Лагранжа пуассоновой сигма модели имеет вид (15.143).

Найденное решение было получено без фиксирования калибровки (системы координат) и параметризуется n произвольными функциями $\{X^M, f_I\}$. Единственное условие на произвольные функции состоит в том, что они должны определять переход к координатам Дарбу, т.е. якобиан преобразования координат должен быть отличен от нуля:

$$\frac{\partial(X^M, f_I)}{\partial(X^A)} \neq 0.$$

Мы видим, что пуассонова сигма модель является интегрируемой, поскольку координаты Дарбу локально всегда существуют. Для того, чтобы выписать общее решение в явном виде при заданной пуассоновой структуре $J^{AB}(X)$, необходимо найти функции перехода к координатам Дарбу. Эта задача сложна, однако сам факт их существования очень важен. Фактически, нахождение координат Дарбу эквивалентно решению исходной системы уравнений (15.132), (15.133).

Сделаем важное замечание. Общее решение (15.143) было получено в предположении, что ранг Пуассоновой структуры постоянен на всем $\mathbb{N}$. Однако в пространстве-мишени могут быть подмногообразия, на которых ранг пуассоновой структуры меньше $2m$. Уравнения движения на этих подмногообразиях (15.132), (15.133) необходимо рассматривать, как особые случаи. Например, двумерную гравитацию с кручением можно рассматривать, как пуассонову сигма модель с $n = 3$ (см. далее раздел 15.8.4). Ранг соответствующей пуассоновой структуры равен 2 всюду на пространстве-мишени за исключением отдельных точек, где он обращается в нуль. Этим точкам соответствует важный класс вырожденных решений, описывающий поверхности нулевого кручения и постоянной кривизны.

15.8.3. Двумерные поля Янга–Миллса. Пусть пространством-мишенью является полупростая группа Ли $\mathbb{N} = \mathbb{G}$ размерности n . Базис $\{L_A\}$ соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[L_A, L_B] = f_{AB}^C L_C, \quad (15.148)$$

где f_{AB}^C – структурные константы. Форма Киллинга–Картана

$$\eta_{AB} := -f_{AC}^D f_{BD}^C$$

для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ невырождена и задает двусторонне инвариантную метрику на групповом многообразии $\mathbb{G}$.

Базис алгебры $\mathfrak{g}^*$, дуальной к $\mathfrak{g}$, задается коммутационными соотношениями

$$[L^A, L^B] = f^{AB}_C L^C,$$

где подъем и опускание индексов производится с помощью формы Киллинга–Картана. Изоморфизм алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ естественным образом устанавливается формой Киллинга–Картана: $L^A := \eta^{AB} L_B$.

Если обозначить координаты группового многообразия $\mathbb{G}$ через X^A , то линейный по координатам антисимметричный тензор второго ранга

$$J^{AB} := f^{AB}_C X^C \quad (15.149)$$

задает пуассонову структуру на групповом многообразии. При этом тождество Якоби для пуассоновой структуры является следствием тождеств Якоби для структурных констант.

Рассмотрим действие Янга–Миллса для калибровочной алгебры Ли $\mathfrak{g}^*$, дуальной к $\mathfrak{g}$, в двумерном пространстве-времени Минковского

$$S_{YM} = \int_{\mathbb{M}} dx L_{YM} = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{M}} dx F_{\alpha\beta A} F^{\alpha\beta A}, \quad (15.150)$$

где

$$F_{\alpha\beta A} := \partial_\alpha A_{\beta A} - \partial_\beta A_{\alpha A} + A_{\alpha B} A_{\beta C} f^{BC}_A$$

– тензор кривизны для локальной формы связности $A_{\alpha A}$. Подъем и опускание греческих индексов производится с помощью метрики Минковского $\eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(+-)$.

Запишем действие Янга–Миллса в гамильтоновой форме. Импульсы, сопряженные к полям $A_{\alpha A}$, равны

$$P^{0A} := \frac{\partial L_{\text{YM}}}{\partial \dot{A}_{0A}} = 0, \quad (15.151)$$

$$P^{1A} := \frac{\partial L_{\text{YM}}}{\partial \dot{A}_{1A}} = -F^{01A}, \quad (15.152)$$

где точка обозначает дифференцирование по $x^0 := \tau$. Нетрудно вычислить гамильтониан модели

$$\mathcal{H}_{\text{YM}} = \int d\sigma H_{\text{YM}} = \int d\sigma \left(\frac{1}{2} P^{1A} P^1_A - A_{0A} G^A \right),$$

где

$$G^A = \partial_1 P^{1A} + f^{AB}{}_C A_{1B} P^{1C}. \quad (15.153)$$

Равенства нулю импульсов (15.151), соответствующих нулевым компонентам полей, представляют собой первичные связи. Их сохранение во времени приводит к вторичным связям:

$$\dot{P}^{0A} = [P^{0A}, H_{\text{YM}}] = G^A = 0.$$

Скобки Пуассона вторичных связей между собой образуют замкнутую алгебру:

$$[G^A, G'^B] = f^{AB}{}_C G^C \delta(\sigma, \sigma').$$

Таким образом, теория Янга–Миллса содержит $2n$ связей первого рода.

Запишем действие Янга–Миллса в канонически сопряженных переменных $A_{\alpha A}$ и $P^{\alpha A}$. Простые вычисления с интегрированием по частям показывают, что действие равно сумме двух слагаемых:

$$S_{\text{YM}} = \int dx (P^{\alpha A} \dot{A}_{\alpha A} - H_{\text{YM}}) = S_{\text{YM}}^{\text{PSM}} + S_{\text{YM}}^{\text{P}^2},$$

где

$$S_{\text{YM}}^{\text{PSM}} := \int dx (A_{0A} \partial_1 P^{1A} - A_{1A} \partial_0 P^{1A} + A_{0A} A_{1B} f^{AB}{}_C P^{1C}), \quad (15.154)$$

$$S_{\text{YM}}^{\text{P}^2} := -\frac{1}{2} \int dx P^{1A} P^1_A. \quad (15.155)$$

Первое слагаемое представляет собой пуассонову сигма модель (15.128), если положить $X^A := P^{1A}$. Второе слагаемое представляет собой интеграл от квадратичной формы импульсов

$$C = \frac{1}{2} X^A X_A, \quad (15.156)$$

которая является функцией Казимира для пуассоновой структуры (15.149). В этом легко убедиться, вычислив скобку Пуассона с произвольной гладкой функцией $f \in C^\infty(\mathbb{G})$:

$$[C, f] = f^{ABC} X_A X_C \partial_B f = 0,$$

ввиду полной антисимметрии структурных констант.

Важным фактом является то, что не только исходное действие (15.150) калибровочно инвариантно, но и оба слагаемых (15.154) и (15.155) в отдельности (с точностью до дивергенции). Более того, слагаемое $S_{\text{YM}}^{\text{PSM}}$ инвариантно также относительно общих преобразований координат, а эта инвариантность отсутствует в исходном действии.

Пуассонова сигма модель для полей Янга–Миллса (15.154) соответствует линейной по координатам пуассоновой структуре (15.149). Поэтому ее обобщение на произвольную пуассонову структуру [152] сначала было названо нелинейной калибровочной моделью.

15.8.4. Двумерная гравитация как пуассонова сигма модель. Двумерная гравитация с кручением общего вида, рассмотренная в разделе 15.2, представляет собой нетривиальную пуассонову сигма модель. В настоящем разделе эта модель будет описана с этой точки зрения.

В моделях двумерной гравитации предполагается, что на базовом двумерном пространстве-времени $\mathbb{M}$ задана метрика лоренцевой сигнатуры. Независимыми переменными в двумерной гравитации с кручением без полей материи являются репер $e_{\alpha a}$, $a = 0, 1$, и лоренцева связность, которая в двумерном случае параметризуется псевдоковекторным полем ω_α . Как было показано в разделе 15.8.1, пуассонова сигма модель представляет собой формулировку теории в канонической форме. Поэтому сформулируем модель сразу на этом языке, что было сделано в разделе 15.3. Напомним, что импульсы, сопряженные пространственным компонентам репера e_{1a} и лоренцевой связности ω_α , были обозначены через p^a и π .

Действие двумерной гравитации с кручением имеет вид

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx L_G,$$

где

$$L_G = -\frac{1}{2}(\pi \hat{R} + p^a \hat{T}^*_a) - \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} p_a p^a U + V \right). \quad (15.157)$$

Лагранжиан (15.157) зависит от двух произвольных функций $U(\pi)$ и $V(\pi)$. Напомним, что плотности скалярной кривизны и псевдоследа тензора кручения выражаются через репер и лоренцеву связность с помощью следующих соотношений:

$$\hat{R} := \sqrt{|g|} R = 2\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \omega_\beta, \quad (15.158)$$

$$\hat{T}^*_a := \sqrt{|g|} T^*_a = 2\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha e_{\beta a} - \omega_\alpha \varepsilon^{ab} e_{\beta b}). \quad (15.159)$$

В разделе 15.4 было показано, что модель двумерной гравитации (15.157) эквивалентна двумерной дилатонной гравитации. При этом импульс π отождествляется с полем дилатона. Однако только в виде (15.157) двумерная гравитация имеет вид пуассоновой сигма модели.

Пространство-мишень пуассоновой сигма модели $\mathbb{N}$, соответствующей двумерной гравитации, трехмерно: $(X^A) = (p^a, \pi) \in \mathbb{R}^3$. Пуассонова структура на $\mathbb{R}^3$ задается антисимметричной 3×3 матрицей

$$J^{AB} := \begin{pmatrix} -\varepsilon^{ab} \left(\frac{1}{2} p_c p^c U + V \right) & p^c \varepsilon_c^a & \\ -p^c \varepsilon_c^b & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} p_c p^c U + V & -p^0 \\ -\frac{1}{2} p_c p^c U - V & 0 & -p^1 \\ p^0 & p^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.160)$$

Эта матрица, как легко проверить, удовлетворяет тождеству Якоби (4.24).

Набор 1-форм пуассоновой сигма модели задается репером и лоренцевой связностью: $(A_{\alpha a}) = (e_{\alpha a}, \omega_\alpha)$. Теперь нетрудно убедиться, что с точностью до дивергенции лагранжиан (15.157) совпадает с лагранжианом пуассоновой сигма модели

$$L_G \stackrel{\text{div}}{=} -\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} \left(A_{\alpha A} \partial_\beta X^A + \frac{1}{2} J^{AB} A_{\alpha A} A_{\beta B} \right).$$

Если функцию $\frac{1}{2} p_c p^c U + V$ в пуассоновой структуре заменить на более общую функцию $W(p_c p^c, \pi)$, зависящую от двух аргументов: инвариантной суммы $p_c p^c$ и π , то можно проверить, что соответствующая матрица J^{AB} также будет задавать пуассонову структуру. Согласно

общей схеме раздела 15.8.2 такая модель является интегрируемой. Однако найти координаты Дарбу и, следовательно, выписать общее решение не удастся. Для двумерной гравитации с кручением вида (15.157) общее решение уравнений Эйлера–Лагранжа можно выписать в явном виде, что и является причиной конкретного выбора пуассоновой структуры.

Пуассонова структура (15.160) является вырожденной: $\det J^{AB} = 0$. Почти всюду на пространстве-мишени $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}^3$ ее ранг равен двум $\text{rank } J^{AB} = 2$. Исключение составляют лишь точки $\pi = \text{const}$, $p^a = 0$, где значения π являются корнями уравнения $V(\pi) = 0$. В этих точках пуассонова структура обращается в нуль. Общее решение уравнений движения двумерной гравитации без полей материи было приведено в разделе 15.6. В вырожденных точках модель описывает поверхности постоянной кривизны и нулевого кручения. Остальным точкам пространства-мишени соответствуют поверхности непостоянной кривизны и ненулевого кручения.

16. Сплетенные решения в общей теории относительности

В настоящей главе построены глобальные решения вакуумных уравнений общей теории относительности (7.4) с космологической постоянной в предположении, что четырехмерное пространство-время является *сплетенным произведением* двух поверхностей. При этом не делается никаких предположений о симметрии решений. Как следствие уравнений движения по крайней мере одна из двух поверхностей должна быть поверхностью постоянной кривизны. Отсюда вытекает, что метрика имеет по крайней мере три вектора Киллинга. Другими словами, свойства симметрии решений при таком подходе являются следствием самих уравнений движения. Построенные решения включают, в частности, сферически симметричные решения, которые соответствуют произведению некоторой лоренцевой поверхности на сферу. Многие глобальные решения имеют интересную физическую интерпретацию. В частности, построены решения, описывающие кротовые норы, доменные стенки сингулярностей кривизны, космические струны, космические струны, окруженные доменными стенками, решения с замкнутыми времениподобными кривыми и др. [139].

16.1. Сплетенное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задано два многообразия $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ с метриками g и h соответственно. Касательное пространство в каждой точке топологического произведения $(x_1, x_2) \in \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ разлагается в прямую сумму:

$$\mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) = \mathbb{T}_{x_1}(\mathbb{M}_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2}(\mathbb{M}_2).$$

Сплетенным произведением (warped product) двух многообразий называется их топологическое произведение $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ с метрикой $\hat{g}$, которая определена следующим соотношением

$$\hat{g}(X, Y) := k(x_2)g(X_1, Y_1) + m(x_1)h(X_2, Y_2), \quad (16.1)$$

где $k(x_2)$ и $m(x_1)$ – достаточно гладкие отличные от нуля функции на многообразиях $\mathbb{M}_2$ и $\mathbb{M}_1$, и

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) \ni \quad X &= X_1 \oplus X_2 && \in \mathbb{T}(\mathbb{M}_1) \oplus \mathbb{T}(\mathbb{M}_2), \\ \mathbb{T}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) \ni \quad Y &= Y_1 \oplus Y_2 && \in \mathbb{T}(\mathbb{M}_1) \oplus \mathbb{T}(\mathbb{M}_2), \end{aligned}$$

– разложение векторных полей X, Y , касательных к $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$, в прямую сумму.

Предположим, что четырехмерное пространство-время является сплетенным произведением двух поверхностей: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ – поверхность с лоренцевой метрикой g и $\mathbb{V}$ – поверхность с римановой метрикой h . Обозначим локальные координаты на $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ соответственно через x^α ($\alpha, \beta, \dots = 0, 1$) и y^μ ($\mu, \nu, \dots = 2, 3$). Тогда топологическому произведению $\mathbb{U} \times \mathbb{V}$ соответствуют координаты $(x^i) := (x^\alpha, y^\mu)$, $i, j, \dots = 0, 1, 2, 3$. В этой системе координат четырехмерная метрика имеет блочно-диагональный вид:

$$\hat{g}_{ij} = \begin{pmatrix} k(y)g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & m(x)h_{\mu\nu}(y) \end{pmatrix}, \quad (16.2)$$

где $k(y)$ и $m(x)$ – достаточно гладкие отличные от нуля функции на $\mathbb{V}$ и $\mathbb{U}$ соответственно.

В настоящей главе шляпка над символом означает, что соответствующий геометрический объект относится ко всему четырехмерному пространству-времени $\mathbb{M}$, а символы без шляпки относятся к двумерным поверхностям $\mathbb{U}$ или $\mathbb{V}$. Соответственно $g_{\alpha\beta}$ и $h_{\mu\nu}$ являются метриками на $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$. Греческие буквы из начала ($\alpha, \beta, \dots$) и середины ($\mu, \nu, \dots$) алфавита всегда относятся к координатам на первой и второй поверхностям соответственно.

В физике функции $k(y)$ и $m(x)$ часто называют (*дилатонными*) полями на поверхностях $\mathbb{V}$ и $\mathbb{U}$.

Для определенности будем считать поверхность $\mathbb{U}$ псевдоримановым многообразием с метрикой лоренцевой сигнатуры, а поверхность $\mathbb{V}$ – римановым многообразием с положительно определенной метрикой. Тогда с точностью до перестановки первых двух координат сигнатура метрики на $\mathbb{M}$ будет либо $(+ - - -)$, либо $(- + + +)$ в зависимости от знака m . Эти метрики связаны между собой инверсией $\hat{g}_{ij} \mapsto -\hat{g}_{ij}$, относительно которой уравнения Эйнштейна при отсутствии полей материи и космологической постоянной инвариантны. Предположим также, что обе поверхности являются ориентируемыми.

Отметим, что относительно вида метрики (16.2) не делается никаких дополнительных предположений, связанных с симметрией. Однако в дальнейшем мы увидим, что уравнения Эйнштейна и требование полноты многообразий приводят к тому, что по крайней мере одна из поверхностей $\mathbb{U}$ или $\mathbb{V}$ должна быть поверхностью постоянной кривизны. То есть любое максимально продолженное решение уравнений Эйнштейна вида (16.2) допускает по крайней мере три вектора Киллинга. Следовательно, в рассматриваемом случае симметрия решений является следствием уравнений движения. В частном случае будут получены сферически симметричные решения, когда поверхность $\mathbb{V}$ является сферой $\mathbb{S}^2$.

Все решения, рассмотренные в настоящей главе относятся к решениям типа D по классификации Петрова [82]. Физическая интерпретация решений опирается на глобальную структуру пространства-времени.

16.2. Двумерная редукция

Вид метрики (16.2) позволяет решить явно четырехмерные вакуумные уравнения Эйнштейна с космологической постоянной Λ

$$\hat{R}_{ij} = \Lambda \hat{g}_{ij}, \quad (16.3)$$

и построить глобальные (максимально продолженные) решения.

Мы увидим, что уравнения Эйнштейна существенно ограничивают дилатонные поля: по крайней мере одно дилатонное поле должно быть постоянно. Поэтому все решения делятся на три основных класса: оба дилатонных поля постоянны (случай А), только $k = \text{const}$ (случай В) или $m = \text{const}$ (случай С). В первом случае решение уравнений Эйнштейна представляет собой топологическое произведение двух поверхностей постоянной кривизны. В случае В риманова поверхность $\mathbb{V}$ должна быть поверхностью постоянной кривизны. Сюда входят сферически симметричные решения, а также другие решения, когда поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой евклидову плоскость или плоскость Лобачевского (двуполостный гиперболоид). Последние решения соответствуют кротовым норам. В случае С поверхность $\mathbb{U}$ должна быть поверхностью постоянной кривизны. Эти решения описывают космические струны и доменные стенки сингулярности кривизны.

Приступим к решению уравнений Эйнштейна (16.3). Метрика, обратная к (16.2), имеет вид

$$\hat{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} g^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} h^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (16.4)$$

где $g^{\alpha\beta}$ и $h^{\mu\nu}$ матрицы, обратные соответственно к $g_{\alpha\beta}$ и $h_{\mu\nu}$. Символы Кристоффеля (2.15) равны

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}, \\ \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} &= -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{h^{\mu\nu} \partial_{\nu} k}{m}, \\ \hat{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\gamma} &= \hat{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\gamma} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\gamma} \frac{\partial_{\mu} k}{k}, \\ \hat{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\nu} &= \hat{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\nu} = \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} \frac{\partial_{\alpha} m}{m}, \\ \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} &= -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \frac{g^{\alpha\beta} \partial_{\beta} m}{k}, \\ \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Вычислим компоненты полного тензора кривизны для сплетенного произведения двух многообразий. Это немного больше, чем необходимо для решения уравнений Эйнштейна, так как последние содержат только тензор Риччи и скалярную кривизну, однако приведенные ниже формулы необходимы для анализа получаемых решений.

Прямые вычисления приводят к следующим выражениям для линейно независимых компонент тензора кривизны со всеми опущенными индексами:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= k R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta}) \frac{(\partial k)^2}{m}, \\ \hat{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} &= \frac{1}{4} (g_{\beta\gamma} \partial_{\alpha} m - g_{\alpha\gamma} \partial_{\beta} m) \frac{\partial_{\mu} k}{m}, \\ \hat{R}_{\alpha\beta\mu\nu} &= 0, \\ \hat{R}_{\alpha\mu\beta\nu} &= \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} m - \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \frac{\partial_{\alpha} m \partial_{\beta} m}{m} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} k - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \frac{\partial_{\mu} k \partial_{\nu} k}{k}, \\ \hat{R}_{\alpha\mu\nu\rho} &= \frac{1}{4} (h_{\mu\nu} \partial_{\rho} k - h_{\mu\rho} \partial_{\nu} k) \frac{\partial_{\alpha} m}{k}, \\ \hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} &= m R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{4} (h_{\mu\rho} h_{\nu\sigma} - h_{\nu\rho} h_{\mu\sigma}) \frac{(\partial m)^2}{k}. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Число линейно независимых компонент тензора кривизны с одним контравариантным индексом больше. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta &= R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta + \frac{1}{4}(g_{\alpha\gamma}\delta_\beta^\delta - g_{\beta\gamma}\delta_\alpha^\delta)\frac{(\partial k)^2}{km}, \\
\widehat{R}_{\alpha\beta\mu}{}^\delta &= \frac{1}{4}(\delta_\alpha^\delta\partial_\beta m - \delta_\beta^\delta\partial_\alpha m)\frac{\partial_\mu k}{km}, \\
\widehat{R}_{\mu\alpha\beta}{}^\delta &= \frac{1}{4}(g_{\alpha\beta}\partial^\delta m - \delta_\alpha^\delta\partial_\beta m)\frac{\partial_\mu k}{km}, \\
\widehat{R}_{\alpha\mu\nu}{}^\delta &= -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\frac{\nabla_\alpha\nabla^\delta m}{k} + \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\frac{\partial_\alpha m\partial^\delta m}{km} - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\delta\frac{\nabla_\mu\nabla_\nu k}{k} + \frac{1}{4}\delta_\alpha^\delta\frac{\partial_\mu k\partial_\nu k}{k^2}, \\
\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\delta &= 0, \\
\widehat{R}_{\mu\nu\rho}{}^\delta &= \frac{1}{4}(h_{\nu\rho}\partial_\mu k - h_{\mu\rho}\partial_\nu k)\frac{\partial^\delta m}{k^2}, \\
\widehat{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\sigma &= \frac{1}{4}(g_{\beta\gamma}\partial_\alpha m - g_{\alpha\gamma}\partial_\beta m)\frac{\partial^\sigma k}{m^2}, \\
\widehat{R}_{\alpha\beta\mu}{}^\sigma &= 0, \\
\widehat{R}_{\alpha\mu\beta}{}^\sigma &= \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma\frac{\nabla_\alpha\nabla_\beta m}{m} - \frac{1}{4}\delta_\mu^\sigma\frac{\partial_\alpha m\partial_\beta m}{m^2} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\frac{\nabla_\mu\nabla^\sigma k}{m} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\frac{\partial_\mu k\partial^\sigma k}{km}, \\
\widehat{R}_{\alpha\mu\nu}{}^\sigma &= \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}\partial^\sigma k - \delta_\mu^\sigma\partial_\nu k)\frac{\partial_\alpha m}{km}, \\
\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\sigma &= \frac{1}{4}(\delta_\mu^\sigma\partial_\nu k - \delta_\nu^\sigma\partial_\mu k)\frac{\partial_\alpha m}{km}, \\
\widehat{R}_{\mu\nu\rho}{}^\sigma &= R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma + \frac{1}{4}(h_{\mu\rho}\delta_\nu^\sigma - h_{\nu\rho}\delta_\mu^\sigma)\frac{(\partial m)^2}{km},
\end{aligned} \tag{16.7}$$

где введены обозначения: $\partial^\delta m := g^{\delta\gamma}\partial_\gamma m$ и $\partial^\sigma k := h^{\sigma\rho}\partial_\rho k$.

Полученные выше формулы для компонент тензора кривизны не зависят от размерностей многообразий $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$. Положим $n_1 := \dim \mathbb{M}_1$ и $n_2 := \dim \mathbb{M}_2$. Тогда для компонент тензора Риччи получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\frac{\nabla^2 k}{m} + \frac{1}{4}(n_1 - 2)g_{\alpha\beta}\frac{(\partial k)^2}{km} + \frac{1}{2}n_2\frac{\nabla_\alpha\nabla_\beta m}{m} - \frac{1}{4}n_2\frac{\partial_\alpha m\partial_\beta m}{m^2}, \\
\widehat{R}_{\alpha\mu} &= \widehat{R}_{\mu\alpha} = -\frac{1}{4}(n_1 + n_2 - 2)\frac{\partial_\alpha m\partial_\mu k}{km}, \\
\widehat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\frac{\nabla^2 m}{k} + \frac{1}{4}(n_2 - 2)h_{\mu\nu}\frac{(\partial m)^2}{km} + \frac{1}{2}n_1\frac{\nabla_\mu\nabla_\nu k}{k} - \frac{1}{4}n_1\frac{\partial_\mu k\partial_\nu k}{k^2},
\end{aligned} \tag{16.8}$$

где $R_{\alpha\beta}$ и $R_{\mu\nu}$ – тензоры Риччи многообразий $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$, построенные соответственно по метрикам $g_{\alpha\beta}$ и $h_{\mu\nu}$.

Наконец, получаем выражение для скалярной кривизны сплетенного произведения двух многообразий

$$\widehat{R} = \frac{1}{k}R^g + n_2\frac{\nabla^2 m}{km} + \frac{1}{4}n_2(n_2 - 3)\frac{(\partial m)^2}{km^2} + \frac{1}{m}R^h + n_1\frac{\nabla^2 k}{km} + \frac{1}{4}n_1(n_1 - 3)\frac{(\partial k)^2}{k^2m}, \tag{16.9}$$

где R^g и R^h – скалярные кривизны многообразий $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$.

Теперь зафиксируем размерности. В рассматриваемом случае $n_1 = n_2 = 2$. Тогда компоненты тензора Риччи принимают вид

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} + \frac{\nabla_\alpha \nabla_\beta m}{m} - \frac{\nabla_\alpha m \nabla_\beta m}{2m^2} + \frac{g_{\alpha\beta} \nabla^2 k}{2m} \\ \hat{R}_{\alpha\mu} &= \hat{R}_{\mu\alpha} = -\frac{\nabla_\alpha m \nabla_\mu k}{2mk} \\ \hat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu k}{k} - \frac{\nabla_\mu k \nabla_\nu k}{2k^2} + \frac{h_{\mu\nu} \nabla^2 m}{2k},\end{aligned}\quad (16.10)$$

где, для краткости, введены обозначения

$$\nabla^2 m := g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta m, \quad \nabla^2 k := h^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu k. \quad (16.11)$$

Здесь и далее в этой главе символ ∇ обозначает ковариантную производную с соответствующими символами Кристоффеля. Четырехмерная скалярная кривизна равна

$$\hat{R} = \frac{1}{k} R^g + 2 \frac{\nabla^2 m}{km} - \frac{(\nabla m)^2}{2km^2} + \frac{1}{m} R^h + 2 \frac{\nabla^2 k}{km} - \frac{(\nabla k)^2}{2k^2 m}, \quad (16.12)$$

где введены обозначения

$$(\nabla m)^2 := g^{\alpha\beta} \partial_\alpha m \partial_\beta m, \quad (\nabla k)^2 := h^{\mu\nu} \partial_\mu k \partial_\nu k. \quad (16.13)$$

Скалярные кривизны поверхностей $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ обозначены через R^g и R^h соответственно.

Таким образом, уравнений Эйнштейна (16.3) для метрики (16.2) принимают вид

$$R_{\alpha\beta} + \frac{\nabla_\alpha \nabla_\beta m}{m} - \frac{\nabla_\alpha m \nabla_\beta m}{2m^2} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\nabla^2 k}{m} - 2k\Lambda \right) = 0, \quad (16.14)$$

$$R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu k}{k} - \frac{\nabla_\mu k \nabla_\nu k}{2k^2} + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left(\frac{\nabla^2 m}{m} - 2m\Lambda \right) = 0, \quad (16.15)$$

$$\frac{\nabla_\alpha m \nabla_\mu k}{mk} = 0. \quad (16.16)$$

Перепишем уравнения (16.14) и (16.15) в более удобном виде, выделив из них след, который определяет скалярные кривизны поверхностей:

$$R^g + \frac{\nabla^2 m}{m} - \frac{(\nabla m)^2}{2m^2} + \frac{\nabla^2 k}{m} - 2k\Lambda = 0, \quad (16.17)$$

$$R^h + \frac{\nabla^2 k}{k} - \frac{(\nabla k)^2}{2k^2} + \frac{\nabla^2 m}{m} - 2m\Lambda = 0. \quad (16.18)$$

Бесследовые части уравнений (16.14) и (16.15), умноженные на m и k , принимают простой вид

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta m - \frac{\nabla_\alpha m \nabla_\beta m}{2m} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left[\nabla^2 m - \frac{(\nabla m)^2}{2m} \right] = 0, \quad (16.19)$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu k - \frac{\nabla_\mu k \nabla_\nu k}{2k} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[\nabla^2 k - \frac{(\nabla k)^2}{2k} \right] = 0. \quad (16.20)$$

Они не содержат слагаемые с кривизной вовсе, потому что в двух измерениях тензор Риччи полностью определяется скалярной кривизной и не имеет бесследовой части.

Отметим, что наличие сингулярности у двумерной скалярной кривизны на поверхности означает ее наличие в полном тензоре кривизны в соответствии с формулой (16.12).

Таким образом, четырехмерные уравнения Эйнштейна (16.3) для метрики вида (16.2) эквивалентны системе уравнений (16.16)–(16.20). Уравнения (16.19) и (16.20) содержат функции, зависящие только от координат x и y соответственно. В то же время координаты различных поверхностей в уравнениях (16.16), (16.17) и (16.18) перемешаны.

Уравнение (16.16) накладывает жесткие ограничения. Как следствие имеем, что либо поле дилатона k , либо поле дилатона m , либо k и m одновременно должны быть постоянны. Соответственно возможны три случая:

$$\begin{aligned} \text{A :} & \quad k = \text{const} \neq 0, & m = \text{const} \neq 0, \\ \text{B :} & \quad k = \text{const} \neq 0, & \nabla_\alpha m \neq 0, \\ \text{C :} & \quad \nabla_\mu k \neq 0, & m = \text{const} \neq 0. \end{aligned} \quad (16.21)$$

Рассмотрим эти случаи подробно.

16.3. Произведение поверхностей постоянной кривизны

Наиболее симметричные решения вакуумных уравнений Эйнштейна (16.3) в виде топологического произведения двух поверхностей постоянной кривизны возникают, когда оба дилатонных поля k и m постоянны (случай А в (16.21)). Если k и m постоянны, то уравнения (16.16), (16.19), и (16.20) удовлетворяются, и скалярные кривизны обеих поверхностей $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ должны быть постоянны как следствие уравнений (16.17), (16.18), которые принимают следующий вид

$$R^g = 2k\Lambda, \quad R^h = 2m\Lambda. \quad (16.22)$$

Если $\Lambda = 0$, то обе поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ имеют нулевую кривизну, и все пространство-время $\mathbb{M}$ представляет пространство Минковского или его фактор-пространство по группе преобразований, действующей свободно и собственнo разрывно, (цилиндр или тор) с метрикой Лоренца

$$\hat{g}_{ij} = \text{diag}(+ - - -) \quad \text{или} \quad \hat{g}_{ij} = \text{diag}(- + + +). \quad (16.23)$$

При ненулевой космологической постоянной $\Lambda \neq 0$ обе поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ имеют постоянную ненулевую кривизну. Поверхности постоянной кривизны были рассмотрены в главе 12, и мы приведем лишь выражения для соответствующих метрик. Если $\mathbb{U}$ является полной псевдоримановой поверхностью ненулевой кривизны $R^g = -2K = \text{const}$, то она представляет собой однополостный гиперboloид $\mathbb{L}^2$, вложенный в трехмерное пространство Минковского, с индуцированной метрикой или его универсальной накрывающей (раздел 12.3). Его группой симметрии является группа Лоренца $\mathbb{SO}(1, 2)$. В стереографических координатах метрика однополостного гиперboloида $\mathbb{L}^2$ имеет хорошо известный вид (12.36)

$$ds_{\mathbb{L}}^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{dt^2 - dx^2}{\left[1 + \frac{K}{4}(t^2 - x^2)\right]^2}, \quad (16.24)$$

где введены обозначения $t := x^0$ и $x := x^1$. В отличие от риманова случая псевдориманова поверхность постоянной кривизны одна и та же как для положительной, так и для отрицательной гауссовой кривизны K , при этом меняется только общий знак метрики (16.24), что соответствует перестановке координат $t \leftrightarrow x$.

При $K = 0$ метрика (16.24) совпадает с обычной двумерной метрикой Минковского, и соответствующая поверхность представляет собой плоскость Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ с группой Пуанкаре $\mathbb{IO}(1, 1)$ в качестве группы симметрии.

Положительно определенная метрика на двумерной римановой поверхности постоянной кривизны $R^h = -2K \neq 0$ в стереографических координатах имеет вид (12.24)

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = h_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = \frac{dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{K}{4}(y^2 + z^2)\right]^2}, \quad (16.25)$$

где $y := y^1$ и $z := y^2$. Эта метрика отличается от (16.24) только знаками.

Для положительных $K > 0$ она соответствует сфере $\mathbb{S}^2$, рассмотренной в разделе 12.1. При $K = 0$ метрика (16.25) соответствует евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, или цилиндру, или тору. При отрицательных $K < 0$ мы имеем плоскость Лобачевского (гиперболическую плоскость) $\mathbb{H}^2$, рассмотренную в разделе 12.2, или компактную риманову поверхность рода два или выше. Группами симметрии сферы $\mathbb{S}^2$, евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, и плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ являются соответственно группы $\mathcal{O}(3)$, $\mathcal{IO}(2)$ и $\mathcal{O}(1, 2)$.

При ненулевой постоянной кривизне всегда можно произвести растяжку координат таким образом, чтобы $K = \pm 1$.

Если скалярные кривизны постоянны (16.22), то решение для ненулевой космологической постоянной $\Lambda \neq 0$ является топологическим произведением двух поверхностей постоянной кривизны с метрикой

$$ds^2 = k \frac{dt^2 - dx^2}{\left[1 - \frac{k\Lambda}{4}(t^2 - x^2)\right]^2} + m \frac{dy^2 + dz^2}{\left[1 - \frac{m\Lambda}{4}(y^2 + z^2)\right]^2}. \quad (16.26)$$

В данном случае можно не говорить о сплетенном произведении поверхностей, т.к. дилатонные поля постоянны. Растягивая координаты, всегда можно добиться выполнения равенств $k = \pm 1$, $m = \pm 1$. Выберем $k = 1$ и $m = -1$ с тем, чтобы метрика имела сигнатуру $(+ - - -)$. Тогда возможны три качественно отличных случая, соответствующих положительной, нулевой и отрицательной космологической постоянной:

$$\begin{aligned} \Lambda < 0 : \quad & K^g = +|\Lambda|, & K^h = -|\Lambda|, & \mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{H}^2, \\ \Lambda = 0 : \quad & K^g = 0, & K^h = 0, & \mathbb{M} = \mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{1,3}, \\ \Lambda > 0 : \quad & K^g = -|\Lambda|, & K^h = +|\Lambda|, & \mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{S}^2, \end{aligned} \quad (16.27)$$

где K^g и K^h – гауссовы кривизны соответственно поверхностей $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$.

Напомним, что вакуумные уравнения Эйнштейна (16.3) допускают решение в виде пространства-времени постоянной кривизны, которое называется пространством-временем (анти-) де Ситтера. Это пространство-время имеет максимальное число – десять – векторов Киллинга. Хотя полная (четырёхмерная) скалярная кривизна для решения в виде произведения двух поверхностей постоянной кривизны с метрикой (16.26), впрочем как и для всех других решений вакуумных уравнений Эйнштейна (16.3), постоянна, $\hat{R} = 4\Lambda$, решения (16.27) при $\Lambda \neq 0$ не совпадают с решением (анти-) де Ситтера. Действительно, каждая из поверхностей $\mathbb{L}^2$, $\mathbb{H}^2$ и $\mathbb{S}^2$ имеет по три вектора Киллинга, и можно показать (см. например [14]), что четырёхмерное пространство-время имеет всего шесть векторов Киллинга. Поэтому решения в виде произведения двух поверхностей не совпадают с решением (анти-) де Ситтера.

Все решения в виде произведения двух поверхностей постоянной кривизны относятся к типу D по классификации Петрова [82].

16.4. Пространственно симметричные решения

Во втором случае B (16.21) дилатонное поле k постоянно. Не ограничивая общности, положим $k = 1$. Тогда вся система уравнений Эйнштейна (16.16)–(16.20) сводится к следующей

системе:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta m - \frac{\nabla_\alpha m \nabla_\beta m}{2m} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left[\nabla^2 m - \frac{(\nabla m)^2}{2m} \right] = 0, \quad (16.28)$$

$$R^h + \nabla^2 m - 2m\Lambda = 0, \quad (16.29)$$

$$R^g + \frac{\nabla^2 m}{m} - \frac{(\nabla m)^2}{2m^2} - 2\Lambda = 0. \quad (16.30)$$

Уравнение (16.29) представляет собой сумму двух слагаемых, зависящих от координат на разных поверхностях, $x \in \mathbb{U}$ и $y \in \mathbb{V}$, которая должна быть равна нулю. Это значит, что каждое слагаемое равно некоторой постоянной. Зафиксируем эту постоянную следующим уравнением $R^h = -2K = \text{const}$. Таким образом, в случае В поверхность $\mathbb{V}$ – это поверхность постоянной кривизны. При этом возможны три случая, когда гауссова кривизна римановой поверхности $\mathbb{V}$ положительна, $\mathbb{V} = \mathbb{S}^2$, равна нулю, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, или отрицательна, $\mathbb{V} = \mathbb{H}^2$. Тогда соответствующие решения вакуумных уравнений Эйнштейна инвариантны относительно групп преобразований $\mathcal{O}(3)$, $\mathcal{IO}(2)$ или $\mathcal{O}(1, 2)$, которые являются группами изометрий поверхностей $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{H}^2$. Соответствующее четырехмерное пространство-время представляет собой сплетенное произведение поверхности $\mathbb{U}$ с одной из поверхностей $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{H}^2$, где $\mathbb{U}$ представляется диаграммой Картера–Пенроуза. В частном случае при $K = 1$, возникают сферически симметричные решения. Таким образом, в рассматриваемом случае группа симметрии пространства-времени возникает как следствие уравнений движения.

При $K = \text{const}$ уравнение (16.29) принимает вид

$$\nabla^2 m - 2(m\Lambda + K) = 0. \quad (16.31)$$

Исключая случай А, рассмотренный в предыдущем разделе, двинемся дальше, считая, что $\nabla_\alpha m \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.4.1. Уравнение (16.31) является первым интегралом уравнений (16.28) и (16.30).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем уравнение (16.31), используем тождество

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} A_\delta,$$

где A_α – компоненты произвольного ковекторного поля, для изменения порядка ковариантных производных и используем уравнение (16.28) три раза для исключения вторых производных от m . После небольших алгебраических выкладок мы получим уравнение (16.30).

Из доказательства предложения следует, что достаточно решить только уравнения (16.28) и (16.31), при этом уравнение (16.30) будет удовлетворено автоматически.

ЗАМЕЧАНИЕ. Исходное действие Гильберта–Эйнштейна инвариантно относительно общих преобразований координат, и, согласно второй теореме Нетер, между уравнениями движения существует линейная зависимость. Поэтому зависимость уравнений (16.28)–(16.30) не является чем то удивительным и связана с инвариантностью исходного действия.

Для явного решения уравнений движения (16.28) и (16.31) зафиксируем конформную калибровку для метрики $g_{\alpha\beta}$ на лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$:

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \Phi d\xi d\eta, \quad (16.32)$$

где $\Phi(\xi, \eta)$ – конформный множитель, который зависит от координат светового конуса ξ, η на $\mathbb{U}$. Соответствующая четырехмерная метрика примет вид

$$ds^2 = \Phi d\xi d\eta + m d\Omega, \quad (16.33)$$

где $d\Omega$ – метрика на римановой поверхности постоянной кривизны $\mathbb{V} = \mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2$ или $\mathbb{H}^2$. Знак конформного множителя Φ пока не фиксируем.

При $\Phi > 0$ и $m < 0$ сигнатура метрики (16.33) равна $(+ - - -)$, если пространственная и временная координаты определены так же, как и раньше (13.23). Если изменить знак $m > 0$, то сигнатура метрики станет $(+ - + +)$. Такое же преобразование сигнатуры можно получить, изменив общий знак метрики, $\hat{g}_{ij} \mapsto -\hat{g}_{ij}$, и переставив первые две координаты. Вакуумные уравнения Эйнштейна (16.3) инвариантны относительно одновременного изменения знаков метрики и космологической постоянной. Поскольку в дальнейшем мы построим глобальные решения для всех возможных значений космологической постоянной, $\Lambda \in \mathbb{R}$, то, не ограничивая общности, достаточно рассмотреть случай $m < 0$. При отрицательных m удобно ввести параметризацию

$$m = -q^2, \quad q(\xi, \eta) > 0. \quad (16.34)$$

Символы Кристоффеля для метрики (16.32) в конформной калибровке имеют только две ненулевые компоненты:

$$\Gamma_{\xi\xi}^{\xi} = \frac{\partial_{\xi}\Phi}{\Phi}, \quad \Gamma_{\eta\eta}^{\eta} = \frac{\partial_{\eta}\Phi}{\Phi}, \quad (16.35)$$

и уравнения (16.28), (16.31) принимают простой вид

$$-\partial_{\xi\xi}^2 q + \frac{\partial_{\xi}\Phi \partial_{\xi} q}{\Phi} = 0, \quad (16.36)$$

$$-\partial_{\eta\eta}^2 q + \frac{\partial_{\eta}\Phi \partial_{\eta} q}{\Phi} = 0, \quad (16.37)$$

$$-2 \frac{\partial_{\xi\eta}^2 q^2}{\Phi} - (K - \Lambda q^2) = 0. \quad (16.38)$$

Таким образом, полная система уравнений (16.28)–(16.30) в конформной калибровке (16.32) сводится к трем уравнениям на две неизвестные функции q и Φ . Первые два уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, и определяют функции q и Φ с точностью до умножения на произвольную постоянную. Система уравнений (16.36)–(16.38) переопределена и может быть проинтегрирована явно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.4.2. *Условия $\partial_{\xi}q = 0$ и $\partial_{\eta}q = 0$ эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\partial_{\xi}q = 0$, то из уравнения (16.38) следует $q^2 = K/\Lambda = \text{const}$ и, следовательно, $\partial_{\eta}q = 0$. Обратное утверждение верно по той же причине.

Поскольку $q = \text{const}$ соответствует уже рассмотренному случаю **A**, то предположим, что $\partial_{\xi}q \neq 0$ и $\partial_{\eta}q \neq 0$. Тогда, разделив уравнения (16.36) и (16.37) соответственно на $\partial_{\xi}q$ и $\partial_{\eta}q$, они легко интегрируются:

$$-\ln|\partial_{\xi}q| + \ln|\Phi| = \tilde{G}(\eta), \quad (16.39)$$

$$-\ln|\partial_{\eta}q| + \ln|\Phi| = \tilde{F}(\xi). \quad (16.40)$$

При этом возникают две произвольные функции $\tilde{F}(\xi)$ и $\tilde{G}(\eta)$. Введем монотонные функции $F(\eta)$ и $G(\xi)$ при помощи дифференциальных уравнений

$$F' := \frac{dF}{d\eta} = C e^{\tilde{F}} > 0, \quad G' := \frac{dG}{d\xi} = C e^{\tilde{G}} > 0,$$

где $C > 0$ – некоторая положительная постоянная, которую мы зафиксируем чуть позже. Тогда разность уравнений (16.39) и (16.40) примет вид

$$\frac{|\partial_\xi q|}{F'} = \frac{|\partial_\eta q|}{G'}. \quad (16.41)$$

Конформная калибровка для двумерной метрики (16.32) определена с точностью до конформных преобразований. Воспользуемся этой свободой и перейдем к новым координатам $\xi, \eta \mapsto F, G$. Это всегда можно сделать, т.к. якобиан преобразования координат отличен от нуля, $F'G' \neq 0$. При конформном преобразовании координат конформный множитель преобразуется по правилу $\Phi \mapsto \Phi/(F'G')$, что следует из вида метрики в конформной калибровке (16.32).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.4.3. Уравнения (16.36)–(16.38) ковариантны относительно конформных преобразований

$$\xi, \eta \mapsto F, G, \quad \Phi \mapsto \tilde{\Phi} = \frac{\Phi}{F'G'}. \quad (16.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка.

Таким образом, произвольные функции $\tilde{F}(\xi)$ и $\tilde{G}(\eta)$, возникшие в первых интегралах (16.39), (16.40), соответствуют конформным преобразованиям.

Перейдем к новым координатам $\xi, \eta \mapsto F, G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.4.4. Если $\partial_\xi q \partial_\eta q > 0$, то в новых координатах функция $q(\tau)$ зависит только от временной координаты $\tau := \frac{1}{2}(F + G)$. Если $\partial_\xi q \partial_\eta q < 0$, то функция $q(\sigma)$ зависит только от пространственной координаты $\sigma := \frac{1}{2}(F - G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из-за знаков модулей в уравнении (16.41), возможны два случая.

Если $\partial_\xi q \partial_\eta q > 0$, то справедливо равенство

$$\frac{\partial q}{\partial(F - G)} = \partial_\xi q \frac{\partial \xi}{\partial(F - G)} + \partial_\eta q \frac{\partial \eta}{\partial(F - G)} = \frac{\partial_\xi q}{F'} - \frac{\partial_\eta q}{G'} = 0. \quad (16.43)$$

Последнее равенство вытекает из уравнения (16.41). Поэтому, переходя к координатам $F, G \mapsto \tau, \sigma$, получаем сделанное утверждение.

Аналогично, если $\partial_\xi q \partial_\eta q < 0$, то выполнено равенство

$$\frac{\partial q}{\partial(F + G)} = \partial_\xi q \frac{\partial \xi}{\partial(F + G)} + \partial_\eta q \frac{\partial \eta}{\partial(F + G)} = \frac{\partial_\xi q}{F'} + \frac{\partial_\eta q}{G'} = 0. \quad (16.44)$$

Теперь из каждого из двух уравнений (16.39) или (16.40) следует одно и то же равенство

$$|\Phi| = \frac{1}{2C} F' G' |q'|,$$

где q' обозначает производную функции q либо по $\tau := \frac{1}{2}(F + G)$, либо по $\sigma := \frac{1}{2}(F - G)$. Постоянная C соответствует растяжке новых координат F, G , и, для упрощения последующих формул, положим $C = 1/2$. При конформном преобразовании конформный множитель преобразуется по правилу (16.42). Поэтому после конформного преобразования (16.42) будет выполнено равенство

$$|\tilde{\Phi}| = |q'|. \quad (16.45)$$

В дальнейшем знак тильды у конформного множителя мы, для краткости, опустим.

Таким образом, координаты всегда можно выбрать таким образом, чтобы функции q и Φ зависели одновременно только от времениподобной или пространственноподобной координаты

$$\zeta = \frac{1}{2}(F \pm G) := \begin{cases} \tau, & \partial_\xi q \partial_\eta q > 0, \\ \sigma, & \partial_\xi q \partial_\eta q < 0. \end{cases} \quad (16.46)$$

Это значит, что двумерная метрика (16.32) обладает вектором Киллинга, ∂_σ или ∂_τ , как следствие уравнений (16.36) и (16.37). Назовем эти решения соответственно однородными и статическими, хотя это и относится только к определенной системе координат. Существование вектора Киллинга является обобщением *теоремы Бирхгоффа* [154], утверждающей, что произвольное сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна должно быть статическим. (Это утверждение было опубликовано ранее в статье [155].) Обобщение заключается в том, что наличие вектора Киллинга доказано не только для сферически симметричных решений ($K = 1$), но и для решений, инвариантных относительно групп преобразований $\mathbb{IO}(2)$ ($K = 0$) и $\mathbb{SO}(1, 2)$ ($K = -1$).

Окончательно, решением уравнений (16.36), (16.37) в фиксированной системе координат является равенство (16.45) и утверждение о том, что функции q и Φ зависят только от одной переменной ζ (16.46). Осталось решить только одно уравнение (16.38).

В статическом, $q = q(\sigma)$, и однородном, $q = q(\tau)$, случаях уравнение (16.38) принимает вид

$$(q^2)'' = 2(K - \Lambda q^2)\Phi, \quad q = q(\sigma), \quad (16.47)$$

$$(q^2)'' = -2(K - \Lambda q^2)\Phi, \quad q = q(\tau). \quad (16.48)$$

Чтобы проинтегрировать полученные уравнения, необходимо выразить Φ через q с помощью уравнения (16.45), а для этого необходимо раскрыть знаки модулей.

Рассмотрим подробно статический случай $q = q(\sigma)$, $\Phi > 0$ и $q' > 0$. Тогда уравнение (16.47) с учетом (16.45) примет вид

$$(q^2)'' = 2(K - \Lambda q^2)q'.$$

Его легко проинтегрировать

$$(q^2)' = 2 \left(Kq - \frac{\Lambda q^3}{3} - 2M \right),$$

где $M = \text{const}$ – постоянная интегрирования. В дальнейшем мы увидим, что она совпадает с массой в решении Шварцшильда. Выполнив дифференцирование в левой части и поделив на $2q > 0$, получим уравнение

$$q' = K - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $q' = \Phi$, то отсюда следует выражение для конформного множителя через переменную q :

$$\Phi(q) = K - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}. \quad (16.49)$$

Если $q = q(\sigma)$, $\Phi > 0$ и $q' < 0$, то аналогичное интегрирование приводит к уравнению

$$q' = -\Phi(q),$$

где в правой части стоит тот же самый конформный множитель (16.49). Этот случай можно объединить с предыдущим, записав уравнение для q в виде

$$|q'| = \Phi(q), \quad q = q(\sigma), \quad \Phi > 0. \quad (16.50)$$

Аналогично интегрируется статический случай при $\Phi < 0$:

$$|q'| = -\Phi(q), \quad q = q(\sigma), \quad \Phi < 0. \quad (16.51)$$

Если решение однородно, $q = q(\tau)$ и $\Phi > 0$, $q' > 0$, то интегрирование уравнения (16.48) приводит к равенству

$$q' = -\left(K - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}\right).$$

То есть в этом случае конформный множитель надо отождествить с правой частью

$$\hat{\Phi} = -\left(K - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}\right). \quad (16.52)$$

Поскольку выражение конформного множителя в однородном случае через q отличается знаком, то мы пометили его шляпкой. Таким образом, однородные решения уравнений Эйнштейна можно записать в виде

$$|q'| = \hat{\Phi}(q), \quad q = q(\tau), \quad \hat{\Phi} > 0. \quad (16.53)$$

$$|q'| = -\hat{\Phi}(q), \quad q = q(\tau), \quad \hat{\Phi} < 0. \quad (16.54)$$

Если конформный множитель отрицателен, то сигнатура метрики равна $(-+--)$. В этом случае, сделав замену $\tau \leftrightarrow \sigma$, мы вернемся к прежней сигнатуре метрики $(+---)$. Это преобразование позволяет объединить стационарные и однородные решения, написав знак модуля у конформного множителя в выражении для метрики (16.33). Тогда общее решение вакуумных уравнений Эйнштейна (16.3) в соответствующей системе координат примет вид

$$ds^2 = |\Phi|(d\tau^2 - d\sigma^2) - q^2 d\Omega, \quad (16.55)$$

где конформный множитель Φ имеет вид (16.49). При этом переменная q зависит либо от σ (статическое локальное решение), либо от τ (однородное локальное решение) через дифференциальное уравнение

$$\left|\frac{dq}{d\zeta}\right| = \pm\Phi(q), \quad (16.56)$$

где выполнено правило знаков:

$$\begin{aligned} \Phi > 0 : \quad \zeta = \sigma, \quad \text{знак } + \text{ (статическое локальное решение)}, \\ \Phi < 0 : \quad \zeta = \tau, \quad \text{знак } - \text{ (однородное локальное решение)}. \end{aligned} \quad (16.57)$$

Таким образом, из четырехмерных уравнений Эйнштейна вытекает, что на поверхности $\mathbb{U}$ возникает метрика с одним вектором Киллинга, которая была подробно рассмотрена в главе 13. Теперь с помощью метода конформных блоков можно построить глобальные (максимально продолженные вдоль экстремалей) решения вакуумных уравнений Эйнштейна. Число особенностей и нулей конформного множителя (16.49) зависит от соотношения между постоянными K , M и Λ . Поэтому возможно существование многих существенно различных глобальных решений, которые мы рассмотрим в следующих разделах.

Конформный множитель (16.49) имеет одну сингулярность: простой полюс при $q = 0$. Поэтому, согласно правилам построения глобальных решений из раздела 13.4 каждое глобальное решение соответствует одному из интервалов $(-\infty, 0)$ или $(0, \infty)$. Из вида конформного множителя (16.62) следует, что эти глобальные решения получаются друг из друга преобразованием

$M \mapsto -M$. Поэтому, не ограничивая общности, мы опишем только глобальные решения, соответствующие положительному интервалу $(q_-, q_+) = (0, \infty)$. Впрочем, это предположение уже было сделано при параметризации (16.34).

Поскольку конформный множитель $\Phi(q)$ является гладкой функцией при $q > 0$, то все возникающие лоренцевы поверхности $\mathbb{U}$ и метрика на них, являются гладкими.

Используя уравнения (16.30), (16.34) и (16.47), нетрудно вычислить скалярную кривизну поверхности $\mathbb{U}$:

$$R^g = \frac{2}{3}\Lambda + \frac{4M}{q^3}. \quad (16.58)$$

Она не зависит от гауссовой кривизны K римановой поверхности $\mathbb{V}$ и сингулярна при $q = 0$, если $M \neq 0$. Отметим, что сингулярная часть двумерной скалярной кривизны (16.58) пропорциональна собственному значению четырехмерного тензора Вейля (см., например, [6]):

$$\frac{1}{48}\hat{C}_{ijkl}\hat{C}^{ijkl} = \left(-\frac{M}{q^3}\right)^2. \quad (16.59)$$

Теперь перейдем к описанию всех пространственно симметричных глобальных решений вакуумных уравнений Эйнштейна.

16.4.1. Сферически симметричные решения $K = 1$. При $K = 1$ риманова поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой сферу $\mathbb{S}^2$, и все решения сферически симметричны. Для сферы единичного радиуса метрику (16.25) запишем в сферических координатах

$$d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (16.60)$$

Сферически симметричную метрику пространства-времени, которая удовлетворяет уравнениям Эйнштейна, можно записать в виде

$$ds^2 = |\Phi(q)|(d\tau^2 - d\sigma^2) - q^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (16.61)$$

где

$$\Phi(q) = 1 - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}. \quad (16.62)$$

Переменная q связана с σ или τ дифференциальным уравнением (16.56), где выполнено правило знаков (16.57).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Координаты τ, σ , в которых записана сферически симметричная метрика (16.61), называются *черепашьими*. Это название, повидимому, произошло потому что диаграммы Картера–Пенроуза чем то напоминают рисунок панциря черепахи.

Обобщение решения Шварцшильда на случай ненулевой космологической постоянной (16.61) было получено Коттлером [156].

В рассматриваемом случае все решения параметризуются двумя постоянными: космологической постоянной Λ и массой M . Вторую постоянную мы будем называть массой, хотя она и не имеет физического смысла массы для большинства решений, отличных от решения Шварцшильда.

Как было отмечено в предыдущем разделе, мы рассматриваем глобальные решения вакуумных уравнений Эйнштейна, соответствующих положительному интервалу $(q_-, q_+) = (0, \infty)$. Структура глобальных решений определяется количеством и типом положительных корней уравнения $\Phi(q) = 0$ или эквивалентного кубического уравнения

$$\frac{\Lambda}{3}q^3 - q + 2M = 0. \quad (16.63)$$

При ненулевой космологической постоянной это уравнение может иметь до трех нулей. Элементарный анализ показывает, что по крайней мере один из корней отрицателен. Это значит, что при положительных q возможно существование не более двух горизонтов.

При положительной космологической постоянной $\Lambda > 0$ существуют следующие возможности в зависимости от величины массы M (см. рис. 16.1 слева). Если $M > \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$, то уравнение (16.63) не имеет положительных корней. При $M = \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$ возникает один положительный корень второго порядка. В интервале значений $0 < M < \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$ существуют два положительных корня. При неположительных значениях $M \leq 0$ имеется один простой положительный нуль.

Рис. 16.1. Поведение конформного множителя $\Phi = 1 - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}$ в зависимости от величины постоянной M (массы) при положительной (слева) и отрицательной (справа) космологической постоянной Λ .

При отрицательных значениях космологической постоянной $\Lambda < 0$ мы имеем один простой положительный нуль при $M > 0$ и ни одного нуля при $M \leq 0$ (см. рис. 16.1 справа).

Перейдем к классификации решений.

Пространство-время Минковского $\Lambda = 0$, $M = 0$. Наиболее простое сферически симметричное решение получается при $\Lambda = 0$ и $M = 0$ (см. рис. 16.2). В этом случае $\Phi = 1$, и метрика принимает вид

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad r \in (0, \infty), \quad (16.64)$$

где мы переобозначили $\sigma \mapsto r$. Точка $r = 0$ является координатной сингулярностью. Переходя к декартовым координатам в четырехмерном пространстве-времени и добавляя мировую линию начала сферической системы координат $r = 0$, мы получим пространство-время Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. При этом пространственная координата r естественным образом отождествляется с радиусом сферической системы координат. В этом случае пространство-время нельзя представить в виде топологического произведения $\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$, и поэтому диаграмма Картера–Пенроуза на рис. 16.2 не продолжается.

Черная дыра Шварцшильда $\Lambda = 0$, $M > 0$. Решение Шварцшильда соответствует нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$ и положительной массе $M > 0$. Оно уже обсуждалось в разделе 13.5.1. В этом случае конформный множитель (16.62) имеет один простой нуль в точке $q_1 = 2M$ и, следовательно, один горизонт. Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза также изображена на рис. 16.2.

Рис. 16.2. Сферически симметричные решения для конформного множителя $\Phi = 1 - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}$. Условные обозначения те же, что и на рис. 13.3. Стрелки показывают возможное периодическое продолжение решений.

Голая сингулярность $\Lambda = 0$, $M < 0$. При нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$ и отрицательной массе $M < 0$ уравнение (16.63) не имеет положительных корней. Этот случай также был рассмотрен в разделе 13.5.1. При указанных значениях постоянных существуют две диаграммы Картера–Пенроуза, каждая из которых состоит из одного треугольного конформного блока, изображенного на рис. 16.2, и его пространственного отражения. Каждый из конформных блоков представляет собой максимально продолженную поверхность $\mathbb{U}$. Сингулярная граница времениподобна и называется *голой сингулярностью*, т.к. не окружена горизонтом.

Решение де Ситтера $\Lambda > 0$, $M = 0$. Решение де Ситтера (см. раздел 18.4.2) соответствует положительной космологической постоянной и нулевой массе. При этом пространство-время представляет собой многообразие постоянной (в наших обозначениях положительной) скалярной кривизны и может быть представлено, как четырехмерный гиперboloид, вложенный в пятимерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$, с индуцированной метрикой. Его группой симметрии является группа Лоренца $\mathbb{O}(1, 4)$, а метрика имеет максимальное число – десять – векторов Киллинга, что совпадает с размерностью группы симметрии. Конформный множитель (16.62) имеет один простой положительный нуль, соответствующий горизонту.

Статические и однородные решения в координатах Шварцшильда имеют вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2} - r^2 d\Omega^2, \quad (16.65)$$

$$\begin{aligned} 0 < r < \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \quad -\infty < \tau < \infty, \\ ds^2 = -\frac{dt^2}{1 - \frac{\Lambda}{3}t^2} + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}t^2\right) d\sigma^2 - t^2 d\Omega^2, \quad (16.66) \\ \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} < t < \infty, \quad -\infty < \sigma < \infty. \end{aligned}$$

Поскольку уравнение (16.56) в этом случае интегрируется явно, то двумерную часть метрики можно записать также в конформно плоском виде

$$ds^2 = \frac{1}{\text{ch}^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\sigma\right)} (d\tau^2 - d\sigma^2) - \frac{3}{\Lambda} \text{th}^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\sigma\right) d\Omega^2, \quad (16.67)$$

$$ds^2 = \frac{1}{\text{sh}^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\tau\right)} (d\tau^2 - d\sigma^2) - \frac{3}{\Lambda} \text{cth}^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\tau\right) d\Omega^2, \quad (16.68)$$

соответственно для статического и однородного случая. Область определения $r \in (0, \sqrt{3/\Lambda})$ переходит в $\sigma \in (0, \infty)$, а $t \in (\sqrt{3/\Lambda}, \infty)$ – в $\tau \in (0, \infty)$.

Поведение конформного множителя показано на рис. 16.1 слева. Он имеет один простой нуль в некоторой точке, которую мы обозначим q_1 . В интервале $(0, q_1)$ конформный множитель положителен и ему ставится в соответствие два треугольных статических конформных блока I и III с метрикой (16.67). В интервале (q_1, ∞) конформный множитель отрицателен, и ему соответствуют два треугольных однородных конформных блока II и IV с метрикой (16.68). Эти четыре конформных блока склеиваются единственным образом по правилам, сформулированным в разделе 13.4. Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза показана на рис. 16.2. Решение де Ситтера получится после добавления времениподобной границы $r = 0$ к сплетенному произведению $\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$.

Заметим, что конформный множитель для решения де Ситтера является квадратичным полиномом, $\Phi = 1 - \frac{\Lambda q^2}{3}$. Как показано в разделе 13.5.5, при максимальном продолжении поверхности с такой метрикой возникает однополостный гиперболоид. В рассматриваемом случае мы этого не делаем не потому что возникают какие то проблемы с поверхностью $\mathbb{U}$, а потому что при $q = 0$ коэффициент при угловой части метрики (16.61) становится равным нулю и метрика четырехмерного пространства-времени вырождается. Здесь возникает такая же ситуация, как в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ в сферической системе координат.

Решение анти-де Ситтера $\Lambda < 0$, $M = 0$. Изменение знака космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна приводит к качественному изменению решений. При нулевой массе мы получаем решение анти-де Ситтера (см. раздел 18.4.3). Соответствующее пространство-время представляет собой многообразие постоянной отрицательной кривизны, которое можно представить в виде четырехмерного гиперболоида, вложенного в плоское пространство $\mathbb{R}^{2,3}$ с метрикой $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+, +, -, -, -)$. Метрика анти де Ситтера симметрична относительно действия группы вращений $\mathbb{O}(2, 3)$ и имеет также максимальное число – десять – векторов Киллинга. Конформный множитель (16.62) не имеет нулей и всегда положителен. Поэтому решение статично и не имеет горизонтов. В координатах Шварцшильда метрика имеет тот же вид (16.65), что и для решения де Ситтера, однако из-за отрицательного знака Λ область изменения r совпадает со всем положительным интервалом $(0, \infty)$. Если двумерная часть метрики является конформно плоской, то метрика анти-де Ситтера принимает вид

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}\sigma\right)}(d\tau^2 - d\sigma^2) - \frac{3}{|\Lambda|} \text{th}^2\left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}\sigma\right) d\Omega. \quad (16.69)$$

При этом координата σ меняется в конечном интервале $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}}\right)$. Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза имеет вид линзы и изображена на рис. 16.2. Это решение неполно на границе $r = 0$ и не может быть продолжено, что является следствием выбора сферической системы координат. Для получения полного решения анти-де Ситтера мировую линию $r = 0$ необходимо добавить к многообразию, что можно сделать путем перехода к другой системе координат.

Однородная пространственная сингулярность $\Lambda > 0$, $M > \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$. При $\Lambda > 0$, $M > \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$ конформный множитель Φ для положительных $q > 0$ не имеет нулей и всегда отрицателен. Решение однородно и не имеет горизонтов. Поверхность $\mathbb{U}$ в этом случае представляется диаграммой Картера–Пенроуза в виде линзы, изображенной на рис. 16.2, и ее отражения во времени. При конечном значении времени в прошлом имеется истинная сингулярность и у четырехмерной кривизны, и у тензора кривизны поверхности $\mathbb{U}$. Многообразие не может быть продолжено через эту сингулярность. Космологическая интерпретация этого решения простая. Вселенная рождается в конечном прошлом из сингулярности и развивается вечно. В пределе $t \rightarrow \infty$ метрика на поверхности $\mathbb{U}$ стремится к метрике де Ситтера. Это же верно для трех следующих глобальных решений.

Двойной горизонт $\Lambda > 0$, $M = \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$. Если $\Lambda > 0$ и $M = \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$ то конформный множитель Φ имеет один нуль второго порядка, соответствующий горизонту $q_1 = 1/\sqrt{\Lambda}$. При $q > 0$ функция Φ неотрицательна и, следовательно, все конформные блоки однородны. Два однородных конформных блока соответствуют интервалу $(0, q_1)$ и два – интервалу (q_1, ∞) . Они склеиваются в фундаментальную область, показанную на рис. 16.2. Эту фундаментальную область

можно либо продолжить влево и вправо, что приводит к универсальному накрывающему пространству, либо отождествить противоположные неполные края. В последнем случае возникающая поверхность диффеоморфна цилиндру. В случае одного двойного горизонта имеются также поверхности, возникающие из построенных выше отражением во времени.

Два горизонта $\Lambda > 0$, $0 < M < \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$. При $\Lambda > 0$ и $0 < M < \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$ конформный множитель Φ имеет два нуля и, значит, два горизонта в точках q_1 и q_2 . Двум интервалам $(0, q_1)$ и (q_2, ∞) , в которых конформный множитель отрицателен, ставится в соответствие по два однородных треугольных конформных блока. В интервале (q_1, q_2) конформный множитель положителен, и ему ставится в соответствие два статических квадратных конформных блока. Фундаментальная область возникает после склейки всех шести конформных блоков по правилам, описанным в разделе 13.4. Как и в предыдущем примере, фундаментальную область можно либо продолжить влево и вправо, и получить универсальное накрывающее пространство, как показано стрелками на рис. 16.2, либо отождествить неполные края.

Две статические сингулярности $\Lambda > 0$, $M < 0$. При положительной космологической постоянной $\Lambda > 0$ и отрицательной массе $M < 0$ конформный множитель Φ имеет один простой ноль в точке q_1 . Интервалу $(0, q_1)$, в котором конформный множитель положителен, ставится в соответствие два треугольных статических конформных блока. Интервалу (q_1, ∞) , где конформный множитель отрицателен, ставится в соответствие два треугольных однородных конформных блока. После склейки этих блоков возникает диаграмма Картера–Пенроуза, показанная на рис. 16.2. Мы имеем две сингулярности в статических областях I, III, разделенных горизонтами. Из области I вдоль времениподобной кривой можно достичь только правую сингулярность. Это же верно для области III и левой сингулярности. Из области II имеется возможность попасть в обе сингулярности. Из области IV никакой сингулярности достичь невозможно, и жизнь там продолжается вечно, если вы родились в этой области.

Черная дыра анти-де Ситтера $\Lambda < 0$, $M > 0$. Если $\Lambda < 0$ и $M > 0$, то конформный множитель Φ имеет один ноль и, соответственно, один горизонт в точке q_1 , как показано на рис. 16.1 справа. Интервалу $(0, q_1)$, где конформный множитель отрицателен, ставится в соответствие два треугольных однородных конформных блока. В интервале (q_1, ∞) конформный множитель положителен, и ему соответствует два треугольных статических конформных блока. Эти четыре конформных блока склеиваются в диаграмму Картера–Пенроуза, показанную на рис. 16.2. Она аналогична диаграмме для шварцшильдовской черной дыры. Отличие заключается в том, что полные левая и правая границы в рассматриваемом случае времениподобны. Сингулярности кривизны расположены в конечном прошлом (белая дыра) и в конечном будущем (черная дыра). Они имеют тот же характер, что и в решении Шварцшильда. Метрика пространства-времени не является асимптотически плоской и стремится к метрике анти-де Ситтера при $q = r \rightarrow \infty$.

Голая сингулярность $\Lambda < 0$, $M < 0$. При $\Lambda < 0$ и $M < 0$ имеется голая сингулярность без горизонтов. Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза совпадает с диаграммой Картера–Пенроуза для $\Lambda > 0$, $M > \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$ изображенной на рис. 16.2, но повернутой на угол $\pi/2$, т.к. конформный множитель положителен $\Phi > 0$, и, следовательно, метрика статична. Метрика при $q = r \rightarrow \infty$ также стремится к метрике анти-де Ситтера.

16.4.2. Планарные решения $K = 0$. В случае $K = 0$ метрика на римановой поверхности $\mathbb{V}$ (16.25) становится евклидовой

$$d\Omega_P := dy^2 + dz^2. \quad (16.70)$$

Это значит, что соответствующая максимально продолженная поверхность $\mathbb{V}$ является либо евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$ с группой симметрии Пуанкаре $\mathbb{IO}(2)$, либо ее компактификацией

(цилиндр, тор). Будем называть соответствующие четырехмерные глобальные решения вакуумных уравнений Эйнштейна *планарными*. Для решений этого типа метрика в координатах Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = \Phi(q) d\zeta^2 - \frac{dq^2}{\Phi(q)} - q^2 \Omega_p, \quad (16.71)$$

где

$$\Phi(q) = -\frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}. \quad (16.72)$$

Координаты q и ζ определены в (16.56). Множество планарных решений, так же как и в сферически симметричном случае, параметризуется двумя постоянными: космологической постоянной Λ и массой M .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для планарных решений координата q не может быть интерпретирована, как радиус пространства. Поэтому мы с самого начала отказались от ее обозначения через r , т.к. решение Шварцшильда является лишь частным случаем описываемого общего подхода.

Физическая интерпретация планарных решения весьма интересна. Например, при $\mathbb{V} = \mathbb{T}^2$ трехмерное пространство представляет собой прямое произведение тора $\mathbb{T}^2$ и прямой $\mathbb{R}$. Это пространство содержит нестягиваемые замкнутые пространственноподобные кривые, т.е. имеет нетривиальную фундаментальную группу. С физической точки зрения такие пространства описывают кротовые норы. В этом случае все горизонты также представляют собой торы.

Для построения глобальных планарных решений вакуумных уравнений Эйнштейна необходимо знать поведение конформного множителя (16.72) при различных значениях Λ и M . При $\Lambda \neq 0$ оно ясно из рис. 16.1 и получается сдвигом оси абсцисс на единицу вверх, как показано на рис. 16.3.

Рис. 16.3. Поведение конформного множителя $\Phi = -\frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}$ в зависимости от величины массы M при положительной (слева) и отрицательной (справа) космологической постоянной Λ .

При $M = 0$ конформный множитель является квадратичным полиномом. Этот случай был рассмотрен в разделе 13.5.5 и соответствует поверхностям $\mathbb{U}$ постоянной кривизны.

Если космологическая постоянная положительна, $\Lambda > 0$, то конформный множитель при $M > 0$ не имеет нулей. При $M < 0$ существует один положительный нуль.

Для отрицательной космологической постоянной, $\Lambda < 0$, ситуация противоположна. При $M > 0$ есть один простой нуль, а при $M < 0$ нули отсутствуют.

Перечислим все возможные максимально продолженные поверхности $\mathcal{U}$. Как и ранее, достаточно рассмотреть глобальные решения, соответствующие интервалу $q \in (0, \infty)$.

Однородные и голые сингулярности $\Lambda = 0$, $M \neq 0$. При нулевой космологической постоянной и положительной массе $M > 0$ конформный множитель при $q > 0$ отрицателен и не имеет нулей (горизонтов). Поэтому глобальное решение состоит из одного треугольного конформного блока типа IV, однородно и имеет пространственноподобную сингулярность при $q = 0$. В шварцшильдовских и черепаших координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{t}{2M} dt^2 - \frac{2M}{t} d\sigma^2 - t^2 d\Omega_P, \quad t \in (0, \infty), \quad (16.73)$$

$$ds^2 = \sqrt{\frac{M}{|\tau|}} (d\tau^2 - d\sigma^2) - 4M|\tau| d\Omega_P, \quad \tau < 0 \quad \text{или} \quad \tau > 0. \quad (16.74)$$

Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза изображена на рис. 16.4.

Как и ранее, существует также глобальное решение типа II, полученное из показанного на рисунке обращением времени.

Рис. 16.4. Планные решения $K = 0$. Условные обозначения те же, что и на рис. 13.3.

Если масса отрицательна, $M < 0$, то оба глобальных решения имеют такой же вид как и при $M > 0$, но являются статическими. Поэтому соответствующие диаграммы Картера–Пенроуза необходимо просто повернуть на угол $\pi/2$. В таком случае возникают голые сингулярности.

Решение (анти-)де Ситтера $\Lambda \neq 0$, $M = 0$. При положительной космологической постоянной $\Lambda > 0$ и нулевой массе $M = 0$ конформный множитель

$$\Phi = -\frac{\Lambda t^2}{3}, \quad q := t \in (0, \infty),$$

всюду отрицателен и не имеет нулей. Соответствующее глобальное решение однородно и не имеет горизонтов. Оно представляется треугольным конформным блоком типа IV, изображенном на рис. 16.4. Есть также глобальное решение типа II, полученное из решения типа IV обращением времени.

В шварцшильдовских и черепаших координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{3}{\Lambda t^2} dt^2 - \frac{\Lambda t^2}{3} d\sigma^2 - t^2 d\Omega_P, \quad t \in (0, \infty), \quad (16.75)$$

$$ds^2 = \frac{3}{\Lambda \tau^2} (d\tau^2 - d\sigma^2) - \frac{9}{\Lambda^2 \tau^2} d\Omega_P, \quad \tau \in (0, \infty). \quad (16.76)$$

Вдоль границы $q = 0$ (т.е. $t = 0$) диаграммы Картера–Пенроуза 4-х мерная метрика вырождается и ее нельзя продолжать. Эти светоподобные края показаны на рис. 16.4 пунктиром.

Можно проверить, что метрики (16.75) и (16.76) описывают пространства постоянной четырехмерной кривизны. Это означает, что эти метрики представляют собой решение де Ситтера.

В случае отрицательной космологической постоянной $\Lambda < 0$ зависимость компонент метрики от времени в выражениях (16.75) и (16.76) необходимо заменить на зависимость от пространственной координаты, и соответствующие диаграммы Картера–Пенроуза повернуть на угол $\pi/2$. В этом случае пространство-время снова является пространством постоянной кривизны, и возникает новое представление решения анти-де Ситтера.

Однородные и голые сингулярности $\Lambda M > 0$. При положительной космологической постоянной, $\Lambda > 0$, и положительной массе, $M > 0$, конформный множитель

$$\Phi = -\frac{\Lambda t^3 + 6M}{3t} < 0, \quad q := t \in (0, \infty), \quad (16.77)$$

отрицателен и не имеет нулей (горизонтов). В шварцшильдовских и черепашьих координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{3t}{\Lambda t^3 + 6M} dt^2 - \frac{\Lambda t^3 + 6M}{3t} d\sigma^2 - t^2 d\Omega_P, \quad t \in (0, \infty), \quad (16.78)$$

$$ds^2 = |\Phi|(d\tau^2 - d\sigma^2) - t^2 d\Omega_P, \quad -\frac{\pi}{12\sqrt{3}M} < \tau < \frac{\pi}{4\sqrt{3}M}, \quad (16.79)$$

где функция $t = t(\tau)$ определена уравнением (16.56), которое интегрируется и дает неявную связь $t = t(\tau)$ (при $q' > 0$):

$$\frac{\Lambda}{3}(\tau + \text{const}) = \frac{1}{6a} \ln \frac{a^2 - at + t^2}{(a + t)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arcth} \left(\frac{2t - a}{a\sqrt{3}} \right), \quad a := 6M/\Lambda. \quad (16.80)$$

Соответствующее максимально продолженное решение представляется диаграммой Картера–Пенроуза в виде линзы типа IV, которая изображена на рис. 16.4, и ее отражением во времени (диаграмма типа II). Оно описывает однородную пространственную сингулярность при $t = 0$ и является асимптотически пространством-временем де Ситтера при $t \rightarrow \infty$.

Глобальные решения, возникающие при $\Lambda < 0$, $M < 0$, получаются из рассмотренного выше решения преобразованием $\tau \leftrightarrow \sigma$. Соответствующие решения статичны. Диаграммы Картера–Пенроуза также имеют вид линзы и получаются из предыдущего случая поворотом на угол $\pi/2$.

Черное кольцо $\Lambda M < 0$. Если $\Lambda > 0$ и $M < 0$, то конформный множитель (16.77) имеет один простой нуль, и пространство-время содержит один горизонт. В этом случае имеется два статических и два однородных конформных блока, которые вместе склеиваются вдоль горизонта в диаграмму Картера–Пенроуза, изображенную на рис. 16.4 справа. Она имеет тот же вид, что и в сферически симметричном случае $K = 1$, $\Lambda > 0$ и $M < 0$ (рис. 16.2). Метрика для однородного решения имеет вид (16.78), но из-за условия (16.80) области определения координат t и τ меняются. Для статического решения метрика задается уравнением (16.71) с соответствующей областью определения координат r и σ , связанных тем же уравнением, что и t и τ .

Решения, возникающие при $\Lambda < 0$, $M > 0$, получаются из решений, соответствующих $\Lambda > 0$, $M < 0$, путем перестановки пространственной и временной координаты $\tau \leftrightarrow \sigma$. Соответствующую диаграмму Картера–Пенроуза необходимо повернуть на угол $\pi/2$. По виду она совпадает с черной дырой анти де Ситтера. В этом случае после компактификации $\mathbb{V} = \mathbb{T}^2$ горизонт черной дыры имеет вид тора $\mathbb{T}^2$, а пространство-время является асимптотически пространством анти-де Ситтера. Следовательно, в пространстве возникает кольцевая черная дыра (черное кольцо). Напомним, что в этом случае все пространство имеет вид топологического произведения прямой $\mathbb{R}$ и тора $\mathbb{T}^2$.

16.4.3. Гиперболические глобальные решения $K = -1$. При $K = -1$ поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^2$ (плоскость Лобачевского). Точнее, верхнюю полу двуполостного гиперboloиды (см. раздел 12.2). После компактификации $\mathbb{H}^2$ в качестве поверхности $\mathbb{V}$ получится компактная риманова поверхность рода два и выше. Отметим, что группой изометрий однополостного гиперboloиды $\mathbb{H}^2$ является группа преобразований Лоренца $\mathbb{O}(1, 2)$. То есть возникают решения вакуумных уравнений Эйнштейна симметричные относительно действия группы Лоренца $\mathbb{SO}(1, 2)$ не в пространстве-времени, а на пространственных сечениях $t = \text{const}$.

Метрика двуполостного гиперboloиды (16.25) единичного радиуса в гиперболической системе координат имеет вид (12.16)

$$d\Omega_{\text{H}} = d\theta^2 + \text{sh}^2\theta d\varphi^2. \quad (16.81)$$

Соответствующее вакуумное решение уравнений Эйнштейна можно записать в координатах Шварцшильда

$$ds^2 = \Phi(q)d\zeta^2 - \frac{dq^2}{\Phi(q)} - q^2 d\Omega_{\text{H}}, \quad (16.82)$$

где конформный множитель имеет вид

$$\Phi(q) = -1 - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}. \quad (16.83)$$

Чтобы описать глобальные гиперболические решения, заметим, что конформный множитель Φ общего вида (16.49), меняет знак на противоположный при преобразовании всех постоянных:

$$K \mapsto -K, \quad \Lambda \mapsto -\Lambda, \quad M \mapsto -M.$$

Это означает, что все глобальные решения в случае $K = -1$, можно получить из сферически симметричных решений, если поменять пространственную и временную координату $\tau \leftrightarrow \sigma$ на поверхности $\mathbb{U}$, а также изменить знак космологической постоянной и массы.

ПРИМЕР 16.4.1. Аналогом решения Шварцшильда является решение с нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$ и отрицательной массой $M < 0$. В этом случае метрика для однородного и статичного конформного блока принимает вид

$$ds^2 = \frac{dt^2}{1 + \frac{2M}{t}} - \left(1 + \frac{2M}{t}\right) d\sigma^2 - t^2 d\Omega_{\text{H}}, \quad -2M < t < \infty, \quad (16.84)$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2M}{r}} - r^2 d\Omega_{\text{H}}, \quad 0 < r < -2M. \quad (16.85)$$

При этом диаграмму Картера–Пенроуза для решения Шварцшильда необходимо повернуть на угол $\pi/2$, рис. 16.5. Соответствующее глобальное решение имеет левую и правую статические сингулярности при $q = r = 0$. Свойства этого глобального решения похожи на свойства двух статических сферически симметричных сингулярностей, рассмотренных в разделе 16.4.1, но с другим асимптотическим поведением. Пространство-время является асимптотически плоским в бесконечно удаленном прошлом и будущем (оба случая соответствуют пределу $q = t \rightarrow \infty$).

Остальные глобальные решения для $K = -1$ анализируются аналогично, и мы оставляем это любознательному читателю.

Не так легко представить себе пространство (трехмерное сечение четырехмерного пространства-времени, задаваемое уравнением $t = \text{const}$) при $K = -1$. В рассматриваемом случае

Рис. 16.5. Статические сингулярности в гиперболическом случае.

оно представляет собой произведение интервала (конечного или бесконечного в зависимости от значений Λ и M) и однополостного гиперboloида $\mathbb{H}^2$. После компактификации, когда поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой замкнутую риманову поверхность рода два и выше, глобальное решение можно интерпретировать, как множество кротовых нор, число которых совпадает с родом поверхности (числом ручек). Топология горизонта совпадает с топологией поверхности $\mathbb{V}$.

16.5. Лоренц-инвариантные решения

В настоящем разделе мы рассмотрим случай С (16.21), когда второе дилатонное поле в сплетенном произведении (16.2) постоянно, $m = \text{const}$. В этом случае, как будет показано ниже, псевдориманова поверхность $\mathbb{U}$ должна быть поверхностью постоянной кривизны. Следовательно, она представляет собой однополостный гиперboloид, $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$ или его универсальную накрывающую, которые были подробно описаны в разделе 12.3. В этом случае глобальные решения вакуумных уравнений Эйнштейна имеют вид топологического произведения $\mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{V}$. Вторым сомножителем $\mathbb{V}$ представляет собой максимально продолженную риманову поверхность с одним вектором Киллинга, которые были рассмотрены в разделе 14.3. Как было показано, поверхность $\mathbb{V}$ может иметь конические сингулярности или сингулярности кривизны вдоль края поверхности $\mathbb{V}$. С физической точки зрения этим сингулярностям соответствуют космические струны или сингулярные доменные стенки, которые эволюционируют во времени.

Случай С похож на пространственно симметричные решения, рассмотренные в случае В, однако имеет также несколько существенно новых черт. Во-первых, мы не можем ограничить себя только положительно определенными метриками $h_{\mu\nu}$ на $\mathbb{V}$, потому что уравнения Эйнштейна (16.18) неинвариантны относительно преобразования $h_{\mu\nu} \rightarrow -h_{\mu\nu}$ при заданном m . Отметим, что при $k = \text{const}$ преобразование $g_{\alpha\beta} \rightarrow -g_{\alpha\beta}$ всегда можно дополнить перестановкой пространственной и временной координаты на $\mathbb{U}$, $\tau \leftrightarrow \sigma$, что вместе оставляет уравнение (16.17) инвариантным. В случае евклидовой метрики на $\mathbb{V}$ это невозможно. Поэтому, не ограничивая общности, мы зафиксируем $m = 1$, но допустим, что метрика $h_{\mu\nu}$ может быть как положительно, так и отрицательно определена. В обоих случаях сигнатура четырехмерной метрики будет лоренцевой: либо $(+ - - -)$, либо $(+ - + +)$.

Решение уравнений (16.17)–(16.20) проводится так же, как и для метрики лоренцевой сигнатуры, при этом необходимо функцию m заменить на k и метрику $g_{\alpha\beta}$ на $h_{\mu\nu}$. Поэтому мы

только кратко обозначим основные этапы вычислений, подчеркнув те моменты, которые специфичны для евклидовой сигнатуры.

При $m = 1$ полная система вакуумных уравнений Эйнштейна (16.17)–(16.20) принимает вид

$$\nabla_\mu \nabla_\nu k - \frac{\nabla_\mu k \nabla_\nu k}{2k} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[\nabla^2 k - \frac{(\nabla k)^2}{2k} \right] = 0, \quad (16.86)$$

$$R^g + \nabla^2 k - 2k\Lambda = 0, \quad (16.87)$$

$$R^h + \frac{\nabla^2 k}{k} - \frac{(\nabla k)^2}{2k^2} - 2\Lambda = 0. \quad (16.88)$$

Как и в случае В, в уравнение (16.87) входит сумма функций от разных аргументов: $R^g = R^g(x)$ и $k = k(y)$. Поэтому скалярная кривизна поверхности $\mathbb{U}$ должна быть постоянна, $R^g = -2K = \text{const}$. Отсюда вытекает, что поверхность $\mathbb{U}$ является однополостным гиперboloидом $\mathbb{L}^2$ или его универсальной накрывающей.

Это – очень важное следствие вакуумных уравнений Эйнштейна, т.к. в рассматриваемом случае С все решения должны быть $\mathbb{SO}(1, 2)$ инвариантны, где группа преобразований Лоренца $\mathbb{SO}(1, 2)$ действует на однополостном гиперboloиде. Поэтому глобальные решения класса С названы лоренц-инвариантными.

Тогда уравнение (16.87) принимает вид

$$\nabla^2 k - 2(k\Lambda + K) = 0. \quad (16.89)$$

Как и в случае В уравнение (16.88) является следствием уравнений (16.86) и (16.89). Поэтому для нахождения решений вакуумных уравнений Эйнштейна достаточно решить уравнения (16.86) и (16.89).

Следующий шаг состоит в фиксировании координат на поверхности $\mathbb{V}$. Конформно евклидова метрика на поверхности $\mathbb{V}$ имеет вид

$$h_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = \Phi dz d\bar{z} = \Phi(d\sigma^2 + d\rho^2). \quad (16.90)$$

Здесь $\Phi(z, \bar{z})$ является функцией комплексных координат

$$z := \sigma + i\rho, \quad \bar{z} = \sigma - i\rho, \quad (16.91)$$

где $\sigma = y^2$, $\rho = y^3$. При этом метрика всего четырехмерного пространства-времени равна

$$ds^2 = k d\Omega_L + \Phi dz d\bar{z}, \quad (16.92)$$

где $d\Omega_L$ – метрика постоянной кривизны на однополостном гиперboloиде $\mathbb{L}^2$, заданная, например, уравнением (16.24).

Не ограничивая общности, рассмотрим положительные $k > 0$. В противном случае можно просто переставить первые две координаты. Тогда удобно ввести параметризацию

$$k = q^2, \quad q > 0.$$

Для двух неизвестных функций q и Φ вместо уравнений (16.36)–(16.38) возникает следующая система уравнений

$$\partial_{zz}^2 q - \frac{\partial_z \Phi \partial_z q}{\Phi} = 0, \quad (16.93)$$

$$\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 q - \frac{\partial_{\bar{z}} \Phi \partial_{\bar{z}} k}{\Phi} = 0, \quad (16.94)$$

$$2 \frac{\partial_z \partial_{\bar{z}} q^2}{\Phi} - (K + \Lambda q^2) = 0. \quad (16.95)$$

Аналогично случаю В решением уравнений (16.93) и (16.94) являются функции одного аргумента: $q = q(z \pm \bar{z})$ и $\Phi = \Phi(z \pm \bar{z})$, при этом функция Φ определяется уравнением

$$|\Phi| = |q'|, \quad (16.96)$$

где штрих обозначает дифференцирование по соответствующему аргументу. В полученной формуле нижний и верхний знаки соответствуют положительно и отрицательно определенной римановой метрике на $\mathbb{V}$. Таким образом, функции q и Φ зависят либо от координаты σ , либо от $i\rho$. Поскольку, благодаря вращательной $\mathbb{SO}(2)$ симметрии конформно евклидовой метрики (16.90), оба выбора равнозначны, то для определенности мы предположим, что функции $q(\sigma)$ и $\Phi(\sigma)$ зависят от σ .

После этого уравнение (16.95) упрощается:

$$\frac{1}{2}(q^2)'' = (K + \Lambda q^2)\Phi, \quad (16.97)$$

где штрих обозначает дифференцирование по σ . Чтобы его проинтегрировать, в уравнении (16.96) необходимо раскрыть знаки модулей.

Рассмотрим случай $\Phi q' > 0$. Тогда уравнение (16.97) с учетом (16.96) примет вид

$$\frac{1}{2}(q^2)'' = (K + \Lambda q^2)q',$$

и его легко проинтегрировать:

$$q' = K - \frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3}, \quad (16.98)$$

где M – произвольная постоянная интегрирования. Хотя в рассматриваемом случае ее нельзя интерпретировать как массу, мы будем использовать старые обозначения, чтобы облегчить сравнение. Учитывая уравнение (16.96) получаем выражение для конформного множителя

$$\Phi(q) = K - \frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3} \quad (16.99)$$

Случай $\Phi q' < 0$ интегрируется аналогично.

Окончательно, общее решение вакуумных уравнений Эйнштейна в случае С имеет вид

$$ds^2 = q^2 d\Omega_L + \Phi(q)(d\sigma^2 + d\rho^2), \quad (16.100)$$

где конформный множитель задан уравнением (16.99) и функция $q = q(\sigma)$ определяется уравнением (16.96). Таким образом, метрика на поверхности $\mathbb{V}$ имеет один вектор Киллинга ∂_ρ и имеет тот же вид, что и в разделе 14.1. Поэтому мы можем использовать развитую там технику для построения глобальных решений вакуумных уравнений Эйнштейна.

Выбирая функцию $q(\sigma)$ в качестве одной из координат, метрику (16.100) можно записать в виде, напоминающем метрику Шварцшильда,

$$ds^2 = q^2 d\Omega_L + \frac{dq^2}{\Phi(q)} + \Phi(q) d\sigma^2. \quad (16.101)$$

Результирующая метрика имеет три вектора Киллинга, соответствующих группе симметрии $\mathbb{SO}(1, 2)$ однополостного гиперboloида постоянной кривизны $\mathbb{L}^2$, и один дополнительный вектор Киллинга ∂_ρ на поверхности $\mathbb{V}$.

Вычисления, аналогичные случаю $k = 1$, приводят к следующему выражению для скалярной кривизны поверхности $\mathbb{V}$

$$R^h = \frac{2}{3}\Lambda + \frac{4M}{q^3}.$$

При этом для инвариантного собственного значения четырехмерного тензора Вейля мы получаем то же выражение (16.59), что и в случае В.

16.5.1. Лоренц-инвариантные решения $K = 1$. Прежде всего отметим, что случаи $K = 1$ и $K = -1$ связаны между собой перестановкой первых двух координат $\tau \leftrightarrow \sigma$. Мы выберем значение $K = 1$, чтобы выражение для конформного множителя Φ имело, с точностью до изменения знака космологической постоянной, тот же вид, что и для сферически симметричного случая. Метрика для однополостного гиперboloида в гиперболической полярной системе координат имеет вид (12.28). Поэтому четырехмерная метрика пространства-времени в координатах Шварцшильда запишется следующим образом

$$ds^2 = q^2(d\theta^2 - \text{ch}^2\theta d\varphi^2) + \frac{dq^2}{\Phi(q)} + \Phi(q)d\rho^2, \quad (16.102)$$

где конформный множитель,

$$\Phi = 1 - \frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3}, \quad (16.103)$$

имеет тот же вид, что и в решении Коттлера [156], но в рассматриваемом случае этот нетривиальный конформный множитель входит в евклидову часть метрики.

На поверхности $\mathbb{V}$ метрика может быть как отрицательно ($\Phi < 0$), так и положительно ($\Phi > 0$) определена. Для отрицательно определенной метрики сигнатура метрики пространства-времени равна $(+ - - -)$, и роль времени играет координата θ . Поэтому времениподобная координата принимает значения на всей вещественной оси $\theta \in \mathbb{R}$, и трехмерное пространство представляет собой произведение окружности $\varphi \in [0, 2\pi)$ и поверхности $\mathbb{V}$, которая будет построена ниже. Если в качестве $\mathbb{U}$ выбрать универсальную накрывающую однополостного гиперboloида $\mathbb{L}^2$, то трехмерное пространство будет представлять произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$. Эволюция этих пространств во времени длится вечно, и если поверхность $\mathbb{V}$ имеет сингулярность, то ей будет соответствовать времениподобная кривая.

Для положительно определенной метрики на $\mathbb{V}$ сигнатура четырехмерной метрики равна $(+ - + +)$, и времениподобной координатой является угол φ . При $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$ он принимает значения на окружности $\varphi \in [0, 2\pi)$, и трехмерное пространство представляет собой произведение прямой $\theta \in \mathbb{R}$ и поверхности $\mathbb{V}$. Соответствующее пространство-время содержит замкнутые времениподобные кривые (включая экстремали), если только в качестве поверхности $\mathbb{U}$ не выбрано универсальное накрывающее пространство для $\mathbb{L}^2$.

Поскольку метрика на поверхности $\mathbb{V}$ имеет тот же локальный вид, что и в разделе 14.1, то мы можем построить максимально продолженные поверхности $\mathbb{V}$. Вид римановой поверхности определяется конформным множителем, показанным на рис. 16.1 при $\Lambda \neq 0$. Надо только помнить, что в выражение для конформного множителя космологическая постоянная входит с противоположным знаком. Кроме того, при отождествлении $\rho \sim \rho + L$ возможно появление конических сингулярностей, которые соответствуют космическим струнам.

Перейдем к классификации глобальных решений вакуумных уравнений Эйнштейна в рассматриваемом случае С.

Пространство-время Минковского $\Lambda = 0$, $M = 0$. При нулевых значениях постоянных поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой полуплоскость $q \in (0, \infty)$, $\rho \in (-\infty, \infty)$. Она неполна при $q = 0$ из-за координатной сингулярности, аналогичной сферически симметричному случаю.

Космическая струна $\Lambda = 0$, $M > 0$. При нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$ и положительных значениях $M > 0$ возникает решение, соответствующее решению Шварцшильда. В этом случае существуют две несвязные между собой максимально продолженные римановы поверхности, изображенные на рис. 16.6 слева и в центре с положительно и отрицательно определенной метрикой. Для наглядности мы отождествили точки с координатами ρ и $\rho + L$.

Внешнему решению Шварцшильда соответствует интервал $q \in (2M, \infty)$. В этой области конформный множитель положителен и четырехмерная метрика имеет сигнатуру $(+ - + +)$. Соответствующая поверхность $\mathbb{V}$ является гладким многообразием. При этом возможно появление конической сингулярности на горизонте $q = 2M$. С топологической точки зрения коническая сингулярность представляет собой плоскость (мировую поверхность космической струны), а все пространство-время описывает бесконечную эволюцию бесконечной космической струны. Для этого решения кривизна не имеет больше никаких сингулярностей, и если выполнено уравнение (14.30), то пространство-время вообще не имеет сингулярностей. Специфическим свойством этого решения является то, что периметр цилиндра, изображенного на рис. 16.6 слева, стремится к постоянной при $q \rightarrow \infty$. Это свойство соответствует тому, что решение Шварцшильда является асимптотически плоским.

Рис. 16.6. Максимально продолженная риманова поверхность $\mathbb{V}$ при нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$. Условные обозначения те же, что и на рис. 13.3. Незакрашенные окружности обозначают возможные конические сингулярности.

Для внутреннего решения Шварцшильда $q \in (0, 2M)$, конформный множитель отрицателен, и метрика пространства-времени имеет сигнатуру $(+ - - -)$. Максимально продолженная поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой в этом случае диск конечного радиуса с сингулярным краем $q = 0$, который изображен на рис. 16.6 в центре. Если выполнено уравнение (14.30), то поверхность $\mathbb{V}$ гладкая и имеет особенность только на крае. В противном случае в центре диска $q = 2M$ возникает коническая сингулярность, соответствующая космической струне. Поэтому трехмерное пространство представляет собой космическую струну, окруженную цилиндрической доменной стенкой, на которой кривизна сингулярна. Сингулярный край невозможно адекватно изобразить на рисунке, поскольку он находится на конечном расстоянии, но в то же время имеет бесконечный периметр.

Доменная стенка $\Lambda = 0$, $M < 0$. Если космологическая постоянная равна нулю, а масса отрицательна, то решение Шварцшильда описывает голую сингулярность. В этом случае конформный множитель при $q \in (0, \infty)$ положителен и сигнатура метрики равна $(+ - + -)$. Максимально продолженная риманова поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой полуплоскость, $q \in (0, \infty)$, $\rho \in \mathbb{R}$. Сингулярность кривизны расположена вдоль края $q = 0$, что можно интерпретировать, как доменную стенку, на которой кривизна сингулярна. С четырехмерной точки зрения это решение описывает эволюцию доменной стенки, которая расположена на конечном расстоянии.

Благодаря трансляционной симметрии, точки с координатами ρ и $\rho + L$ можно отождествить. Возникающая при этом поверхность изображена на рис. 16.6 справа. Соответствующее трехмерное пространство представляет собой цилиндрическую доменную стенку.

Решение де Ситтера $\Lambda > 0$, $M = 0$. При нулевой массе и положительной космологической постоянной конформный множитель (16.99) положителен для $q \in (0, \infty)$. Поверхность $\mathbb{V}$ имеет метрику с сигнатурой $(+ - + -)$ и показана на рис. 16.7 слева. Для наглядности она изображена после отождествления точек с координатами ρ и $\rho + L$. Пространство де Ситтера соответствует универсальной накрывающей поверхности $\mathbb{V}$. Поверхность $\mathbb{V}$ является гладкой и не имеет сингулярностей. Однако она неполна при $q = 0$. Ее продолжение через край $q = 0$ невозможно, т.к. четырехмерная метрика пространства-времени вырождается.

Рис. 16.7. Максимально продолженные римановы поверхности $\mathbb{V}$ при нулевой массе $M = 0$. Условные обозначения те же, что и на рис. 13.3. Незакрашенные окружности обозначают возможные конические сингулярности.

Решение анти-де Ситтера $\Lambda < 0$, $M = 0$. При отрицательной космологической постоянной $\Lambda < 0$ и нулевой константе $M = 0$ возникает решение анти-де Ситтера. Конформный множитель при этом имеет один простой нуль (горизонт) в точке $q_1 = \sqrt{-3/\Lambda}$. Следовательно, существуют две несвязные между собой поверхности $\mathbb{V}$: одна с положительно, а другая с отрицательно определенной метрикой.

При $q \in (0, q_1)$ конформный множитель положителен, метрика пространства-времени имеет сигнатуру $(+ - + -)$, и поверхность $\mathbb{V}$ показана на рис. 16.7 в центре. С топологической точки зрения эта поверхность представляет собой диск конечного радиуса с положительно определенной метрикой. В центре диска $q = q_1$ возможно появление конической сингулярности. Ее продолжение через край $q = 0$ невозможно, т.к. четырехмерная метрика вырождается.

Если $q \in (q_1, \infty)$, то конформный множитель отрицателен и метрика пространства-времени имеет сигнатуру $(+ - - -)$. Соответствующая поверхность $\mathbb{V}$ показана на рис. 16.7 справа. С

топологической точки зрения она представляет собой плоскость, в центре которой возможно появление конической сингулярности.

Доменная стенка $\Lambda < 0$, $M > \frac{1}{3\sqrt{-\Lambda}}$. При отрицательной космологической постоянной $\Lambda < 0$ и $M > \frac{1}{3\sqrt{-\Lambda}}$ конформный множитель отрицателен при $q \in (0, \infty)$, не имеет нулей, и сигнатура метрики пространства-времени равна $(+ - - -)$. С топологической точки зрения поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой полуплоскость $q > 0$, $\rho \in \mathbb{R}$ с отрицательно определенной метрикой и сингулярной кривизной на границе $q = 0$. Глобальное решение описывает бесконечную эволюцию бесконечной плоской доменной стенки сингулярной кривизны.

Компактификация по координате $\rho \sim \rho + L$ дает внутренность цилиндрической доменной стенки, показанной на рис. 16.8. Длина направляющей окружности цилиндра стремится к бесконечности при $q \rightarrow 0$ и $q \rightarrow \infty$. Сингулярный край $q = 0$ находится на конечном расстоянии.

Двойной горизонт $\Lambda < 0$, $M = \frac{1}{3\sqrt{-\Lambda}}$. При указанных значениях постоянных конформный множитель отрицателен и имеет двойной нуль в точке q_1 . Метрика пространства-времени в обоих интервалах $q \in (0, q_1)$ и $q \in (q_1, \infty)$ имеет сигнатуру $(+ - - -)$. В этом случае имеем две поверхности, изображенные на рис. 16.8. Поверхность $\mathbb{V}$, соответствующая интервалу $q \in (q_1, \infty)$, не является односвязной. Ее можно представить себе в виде плоскости, центр которой $q = q_1$ удален в бесконечность, т.к. он лежит на бесконечном расстоянии.

Поверхность для интервала $(0, q_1)$ представляет собой цилиндрическую доменную стенку сингулярностей кривизны. Сингулярный край $q = 0$ лежит на конечном расстоянии.

Рис. 16.8. Максимально продолженные римановы поверхности $\mathbb{V}$ при отрицательной космологической постоянной $\Lambda < 0$ и $M \neq 0$. Незакрашенные окружности обозначают возможные конические сингулярности.

Два горизонта $\Lambda < 0$, $0 < M < \frac{1}{3\sqrt{-\Lambda}}$. Если космологическая постоянная отрицательна $\Lambda < 0$ и масса лежит в интервале $0 < M < \frac{1}{3\sqrt{-\Lambda}}$, то конформный множитель имеет максимальное число нулей: два простых нуля, расположенных в точках $q_{1,2}$ (см. рис. 16.1 слева). В интервалах $(0, q_1)$ и (q_2, ∞) конформный множитель отрицателен, и сигнатура метрики пространства-времени равна $(+ - - -)$. В интервале (q_1, q_2) конформный множитель положителен, и сигнатура метрики имеет вид $(+ - + +)$. Максимально продолженная поверхность $\mathbb{V}$ является одной из трех поверхностей, показанных на рис. 16.8 в нижнем ряду.

При $q \in (0, q_1)$ поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой диск конечного радиуса, на крае которого кривизна сингулярна. В центре диска, возможно, расположена коническая сингулярность. Это зависит от отождествления $\rho \sim \rho + L$.

Если $q \in (q_1, q_2)$, то поверхность $\mathbb{V}$ топологически представляет собой сферу, в общем случае имеющую две конические сингулярности. Алгебраический анализ системы уравнений $\Phi(q_1) = \Phi(q_2) = 0$ и $\Phi'(q_1) = -\Phi'(q_2)$ при $q_1 \neq q_2$ показывает, что таких решений не существует. Поэтому, подгоняя период компактификации L , можно устранить одну из конических сингулярностей, но не обе одновременно. Это значит, что в рассматриваемом случае всегда должна существовать космическая струна. С топологической точки зрения трехмерное пространство представляет собой произведение сферы, содержащей одну или две конические сингулярности, и прямой.

При $q \in (q_2, \infty)$ поверхность $\mathbb{V}$ – это плоскость, в центре которой, возможно, расположена коническая сингулярность. Экстремали при $q \rightarrow \infty$ полны, а кривизна стремится к постоянной.

Космическая струна $\Lambda < 0$, $M < 0$. Если и космологическая постоянная $\Lambda < 0$, и постоянная $M < 0$, то конформный множитель Φ имеет один простой нуль в точке q_1 . В этом случае возможно существование двух поверхностей $\mathbb{V}$.

При $q \in (0, q_1)$ конформный множитель положителен, и сигнатура метрики пространства-времени равна $(+ - + +)$. Топологически поверхность $\mathbb{V}$ имеет то же вид, что и рассмотренная в предыдущем случае поверхность для $\Lambda < 0$, $0 < M < \frac{1}{3\sqrt{-\Lambda}}$ и $q \in (0, q_1)$, но с отрицательно определенной метрикой.

Вторая поверхность $\mathbb{V}$ соответствует интервалу $q \in (q_1, \infty)$. Конформный множитель отрицателен, и сигнатура метрики пространства-времени равна $(+ - - -)$. Поверхность $\mathbb{V}$ имеет тот же вид, что и в случае $\Lambda < 0$, $M = 0$ и $q \in (q_1, \infty)$ на рис. 16.7. Глобальное решение вакуумных уравнений Эйнштейна в общем случае описывает бесконечную космическую струну, причем других сингулярностей у кривизны нет.

Космическая струна $\Lambda > 0$, $M > 0$. При положительной космологической постоянной $\Lambda > 0$ и массе $M > 0$. Конформный множитель имеет один простой нуль в точке q_1 , как видно из рис. 16.1, справа. Он отрицателен в интервале $q \in (0, q_1)$ и положителен при $q \in (q_1, \infty)$. Этот случай аналогичен предыдущему. Мы имеем две максимально продолженные поверхности $\mathbb{V}$, на которых необходимо просто изменить сигнатуру метрики.

Доменная стенка $\Lambda > 0$, $M < 0$. Если космологическая постоянная положительна, $\Lambda > 0$, и постоянная M отрицательна, то конформный множитель положителен при $q \in (0, \infty)$. Сигнатура метрики пространства-времени равна $(+ - + +)$. В этом случае имеется одна поверхность $\mathbb{V}$, т.к. нули у конформного множителя отсутствуют. Топологически поверхность $\mathbb{V}$ такая же, как и в случае $\Lambda < 0$, $M > 1/3\sqrt{-\Lambda}$, но с положительно определенной метрикой.

16.5.2. Решения с плоскостью Минковского $K = 0$. При $K = 0$ поверхность $\mathbb{U}$ представляет собой или плоскость Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$, или цилиндр, или тор. При этом возникают

новые решения, интересные с топологической точки зрения. Соответствующая метрика в координатах Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = q^2(dt^2 - dx^2) + \frac{dq^2}{\Phi(q)} + \Phi(q) d\rho^2, \quad (16.104)$$

где

$$\Phi(q) = -\frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3}.$$

В зависимости от значения постоянных Λ и M , входящих в конформный множитель, возможны четыре качественно отличных случая.

Доменная стенка $\Lambda = 0$, $M \neq 0$. При нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$, но отличной от нуля постоянной $M \neq 0$ максимально продолженная поверхность $\mathbb{V}$ изображена на рис. 16.9. Метрика на этой поверхности положительно и отрицательно определена соответственно при $M < 0$ и $M > 0$.

Рис. 16.9. Глобальные решения с плоскостью Минковского, $K = 0$.

Решение (анти-)де Ситтера $\Lambda \neq 0$, $M = 0$. Если масса равна нулю, то возникает еще одно представление решения (анти-)де Ситтера для положительной и отрицательной космологической постоянной. Соответствующая поверхность $\mathbb{V}$ показана на рис. 16.9.

Пусть $\Phi q' > 0$ или, что эквивалентно, $\Lambda q' > 0$. Тогда уравнение (14.2) принимает вид

$$q' = \frac{\Lambda q^2}{3}$$

и легко интегрируется:

$$q = -\frac{3}{\Lambda \sigma},$$

где мы опустили несущественную постоянную интегрирования, соответствующую сдвигу σ . Тогда метрика в черепаших координатах равна

$$ds^2 = \frac{9}{\Lambda^2 \sigma^2} (dt^2 - dx^2) + \frac{3}{\Lambda \sigma^2} (d\sigma^2 + d\rho^2). \quad (16.105)$$

Растяжением координат t и x она приводится к конформно плоскому виду.

Космическая струна $\Lambda > 0$, $M > 0$. Конформный множитель Φ при $\Lambda > 0$ и $M > 0$ имеет один простой нуль в точке q_1 . При $q \in (0, q_1)$ и $q \in (q_1, \infty)$, конформный множитель соответственно отрицателен и положителен. Поэтому метрики пространства-времени имеют сигнатуры $(+ - - -)$ и $(+ - + +)$. Максимально продолженные поверхности $\mathbb{V}$ топологически такие же как и для конформного множителя $\Phi = 1 - \frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3}$, который был рассмотрен ранее. Меняется только величина q_1 . Глобальные решения описывают космическую струну и космическую струну, окруженную доменной стенкой сингулярностей кривизны.

Изменение знака обеих постоянных $\Lambda < 0$, $M > 0$ приводит к изменению сигнатуры метрики. Качественные свойства решений остаются прежними.

Доменная стенка $\Lambda > 0$, $M < 0$. В рассматриваемом случае конформный множитель Φ положителен и не имеет нулей. Сигнатура метрики пространства-времени равна $(+ - + +)$. Существует всего одна максимально продолженная поверхность $\mathbb{V}$. Топологически она такая же, как и для конформного множителя $\Phi = 1 - \frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3}$, рассмотренного ранее.

При $\Lambda < 0$ и $M > 0$ необходимо просто изменить сигнатуру всей метрики.

16.6. Итоги главы

Таким образом, найдены и классифицированы все глобальные вакуумные решения уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, которые имеют вид сплетенного произведения двух поверхностей. Явное построение и классификация решений проведена в зависимости от значений постоянной скалярной кривизны одной из поверхностей, значения космологической постоянной Λ и единственной постоянной интегрирования M , которая для решения Шварцшильда имеет физический смысл массы черной дыры. Мы видим, что требование максимального продолжения решений практически однозначно определяет глобальную структуру пространства-времени. Важно отметить, что при решении уравнений движения мы не ставим никаких граничных условий. Подчеркнем, что решение уравнений Эйнштейна в какой то фиксированной системе координат само по себе дает не так уж много. Для того, чтобы дать физическую интерпретацию решений необходимо знать глобальную структуру пространства-времени. Эта задача сложна, но обойти ее, повидимому, невозможно.

Предположение о том, что метрика пространства-времени имеет вид сплетенного произведения метрик двух поверхностей влечет за собой симметрию метрики, если потребовать выполнения вакуумных уравнений Эйнштейна. Например, для решения Шварцшильда мы не требовали сферической симметрии метрики – она возникла в процессе решения уравнений Эйнштейна.

Построенные решения представляют значительный физический интерес. Мы показали, что вакуумные решения уравнений Эйнштейна описывают черные дыры, космические струны, кротовые норы, доменные стенки сингулярностей кривизны и другие. В настоящей монографии мы лишь кратко обсудили свойства построенных глобальных решений.

17. Решение Шварцшильда

В настоящем разделе мы детально рассмотрим решение Шварцшильда, т.к. оно играет важную роль в физических приложениях. Фактически, основные наблюдательные данные, подтверждающие общую теорию относительности, основаны на предсказаниях, полученных для этого решения.

Вскоре после создания общей теории относительности К. Шварцшильд нашел точное статическое сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна [120]. Это же решение было также независимо найдено Дж. Дросте [121, 122, 123], который был учеником Г. Лоренца. Позже было доказано, что любое сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна вне горизонта имеет дополнительный времениподобный вектор Киллинга, т.е. существует такая система координат, что вне горизонта решение является статическим. Это утверждение означает, что условие статичности при получении решения Шварцшильда является излишним и известно, как теорема Бирхгофа [154].

Решение Шварцшильда уже было найдено нами в разделе 16.4.1, где также было построено его максимальное продолжение вдоль экстремалей. В том числе было доказано существование дополнительного вектора Киллинга, который вне горизонта времениподобен, а под горизонтом пространственноподобен. Глобальное (максимально продолженное вдоль экстремалей) решение Шварцшильда описывает черную дыру – новый объект, предсказанный общей теорией относительности, который отсутствует в теории гравитации Ньютона. В настоящее время астрономические наблюдения говорят о возможном существовании черных дыр во вселенной, в частности, в центре нашей галактики. Метрика для решения Шварцшильда вне горизонта успешно используется для описания гравитационного поля звезд, а также солнечной системы.

17.1. Координаты Шварцшильда

Метрика Шварцшильда в координатах Шварцшильда $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \rho, \theta, \varphi)$, имеет хорошо известный вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (17.1)$$

Это – сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна с нулевой космологической постоянной, которое было получено в разделе 16.4.1. Последнее слагаемое представляет собой метрику сферы радиуса ρ , которая индуцирована вложением $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ и взята с обратным знаком. Группа вращений $\mathcal{O}(3)$ действует обычным образом на азимутальный и полярный углы θ и φ . Метрика (17.1) определена при

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

При $\rho = \rho_s := 2M$ компоненты метрики вырождаются. Радиус ρ_s называется *радиусом Шварцшильда* или *гравитационным радиусом*. Ему соответствует сфера радиуса ρ_s , которая называется *горизонтом*. При этом координата ρ , которая предполагается положительной, меняется либо в пределах $2M < \rho < \infty$ (вне горизонта ρ_s), либо $0 < \rho < 2M$ (под горизонтом).

Метрика (17.1) вырождена при $\rho = 0$, $2M$ и $\theta = 0, \pi$. Вырождение метрики при $\theta = 0, \pi$ связано с выбором координат на сфере $\mathbb{S}^2$. Это – хорошо известная особенность сферической системы координат, которую мы обсуждать не будем. Особенности метрики при $\rho = 0, 2M$ мы обсудим подробно.

Несмотря на то, что компоненты метрики на сфере Шварцшильда вырождаются, ее определитель не имеет нулей при $\rho > 0$:

$$\det g_{\alpha\beta} = -\rho^4 \sin^2 \theta,$$

за исключением особенности сферической системы координат при $\theta = 0, \pi$.

Координата ρ при $\rho > 2M$ является аналогом радиальной координаты в сферической системе координат трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Координата t при $\rho > 2M$ играет роль времени. Вне горизонта метрика Шварцшильда в координатах Шварцшильда является статической. При $0 < \rho < 2M$ смысл координат t и r меняется: t становится пространственно-подобной координатой, а ρ – времениподобной. Поэтому координата ρ под горизонтом никакого отношения к радиусу не имеет.

Если на многообразии задана какая либо метрика, то первое, что хочется сделать – это вычислить компоненты соответствующего тензора кривизны и его инварианты. Поскольку метрика Шварцшильда является решением вакуумных уравнений Эйнштейна с нулевой космологической постоянной, то тензор Риччи и скалярная кривизна пространства-времени равны нулю. Однако полный тензор кривизны отличен от нуля. Поскольку тензор Риччи и скалярная кривизна равны нулю, то тензор кривизны в рассматриваемом случае совпадает с тензором Вейля. Перейдем к вычислениям.

Метрика (17.1) задает в пространстве-времени символы Кристоффеля (2.15), из которых выпишем только линейно независимые и нетривиальные:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{M}{\rho^2} \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right), & \Gamma_{22}^1 &= -\rho \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right), \\ \Gamma_{01}^0 &= \frac{M}{\rho^2 \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right)}, & \Gamma_{33}^1 &= -\rho \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{M}{\rho^2 \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right)}, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{\rho}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \tag{17.2}$$

“Линейно независимые” означает, что мы не выписали нетривиальные компоненты, которые получаются из приведенных выше простой перестановкой индексов. Например, $\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0$.

Прямые довольно громоздкие вычисления приводят к следующим нетривиальным линейно независимым компонентам тензора кривизны для метрики (17.1):

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -\frac{2M}{\rho}, & R_{1212} &= -\frac{M}{\rho \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right)}, \\ R_{0202} &= \frac{M}{\rho} \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right), & R_{1313} &= -\frac{M}{\rho \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right)} \sin^2 \theta, \\ R_{0303} &= \frac{M}{\rho} \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right) \sin^2 \theta, & R_{2323} &= 2M \rho \sin^2 \theta. \end{aligned} \tag{17.3}$$

Компоненты тензора кривизны можно либо вычислить в лоб, либо воспользоваться формулами из раздела 16.1 для сплетенного произведения двух многообразий, т.к. метрика Шварцшильда (17.1) имеет именно такой вид. В обозначениях этого раздела следует положить

$$k = 1, \quad m = -\rho^2, \\ g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{\rho} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{\rho}} \end{pmatrix}, \quad h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

В этом случае вычисления несколько упрощаются.

Мы видим, что компоненты тензора кривизны вырождены в нуле $\rho = 0$ и на горизонте $\rho = \rho_s$. Само по себе это только указывает на возможные особенности геометрических объектов (в рассматриваемом случае метрики), т.к. компоненты тензора не являются геометрическими инвариантами. Чтобы прояснить ситуацию, вычислим квадрат тензора кривизны, который инвариантен относительно преобразований координат:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 4 \left[R_{0101}^2 (g^{00}g^{11})^2 + R_{0202}^2 (g^{00}g^{22})^2 + R_{0303}^2 (g^{00}g^{33})^2 + \right. \\ \left. + R_{1212}^2 (g^{11}g^{22})^2 + R_{1313}^2 (g^{11}g^{33})^2 + R_{2323}^2 (g^{22}g^{33})^2 \right] = \frac{48M^2}{\rho^6}. \quad (17.4)$$

Хотя тензор Риччи и скалярная кривизна равны нулю, геометрия нетривиальна, т.к. квадрат тензора кривизны, который в данном случае совпадает с квадратом тензора Вейля, отличен от нуля. Он определен при всех $\rho > 0$ и имеет только одну особенность при $\rho = 0$.

При $\rho \rightarrow \infty$ кривизна пространства-времени стремится к нулю. Это значит, что пространство-время является асимптотически плоским на больших расстояниях. Этот факт следовал также из вида метрики, поскольку метрика (17.1) стремится к метрике Лоренца при $\rho \rightarrow 0$.

На горизонте, $\rho = \rho_s$, кривизна никакой особенности не имеет. Это указывает на то обстоятельство, что особенность метрики (17.1) на горизонте может быть связана с неудачным выбором координат, т.е. является координатной. Действительно, ниже мы увидим, что в координатах Крускала–Секереша метрика Шварцшильда на горизонте регулярна. Конечно, преобразование координат Шварцшильда к координатам Крускала–Секереша вырождено при $\rho = \rho_s$.

Особенность при $\rho = 0$ является неустранимой. Подчеркнем, что значение $\rho = 0$ не соответствует началу сферической системы координат, т.к. координата ρ под горизонтом является времениподобной. Ниже мы увидим, что пространственноподобная особенность $\rho = 0$ соответствует черной и белой дырам.

Метрика (17.1) сферически симметрична, при этом группа вращений $\mathbb{O}(3)$ действует только на угловые координаты θ и φ . Сферической симметрии метрики (17.1) соответствуют три векторных поля Киллинга, которые имеют нетривиальные компоненты только относительно базисных векторных полей ∂_θ и ∂_φ . Это – обычные поля Киллинга на сфере (12.6). Кроме этого имеется четвертое векторное поле Киллинга, которое в координатах Шварцшильда имеет вид ∂_t . Оно соответствует статичности метрики Шварцшильда вне горизонта в координатах Шварцшильда.

Наличие четвертого векторного поля Киллинга для любого сферически симметричного решения вакуумных уравнений Эйнштейна известно как *теорема Бирхгоффа* [154]. В разделе 16 мы доказали аналогичное утверждение в более общем случае. А именно, четвертый вектор Киллинга появляется в любом решении вакуумных уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, которое имеет вид сплетенного произведения двух поверхностей. При этом мы не требовали симметрии метрики относительно какой-либо группы преобразований. Группа

симметрии возникает автоматически при решении уравнений Эйнштейна. Это может быть либо группа вращений $SO(3)$, либо группа Лоренца $SO(1,2)$, либо группа Пуанкаре $IO(2)$, которые действуют на сечениях $t = \text{const}$. Глобальная структура всех таких решений была найдена и классифицирована в разделе 16.

Ясно, что в метрике Шварцшильда (17.1) можно произвольно менять радиальную координату $\rho \mapsto \rho'(\rho)$, при этом метрика также будет удовлетворять вакуумным уравнениям Эйнштейна. Обычно в пользу выбора радиальной координаты Шварцшильда ρ приводят следующий “аргумент”. Площадь поверхности сферы S^2 , определяемой уравнением $\rho = \text{const} > 2M$, такая же, как и в евклидовом пространстве $4\pi\rho^2$. Соответственно, длина окружности, лежащей в экваториальной плоскости сферы, равна $2\pi\rho$. У этого “аргумента” нет никаких математических или физических оснований. Заметим также, что “центр” у сферы отсутствует, т.к. при $\rho = 0$ сфера вырождается в точку, которой соответствует пространственноподобная, а не времениподобная кривая.

Важным является то обстоятельство, что постоянная M , входящая в решение Шварцшильда, является постоянной интегрирования, и вообще не содержится в вакуумных уравнениях Эйнштейна. С математической точки зрения постоянная M может принимать произвольные значения $M \in \mathbb{R}$. Однако, если предположить, что решение Шварцшильда описывает гравитационное поле вне точечной массивной частицы или некоторого сферически симметричного распределения масс, то сравнение с законом всемирного тяготения Ньютона на больших расстояниях, которое было проведено в разделе 7.9, говорит о том, что постоянная интегрирования M – это масса частицы, которая, следовательно, должна быть положительной.

Допустим, что решение Шварцшильда описывает солнечную систему, когда в качестве источника гравитационного поля рассматривается Солнце, а планеты и другие тела – в качестве пробных частиц, движущихся по экстремалиям (геодезическим) в гравитационном поле Солнца. Тогда возникает естественный и нетривиальный вопрос: какому значению координаты ρ соответствует орбита, например, Земли? Более общо, какое отношение имеет координата ρ , входящая в решение Шварцшильда, к расстоянию до Солнца, которое мы измеряем? Как было отмечено выше, в решении Шварцшильда мы можем произвести произвольную замену радиальной координаты $\rho \mapsto \rho'(\rho)$, не меняющую асимптотики на бесконечности. Новая метрика также будет удовлетворять вакуумным уравнениям Эйнштейна и будет асимптотически плоской. При этом с законом тяготения Ньютона будет все в порядке, поскольку он определяется только асимптотикой при $\rho \rightarrow \infty$. Возможный ответ на этот вопрос заключается в измерении площади поверхности сферы S_r достаточно большого радиуса r или длины окружности L_r того же радиуса. Площадь поверхности и длина окружности являются геометрическими инвариантами и, следовательно, не зависят от выбора системы координат. После этого надо вычислить отношения S_r/r^2 и L_r/r , где r – измеренный радиус. Если отношения будут равны 4π и 2π соответственно, то можно утверждать, что измеряемый радиус – это действительно радиальная координата Шварцшильда, $r = \rho$.

Другой способ. Посылаем космический корабль со скоростью света к горизонту (Солнцу) и обратно. После возвращения, смотрим на показания часов, находящихся на корабле. Это будет собственное время, которое равно удвоенному значению канонического параметра для светоподобной экстремали от Земли до горизонта, и которое является геометрическим инвариантом. Из этого условия можно найти значение наблюдаемого радиуса r .

В общей теории относительности мы требуем, чтобы пространство-время было максимально продолжено вдоль экстремалей (геодезических). Это означает, что любую экстремаль на псевдоримановом многообразии (M, g) можно либо продолжить до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, либо при конечном значении канонического параметра она попадет в сингулярную точку, где какой-либо из геометрических инвариантов обратится

в бесконечность. Более подробно этот вопрос обсуждался в разделе 7.13. Метрика Шварцшильда в координатах Шварцшильда (17.1) геодезически неполна на горизонте, и многообразие (пространство-время) можно продолжить, например, перейдя к координатам Крускала–Секереша.

В сферически симметричном случае четырехмерное пространство-время представляет собой топологическое произведение $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$ двумерной лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$ на сферу $\mathbb{S}^2$. Максимально продолженные вдоль геодезических поверхности $\mathbb{U}$ удобно изображать в виде диаграмм Картера–Пенроуза, которые были описаны в главе 13. Чтобы пояснить смысл диаграмм и ввести обозначения, рассмотрим

ПРИМЕР 17.1.1. Плоскость Минковского. Рассмотрим плоскость Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ с декартовыми координатами t, x . Введем светоподобные координаты

$$u := t + x, \quad v := t - x$$

и отобразим всю плоскость на квадрат вдоль светоподобных направлений, например, положим

$$U := \arctg u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad V := \arctg v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (17.5)$$

который изображен на рис. 17.1.

Рис. 17.1. Диаграмма Картера–Пенроуза для плоскости Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$

Этот квадрат представляет собой диаграмму Картера–Пенроуза для плоскости Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$. На диаграмме буквы i^+ и i^- обозначают пространственноподобные бесконечности будущего и прошлого соответственно. Они изображены закрашенными кружками, что означает их геодезическую полноту. Буквы $J^\pm$ обозначают светоподобные бесконечности будущего и прошлого. Они изображены жирными прямыми линиями, т.к. геодезически полны. Буквы i^0 обозначают левую и правую времениподобные пространственные бесконечности. Они также геодезически полны и поэтому изображены закрашенными кружками.

Пространство-время Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ является геодезически полным многообразием. Геодезическими являются прямые линии и только они на плоскости t, x . Поскольку отображение (17.5) проводится вдоль светоподобных направлений, то светоподобные геодезические на

диаграмме Картера–Пенроуза являются прямыми отрезками, идущими как и прежде под углами $\pm\pi/4$. Они начинаются и заканчиваются на сторонах квадрата. Это свойство позволяет легко представить причинную структуру пространства-времени, т.к. световые конусы в каждой точке такие же как и на исходной плоскости Минковского. После отображения (17.5) времени- и пространственноподобные геодезические уже не будут прямыми линиями на диаграмме Картера–Пенроуза за исключением осей абсцисс и ординат. Все времениподобные геодезические начинаются в пространственноподобной бесконечности прошлого i^- и заканчиваются в пространственноподобной бесконечности будущего i^+ . Все пространственноподобные геодезические соединяют левую и правую пространственные бесконечности i^0 .

Плоскость Минковского имеет много векторных полей Киллинга, соответствующих трансляциям и вращениям. Трансляциям по времени соответствует поле Киллинга ∂_t . Его интегральные кривые на плоскости t, x – это прямые, параллельные оси ординат t . На диаграмме Картера–Пенроуза они показаны в виде тонких сплошных линий, соединяющих бесконечность прошлого i^- и будущего i^+ .

Хотя бесконечности прошлого и будущего $i^\pm$ изображены на диаграмме Картера–Пенроуза в виде точек (кружков), следует помнить, что в пространстве-времени $\mathbb{R}^{1,1}$ им соответствуют пространственноподобные прямые линии бесконечной длины. Это же относится и к пространственным бесконечностям i^0 . Если на плоскости Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ заданы какие либо функции, то на диаграмме Картера–Пенроуза бесконечности $i^\pm$ и i^0 будут являться существенно особыми точками для этих функций, т.к. пределы в общем случае будут зависеть от пути, по которому мы к ним приближаемся.

Максимально продолженное пространство-время $\mathbb{M}$, соответствующее метрике Шварцшильда (17.1), представляет собой топологическое произведение некоторой лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$ на сферу $\mathbb{S}^2$: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$. Сфера является геодезически полным многообразием без каких либо особенностей. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся на исследовании лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$ с координатами t, ρ , которые входят в метрику (17.1), и соответствующей двумерной частью метрики

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}}. \quad (17.6)$$

Эта двумерная метрика имеет один вектор Киллинга ∂_t . Общий подход к построению максимально продолженных лоренцевых поверхностей с одним вектором Киллинга был описан в главе 13, где координата ρ обозначалась буквой q поскольку далеко не всегда ей можно было придать смысл какого либо радиуса. В частности, двумерная метрика (17.6) была рассмотрена в разделе 13.5.1.

Повторим результат. Максимально продолженная вдоль экстремалей лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ изображается в виде диаграммы Картера–Пенроуза, показанной на рис. 17.2. В квадратных статических конформных блоках I и III координата ρ меняется в пределах $2M < \rho < \infty$, пространственноподобна и является аналогом радиальной координаты сферической системы координат. В блоке I координата ρ возрастает слева направо, а в блоке III – справа налево. В треугольных однородных конформных блоках II и IV координата ρ меняется в пределах $0 < \rho < 2M$ и является времениподобной. В блоке II она возрастает сверху вниз, а в блоке IV – снизу вверх. Конформные блоки на диаграмме Картера–Пенроуза склеены вдоль горизонтов, соответствующих радиусу Шварцшильда $\rho_s = 2M$, которые показаны на диаграмме пунктирными линиями. Центральная точка (место пересечения горизонтов), которая на диаграмме Картера–Пенроуза помечена окружностью, является седловой точкой для координаты ρ и геодезически не полна.

Рис. 17.2. Диаграмма Картера–Пенроуза для решения Шварцшильда.

На диаграмме Картера–Пенроуза пространственноподобные бесконечности будущего и прошлого i^+ и i^- , левая и правая времениподобные пространственные бесконечности i^0 являются геодезически полными и изображены закрашенными кружками. Светоподобные бесконечности будущего и прошлого J^+ и J^- геодезически полны и показаны жирными прямыми. Горизонты обозначены пунктирными линиями внутри диаграммы, поскольку не являются геодезически полными. Сингулярные границы, соответствующие $\rho = 0$, геодезически неполны.

Наглядность диаграммы Картера–Пенроуза заключается в том, что световые конусы в каждой внутренней точке образованы двумя пересекающимися прямыми, идущими под углами $\pm\pi/4$, так же как и на плоскости Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$. Отсюда сразу следует, что никакая времениподобная или светоподобная экстремаль (геодезическая), которая начинается внутри блока II, не может попасть в области I или III, и с необходимостью попадет на сингулярность $\rho = 0$, расположенную сверху, при конечном значении канонического параметра. По этой причине верхнюю сингулярность $\rho = 0$ называют сингулярностью черной дыры, а область II под горизонтом – внутренностью черной дыры.

Максимально продолженное решение Шварцшильда описывает две вселенные: I и III. Мы находимся либо во вселенной I, либо в III. Эти вселенные между собой не связаны причинно: никакой наблюдатель из вселенной I не может попасть во вселенную III и наоборот, т.к. никакие их точки нельзя соединить времени- или светоподобной кривой. При этом у наблюдателя из вселенной I есть две возможности: либо жить вечно, чему соответствуют времениподобные кривые, уходящие в пространственноподобную бесконечность будущего i^+ (она изображена закрашенным кружком в верхнем правом углу диаграммы), либо за конечное собственное время угодить в черную дыру $\rho = 0$ после пересечения горизонта.

Заметим, что с точки зрения внешнего наблюдателя, который измеряет координаты Шварцшильда, приближение к горизонту займет бесконечное время t . Это легко видеть для радиальных светоподобных экстремалей, которые определяются условием $ds^2 = 0$. Действительно, для метрики (17.6) радиальные светоподобные экстремали определяются уравнением

$$\left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} = 0.$$

Отсюда следует равенство

$$t = \int \frac{\rho d\rho}{\rho - 2M}.$$

Этот интеграл логарифмически расходится на горизонте при $\rho = 2M$. Следовательно, радиальные светоподобные экстремали с точки зрения внешнего наблюдателя приближаются к горизонту бесконечно долго. Аналогичный анализ можно провести и для времениподобных экстремалей. То есть внешний наблюдатель никогда не увидит прохождения чего либо через горизонт. С точки зрения же падающего наблюдателя он благополучно пересечет горизонт при конечном значении собственного времени и продолжит падение на черную дыру, пока не достигнет сингулярности $\rho = 0$ при конечном значении канонического параметра (собственного времени).

Светоподобные экстремали из вселенной I попадают либо в правую светоподобную бесконечность будущего J^+ при бесконечном значении канонического параметра, либо достигают сингулярности черной дыры при конечном значении канонического параметра.

Из внутренности белой дыры (область IV) времениподобные экстремали могут попасть во все три области I, II и III. Однако никакой наблюдатель из вселенной I или III не может попасть внутрь белой дыры.

Времяподобные пространственные бесконечности слева и справа i^0 можно соединить с внутренней точкой диаграммы Картера–Пенроуза только пространственноподобной кривой при условии, что тип кривой не меняется от точки к точке.

С точки зрения задачи Коши решение волнового уравнения в области I определяется начальными данными вблизи сингулярности белой дыры $\rho = 0$, правой пространственноподобной бесконечности прошлого i^- и правой светоподобной бесконечности прошлого J^- .

В разделе 13.5.1 мы доказали, что диаграмма Картера–Пенроуза для решения Шварцшильда представляет собой гладкую двумерную лоренцеву поверхность с гладкой метрикой. При этом лоренцева поверхность с метрикой (17.6) при $-\infty < t < \infty$ и $2M < \rho < \infty$ изометрична области I и области III. Лоренцева поверхность с координатами $-\infty < t < \infty$ и $0 < \rho < 2M$ изометрична области II и области IV.

Векторное поле Киллинга ∂_t времениподобно в блоках I и III (метрика статична) и пространственноподобно в блоках II и IV (метрика однородна). Соответствующие траектории Киллинга показаны на диаграмме Картера–Пенроуза тонкими сплошными линиями внутри блоков. Горизонты на поверхности $\mathcal{U}$ являются светоподобными траекториями Киллинга. Это становится ясным, когда метрика Шварцшильда (17.6) записана в координатах Эддингтона–Финкельштейна или Крускала–Секереша.

Таким образом, координаты Шварцшильда не покрывают всю лоренцеву поверхность $\mathcal{U}$ и, следовательно, не являются глобальными.

17.2. Координаты Эддингтона–Финкельштейна

Для того, чтобы доказать дифференцируемость метрики при склейке конформных блоков вдоль горизонтов в разделе 13.6 мы использовали координаты Эддингтона–Финкельштейна, которые первоначально были введены именно для решения Шварцшильда [132, 133]. Перейдем от координат Шварцшильда к координатам Эддингтона–Финкельштейна $t, \rho \mapsto \xi, \rho$, где

$$t := \xi - \int \frac{\rho}{1 - \frac{2M}{\rho}} d\rho = \xi - \rho - 2M \ln|\rho - 2M|. \quad (17.7)$$

Это преобразование временной координаты определено при $0 < \rho < 2M$ и $2M < \rho < \infty$. Постоянная интегрирования соответствует сдвигу t , и мы, для простоты, положили ее равной нулю. Для соответствующих дифференциалов справедливо равенство

$$dt = d\xi - \frac{d\rho}{1 - \frac{2M}{\rho}},$$

и метрика Шварцшильда (точнее, ее двумерная t, ρ часть) в новых координатах принимает вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) d\xi^2 - 2d\xi d\rho. \quad (17.8)$$

Эта метрика невырождена, $\det g_{\alpha\beta} = -1$, и определена при всех значениях координат

$$-\infty < \xi < \infty, \quad 0 < \rho < \infty, \quad (17.9)$$

т.е. на полуплоскости ξ, ρ .

Преобразование координат Шварцшильда к координатам Эддингтона–Финкельштейна (17.7) хорошо определено при $0 < \rho < 2M$ и $2M < \rho < \infty$, однако вырождено на горизонте ρ_s . Таким образом внутренность конформных блоков I и II отображается на две непересекающиеся области полуплоскости (17.9), которые гладко склеены вдоль горизонта ρ_s . Эта полуплоскость на диаграмме Картера–Пенроуза (см. рис. 17.3 слева) изображена в виде диагональной цепочки конформных блоков, идущих сверху слева вниз направо. Вдоль этой цепочки координата ρ увеличивается от нуля до бесконечности.

Рис. 17.3. Координаты Эддингтона–Финкельштейна ξ, ρ (слева) и η, ρ (справа) на диаграмме Картера–Пенроуза для решения Шварцшильда.

Координаты Шварцшильда не различают конформные блоки типа I и III, а также блоки типа II и IV. Поэтому метрике (17.8) соответствует также вторая диагональная цепочка конформных блоков, идущая снизу справа вверх налево (возрастание координаты ρ).

Введенные координаты Эддингтона–Финкельштейна склеивают конформные блоки I–II и III–IV. Можно также ввести другие координаты Эддингтона–Финкельштейна $t, \rho \mapsto \eta, \rho$, которые склеивают блоки I–IV и II–III. Формула соответствующего преобразования имеет вид

$$t := \eta + \int_{\frac{2M}{r}}^{\rho} \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = \eta + \rho + 2M \ln|\rho - 2M|,$$

где, как и раньше, $0 < \rho < 2M$ или $2M < \rho < \infty$. Метрика в этих координатах примет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) d\eta^2 + 2d\eta d\rho.$$

Полученная метрика невырождена и определена на полуплоскости

$$-\infty < \eta < \infty, \quad 0 < \rho < \infty.$$

На диаграмме Картера–Пенроуза (см. рис. 17.3 справа) эта полуплоскость изображается в виде диагональных цепочек конформных блоков, которые идут либо снизу слева вверх направо, либо сверху справа вниз налево, что соответствует возрастанию координаты ρ .

Двумерная поверхность с метрикой (17.8) не является максимально продолженной. Можно показать, что экстремали на полуплоскости (17.9) неполны при $\xi \rightarrow -\infty$ для цепочки конформных блоков I–II и при $\xi \rightarrow \infty$ для цепочки конформных блоков II–IV. Чтобы ввести глобальные координаты на всей диаграмме Картера–Пенроуза введем координаты Крускала–Секереша.

17.3. Координаты Крускала–Секереша

Координаты Крускала–Секереша U, V являются глобальными, покрывают всю лоренцеву поверхность $\mathbb{U}$ и вводятся следующим образом. Для ясности, введем координаты Крускала–Секереша в несколько этапов. Во-первых, запишем двумерную часть метрики Шварцшильда (17.6) в *черепаших координатах* $t, \rho \mapsto t, r$ (для определенности мы рассмотрим область вне горизонта $\rho > 2M$),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) (dt^2 - dr^2), \quad (17.10)$$

где новая координата r связана со старой дифференциальным уравнением

$$\frac{d\rho}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right). \quad (17.11)$$

В этом уравнении знак “+” соответствует статическому блоку I, а знак “−” – статическому блоку III. Это соответствует преобразованию $r \mapsto -r$. В обоих случаях новая координата r , если ее изобразить на диаграмме Картера–Пенроуза, возрастает слева направо. Уравнение (17.11) легко решается:

$$r = \pm (\rho + 2M \ln|\rho - 2M|), \quad (17.12)$$

где мы положили несущественную постоянную интегрирования, которая соответствует сдвигу r , равной нулю.

Если радиальная координата $\rho \in (2M, \infty)$, то пространственная координата r меняется от $-\infty$ до ∞ . Тем самым внешнее решение Шварцшильда изометрично всей плоскости t, r с метрикой (17.10).

Теперь на плоскости t, r введем конусные координаты $t, r \mapsto \xi, \eta$, где

$$\xi := t + r, \quad \eta := t - r.$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \Phi d\xi d\eta,$$

где

$$\Phi := 1 - \frac{2M}{\rho}$$

– конформный множитель, в котором ρ рассматривается как неявная функция от ξ и η .

Область I. Введем координаты Крускала–Секереша, совершив конформное преобразование $\xi, \eta \mapsto U, V$, где

$$U := 2e^{\frac{\xi}{4M}} > 0, \quad V := -2e^{-\frac{\eta}{4M}} < 0. \quad (17.13)$$

Отсюда следуют связи между дифференциалами:

$$d\xi = 4M \frac{dU}{U}, \quad d\eta = -4M \frac{dV}{V}.$$

Поэтому метрика (17.10) принимает следующий вид

$$ds^2 = -16M^2 \Phi \frac{dU dV}{UV}. \quad (17.14)$$

Поскольку

$$r = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = 2M \ln \left(-\frac{UV}{4} \right), \quad (17.15)$$

то

$$-\frac{UV}{4} = e^{\frac{r}{2M}}.$$

Учитывая связь радиальных координат (17.12), где для области I выбирается знак “+”, метрику (17.14) запишем в виде

$$ds^2 = \frac{4M^2}{\rho} e^{-\frac{\rho}{2M}} dU dV, \quad (17.16)$$

где радиальная координата Шварцшильда ρ является неявной функцией произведения UV , которая определяется формулами (17.12) и (17.15):

$$-\frac{UV}{4} = |\rho - 2M| e^{\frac{\rho}{2M}}. \quad (17.17)$$

Простые вычисления приводят к следующему выражению для временной координаты Шварцшильда

$$-\frac{U}{V} = e^{\frac{t}{2M}}. \quad (17.18)$$

Это значит, что постоянному времени $t = \text{const}$ в координатах Крускала–Секереша соответствуют прямые линии на плоскости U, V , проходящие через начало координат.

Поскольку координаты ξ, η меняются на всей плоскости, то координаты Крускала–Секереша (17.13) меняются в квадранте $U > 0, V < 0$. Таким образом внешнее решение Шварцшильда изометрично отображено на квадрант I, изображенный на рис. 17.4.

Рис. 17.4. Координаты Крускала–Секереша U, V для решения Шварцшильда (слева) и диаграмма Картера–Пенроуза (справа).

Область III. Теперь на плоскости ξ, η введем новые координаты

$$U := -2e^{-\frac{\xi}{4M}} < 0, \quad V := 2e^{\frac{\eta}{4M}} > 0.$$

Такие же вычисления, как и в области I, приводят к той же метрике (17.16). Однако теперь, на плоскости U, V она определена в квадранте III. Области III в уравнении (17.12) соответствует знак “—” и поэтому связь радиальной координаты Шварцшильда ρ с координатами Крускала–Секереша задается тем же уравнением (17.17). Таким образом мы изометрично отобразили внешнее решение Шварцшильда на квадрант III.

Простые вычисления приводят к тому же выражению (17.18) для временной координаты Шварцшильда, что и в области I.

Область II. Преобразование координаты (17.12) определено также при $0 < \rho < 2M$, что соответствует внутреннему решению Шварцшильда. Разница заключается в том, что теперь координаты r, t определены не на всей плоскости, а только на половине. Если в уравнении выбран знак “+”, то координата r меняется от $r = 2M \ln 2M$ при $\rho = 0$ до $-\infty$ при $\rho = 2M$. Если выбран знак “—”, то $\rho \in (-2M \ln 2M, \infty)$.

Выберем в уравнении (17.12) знак “+”. Поскольку под горизонтом временная и пространственная координаты меняются местами, то введем конусные координаты следующим образом:

$$\xi := r + t, \quad \eta := r - t. \quad (17.19)$$

что соответствует повороту плоскости r, t на 90° градусов. Теперь перейдем к координатам Крускала–Секереша

$$U := 2e^{\frac{\xi}{4M}} > 0, \quad V := 2e^{\frac{\eta}{4M}} > 0.$$

Тогда внутренняя область отобразится в квадрант II. Причем сверху образ внутренней области на U, V плоскости будет определяться уравнением $UV < 8M$, т.е. будет ограничен гиперболой $UV = 8M$. Таким образом внутренняя область решения Шварцшильда отображена в квадрант II. При этом метрика, как легко проверить, будет иметь тот же вид, что и в первом квадранте (17.16). Связь радиальной координаты Шварцшильда с координатами Крускала–Секереша задается равенством

$$\frac{UV}{4} = |\rho - 2M| e^{\frac{\rho}{2M}}. \quad (17.20)$$

Это уравнение отличается знаком от уравнения (17.17) для статичных областей, поскольку в квадранте II произведение $UV > 0$.

Простые вычисления приводят к следующему выражению для временной координаты Шварцшильда

$$\frac{U}{V} = e^{\frac{t}{2M}}. \quad (17.21)$$

Область IV. Выберем в уравнении (17.12) знак “—”. Поскольку нас интересует внутренняя область решения Шварцшильда, то введем координаты светового конуса (17.19) и перейдем к координатам Крускала–Секереша:

$$U := -2e^{-\frac{\xi}{4M}} < 0, \quad V := -2e^{-\frac{\eta}{4M}} < 0.$$

Поскольку координаты r, t определены на полуплоскости, то внутренняя область решения Шварцшильда отображается в квадрант IV, причем на координаты Крускала–Секереша наложено условие $UV < 8M$, т.е. образ внутренней области ограничен снизу гиперболой $UV = 8M$. Метрика, как и прежде, будет иметь вид (17.16). Нетрудно также проверить, что координата ρ связана с координатами Крускала–Секереша тем же соотношением, что и в области II (17.20).

Простые вычисления приводят к тому же выражению (17.21) для временной координаты Шварцшильда, что и в области II.

Заметим, что связь координаты ρ с координатами Крускала–Секереша во всех четырех областях можно записать в виде одного уравнения

$$-\frac{UV}{4} = (\rho - 2M) e^{\frac{\rho}{2M}}, \quad (17.22)$$

опустив знак модуля.

Таким образом, мы отобразили два экземпляра внешней области решения Шварцшильда $\rho > 2M$ на квадранты I, III и два экземпляра внутреннего решения – в квадранты II, IV, которые ограничены условием $UV < 8M$. Во всех четырех квадрантах метрика имеет вид (17.16). При этом связь координаты ρ с координатами Крускала–Секереша определяется уравнением (17.22). Метрика в координатах Крускала–Секереша (17.16) определена на части плоскости U, V , которая ограничена сверху и снизу двумя ветвями гиперболы $UV = 8M$, как показано на рис. 17.4. Горизонтам соответствуют координатные линии $U = 0$ и $V = 0$.

На плоскости U, V можно ввести координаты T, X :

$$U := T + X, \quad V := T - X, \quad (17.23)$$

где T – глобальное время и X – глобальная пространственная координата.

Для того, чтобы из метрики Шварцшильда в координатах Крускала–Секереша получить диаграмму Картера–Пенроуза, необходимо отобразить конусные координаты $U \in \mathbb{R}$ и $V \in \mathbb{R}$ на конечные интервалы вещественной оси $(-a, a) \subset \mathbb{R}$. Это можно сделать, например, с помощью преобразования координат

$$u := \operatorname{arctg} U \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad v := \operatorname{arctg} V \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда на плоскости u, v мы получим диаграмму Картера–Пенроуза. Для полного счастья функции $u(U)$ и $v(V)$ нужно подобрать таким образом, чтобы гиперболы $UV = 8M$ отображались в горизонтальные прямые на плоскости u, v . Ясно, что это всегда можно сделать.

17.4. Мост Эйнштейна–Розена

В 1935 году Эйнштейн и Розен предложили следующую модификацию решения Шварцшильда (17.1) [157]. Если решение Шварцшильда рассматривать вне горизонта $\rho > 2M$, то можно ввести новую “радиальную” координату $\rho \mapsto u(\rho)$ с помощью уравнения

$$\frac{1}{2}u^2 = \rho - 2M > 0. \quad (17.24)$$

Прямые вычисления приводят к следующей метрике в новых координатах

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 4M} dt^2 - (u^2 + 4M) du^2 - \frac{1}{4}(u^2 + 4M)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (17.25)$$

Преобразование радиальной координаты (17.24) проведено таким образом, что если ρ увеличивается от $2M$ до бесконечности, то новая координата либо увеличивается от 0 до ∞ , либо уменьшается от 0 до $-\infty$.

Поскольку метрика (17.25) получена преобразованием координат из решения Шварцшильда, то она также удовлетворяет уравнениям Эйнштейна по крайней мере в областях $u > 0$ и $u < 0$. Эта метрика определена для всех значений $u \in \mathbb{R}$. При этом два экземпляра внешнего

решения Шварцшильда, которым соответствуют положительные и отрицательные значения u сшиты на гиперповерхности $u = 0$, которая представляет собой топологическое произведение прямой $t \in \mathbb{R}$ на сферу $\theta, \varphi \in \mathbb{S}^2$. Компоненты метрики (17.25) являются гладкими функциями, поэтому можно предположить, что уравнения Эйнштейна удовлетворяются при всех значениях u . Однако здесь надо проявить осторожность. Дело в том, что при $u = 0$ метрика Эйнштейна–Розена вырождена, ее обратная не определена, и поэтому сами уравнения Эйнштейна требуют доопределения. Мы отложим пока этот вопрос.

Метрика (17.25), очевидно, инвариантна относительно инверсии $u \mapsto -u$.

В своей оригинальной работе Эйнштейн и Розен дали следующую физическую интерпретацию метрики (17.25). Они предположили, что точечная массивная частица массы M покоится в “центре” сферической системы координат $u = 0$, а пространство-время вокруг нее описывается двумя листами $u < 0$ и $u > 0$ с метрикой (17.25). При этом оба листа описывают одну и ту же вселенную.

В настоящее время мосту Эйнштейна–Розена принято давать другую физическую интерпретацию. С этой целью проведем следующее построение. Мы видим, что метрика (17.25) описывает два внешних решения Шварцшильда, которые гладко сшиты вдоль гиперповерхности $u = 0$. Поэтому рассмотрим движение пробных частиц в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$. Они движутся в трехмерном пространстве-времени с метрикой

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho^2 d\varphi^2,$$

которую мы записали в координатах Шварцшильда. Для таких пробных частиц пространством являются сечения $t = \text{const}$. То есть в данном случае пространство – это двумерное многообразие (поверхность) с метрикой

$$dl^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} + \rho^2 d\varphi^2, \quad (17.26)$$

где мы, для наглядности, изменили знак метрики. Будем считать, что ρ и φ – это обычные полярные координаты на евклидовой плоскости.

Для того, чтобы лучше представить себе поверхность с метрикой (17.26), вложим ее в трехмерное евклидово пространство [158]. Пусть ρ, φ, z – цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой

$$ds_0^2 := d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Допустим, что вращательно симметричное вложение задается некоторой функцией $z(\rho)$. Тогда индуцированная метрика на вложенной поверхности будет иметь вид

$$dl^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right] d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

Для того, чтобы эта метрика совпала с метрикой (17.26) необходимо положить

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 = \frac{1}{\frac{\rho}{2M} - 1}.$$

Это уравнение может быть выполнено только для внешнего решения Шварцшильда $\rho > 2M$. Его общее решение имеет вид

$$z = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{\rho}{2M} - 1}} = 4M \sqrt{\frac{\rho}{2M} - 1} + \text{const}. \quad (17.27)$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу координаты z , и мы положим ее равной нулю. Отсюда следует, что поверхность с метрикой (17.26) можно вложить в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, которая задана уравнением

$$\frac{\rho}{2M} = 1 + \left(\frac{z}{4M}\right)^2.$$

Это – параболоид вращения, который называется *параболоидом Фламма* и изображен на рис. 17.5a. При этом вложении верхняя ($z > 0$) и нижняя ($z < 0$) части параболоида изометричны экваториальным сечениям ($\theta = \pi/2$, $t = \text{const}$) внешнего решения Шварцшильда. Эти сечения гладко сшиты вдоль горловины $z = 0$, которая соответствует горизонту $\rho_s = 2M$.

Рис. 17.5. Параболоид Фламма в координатах $\rho^2 = x^2 + y^2$ (a). Та же поверхность в координатах $u^2 = x^2 + y^2$ (b).

Параболоид Фламма глобально изометричен экваториальным сечениям $\theta = \pi/2$, $t = \text{const}$ моста Эйнштейна–Розена. В координатах u, φ (17.24) вложение задается уравнением

$$z^2 = 4Mu^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{4Mu}.$$

То есть параболоид превращается в два конуса, и горловина моста стягивается в точку (см. рис. 17.5b).

Проведенное построение позволяет дать следующую физическую интерпретацию моста Эйнштейна–Розена. Мы имеем две вселенные, которые соответствуют положительным и отрицательным значениям координаты z . Обе вселенные являются асимптотически плоскими на больших расстояниях $\rho \rightarrow \infty$. В “центре” $\rho = 2M \Leftrightarrow u = 0$ вселенные склеены. Такую конфигурацию называют *кротовой норой*, поскольку через нее мы имеем возможность попасть из одной вселенной в другую.

Теперь рассмотрим, как ведет себя тензор кривизны для моста Эйнштейна–Розена. Матрица Якоби преобразования координат $(t, u, \theta, \varphi) \mapsto (t, \rho, \theta, \varphi)$ диагональна,

$$\frac{\partial(t, \rho, \theta, \varphi)}{\partial(t, u, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому при преобразовании координат Шварцшильда к координатам Эйнштейна–Розена меняются только те компоненты тензора кривизны, которые содержат индекс 1. Из формул (17.3) следуют явные выражения для компонент тензора кривизны моста Эйнштейна–Розена:

$$\begin{aligned} R_{0u0u} &= -\frac{2Mu^2}{\left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right)^3}, & R_{u2u2} &= -2M, \\ R_{0202} &= \frac{Mu^2}{2\left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right)^2}, & R_{u3u3} &= -2M \sin^2 \theta, \\ R_{0303} &= \frac{Mu^2}{2\left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right)^2} \sin^2 \theta, & R_{2323} &= 2M \left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (17.28)$$

Квадрат тензора кривизны (=тензора Вейля) для моста Эйнштейна–Розена имеет вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2}{\left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right)^6}.$$

Отметим, что и компоненты тензора кривизны, и квадрат тензора кривизны являются гладкими функциями при $u = 0$, где сшиваются два внешних решения Шварцшильда.

Мы видим, что, не смотря на то, что метрика (17.25) вырождена при $u = 0$ и компонента обратной метрики g^{00} в этой точке имеет полюс, компоненты ковариантного тензора кривизны определены (полюс сокращается). Сокращение полюса происходит также в тензоре Риччи и скалярной кривизне. Поэтому можно считать, что вакуумные уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

выполнены во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$, где $t, u \in \mathbb{R}^2$.

В заключение раздела отметим, что аналогичным образом можно сшить два внутренних решения Шварцшильда. При $0 < \rho < 2M$ совершим преобразование координаты

$$\frac{1}{2}u^2 := 2M - \rho > 0. \quad (17.29)$$

В новых координатах метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 - 4M} dt^2 - (u^2 - 4M) du^2 - \frac{1}{4}(u^2 - 4M)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (17.30)$$

При этом два внутренних решения Шварцшильда отображаются на положительные и отрицательные значения координаты u :

$$0 < \rho < 2M \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |u| < 2\sqrt{M}.$$

Для метрики (17.30) координата t является пространственноподобной, а u – времениподобной.

17.5. Изотропные координаты

Приведем пространственную часть метрики Шварцшильда

$$ds^2 = -\frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

к конформно плоскому виду. С этой целью совершим преобразование радиальной координаты $\rho \mapsto \rho(r)$. Тогда пространственная часть метрики примет вид

$$ds^2 = -\frac{\rho'^2 dr^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где штрих обозначает дифференцирование по r . Для того, чтобы эта метрика была конформно плоской необходимо и достаточно, чтобы функция $\rho(r)$ удовлетворяла уравнению

$$\frac{\rho^2}{r^2} = \frac{\rho'^2}{1 - \frac{2M}{\rho}}.$$

Рассмотрим область вне горизонта $2M < \rho < \infty$ и предположим, что $\rho' > 0$, т.е. радиальные координаты возрастают одновременно. Тогда функция $\rho(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}}}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Cr = \sqrt{\rho^2 - 2M\rho} + \rho - M \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{(Cr + M)^2}{2Cr},$$

где $C > 0$ – постоянная интегрирования.

Пространственная часть метрики Шварцшильда в новых координатах является конформно евклидовой:

$$ds^2 = -\Phi[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)],$$

где

$$\Phi(r) = \frac{(Cr + M)^4}{4C^2r^4}$$

– конформный множитель. Потребуем, чтобы полученная метрика была асимптотически евклидовой, т.е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) \rightarrow 1.$$

Отсюда находится постоянная интегрирования: $C = 2$, что мы и предположим. Тогда преобразование радиальной координаты примет вид

$$\rho := r \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^2. \quad (17.31)$$

Теперь нетрудно вычислить компоненту g_{00} метрики Шварцшильда:

$$1 - \frac{2M}{\rho} = \left(\frac{1 - \frac{M}{2r}}{1 + \frac{M}{2r}}\right)^2.$$

Таким образом, метрика Шварцшильда в новой системе координат принимает вид

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{M}{2r}}{1 + \frac{M}{2r}}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (17.32)$$

При $M > 0$ эта метрика определена всюду в $\mathbb{R}^4$ за исключением мировой линии начала сферической системы координат,

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Очевидно, что полученная метрика является гладкой в остальной части $\mathbb{R}^4$.

Поскольку данная метрика получена из решения Шварцшильда преобразованием координат (17.31), то она удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна всюду в $\mathbb{R}^4$ за исключением мировой линии начала сферической системы координат.

Каждое сечение постоянного времени $t = \text{const}$ является конформно плоским и, следовательно, изотропным. Поэтому координаты t, r, θ, φ называют *изотропными*. Изотропные координаты для метрики Шварцшильда давно и хорошо известны (см., например, [6], §100, задача 4).

Определитель метрики (17.32) равен

$$\det g_{\alpha\beta} = - \left(1 - \frac{M}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{10} r^4 \sin^2 \theta. \quad (17.33)$$

Следовательно, эта метрика вырождена на сфере радиуса

$$r_* := \frac{M}{2}, \quad (17.34)$$

который соответствует горизонту $\rho_s = 2M$ в решении Шварцшильда, и на оси z ($\theta = 0, \pi$). Вырождение на оси z связано со сферической системой координат при $z \neq 0$.

Мы уже показали, что все геометрические инварианты для метрики Шварцшильда, построенные из тензора кривизны, не имеют особенностей на горизонте, и, следовательно, на сфере радиуса r_* в изотропных координатах.

Преобразование координат (17.31) показано на рис. 17.6. Когда радиус r убывает от бесконечности до критического значения $r_* := M/2$, то радиальная координата Шварцшильда ρ убывает от ∞ до горизонта $\rho_s := 2M$. Затем, по мере убывания r от r_* до нуля, радиус ρ возрастает от ρ_s до ∞ . Таким образом два экземпляра метрики Шварцшильда вне горизонта $2M < \rho < \infty$ отображаются на две различные области в $\mathbb{R}^4$: $0 < r < r_*$ и $r_* < r < \infty$. На сфере $r = r_*$ они гладко сшиваются. При этом пространственная часть метрики невырождена. Заметим, что площадь поверхности сферы при приближении к началу координат стремится к бесконечности. Это связано с тем, что компоненты пространственной части метрики (17.32) расходятся при $r \rightarrow 0$.

Легко вычислить пространственную асимптотику нулевой компоненты метрики (17.32)

$$g_{00} \approx 1 - \frac{2M}{r}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Она такая же, как и у метрики Шварцшильда в координатах Шварцшильда. Это неудивительно, т.к. $\rho \rightarrow r$ при $r \rightarrow \infty$. Это означает, что с законом тяготения Ньютона для метрики (17.32) все в порядке, поскольку он определяется асимптотикой при $r \rightarrow \infty$.

Метрика Шварцшильда в изотропных координатах (17.32) инвариантна относительно следующего преобразования радиальной координаты

$$r \mapsto r' := \frac{M^2}{4r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2r'}{M} = \frac{M}{2r}. \quad (17.35)$$

Это утверждение легко проверяется. При таком преобразовании координат точки пространства-времени отражаются относительно критической сферы. Сама критическая сфера $r_* =$

Рис. 17.6. Преобразование от координат Шварцшильда к изотропным координатам.

$M/2$ остается неподвижной. Начало координат $r = 0$ отображается в бесконечно удаленную точку $r' = \infty$, и, наоборот, бесконечно удаленная точка $r = \infty$ отображается в начало координат $r' = 0$.

Заметим, что шварцшильдовская радиальная координата (17.31) не меняется:

$$\rho = r \left(1 + \frac{M}{2r} \right)^2 = r' \left(1 + \frac{M}{2r'} \right)^2.$$

То есть одной и той же точке внешнего решения Шварцшильда соответствует две точки пространства-времени с метрикой (17.32): одна – внутри критической сферы, а другая – снаружи. Преобразование координат (17.35) меняет эти точки местами.

Метрика Шварцшильда в изотропных координатах глобально изометрична метрике моста Эйнштейна–Розена. Изометрия задается преобразованием

$$u = \sqrt{2r} \left(1 - \frac{M}{2r} \right), \quad r > 0. \quad (17.36)$$

При этом внешние решения Шварцшильда, соответствующие положительным и отрицательным значениям u , отображаются во внешность и внутренность сферы критического радиуса $r_* := M/2$:

$$\begin{aligned} u &> 0, & r_* < r < \infty, \\ u &= 0, & r = r_*, \\ u &< 0, & 0 < r < r_*. \end{aligned}$$

Качественное поведение функции $u(r)$ показано на рис. 17.7.

Инвариантности метрики Эйнштейна–Розена относительно инверсии $u \mapsto u' := -u$ соответствует инвариантность метрики Шварцшильда в изотропных координатах относительно преобразования радиальной координаты (17.35), поскольку справедлива формула

$$u = \sqrt{2r} \left(1 - \frac{M}{2r} \right) = -\sqrt{2r'} \left(1 - \frac{M}{2r'} \right),$$

в чем можно убедиться прямой проверкой.

Рис. 17.7. Качественное поведение функции $u(r)$.

17.6. Координаты Пенлеве–Гулстранда

Пусть в пространстве-времени задана метрика Шварцшильда в координатах Шварцшильда (17.1). Совершим преобразование временной координаты $(t, \rho, \theta, \varphi) \mapsto (T, \rho, \theta, \varphi)$, где функция $T = T(t, \rho)$ имеет вид [159, 160]

$$T := t \mp \left(4M \operatorname{arth} \sqrt{\frac{2M}{\rho}} - 2\sqrt{2M\rho} \right). \quad (17.37)$$

Отсюда вытекает связь дифференциалов

$$dT = dt \pm \frac{\sqrt{2M\rho}}{\rho - 2M} d\rho = dt \pm \frac{\sqrt{\frac{2M}{\rho}}}{1 - \frac{2M}{\rho}} d\rho. \quad (17.38)$$

Разрешив это соотношение относительно dt и подставив в метрику Шварцшильда (17.1), получим выражение для метрики в координатах Пенлеве–Гулстранда

$$\begin{aligned} ds^2 &= dT^2 - \left(d\rho \pm \sqrt{\frac{2M}{\rho}} dT \right)^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = \\ &= \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right) dT^2 \mp 2\sqrt{\frac{2M}{\rho}} dT d\rho - d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (17.39)$$

Характерной особенностью данной метрики является то, что все сечения постоянного времени $T = \text{const}$ являются трехмерными евклидовыми пространствами $\mathbb{R}^3$. За эту наглядность пришлось заплатить наличием в метрике недиагонального слагаемого $dT d\rho$.

Преобразование координат (17.37) определено только вне горизонта, т.к. функция arth не определена при $\rho \in (0, 2M)$.

Матрица Якоби преобразования координат $(t, \rho) \mapsto (T, \rho)$ имеет вид

$$\frac{\partial(T, \rho)}{\partial(t, \rho)} = \begin{pmatrix} 1 & \pm \frac{\sqrt{2M\rho}}{\rho - 2M} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что якобиан преобразования координат (17.37) равен единице.

Если в выражении для метрики (17.39) перейти от сферических координат к декартовым $(\rho, \theta, \varphi \mapsto x, y, z)$, то метрика будет определена всюду в $\mathbb{R}^4$ за исключением мировой линии начала координат $\rho = 0$. То есть она определена в большей области, чем преобразование координат (17.37) и покрывает не только область вне горизонта, $\rho \in (2M, \infty)$, но и под горизонтом, $\rho \in (0, 2M)$. При этом на горизонте $\rho = 2M$ она невырождена. Это значит, что метрика Шварцшильда в координатах Пенлеве–Гулстранда покрывает области I и II или III и IV на диаграмме Картера–Пенроуза аналогично координатам Эддингтона–Финкельштейна.

Действительно, под горизонтом $\rho \in (0, 2M)$ определено преобразование координат

$$T := t \mp \left(4M \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\rho}{2M}} - 2\sqrt{2M\rho} \right). \quad (17.40)$$

Нетрудно проверить, что для дифференциалов преобразования координат мы получаем прежнее выражение (17.38).

Преобразования координат (17.37) и (17.40) определены соответственно вне и под горизонтом при всех $t \in \mathbb{R}$. При фиксированном значении радиуса ρ – это просто сдвиг временной координаты. Если зафиксировать t , например, положив $t = 0$, и выбрать знак минус в выражениях (17.37) и (17.40), тогда функция $T(t = 0, \rho)$ будет убывать от 0 до $-\infty$ при $\rho \in (0, 2M)$ и возрастать от $-\infty$ до ∞ при $\rho \in (2M, \infty)$. Качественное поведение этой функции показано на рис. 17.8.

Рис. 17.8. Качественное поведение функции $T(t, \rho)$ при $t = 0$.

Метрика Пенлеве–Гулстранда (17.39) является асимптотически плоской на бесконечности $\rho \rightarrow \infty$. При этом компонента g_{00} имеет ту же асимптотику, что и в координатах Шварцшильда.

17.7. Вложения решения Шварцшильда

Для того, чтобы наглядно представить себе топологически нетривиальное многообразие, его можно вложить в плоское пространство более высокой размерности. Например, сферу обычно представляют в виде поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. При этом становится очевидной гладкость сферы как многообразия и ее симметрии. Вскоре после нахождения решения Шварцшильда появились попытки его вложения в плоское пространство-время более высокой размерности. Было доказано, что локальное вложение решения Шварцшильда в пятимерное плоское пространство-время невозможно [161]. Кроме этого, Казнер построил вложение решения Шварцшильда в шестимерное пространство-время

$\mathbb{R}^{2,4}$. Таким образом, минимальная размерность плоского пространства-времени, в которое локально вкладывается решение Шварцшильда, равна шести. В настоящее время известно шесть минимальных вложений [162]. Ниже мы опишем три из них, которые можно назвать гиперболическим, эллиптическим и параболическим.

Вложение Фрондела. Решение Шварцшильда (17.1) можно вложить в плоское шестимерное пространство. Точнее, в шестимерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,5}$ можно вложить четырехмерное многообразие $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,5}$ таким образом, что индуцированная на нем метрика совпадает с метрикой (17.1) в какой то части подмногообразия $\mathbb{M}$. Это подмногообразие оказывается максимально продолженным и, по существу, совпадает с расширением Крускала–Секереша решения Шварцшильда [163]. Вложение Фрондела является гиперболическим.

Рассмотрим шестимерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,5}$ с декартовыми координатами $(Z^1, \dots, Z^6)$. Метрика этого пространства, по определению, имеет вид

$$ds^2 := (dZ^1)^2 - (dZ^2)^2 - (dZ^3)^2 - (dZ^4)^2 - (dZ^5)^2 - (dZ^6)^2. \quad (17.41)$$

Будем рассматривать это многообразие, как топологическое произведение $\mathbb{R}^{1,5} = \mathbb{R}^{1,2} \times \mathbb{R}^3$ трехмерного пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ с декартовыми координатами (Z^1, Z^2, Z^3) и трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (Z^4, Z^5, Z^6) .

Четырехмерное многообразие с метрикой Шварцшильда представляет собой топологическое произведение двумерного лоренцева многообразия и двумерной сферы, $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$. Будем считать, что на этом многообразии в некоторой окрестности заданы координаты t, ρ, θ, φ , которые мы отождествим с теми координатами, которые входят в решение Шварцшильда (17.1). При этом мы считаем, что координаты t, ρ заданы на $\mathbb{U}$, а θ, φ – обычные сферические координаты на сфере $\mathbb{S}^2$.

Мы умеем вкладывать сферу в трехмерное евклидово пространство и поэтому положим

$$\begin{aligned} Z^4 &:= \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ Z^5 &:= \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ Z^6 &:= \rho \cos \theta, \end{aligned} \quad (17.42)$$

где ρ, θ, φ – три (из четырех) координат на $\mathbb{M}$. Тогда справедливо равенство

$$-(dZ^4)^2 - (dZ^5)^2 - (dZ^6)^2 = -d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Это есть евклидова метрика в $\mathbb{R}^3$ в сферических координатах, взятая с обратным знаком. Второе слагаемое в правой части является метрикой на сфере, которая индуцирована вложением $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Вложение $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ можно также описать с помощью алгебраического уравнения

$$(Z^4)^2 + (Z^5)^2 + (Z^6)^2 = \rho^2. \quad (17.43)$$

Это вложение, очевидно, симметрично относительно $\mathbb{SO}(3)$ вращений. Такое описание вложения является глобальным, в то время как параметризация (17.42) локальна.

Теперь нам необходимо добавить четвертую координату t и вложить двумерную лоренцеву поверхность $\mathbb{U}$ в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$. Для внешнего решения Шварцшильда при $\rho > 2M$ это можно сделать следующим образом

$$\begin{aligned} Z^1 &:= \pm 4M \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} \operatorname{sh} \frac{t}{4M}, \\ Z^2 &:= \pm 4M \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} \operatorname{ch} \frac{t}{4M}, \\ Z^3 &:= f(\rho), \end{aligned} \quad (17.44)$$

где $f(\rho)$ – некоторая дифференцируемая пока неизвестная функция от ρ . Функции Z^1 и Z^2 подобраны таким образом, чтобы в индуцированной метрике отсутствовали перекрестные члены $dt d\rho$ и коэффициент при dt^2 имел тот же вид, что и в метрике Шварцшильда. Если теперь подставить выражения для всех дифференциалов dZ в исходную метрику Лоренца (17.41), то получим следующее выражение для индуцированной метрики

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{16M^4 d\rho^2}{\rho^4 \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right)} - f'^2 d\rho^2 - d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (17.45)$$

где $f' := df/d\rho$. Для того, чтобы полученная метрика совпала с метрикой Шварцшильда (17.1) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\rho)$ была произвольным решением следующего дифференциального уравнения

$$f'^2 = \frac{2M(\rho^2 + 2M\rho + 4M^2)}{\rho^3}. \quad (17.46)$$

Таким образом, если подмногообразие $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,5}$ задано параметрически (вернее, какая то его пока неизвестная часть, на которой определены координаты t, ρ, θ, φ), то функции, определяющие вложение, могут иметь вид (17.42), (17.44), где функция $f(\rho)$ является произвольным решением обыкновенного дифференциального уравнения (17.46).

Заметим, что вложение $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$, заданное формулами (17.44), (17.46) индуцирует на $\mathbb{U}$ двумерную лоренцеву метрику

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{2M}{\rho - 2M} d\rho^2,$$

которая отличается от двумерной части метрики Шварцшильда (17.6). Метрика (17.6) возникает только после добавления четвертого слагаемого $-d\rho^2$ в выражении (17.45). Поэтому нельзя говорить, что двумерная часть метрики Шварцшильда (17.6) индуцирована вложением $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$. Только четырехмерная метрика Шварцшильда (17.1) индуцируется вложением $\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,5}$.

Поскольку вложение двумерной сферы в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ хорошо известно, то проанализируем вложение двумерной лоренцевой поверхности в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$, которое задано параметрически уравнениями (17.44) и (17.46). Для того, чтобы понять, как устроено подмногообразие $\mathbb{U}$ в целом, необходимо проанализировать решения дифференциального уравнения (17.46). Этот анализ затруднен тем, что уравнение не интегрируется в явном виде. Тем не менее качественное поведение решений довольно просто.

Чтобы упростить формулы совершим растяжку радиальной координаты и искомой функции:

$$\rho \mapsto 2M\rho, \quad f \mapsto 2Mf. \quad (17.47)$$

Тогда уравнение (17.46) примет вид

$$f'^2 = \frac{\rho^2 + \rho + 1}{\rho^3}. \quad (17.48)$$

Первое, что бросается в глаза, это то, что правая часть уравнения положительно определена при $\rho > 0$, а при $\rho \rightarrow 0$ мы имеем кубическую особенность. Для определенности мы выберем положительный корень $f' > 0$. Отрицательный корень $f' < 0$ соответствует простому отражению координаты $Z^3 \mapsto -Z^3$. Тогда вблизи особенности уравнение принимает вид

$$df = \frac{d\rho}{\rho^{3/2}}$$

и легко интегрируется:

$$f + \text{const} = -\frac{2}{\sqrt{\rho}}.$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу координаты Z^3 и несущественна.

Асимптотика уравнения (17.48) на бесконечности имеет вид

$$df = \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}}.$$

Откуда следует, что при $\rho \rightarrow \infty$ решение стремится к функции

$$f + \text{const} = 2\sqrt{\rho}.$$

Таким образом, функция f монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞ , когда ρ возрастает от 0 до ∞ .

После растяжки координат (17.47) горизонту соответствует значение $\rho = 1$. Выберем постоянную интегрирования в уравнении (17.48) таким образом, чтобы было выполнено равенство $f(1) = 0$. Тогда решение уравнения (17.48) качественно ведет себя так, как показано на рис. 17.9.

Рис. 17.9. Решение уравнения (17.48) с начальным условием $f(1) = 0$.

Поскольку мы рассматриваем вложение внешнего решения Шварцшильда, то необходимо ограничиться положительной частью решения, которая соответствует $\rho > 1$. В дальнейшем мы увидим, что отрицательная часть функции f описывает вложение внутреннего решения Шварцшильда $0 < \rho < 1$.

Заметим, что на горизонте решение уравнения (17.48) никакой особенности не имеет.

Чтобы проанализировать вложение $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$ исключим координату t из описания. Тогда поверхность $\mathbb{U}$ будет задана двумя уравнениями

$$\begin{aligned} (Z^2)^2 - (Z^1)^2 &= 4 \left(1 - \frac{1}{\rho} \right), \\ Z^3 &= \int_a^\rho d\rho' \sqrt{\frac{\rho'^2 + \rho' + 1}{\rho'^3}}, \quad a > 0. \end{aligned} \quad (17.49)$$

При $\rho \in (0, \infty)$ координата Z^3 хорошо определена и меняется в интервале $Z^3 \in (-\infty, \infty)$. Постоянная интегрирования a соответствует сдвигу Z^3 и является несущественной. Положим $a = 1$. Тогда горизонты $\rho = 1$ будут лежать в плоскости $Z^3 = 0$.

Напомним, что мы рассматриваем решение Шварцшильда вне горизонта, т.е. $\rho > 1$. Каждому сечению поверхности $\rho = \text{const} \Leftrightarrow Z^3 = \text{const}$ соответствует две ветви гиперболы, которые на плоскости Z^1, Z^2 лежат в I и III квадрантах, если ось Z^2 выбрана в качестве оси абсцисс, а ось Z^1 (время) – ординат. Если во втором уравнении (17.44) выбран знак плюс, то мы имеем ветвь из квадранта I. Если минус “–”, то из квадранта III. Знак “ $\pm$ ” в первом уравнении (17.44) соответствует взаимной ориентации координат Z^1 и t . На горизонте, $\rho = 1$, гиперболы вырождаются в две пересекающиеся прямые $Z^1 = \pm Z^2$. При $\rho \rightarrow \infty$ возникают предельные гиперболы

$$(Z^2)^2 - (Z^1)^2 = 4. \quad (17.50)$$

Таким образом, внешнее решение Шварцшильда отображается на ту часть поверхности $\mathbb{U}$, которая проектируется либо в первый, либо в третий квадрант. При этом проекции поверхности $\mathbb{U}$ на квадранты I и III ограничены ветвями гиперболы (17.50) и прямыми $Z^1 = \pm Z^2$.

Для внутреннего решения Шварцшильда, $0 < \rho < 2M$, вложение определяется функциями

$$\begin{aligned} Z^1 &:= \pm 4M \sqrt{\frac{2M}{\rho} - 1} \operatorname{ch} \frac{t}{4M}, \\ Z^2 &:= \pm 4M \sqrt{\frac{2M}{\rho} - 1} \operatorname{sh} \frac{t}{4M}, \\ Z^3 &:= f(\rho), \end{aligned} \quad (17.51)$$

Анализ проводится аналогично случаю внешнего решения Шварцшильда. После растяжки (17.47) возникает та же поверхность (17.49), что и для внешнего решения Шварцшильда. Отличие заключается в том, что теперь внутреннее решение Шварцшильда отображается на ту часть поверхности, которая лежит либо над вторым, либо над четвертым квадрантом плоскости Z^1, Z^2 . При этом проекция поверхности $\mathbb{U}$ на плоскость Z^1, Z^2 полностью покрывает квадранты II и IV.

Вложение $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$, заданное формулами (17.49) при $a = 1$, показано на рис. 17.10.

Рис. 17.10. Вложение Фронсдела $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$.

Система уравнений (17.49) и, следовательно, поверхность $\mathbb{U}$ инвариантна относительно лоренцевых $\mathbb{SO}_0(1, 1)$ вращений в плоскости Z^1, Z^2 . Эта инвариантность соответствует статичности решения Шварцшильда вне горизонта. Кроме этого имеется симметрия относительно обращения времени $Z^1 \mapsto -Z^1$ и пространства $Z^2 \mapsto -Z^2$.

Таким образом, построена гладкая поверхность $\mathbb{U}$, вложенная в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$. Экстремали полны при $\rho \rightarrow \infty$ и неполны при $\rho \rightarrow 0$. Но здесь их продолжать не надо, т.к. кривизна имеет особенность. Поскольку других граничных точек у поверхности $\mathbb{U}$ нет, то построенное вложение определяет максимальное продолжение решения Шварцшильда. Поверхность $\mathbb{U}$ взаимно однозначно проектируется на ту часть плоскости Z^1, Z^2 , которая ограничена двумя ветвями предельной гиперболы (17.50). Поэтому координаты Z^1, Z^2 являются глобальными координатами для максимального продолжения решения Шварцшильда. Они аналогичны глобальным координатам T, X (17.23) для максимального расширения Крускала–Секереша.

Сечениями поверхности $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$, соответствующими постоянному значению ρ , являются гиперболы при $0 < \rho < 2M$ и $2M < \rho < \infty$. На горизонте $\rho = 2M$ гиперболы вырождаются в две пересекающиеся прямые. Абелева группа сдвигов по времени $t \mapsto t + \text{const}$, которая является подгруппой группы симметрии исходной метрики Шварцшильда (17.1), при вложении Фронсдела реализуется в виде группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 1)$ действующей в плоскости Z^1, Z^2 объемлющего пространства-времени $\mathbb{R}^{1,5}$. То есть мы имеем гомоморфизм группы сдвигов на группу Лоренца $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{SO}_0(1, 1)$. Поэтому описанное вложение назовем гиперболическим. Оно оказалось не только локальным, но и глобальным, т.к. поверхность $\mathbb{U}$ является максимально продолженной вдоль геодезических.

Вложение Казнера. Исторически, первое вложение решения Шварцшильда в шестимерное пространство-время было предложено Казнером [164]. Мы увидим, что вложение Казнера является вложением внешней части решения Шварцшильда и потому является только локальным. Оно является эллиптическим.

Рассмотрим плоское пространство–время $\mathbb{R}^{2,4}$ с двумя временными координатами. Обозначим декартовы координаты через $\{Y^1, \dots, Y^6\}$. Метрика этого пространства, по определению, имеет вид

$$ds^2 := (dY^1)^2 + (dY^2)^2 - (dY^3)^2 - (dY^4)^2 - (dY^5)^2 - (dY^6)^2. \quad (17.52)$$

Будем рассматривать это многообразие, как топологическое произведение $\mathbb{R}^{2,4} = \mathbb{R}^{2,1} \times \mathbb{R}^3$ трехмерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{2,1}$ с декартовыми координатами (Y^1, Y^2, Y^3) и трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (Y^4, Y^5, Y^6) .

Таким образом, нам необходимо построить вложение

$$\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1} \times \mathbb{R}^3.$$

В настоящем разделе $\mathbb{U}$ обозначает не максимально продолженную лоренцеву поверхность, изображаемую диаграммой Картера–Пенроуза, а только внешнюю часть решения Шварцшильда.

Как и в случае вложения Фронсдела сферу $\mathbb{S}^2$ мы вложим в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с помощью формул (17.42) или (17.43). Вложение $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ при $\rho > 2M$ опреде-

лим формулами

$$\begin{aligned} Y^1 &:= \pm 4M \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} \sin \frac{t}{4M}, \\ Y^2 &:= \pm 4M \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} \cos \frac{t}{4M}, \\ Y^3 &:= f(\rho), \end{aligned} \quad (17.53)$$

которые отличаются от вложения Фронсдела тем, что гиперболические функции заменены на тригонометрические. Здесь, по-прежнему, $f(\rho)$ – некоторая неизвестная дифференцируемая функция. Функции Y^1 и Y^2 подобраны таким образом, чтобы перекрестные члены $dt d\rho$ отсутствовали, а коэффициент при dt^2 имел тот же вид, что и в метрике Шварцшильда. При таком вложении метрика, индуцированная на $\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$, примет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 + \frac{16M^4 d\rho^2}{\rho^4 \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right)} - f'^2 d\rho^2 - d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (17.54)$$

Она отличается от метрики (17.54) только знаком перед вторым слагаемым. Для того, чтобы эта метрика совпала с метрикой Шварцшильда, в качестве неизвестной функции f можно взять произвольное решение дифференциального уравнения

$$f'^2 = \frac{2M}{\rho - 2M} \left[1 + \left(\frac{2M}{\rho} \right)^3 \right]. \quad (17.55)$$

Вне горизонта $\rho > 2M$ правая часть положительно определена и, следовательно, вложение существует. Для определенности мы выберем положительный корень $f' > 0$. Отрицательный корень $f' < 0$ соответствует простому отражению координаты $Y^3 \mapsto -Y^3$.

Если $\rho \rightarrow 2M$, то уравнение (17.55) в главном приближении принимает вид

$$f' = \sqrt{\frac{4M}{\rho - 2M}}.$$

Отсюда следует асимптотика решения уравнения (17.55) вблизи горизонта

$$f + \text{const} = 4\sqrt{M(\rho - 2M)}, \quad \rho \rightarrow 2M. \quad (17.56)$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу координаты Y^3 , является несущественной, и, для простоты, положим ее равной нулю.

На бесконечности $\rho \rightarrow \infty$ уравнение (17.55) имеет вид

$$f' = \sqrt{\frac{2M}{\rho}},$$

и мы получаем асимптотику

$$f + \text{const} = 2\sqrt{2M\rho}, \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при увеличении радиуса от горизонта $\rho = 2M$ до бесконечности решение уравнения (17.55) монотонно возрастает от нуля до бесконечности.

Вложение $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, которое определяется формулами (17.53), можно записать в более прозрачном виде, исключив параметр t :

$$\begin{aligned} (Y^1)^2 + (Y^2)^2 &= (4M)^2 \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right), \\ Y^3 &= f(\rho), \end{aligned} \quad (17.57)$$

где $f(\rho)$ – произвольное решение уравнения (17.55). Это – поверхность вращения во временной плоскости Y^1, Y^2 . Сечениями этой поверхности плоскостями, перпендикулярными оси Y^3 , являются окружности радиус которых возрастает от нуля при $\rho = 2M \Leftrightarrow Y^3 = 0$ до $4M$ при $\rho \rightarrow \infty \Leftrightarrow Y^3 \rightarrow \infty$. Знаки $\pm$ в уравнениях (17.53) несущественны, т.к. соответствуют изменению направления вращения при увеличении времени t и его сдвигу $t \mapsto t + \text{const}$. Вложение поверхности $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ показано на рис. 17.11.

Рис. 17.11. Вложение Казнера $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$.

Проанализируем вложение $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ подробнее. Для простоты заменим координату Y^3 на ρ . Тогда в системе координат Y^1, Y^2, ρ поверхность $\mathbb{U}$ задается первым алгебраическим уравнением в системе (17.57). На рисунке 17.12 показано сечение поверхности $\mathbb{U}$ плоскостью $Y^1 = 0$. Поверхность $\mathbb{U}$ является поверхностью вращения вокруг оси ρ и, как многообразие, является гладкой.

Поверхность $\mathbb{U}$ можно представить следующим образом. Внешнее решение Шварцшильда, точнее, его двумерная часть (17.6) определена на полуплоскости $t \in (-\infty, \infty)$, $\rho \in (2M, \infty)$. Ввиду статичности решения мы можем отождествить лучи $t \sim t + 8\pi M$, что было сделано в формулах (17.53). В результате получится полубесконечный цилиндр. Теперь заметим, что длина образующей окружности цилиндра стремится к нулю при приближении к горизонту $\rho \rightarrow 2M$. При вложении Казнера эта окружность стягивается в точку. Строго говоря, внешняя часть решения Шварцшильда определена только при $\rho > 2M$ и вершина поверхности вращения $\rho = 2M$ не принадлежит $\mathbb{U}$. Однако мы ее добавим, и тогда возникнет гладкая поверхность, которая диффеоморфна плоскости.

Поверхность $\mathbb{U}$ является гладкой, но метрика, индуцированная на ней имеет особую точку – вершину $Y^1 = Y^2 = 0$, $\rho = 2M$, которая соответствует горизонту. Это видно из вложения.

Рис. 17.12. Сечение $Y^1 = 0$ вложения $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ в координатах Y^2, ρ (a). Поведение светоподобных геодезических вблизи вершины (b).

Действительно, во всех точках вне вершины существуют как времениподобные касательные векторы, так и пространственноподобные. Это значит, что индуцированная метрика имеет лоренцеву сигнатуру. В то же время все касательные векторы в вершине времениподобны. То есть индуцированная метрика не имеет лоренцевой сигнатуры, и вершина является особой точкой для метрики, но не для поверхности как многообразия. Ниже мы увидим, что данная поверхность с индуцированной метрикой не является геодезически полной в вершине.

Чтобы проанализировать особую точку, рассмотрим малую окрестность вершины в координатах Y^1, Y^2 . Найдем метрику в этих координатах. Из формул (17.57) и асимптотики (17.56) следует, что вблизи вершины уравнения вложения принимают вид

$$\begin{aligned} (Y^1)^2 + (Y^2)^2 &= 8M(\rho - 2M), \\ Y^3 &= 4\sqrt{M(\rho - 2M)}. \end{aligned} \quad (17.58)$$

После исключения ρ получим простое алгебраическое уравнение, определяющее вложение вблизи вершины

$$(Y^1)^2 + (Y^2)^2 = \frac{1}{2} (Y^3)^2. \quad (17.59)$$

Теперь вычислим метрику, индуцированную вложением $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dY^1)^2 + (dY^2)^2 - (dY^3)^2 = \\ &= \frac{(Y^2)^2 - (Y^1)^2}{(Y^1)^2 + (Y^2)^2} (dY^1)^2 - 4 \frac{Y^1 Y^2}{(Y^1)^2 + (Y^2)^2} dY^1 dY^2 + \frac{(Y^1)^2 - (Y^2)^2}{(Y^1)^2 + (Y^2)^2} (dY^2)^2. \end{aligned} \quad (17.60)$$

В матричных обозначениях метрика имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{(Y^1)^2 + (Y^2)^2} \begin{pmatrix} (Y^2)^2 - (Y^1)^2 & -2Y^1 Y^2 \\ -2Y^1 Y^2 & (Y^1)^2 - (Y^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой метрики равен $\det g_{\alpha\beta} = -1$.

В вершине компоненты метрики (17.60) не определены. Если приближаться к вершине вдоль лучей $Y^2 = kY^1$, $k = \text{const}$, то метрика (17.60) становится хорошо определенной:

$$ds^2 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} (dY^1)^2 - \frac{4k}{k^2 + 1} dY^1 dY^2 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} (dY^2)^2.$$

Таким образом, вблизи вершины поверхности вращения $\mathbb{U}$ индуцированную метрику можно записать в виде (17.60). При этом в вершине ее можно определить по непрерывности вдоль лучей.

Для дальнейшего анализа введем полярные координаты:

$$Y^1 := r \cos \varphi, \quad Y^2 := r \sin \varphi.$$

Тогда индуцированная метрика примет простой вид

$$ds^2 = -dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Она отличается от евклидовой метрики на плоскости в полярных координатах только знаком перед первым слагаемым и, следовательно, сигнатурой. В рассматриваемом случае координата r является пространственной, а φ – времениподобной.

Теперь рассмотрим светоподобные геодезические, которые определяются уравнением $ds^2 = 0$ или

$$dr^2 = r^2 d\varphi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm r.$$

Его общее решение имеет вид

$$\ln r = \pm \varphi + \text{const}.$$

При приближении к вершине $r \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \pm\infty$, т.е. светоподобные геодезические наматываются на центр $r = 0$ бесконечное число раз. Поскольку

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dr}{d\varphi} = 0,$$

то раствор светового конуса уменьшается по мере приближения к центру и в пределе световой конус вырождается в линию. Можно доказать, что светоподобные геодезические достигают вершины при конечном значении канонического параметра. Следовательно поверхность $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ с индуцированной метрикой является гладкой, но геодезически неполной.

Метрика, индуцированная на поверхности $\mathbb{U}$ вложением $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, отличается от той метрики, которая индуцирована полным вложением $\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,4}$ дополнительным слагаемым

$$ds^2 = -dr^2 + r^2 d\varphi^2 - d\rho^2,$$

что следует из формулы (17.54). Из асимптотики (17.58) вытекает, что вблизи вершины

$$\rho - 2M = \frac{1}{8M} \left[(Y^1)^2 + (Y^2)^2 \right] = \frac{1}{8M} r^2.$$

Это означает, что дополнительное слагаемое

$$d\rho^2 = \left(\frac{r}{4M} \right)^2 dr^2$$

вблизи вершины $r = 0$ не дает вклада в главное приближение для метрики. Поэтому поверхность $\mathbb{U}$ с метрикой, индуцированной полным вложением $\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,4}$ также геодезически

неполна в вершине. Таким образом, вложение Казнера является локальным, т.к. поверхность $\mathbb{U}$ не является геодезически полной в вершине.

Аналогично можно вложить внутреннее решение Шварцшильда $0 < \rho < 2M$ в шестимерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{2,4}$.

Сечениями поверхности $\mathbb{U}$ плоскостями $\rho = \text{const}$ являются окружности. При этом абелева группа сдвигов по времени $t \mapsto t + \text{const}$ реализуется как группа вращений $\mathbb{SO}(2)$ временной плоскости с координатами Y^1, Y^2 . То есть мы имеем гомоморфизм группы сдвигов на группу вращений $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{SO}(2)$. Поэтому вложение Казнера называется эллиптическим.

Вложение Фуджитани–Икеды–Мацумото. Вскоре после Фронсдела еще одно минимальное вложение решения Шварцшильда в шестимерное пространство-время $\mathbb{R}^{2,4}$ было предложено Фуджитани, Икедой и Мацумото [165]. Это вложение локально и является параболическим.

Как и для вложения Казнера рассмотрим шестимерное плоское пространство $\mathbb{R}^{2,4}$ с декартовыми координатами $Y^1, \dots, Y^6$, где первые две координаты Y^1 и Y^2 являются временными. Метрика пространства $\mathbb{R}^{2,4}$, по определению, имеет вид (17.52). Как и прежде, вложение сферы $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ определяется формулами (17.42) или (17.43). Вложение $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} Y^1 &:= t \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}}, \\ Y^2 &:= \frac{M}{2} \left(\frac{t^2}{M^2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} + h(\rho), \\ Y^3 &:= \frac{M}{2} \left(\frac{t^2}{M^2} + 1 \right) \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} + h(\rho), \end{aligned} \quad (17.61)$$

где $h(\rho)$ пока неизвестная дифференцируемая функция ρ . Это вложение определено вне горизонта $\rho > 2M$.

Прямые вычисления приводят к следующему выражению для метрики, индуцированной вложением $\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,4}$,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right) dt^2 - \frac{2M^2 h' d\rho^2}{\rho^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}}} - d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (17.62)$$

где $h' := dh/d\rho$. Для того, чтобы эта метрика совпала с метрикой Шварцшильда (17.1) необходимо и достаточно, чтобы функция h удовлетворяла уравнению

$$h' = \frac{\rho}{M \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}}}. \quad (17.63)$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$h + \text{const} = \frac{\rho(\rho + 3M)}{2M} \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} + \frac{3M}{2} \ln \left[\frac{\rho}{M} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} \right) - 1 \right]. \quad (17.64)$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу координат Y^2 и Y^3 , является несущественной, и мы положим ее равной нулю.

Рис. 17.13. Качественное поведение функции $h(\rho)$.

Поскольку правая часть уравнения (17.63) положительна, то функция $h(\rho)$ монотонно возрастает от нуля до бесконечности, $h \in (0, \infty)$, при возрастании радиуса от горизонта $\rho = 2M$ до бесконечности $\rho = \infty$. Качественное поведение функции $h(\rho)$ показано на рис. 17.13

Проанализируем вложение $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ подробнее. С этой целью введем конусные координаты

$$Y^\pm := Y^2 \pm Y^3.$$

Тогда вложение (17.61) запишется в виде

$$\begin{aligned} Y^+ &= \frac{t^2}{M} \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} + 2h, \\ Y^- &= -M \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}}, \end{aligned} \quad (17.65)$$

при этом функция вложения $Y^1(t, \rho)$ остается прежней. Из выражений для функций вложения Y^1, Y^+ исключим время. Тогда для функций вложения будет выполнено алгебраическое уравнение

$$M \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} Y^+ = (Y^1)^2 + 2Mh \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}}. \quad (17.66)$$

Функция вложения $Y^-(\rho)$ не зависит от времени t и определяется прежней формулой (17.65).

При фиксированном значении ρ и, следовательно, Y^1 в плоскости Y^1, Y^+ мы имеем параболу (17.66). Таким образом, трансляции по времени реализованы в виде трансляций вдоль парабол. Поэтому вложение Фуджитани–Икеды–Мацумото называется параболическим.

При $\rho \in (2M, \infty)$ функция вложения Y^- меняется от нуля до $-1/\sqrt{2}$. Следовательно, поверхность $\mathbb{U}$ представляет собой объединение парабол, которые параметризуются координатой $Y^- \in (0, -1/\sqrt{2})$. При $Y^- = -1/\sqrt{2}$ раствор параболы максимален и стремится к нулю при $Y^- \rightarrow 0$. Горизонту $\rho = 2M$ соответствует одна точка – начало координат $Y^1 = Y^2 = Y^3 = 0$.

Проанализируем поверхность $\mathbb{U}$ вблизи горизонта $\rho \rightarrow 2M$. С этой целью введем новую переменную

$$\rho = 2M + x, \quad x \ll M.$$

Рис. 17.14. Вложение Фуджитани–Икеды–Мацумото $U \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$.

Тогда в главном порядке по x/M справедливы равенства:

$$\sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}} \simeq \sqrt{\frac{x}{2M}},$$

$$h \simeq 5M^2 \sqrt{\frac{x}{2M}}.$$

Функции вложения в главном порядке имеют вид

$$\begin{aligned} Y^1 &\simeq t \sqrt{\frac{x}{2M}}, \\ Y^+ &\simeq t^2 \sqrt{\frac{x}{4M}} + 5M^2 \sqrt{\frac{x}{M}}, \\ Y^- &\simeq -\sqrt{\frac{x}{4M}}. \end{aligned} \tag{17.67}$$

Вблизи горизонта параболы в плоскости Y^+, Y^1 определяются уравнением

$$\sqrt{\frac{x}{M}} Y^+ = (Y^1)^2 + 5Mx$$

при фиксированном значении x .

Таким образом, построено три минимальных вложения пространства-времени с метрикой Шварцшильда в плоское шестимерное пространство-время: гиперболическое, эллиптическое и параболическое. Первое вложение является глобальным, а два последующих – только локальными.

18. Космология

В настоящей главе мы рассмотрим простейшие космологические модели в рамках общей теории относительности. Это направление исследований составляет классический раздел теории гравитации и в настоящее время стало очень актуальным в связи с накоплением большого количества наблюдательных данных.

Модели вселенной, которые рассматриваются в настоящей главе, предполагают, что вселенная заполнена сплошной средой (жидкостью или газом). В начале главы мы рассмотрим кинематические свойства сплошной среды в общей теории относительности. Будет получено, в частности, уравнение Райчаудхури, из которого следует, что при достаточно общих предположениях космологические решения уравнений Эйнштейна должны содержать особенности: большой взрыв или большое сжатие.

Основные космологические модели основаны на космологическом принципе, согласно которому вселенная однородна и изотропна. Для математической формулировки требований к таким моделям необходимо довольно подробное знание свойств трехмерных пространств постоянной кривизны с положительно определенной метрикой. Одно из этих пространств – это евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ нулевой кривизны, которое хорошо известно. Поэтому в разделах 18.2.1 и 18.2.2 мы рассмотрим трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$ (пространство положительной кривизны) и двуполостный гиперболоид $\mathbb{H}^3$, который иногда называют псевдосферой, (пространство отрицательной кривизны). Эти сведения необходимы для построения моделей, которые рассмотрены в последующих разделах.

В заключительных разделах рассмотрена классификация Бианки трехмерных алгебр Ли и модели однородных вселенных.

18.1. Сплошная среда в космологии

При построении космологических моделей в рамках общей теории относительности материя рассматривается как сплошная среда. В настоящем разделе мы рассмотрим кинематику сплошной среды и получим уравнение Райчаудхури. Из этого уравнения вытекает, в частности, что если движение материи безвихревое, а плотность энергии и давление среды положительны, то в космологических моделях неизбежно имеет место либо большой взрыв, либо большое сжатие. Этот вывод важен и является довольно общим, т.к. не использует явный вид решений уравнений Эйнштейна.

18.1.1. Сплошная среда в классической механике. Напомним некоторые сведения из кинематики сплошной среды в классической механике.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат x^μ , $\mu = 1, 2, 3$. Основной переменной в механике сплошной среды (жидкости или газа) является достаточно гладкое векторное поле скорости $u^\mu(t, \mathbf{x})$, зависящее от времени $t \in \mathbb{R}$ и точки пространства $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Мы предполагаем, что система уравнений

$$\frac{dx^\mu(t, \mathbf{y})}{dt} = u^\mu(t, \mathbf{x}), \quad (18.1)$$

с начальным условием $x^\mu(t = 0, \mathbf{y}) = y^\mu$ имеет единственное решение при всех временах $t \in \mathbb{R}$ и при всех $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Для единственности достаточно, чтобы правая часть системы уравнений

(18.1) удовлетворяла условию Липшица. Полнота решений предполагается. Каждое решение данной системы уравнений определяет линию тока $x^\mu(t, \mathbf{y})$, вдоль которой движется частица среды, которая проходит через каждую точку пространства $\mathbf{y}$ в начальный момент времени $t = 0$. Линии тока не могут пересекаться, т.к. это противоречит единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (18.1). Другими словами, линии тока заполняют все пространство $\mathbb{R}^3$, не имеют лакун и нигде не пересекаются.

Рассмотрим две близкие точки среды

$$p = (x_p^\mu), \quad q = (x_q^\mu := x_p^\mu + dx_q^\mu).$$

Скорости в этих точках в момент времени t равны

$$u_p = (u_p^\mu), \quad u_q = (u_q^\mu = u_p^\mu + \partial_\nu u^\mu|_p dx_q^\nu + O(dx^2)).$$

Если эти точки движутся вдоль линий тока, то через время dt они будут иметь новые координаты

$$\begin{aligned} p &\mapsto (x_p^\mu + u_p^\mu dt + O(dt^2, dx^2)), \\ q &\mapsto (x_p^\mu + dx_q^\mu + u_p^\mu dt + \partial_\nu u^\mu|_p dx_q^\nu dt + O(dt^2, dx^2)). \end{aligned}$$

Разность декартовых координат конечных точек имеет вид

$$dx_q^\mu(t + dt) := x_q^\mu(t + dt) - x_p^\mu(t + dt) = \left(\delta_\nu^\mu + \partial_\nu u^\mu|_p dt \right) dx_q^\nu + O(dt^2, dx^2).$$

Таким образом, частные производные от поля скоростей $\partial_\nu u^\mu$ имеют смысл относительной скорости двух соседних частиц среды.

Разложим тензор второго ранга $\partial_\mu u_\nu$, где $u_\nu := u^\mu \delta_{\nu\mu}$, на неприводимые компоненты, выделив из него след θ и антисимметричную часть $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$:

$$\partial_\mu u_\nu = \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \theta, \quad (18.2)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &:= \partial_\mu u^\mu && - \text{скаляр расширения,} \\ \sigma_{\mu\nu} &:= \frac{1}{2}(\partial_\mu u_\nu + \partial_\nu u_\mu) - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \theta && - \text{тензор сдвига,} \\ \omega_{\mu\nu} &:= \frac{1}{2}(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) && - \text{тензор вращения.} \end{aligned} \quad (18.3)$$

Каждая неприводимая компонента имеет физический смысл и название по следующим причинам.

- Пусть $\sigma_{\mu\nu} = 0$ и $\omega_{\mu\nu} = 0$. Тогда смещение точки q относительно точки p в первом порядке имеет вид

$$dx_q^\mu(t + dt) = \left(1 + \frac{1}{3} \theta dt \right) dx_q^\mu(t).$$

То есть вектор $dx_q^\mu(t + dt)$ имеет то же направление, что и $dx_q^\mu(t)$, но другую длину. Такое движение среды является изотропным расширением ($\theta > 0$) или сжатием ($\theta < 0$).

- Пусть $\sigma_{\mu\nu} = 0$ и $\theta = 0$. Тогда

$$dx_q^\mu(t + dt) = dx_q^\mu(t) + \omega_\nu{}^\mu dt dx_q^\nu(t).$$

Ввиду антисимметрии компоненты $\omega_{\mu\nu}$, при таком движении вектор $dx_q^\mu(t)$ поворачивается, не изменяя своей длины. Такое движение соответствует вращению линий тока.

- Пусть $\omega_{\mu\nu} = 0$ и $\theta = 0$. Рассмотрим три точки q_1 , q_2 и q_3 , которые близки к точке p :

$$q_1 = p + dx_1, \quad q_2 = p + dx_2, \quad q_3 = p + dx_3.$$

Объем параллелепипеда со сторонами dx_1 , dx_2 и dx_3 равен

$$dV = \varepsilon_{\mu\nu\rho} dx_1^\mu dx_2^\nu dx_3^\rho,$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$ — полностью антисимметричный тензор третьего ранга (см. приложение 19.2). Через время dt вершины параллелепипеда сместятся, и его объем в первом приближении станет равным

$$dV' = dV + D dt,$$

где

$$D = (\varepsilon_{\mu\nu\sigma}\sigma^\sigma{}_\rho + \varepsilon_{\mu\sigma\rho}\sigma^\sigma{}_\nu + \varepsilon_{\sigma\nu\rho}\sigma^\sigma{}_\mu) dx_1^\mu dx_2^\nu dx_3^\rho.$$

Выражение в скобках антисимметрично по индексам ν, ρ . Поэтому его можно свернуть с $\varepsilon^{\lambda\nu\rho}$. В результате получим нуль, что следует из свойств тензора деформаций: $\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu}$ и $\sigma^\mu{}_\mu = 0$. Следовательно, $D = 0$. Это означает, что объем параллелепипеда в первом приближении не меняется. Может измениться только его форма. Такое движение называется сдвигом.

Заметим, что при вращении линий тока длина сторон параллелепипеда сохраняется, и поэтому сохраняется его объем. Более того, при вращении сохраняется не только объем, но и форма параллелепипеда, поскольку сохраняются также углы между векторами.

Тензор вращений $\omega_{\mu\nu}$ взаимно однозначно параметризуется вектором вращений

$$\omega = \left\{ \omega^\mu := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \omega_{\nu\rho} \right\}. \quad (18.4)$$

Из свойств полностью антисимметричного тензора третьего ранга следует равенство

$$\omega^2 := \omega^\mu \omega_\mu = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \geq 0.$$

Вектор вращений направлен вдоль оси поворота, и его длина равна углу поворота.

18.1.2. Сплошная среда в релятивистской механике. В релятивистской механике мы поступаем по аналогии с тем, что было сделано в предыдущем разделе для сплошной среды в классической механике.

Рассмотрим топологически тривиальное псевдориманово многообразие $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^4$, которое покрыто одной картой x^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$. На нем задана метрика $g_{\alpha\beta}$ лоренцевой сигнатуры. Будем считать, что координата x^0 является временем, и все сечения $x^0 = \text{const}$ пространственноподобны.

Основной переменной в релятивистской механике сплошной среды является времениподобное четырехмерное векторное поле скорости $u^\alpha(x)$. Как и в классической механике, будем считать векторное поле скорости достаточно гладким, и что система уравнений для линий тока

$$\frac{dx^\alpha(s, y)}{ds} = u^\alpha(x)$$

с начальными условиями $x^\alpha(s = 0, y) = y^\alpha$ имеет единственное решение при всех $y \in \mathbb{M}$, определенное для всех значений параметра $s \in \mathbb{R}$. Решение данной системы уравнений $x^\alpha(s, y)$ называется *линией тока* частицы жидкости, проходящей через точку $y \in \mathbb{M}$. Как и в случае

нерелятивистской среды линии тока заполняют все многообразие $\mathbb{M}$ без каких либо лакун и самопересечений. Предположим также, что в качестве параметра s вдоль линий тока выбрана ее длина (канонический параметр):

$$ds^2 = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}.$$

Тогда векторное поле скорости будет иметь единичную длину

$$u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1. \quad (18.5)$$

Дифференцирование этого равенства приводит к тождеству

$$u^\beta \nabla_\alpha u_\beta = 0, \quad (18.6)$$

где ∇_α – ковариантная производная, построенная по символам Кристоффеля для метрики $g_{\alpha\beta}$. Если уравнение (18.6) продифференцировать еще раз, то получим равенство

$$u^\gamma \nabla_\alpha \nabla_\beta u_\gamma + \nabla_\alpha u^\gamma \nabla_\beta u_\gamma = 0, \quad (18.7)$$

которое позволяет выразить вторые производные от вектора скорости через первые (при суммировании по индексу γ).

Наличие векторного поля скорости позволяет построить проекционные операторы:

$$\Pi_\alpha^{\tau\beta} := \delta_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta, \quad \Pi_\alpha^{\text{L}\beta} := u_\alpha u^\beta, \quad (18.8)$$

где $u_\alpha := u^\beta g_{\beta\alpha}$. Операторы Π^τ и Π^{L} проектируют тензоры на направления, перпендикулярные и параллельные вектору скорости поскольку справедливы следующие равенства:

$$\Pi_\alpha^{\tau\beta} u_\beta = 0, \quad \Pi_\alpha^{\text{L}\beta} u_\beta = u_\alpha.$$

Отметим также формулы

$$\Pi_{\alpha\beta}^\tau \Pi^{\tau\alpha\beta} = 3, \quad \Pi_{\alpha\beta}^{\text{L}} \Pi^{\text{L}\alpha\beta} = 1,$$

которые будут использованы в дальнейшем.

Последующие построения аналогичны тем, которые были проделаны в предыдущем разделе, но с заменой частных производных на ковариантные, $\partial_\alpha \mapsto \nabla_\alpha$.

Рассмотрим тензор второго ранга $\nabla_\alpha u_\beta$. Если метрика $g_{\alpha\beta}$ близка к метрике Лоренца, и система координат мало отличается от декартовой, то этот тензор имеет тот же физический смысл относительной скорости соседних частиц, что и в классической механике, как было описано в предыдущем разделе.

Спроектируем ковариантные производные векторного поля скорости на перпендикулярную гиперповерхность:

$$\Pi_\alpha^\tau \Pi_\beta^{\tau\delta} \nabla_\gamma u_\delta = \Pi_\alpha^\tau \nabla_\gamma u_\beta = \nabla_\alpha u_\beta - u_\alpha \dot{u}_\beta, \quad (18.9)$$

где мы воспользовались равенством (18.6), и точка обозначает дифференцирование вдоль поля скорости:

$$\dot{u}_\beta := u^\gamma \nabla_\gamma u_\beta. \quad (18.10)$$

Это – компоненты ускорения мировых линий частиц непрерывной среды. Если $\dot{u} = 0$, то частицы непрерывной среды движутся вдоль экстремалей, которые в данном случае совпадают с геодезическими (см. раздел 3.1).

Напомним, что если градиент давления $\mathcal{P}$ в жидкости направлен вдоль линий тока, т.е.

$$\Pi_\alpha^{\tau\beta} \partial_\beta \mathcal{P} = 0,$$

то, согласно уравнениям релятивистской гидродинамики (7.136), (7.137), частицы жидкости движутся вдоль экстремалей, хоть и не являются в общем случае свободными, т.к. подвержены давлению.

Как и ранее, выделим из тензора (18.9) след и антисимметричную часть:

$$\Pi_\alpha^\gamma \Pi_\beta^\delta \nabla_\gamma u_\delta = \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\beta}^\gamma \theta, \quad (18.11)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &:= \Pi^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta = \nabla_\alpha u^\alpha && - \text{скаляр расширения,} \\ \sigma_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\Pi_\alpha^\gamma \nabla_\gamma u_\beta + \Pi_\beta^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha) - \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\beta}^\gamma \theta && - \text{тензор сдвига,} \\ \omega_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\Pi_\alpha^\gamma \nabla_\gamma u_\beta - \Pi_\beta^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha) && - \text{тензор вращения.} \end{aligned} \quad (18.12)$$

Используя производную вдоль векторного поля скорости (18.10), выражения для тензоров сдвига и вращения можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha - u_\alpha \dot{u}_\beta - u_\beta \dot{u}_\alpha) - \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\beta}^\gamma \theta, \\ \omega_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha - u_\alpha \dot{u}_\beta + u_\beta \dot{u}_\alpha). \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится выражение для полной ковариантной производной ковекторного поля скорости

$$\nabla_\alpha u_\beta = \Pi_\alpha^\gamma \nabla_\gamma u_\beta + \Pi_\alpha^\gamma \nabla_\gamma u_\beta = \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\beta}^\gamma \theta + u_\alpha \dot{u}_\beta. \quad (18.13)$$

Отметим также полезные для вычислений формулы

$$\sigma_{\alpha\beta} u^\beta = 0, \quad \omega_{\alpha\beta} u^\beta = 0,$$

которые просто проверяются.

Тензор вращения можно параметризовать псевдовекторным полем

$$\omega^\alpha := \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta \omega_{\gamma\delta}, \quad (18.14)$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга (см. приложение 19.2). Квадрат этого псевдовектора имеет вид

$$\omega^2 := \omega^\alpha \omega_\alpha = \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}.$$

Псевдовектор вращения времениподобен или нулевой, т.к. правая часть неотрицательна. Это проще всего увидеть в системе координат, сопутствующей векторному полю скорости $u = (1, 0, 0, 0)$, в которой

$$\Pi^{T00} = \Pi^{T0\mu} = \Pi^{T\mu 0} = 0, \quad \Pi^{T\mu\nu} = g^{\mu\nu}.$$

Из равенства

$$\omega^{\alpha\beta} = \Pi^{T\alpha\gamma} \Pi^{T\beta\delta} \omega_{\gamma\delta}$$

следует, что в сопутствующей системе координат

$$\omega^{00} = \omega^{0\mu} = \omega^{\mu 0} = 0.$$

Поэтому

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} \geq 0$$

в силу отрицательной определенности пространственной части метрики $g_{\mu\nu}$.

Кроме этого введем скаляр деформации $\sigma > 0$ с помощью равенства

$$\sigma^2 := \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} \geq 0. \quad (18.15)$$

Он неотрицателен по той же причине, что и скаляр вращения.

Для того, чтобы оправдать предложенные выше построения, рассмотрим нерелятивистский предел. Для этого заменим метрику $g_{\alpha\beta}$ на метрику Лоренца $\eta_{\alpha\beta}$ и введем наблюдаемое время $x^0 = ct$, где c – скорость света. В этом случае ковариантные производные совпадают с частными. В первом приближении можно считать, что длина линии тока совпадает с x^0 . Тогда

$$u^0 = u_0 = 1, \quad v^\mu := \frac{dx^\mu}{dt} = cu^\mu.$$

Для отличия трехмерную скорость частицы среды мы обозначили новой буквой v^μ (в предыдущем разделе она была обозначена через u^μ). Кроме того, в нерелятивистском пределе $v^2/c^2 \rightarrow 0$ имеют место формулы:

$$\partial_\mu u_0 \rightarrow 0, \quad \partial_0 u_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{dv_\mu}{dt} \rightarrow 0.$$

Поэтому определение расширения, сдвига и вращения (18.12) в релятивистском случае сводится к соответствующим нерелятивистским компонентам:

$$\begin{aligned} c\theta &\rightarrow \theta_N, & c\sigma_{\alpha\beta} &\rightarrow \sigma_{N\mu\nu}, & c\omega_{\mu\nu} &\rightarrow \omega_{N\mu\nu}, \\ \sigma_{00}, \sigma_{0\mu} &\rightarrow 0, & \omega_{00}, \omega_{0\mu} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

где неприводимые компоненты в нерелятивистском случае помечены индексом N.

18.1.3. Уравнение Райчаудхури. Получим эволюционные уравнения вдоль линий тока для скаляра расширения и тензоров сдвига и вращения. С этой целью два раза продифференцируем вектор скорости и антисимметризуем:

$$\nabla_\epsilon \nabla_\delta u_\gamma - \nabla_\delta \nabla_\epsilon u_\gamma = -R_{\epsilon\delta\gamma\zeta} u^\zeta, \quad (18.16)$$

где мы воспользовались формулой для коммутатора ковариантных производных (2.13). Умножим это уравнение на u^ϵ . Тогда первое и второе слагаемые примут вид

$$\begin{aligned} u^\epsilon \nabla_\epsilon \nabla_\delta u_\gamma &:= (\nabla_\delta u_\gamma)^\cdot, \\ -u^\epsilon \nabla_\delta \nabla_\epsilon u_\gamma &= -\nabla_\delta \dot{u}_\gamma + \nabla_\delta u^\epsilon \nabla_\epsilon u_\gamma, \end{aligned}$$

где $\dot{u}_\gamma$ – компоненты ускорения линий тока (18.10). Теперь спроектируем полученное уравнение на перпендикулярные направления:

$$\Pi_\alpha^\gamma \Pi_\beta^{\tau\delta} (\nabla_\delta u_\gamma)^\cdot - \Pi_\alpha^\gamma \Pi_\beta^{\tau\delta} \nabla_\delta \dot{u}_\gamma + \Pi_\alpha^\gamma \Pi_\beta^{\tau\delta} \nabla_\delta u^\epsilon \nabla_\epsilon u_\gamma - R_{\alpha\epsilon\beta\zeta} u^\epsilon u^\zeta = 0, \quad (18.17)$$

где мы воспользовались антисимметрией тензора кривизны:

$$\Pi_\alpha^\gamma \Pi_\beta^{\tau\delta} R_{\gamma\epsilon\delta\zeta} u^\epsilon u^\zeta = R_{\alpha\epsilon\beta\zeta} u^\epsilon u^\zeta.$$

Эволюционное уравнение (18.17) является кинематическим в том смысле, что при его получении мы не использовали уравнений Эйнштейна.

Чтобы получить эволюционные уравнения, разложим уравнение (18.17) на неприводимые компоненты. Оно представляет собой тензор второго ранга с индексами α и β . Сначала выделим след, свернув его с обратной метрикой $g^{\alpha\beta}$. Тогда первое, второе и третье слагаемые примут вид:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \Pi_{\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta}^{\delta} (\nabla_{\delta} u_{\gamma})^{\cdot} &= \dot{\theta} + \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma}, \\ -g^{\alpha\beta} \Pi_{\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta}^{\delta} \nabla_{\delta} \dot{u}_{\gamma} &= -\nabla_{\gamma} \dot{u}^{\gamma} - \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma}, \\ g^{\alpha\beta} \Pi_{\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta}^{\delta} \nabla_{\delta} u^{\epsilon} \nabla_{\epsilon} u_{\gamma} &= 2\sigma^2 - 2\omega^2 + \frac{1}{3}\theta^2. \end{aligned} \quad (18.18)$$

Для преобразования четвертого слагаемого используем уравнения Эйнштейна, которые запишем в виде

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\kappa} \left[(\mathcal{E} + \mathcal{P}) u_{\alpha} u_{\beta} - \frac{1}{2} (\mathcal{E} - \mathcal{P}) g_{\alpha\beta} \right].$$

Тогда четвертое слагаемое примет вид

$$R_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = -\frac{1}{4\kappa} (\mathcal{E} + 3\mathcal{P}).$$

Суммируя все вместе, получаем *уравнение Райчаудхури*

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - \nabla_{\gamma} \dot{u}^{\gamma} + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{4\kappa} (\mathcal{E} + 3\mathcal{P}) = 0. \quad (18.19)$$

Это уравнение было получено Райчаудхури [166, 167] для пыли, $\mathcal{P} = 0$, без определения тензоров сдвига и вращений. В форме (18.19) оно было получено позже [168].

Теперь выделим из уравнения (18.17) антисимметричную часть. Простые вычисления дают следующие выражения для первого, второго и третьего слагаемого:

$$\begin{aligned} \Pi_{[\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta]}^{\delta} (\nabla_{\delta} u_{\gamma})^{\cdot} &= \Pi_{\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta}^{\delta} \dot{\omega}_{\delta\gamma}, \\ -\Pi_{[\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta]}^{\delta} \nabla_{\delta} \dot{u}_{\gamma} &= -\Pi_{\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta}^{\delta} \nabla_{[\delta} \dot{u}_{\gamma]}, \\ \Pi_{[\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta]}^{\delta} \nabla_{\delta} u^{\epsilon} \nabla_{\epsilon} u_{\gamma} &= 2\omega_{[\beta}^{\gamma} \sigma_{\alpha]\gamma} + \frac{2}{3}\theta\omega_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по паре индексов. Четвертое слагаемое при антисимметризации дает нуль, поскольку тензор кривизны симметричен относительно перестановки первой и второй пар индексов. В результате получаем эволюционное уравнение для тензора вращений:

$$\Pi_{\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta}^{\delta} \dot{\omega}_{\delta\gamma} - \Pi_{\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta}^{\delta} \nabla_{[\delta} \dot{u}_{\gamma]} + 2\omega_{[\beta}^{\gamma} \sigma_{\alpha]\gamma} + \frac{2}{3}\theta\omega_{\beta\alpha} = 0. \quad (18.20)$$

Сейчас построим бесследовую симметричную часть уравнения (18.17). Первые три слагаемых имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_{(\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta)}^{\delta} (\nabla_{\delta} u_{\gamma})^{\cdot} - \frac{1}{3}(\dot{\theta} + \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma}) \Pi_{\alpha\beta} &= \Pi_{\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta}^{\delta} \dot{\sigma}_{\delta\gamma} - \frac{1}{3} \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma} \Pi_{\alpha\beta}, \\ -\Pi_{(\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta)}^{\delta} \nabla_{\delta} \dot{u}_{\gamma} + \frac{1}{3}(\nabla_{\gamma} \dot{u}^{\gamma} + \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma}) \Pi_{\alpha\beta} &= -\Pi_{\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta}^{\delta} \nabla_{(\delta} \dot{u}_{\gamma)} + \frac{1}{3}(\nabla_{\gamma} \dot{u}^{\gamma} + \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma}) \Pi_{\alpha\beta}, \\ \Pi_{(\alpha}^{\gamma} \Pi_{\beta)}^{\delta} \nabla_{\delta} u^{\epsilon} \nabla_{\epsilon} u_{\gamma} - \frac{1}{3} \left(2\sigma^2 - 2\omega^2 + \frac{1}{3}\theta^2 \right) \Pi_{\alpha\beta} &= \sigma_{\beta}^{\epsilon} \sigma_{\epsilon\alpha} + \omega_{\beta}^{\epsilon} \omega_{\epsilon\alpha} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{3}\theta\sigma_{\beta\alpha} - \frac{1}{3}(2\sigma^2 - 2\omega^2)\Pi_{\alpha\beta}^{\tau},$$

где скобки обозначают симметризацию по паре индексов, и использованы формулы для следов (18.18). Четвертое слагаемое равно

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma\beta\delta}u^{\gamma}u^{\delta} - \frac{1}{3}R_{\gamma\delta}u^{\gamma}u^{\delta}\Pi_{\alpha\beta}^{\tau} = \\ = C_{\alpha\gamma\beta\delta}u^{\gamma}u^{\delta} + \frac{1}{2}(R_{\alpha\beta} - R_{\alpha\gamma}u^{\gamma}u_{\beta} - R_{\beta\gamma}u^{\gamma}u_{\alpha}) + \\ + \frac{1}{6}R_{\gamma\delta}u^{\gamma}u^{\delta}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}R(g_{\alpha\beta} - u_{\alpha}u_{\beta}) + \frac{1}{3}R_{\gamma\delta}u^{\gamma}u^{\delta}u_{\alpha}u_{\beta}, \end{aligned} \quad (18.21)$$

где мы разложили тензор кривизны на неприводимые компоненты, выделив тензор Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ и скалярную кривизну R . Из уравнений Эйнштейна следует, что тензор Риччи имеет следующую структуру

$$R_{\alpha\beta} = Ag_{\alpha\beta} + Bu_{\alpha}u_{\beta} \quad \Rightarrow \quad R = 4A + B, \quad (18.22)$$

где A и B – некоторые функции. Если подставить это выражение в правую часть равенства (18.21), то все слагаемые сократятся за исключением тензора Вейля. Следовательно, эволюционное уравнение для тензора сдвига принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha}^{\tau\gamma}\Pi_{\beta}^{\tau\delta}\dot{\sigma}_{\delta\gamma} - \Pi_{\alpha}^{\tau\gamma}\Pi_{\beta}^{\tau\delta}\nabla_{(\delta}\dot{u}_{\gamma)} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^{\gamma}_{\beta} + \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta} + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\beta} + \\ + \frac{1}{3}[\nabla_{\gamma}\dot{u}^{\gamma} - 2(\sigma^2 - \omega^2)]\Pi_{\alpha\beta}^{\tau} - \frac{1}{4}E_{\alpha\beta} = 0, \end{aligned} \quad (18.23)$$

где

$$E_{\alpha\beta} := 4C_{\alpha\gamma\beta\delta}u^{\gamma}u^{\delta} \quad (18.24)$$

– электрическая компонента тензора Вейля.

Таким образом, получены эволюционные уравнения (18.19), (18.20) и (18.23) для всех трех неприводимых компонент тензора $\nabla_{\alpha}u_{\beta}$. Эти уравнения эквивалентны системе уравнений (18.17).

Из исходных уравнений (18.16) можно получить дополнительные независимые уравнения. Получим еще три (но не все) алгебраически независимых уравнения. Поскольку антисимметризация тензора кривизны по любым трем индексам дает нуль, то полная антисимметризация исходного уравнения (18.16) приводит к равенству

$$\nabla_{[\alpha}\omega_{\beta\gamma]} + \omega_{[\alpha\beta}\dot{u}_{\gamma]} + u_{[\alpha}\nabla_{\beta}\dot{u}_{\gamma]} = 0, \quad (18.25)$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по трем индексам. Полученное уравнение не зависит от тензора кривизны и, следовательно, от полей материи. Поэтому оно имеет кинематический характер.

Теперь свернем уравнение (18.16) с $g^{\gamma\delta}$:

$$\nabla_{\epsilon}\nabla_{\gamma}u^{\gamma} - \nabla_{\gamma}\nabla_{\epsilon}u^{\gamma} - R_{\epsilon\zeta}u^{\zeta} = 0.$$

Если тензор Риччи имеет структуру (18.22), то последнее слагаемое обращается в нуль. После проектирования на перпендикулярное направление, т.е. умножения на $\Pi^{\tau\alpha\epsilon}$, возникает второе уравнение

$$\Pi^{\tau\alpha\epsilon}\left(\frac{2}{3}\nabla_{\epsilon}\theta - \nabla_{\gamma}\sigma_{\epsilon}^{\gamma} - \nabla_{\gamma}\omega_{\epsilon}^{\gamma}\right) - (\sigma_{\gamma}^{\alpha} + \omega_{\gamma}^{\alpha})\dot{u}^{\gamma} = 0. \quad (18.26)$$

Хотя оно не зависит от тензора кривизны, полученное уравнение нельзя назвать кинематическим, т.к. при его получении использована структура тензора Риччи (18.22).

Еще одно уравнение возникает после поднятия индексов ϵ, δ в уравнении (18.16) и умножения его на тензор

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\zeta\epsilon\delta}u^\zeta\Pi_\alpha^{\tau\eta}\Pi_\beta^{\tau\gamma}.$$

После несложных преобразований получим уравнение

$$2\omega_{(\alpha}\dot{u}_{\beta)} - \Pi_\alpha^{\tau\gamma}\Pi_\beta^{\tau\delta}u^\epsilon\varepsilon_{\epsilon\eta\zeta(\gamma}\nabla^\eta[\sigma^\zeta_{\delta)} + \omega^\zeta_{\delta)}] = -\frac{1}{4}H_{\alpha\beta}, \quad (18.27)$$

где

$$H_{\alpha\beta} := 4 * C_{\alpha\beta\gamma\delta}u^\gamma u^\delta = 2\varepsilon_{\alpha\gamma\delta\epsilon}C^{\delta\epsilon}_{\beta\zeta}u^\gamma u^\zeta \quad (18.28)$$

– магнитная составляющая тензора Вейля.

Значение полученных эволюционных уравнений (18.19), (18.20), (18.23), (18.25)–(18.27) заключается в том, что они приводят к важным следствиям, если на кинематические характеристики среды наложены ограничения.

ПРИМЕР 18.1.1. Пусть $\sigma_{\alpha\beta} = 0$, $\omega_{\alpha\beta} = 0$ и $\dot{u}^\alpha = 0$. Тогда уравнения (18.20) и (18.25) тождественно удовлетворяются. Из уравнения (18.26) следует, что скаляр расширения может меняться только вдоль линий тока. Уравнения (18.23) и (18.27) приводят к равенству нулю тензора Вейля.

18.1.4. Большой взрыв и большое сжатие. Рассмотрим вселенную, которая заполнена непрерывной средой. Допустим, что частицы среды движутся по экстремалиям пространства-времени, т.е. ускорение линий тока равно нулю, $\dot{u} = 0$. Предположим также, что тензор вращения при движении равен нулю, $\omega = 0$.

Теперь введем функцию $l(s)$ как решение обыкновенного дифференциального уравнения вдоль линий тока

$$\frac{\dot{l}}{l} := \frac{1}{3}\theta,$$

где $\dot{l} := u^\alpha \partial_\alpha l$. Тогда уравнение Райчаудхури (18.19) примет вид

$$3\frac{\ddot{l}}{l} + 2\sigma^2 + \frac{1}{4\kappa}(\mathcal{E} + 3\mathcal{P}) = 0. \quad (18.29)$$

Для большинства видов материи $\mathcal{E} > 0$ и $\mathcal{P} > 0$. Поэтому из полученного уравнения следует, что $\ddot{l}/l < 0$.

Рассмотрим случай, когда $l > 0$. Тогда из уравнения (18.29) вытекает, что функция l является вогнутой, т.е. $\ddot{l} < 0$. Это означает, что если к кривой $l(s)$ провести касательную, то вся кривая будет лежать ниже этой касательной. Зафиксируем некоторую точку $s = p$. Тогда в этой точке возможны три случая $\dot{l} < 0$, $\dot{l} = 0$ и $\dot{l} > 0$, которые качественно показаны на рис. 18.1. Если в точке p производная больше нуля, $\dot{l}(p) > 0$, то функция $l(s)$ должна обратиться в нуль при конечном значении $s < p$, которое мы обозначим через s_b . Если $\dot{l}(p) < 0$, то функция $l(s)$ обратится в нуль при некотором значении $s_c > p$. При $\dot{l}(p) = 0$ функция $l(s)$ обязательно обратится в нуль при некоторых $s_b < p$ и $s_c > p$.

Пусть теперь $l < 0$. В этом случае функция l является выпуклой, т.к. $\ddot{l} > 0$. Как и предыдущем случае функция l обратится в нуль при конечных значениях параметра s . Нужно просто отразить графики, показанные на рис. 18.1, относительно оси абсцисс s .

При переходе через точку $l(s) = 0$ вторая производная $\ddot{l}$ меняет знак. Это значит, что $\ddot{l}(s_{b,c}) = 0$, и точки s_b и s_c являются точками перегиба. Допустим, что функция $l(s)$ при

Рис. 18.1. Качественное поведение кривой $l(s)$ в трех случаях: $\dot{l}(p) > 0$, $\dot{l}(p) = 0$ и $\dot{l}(p) < 0$. В любом случае функция $l(s)$ обратится в нуль при конечном значении s .

переходе через нуль ведет себя степенным образом. Поскольку она меняет знак, то главный член разложения будет нечетной степени:

$$l \approx C(s - s_{b,c})^{2k+1}, \quad C = \text{const} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\lim_{s \rightarrow s_{b,c}} \frac{\ddot{l}}{l} = \lim_{s \rightarrow s_{b,c}} \frac{2k(2k+1)}{(s - s_{b,c})^2} = \infty.$$

Поэтому из уравнения (18.29) вытекает, что в точках s_b и s_c либо $\mathcal{E} + 3\mathcal{P} \rightarrow \infty$, либо $\sigma^2 \rightarrow \infty$. Это означает, что решения уравнений Эйнштейна будут иметь особенность либо в прошлом, либо в будущем. Поскольку параметр вдоль линий тока выбран каноническим, то эта особенность будет лежать при конечном значении собственного времени. Особенность, лежащая в прошлом, называется *большим взрывом*, а лежащая в будущем – *большим сжатием*.

ЗАМЕЧАНИЕ. В англоязычной литературе употребляются термины *big bang* и *big crunch*. Дословный перевод второго термина *большой хруст*. Его также иногда употребляют вместо “большого сжатия”.

Таким образом, при достаточно общих предположениях мы доказали наличие особенности в космологических решениях уравнений Эйнштейна либо в прошлом, либо в будущем. Подчеркнем, что при этом не были использованы какие либо решения уравнений Эйнштейна. Большинство рассмотренных в настоящей главе космологических решений действительно имеет особенности. В то же время существуют отдельные решения без особенностей. В настоящее время принято считать, что окружающая нас вселенная родилась из большого взрыва, что неплохо согласуется с наблюдательными данными.

18.2. Трехмерные пространства постоянной кривизны

В настоящем разделе мы рассмотрим трехмерные римановы пространства положительной и отрицательной постоянной кривизны, которые являются однородными и изотропными многообразиями. Эти пространства важны для дальнейшего рассмотрения, поскольку играют роль пространственных сечений постоянного времени в космологических моделях Фридмана.

18.2.1. Трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$. Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ с декартовой системой координат w, x, y, z . Это значит, что метрика в $\mathbb{R}^4$ имеет вид

$$ds^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (18.30)$$

Трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ радиуса a с центром в начале координат задается уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad a > 0. \quad (18.31)$$

Это уравнение задает множество точек в $\mathbb{R}^4$, равноудаленных от начала координат. Мы предполагаем, что топология и дифференцируемая структура на $\mathbb{S}^3$ заданы вложением $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Тем самым множество точек $\mathbb{S}^3$ становится компактным трехмерным гладким многообразием. Кроме этого мы предполагаем, что на $\mathbb{S}^3$ задана метрика, также индуцированная вложением $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Тогда сфера $\mathbb{S}^3$ превращается в риманово многообразие, как мы увидим, постоянной положительной кривизны.

Чтобы определить индуцированную метрику, решим уравнение (18.31) относительно w :

$$w = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2},$$

где знаки $\pm$ соответствуют верхней и нижней полусфере. Тогда

$$dw = \mp \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Подстановка полученного выражения в евклидов интервал (18.30) приводит к следующему выражению

$$ds^2 = \frac{(a^2 - y^2 - z^2) dx^2 + (a^2 - x^2 - z^2) dy^2 + (a^2 - x^2 - y^2) dz^2}{a^2 - x^2 - y^2 - z^2} + 2 \frac{xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz}{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (18.32)$$

Это и есть метрика на сфере, индуцированная вложением $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Координаты x, y, z и на нижней, и на верхней полусфере определены внутри трехмерного шара $\mathbb{B}_a^3$ радиуса a :

$$x^2 + y^2 + z^2 < a^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что сфера $\mathbb{S}^3$ трехмерна.

Индуцированная метрика на $\mathbb{S}^3$ принимает более простой диагональный вид, если ввести сферические координаты r, θ, φ в трехмерном евклидовом подпространстве $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ с координатами x, y, z :

$$\begin{aligned} x &:= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (18.33)$$

Тогда уравнение сферы (18.31) примет вид

$$w^2 + r^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad w = \pm \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Отсюда следует равенство дифференциалов

$$dw = \mp \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Подстановка dw в интервал (18.30) приводит к диагональной индуцированной метрике

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (18.34)$$

Полученная метрика определена при

$$0 < r < a, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Эти значения координат покрывают либо верхнюю полусферу, $w > 0$, либо нижнюю, $w < 0$. По аналогии с двумерной сферой, мы считаем, что значение $r = 0$ соответствует либо северному, либо южному полюсу. Экватору сферы $\mathbb{S}^3$ соответствует максимальное значение $r = a$.

Теперь сделаем замену радиальной координаты $r \mapsto \chi$:

$$r := a \sin \chi \quad \Rightarrow \quad dr = a \cos \chi d\chi,$$

где χ – новая безразмерная радиальная координата. Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (18.35)$$

Новая координата меняется в интервале $\chi \in (0, \pi/2)$ для каждой из полусфер. Однако метрика (18.35) определена в более широком интервале $\chi \in (0, \pi)$. Поэтому можно считать, что индуцированная метрика в виде (18.35) покрывает всю сферу, за исключением двумерного сечения $\varphi = 0$, которое включает северный и южный полюса. При этом две полусферы гладко сшиты по экватору $\chi = \pi/2$. Таким образом, безразмерные сферические координаты определены при

$$0 < \chi < \pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Фактически, безразмерные сферические координаты χ, θ, φ – это сферические координаты на сфере $\mathbb{S}^3$ единичного радиуса, $a = 1$.

Метрика трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$, как и ее обратная, в безразмерных сферических координатах диагональна. Поэтому координатные векторные поля $\partial_\chi, \partial_\theta$ и ∂_φ ортогональны.

Каждое двумерное сечение $r := a \sin \chi = \text{const}$ трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$, которое соответствует постоянному радиусу, представляет двумерную сферу $\mathbb{S}_r^2 \subset \mathbb{S}^3$ с обычной индуцированной метрикой

$$dl^2 = a^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad \chi = \text{const}.$$

Площадь поверхности этой сферы максимальна на экваторе $\chi = \pi/2$ и равна $4\pi a^2$. На полюсах ($\chi = 0, 2\pi$) площадь поверхности двумерной сферы равна нулю. Для сравнения напомним, что сечения двумерной сферы $\mathbb{S}^2$ при обычном вложении $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ плоскостями $z = \text{const}$ представляют собой окружности $\mathbb{S}^1$, длина которых также убывает от экватора к полюсам.

Объем трехмерной сферы просто вычисляется в безразмерных сферических координатах:

$$V = \int_0^\pi d\chi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi a^3 \sin^2 \chi \sin \theta = 2\pi^2 a^3. \quad (18.36)$$

Метрику (18.34), индуцированную на сфере, можно записать в конформно плоском виде. Действительно, совершив преобразование радиальной координаты $r \mapsto \rho(r)$ такое, чтобы было выполнено уравнение

$$\frac{1}{1 - r^2/a^2} \left(\frac{dr}{d\rho} \right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2}.$$

Это уравнение легко решается. С точностью до несущественной постоянной интегрирования решение имеет вид

$$r = \frac{\rho}{1 + \frac{\rho^2}{4a^2}}. \quad (18.37)$$

После такого преобразования радиальной координаты метрика становится конформно плоской:

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{\left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2}\right)^2}. \quad (18.38)$$

Эта метрика определена при $0 < \rho < \infty$. Северному и южному полюсам ставятся в соответствие точки $\rho = \infty$ и $\rho = 0$. Экватору сферы $\mathbb{S}^3$ соответствует значение $\rho = 2a$. Заметим, что на экваторе метрика сферы невырождена. По аналогии с двумерной сферой будем называть систему координат ρ, θ, φ *стереографической*.

Рассмотрим координаты ρ, θ, φ в качестве сферических координат в $\mathbb{R}^3$ и перейдем к декартовым координатам:

$$\begin{aligned} x^1 &:= \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ x^2 &:= \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ x^3 &:= \rho \cos \theta. \end{aligned} \quad (18.39)$$

Введем обозначение $(x^\mu) = (x^1, x^2, x^3)$, $\mu = 1, 2, 3$. Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2}{\left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)^2}, \quad (18.40)$$

где

$$dx^2 := \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad x^2 := \rho^2 = \delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu.$$

Индукцированная метрика на сфере $\mathbb{S}^3$ с стереографических координатах (18.40) определена во всем евклидовом пространстве $\{x^\mu\} \in \mathbb{R}^3$ и является гладкой. Эти координаты покрывают всю сферу за исключением северного полюса, которому соответствует бесконечно удаленная точка $\rho = \infty$. Северная и южная полусферы гладко сшиваются по экватору, которому соответствует двумерная сфера $\rho = 2a$.

Теперь вычислим геометрические характеристики трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$ для индуцированной метрики (18.40) в стереографических координатах. Начнем с символов Кристоффеля. Несложные вычисления дают следующее выражение

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = -\frac{1}{2a^2 \left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)} (x_\mu \delta_\nu^\rho + x_\nu \delta_\mu^\rho - x^\rho \delta_{\mu\nu}), \quad (18.41)$$

где $x_\mu := \delta_{\mu\nu} x^\nu$. Ему соответствует тензор кривизны

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma}}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)^4} = -\frac{g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}}{a^2}. \quad (18.42)$$

Отсюда следует, что трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ с индуцированной метрикой является римановым пространством постоянной кривизны. Тензор Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\mu\rho} &= -\frac{2\delta_{\mu\rho}}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)^2} = -\frac{2g_{\mu\rho}}{a^2}, \\ R &= -\frac{6}{a^2}. \end{aligned} \quad (18.43)$$

Гауссова кривизна при этом положительна

$$K := -\frac{1}{2}R = \frac{3}{a^2}.$$

Поэтому трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ с индуцированной метрикой является пространством постоянной положительной кривизны.

Евклидова метрика (18.30) и уравнение (18.31), определяющее вложение $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, инвариантны относительно группы вращений $\mathbb{O}(4)$, которая действует в исходном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ обычным образом. Группа Ли вращений $\mathbb{O}(4)$ шестипараметрическая, и поэтому в $\mathbb{R}^4$ существует шесть линейно независимых векторов Киллинга:

$$\begin{aligned} K_{01} &:= w \partial_x - x \partial_w, & K_{12} &:= x \partial_y - y \partial_x, \\ K_{02} &:= w \partial_y - y \partial_w, & K_{13} &:= x \partial_z - z \partial_x, \\ K_{03} &:= w \partial_z - z \partial_w, & K_{23} &:= y \partial_z - z \partial_y. \end{aligned} \quad (18.44)$$

Если пронумеровать координаты, $(x^i) := (w, x, y, z)$, $i = 0, 1, 2, 3$, то векторы Киллинга можно записать в компактной форме

$$K_{ij} := x_i \partial_j - x_j \partial_i,$$

где $x_i := x^j \delta_{ji}$. Векторы Киллинга удовлетворяют алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$:

$$[K_{ij}, K_{kl}] = -\delta_{ik} K_{jl} + \delta_{il} K_{jk} + \delta_{jk} K_{il} - \delta_{jl} K_{ik}, \quad (18.45)$$

в чем нетрудно убедиться с помощью прямых вычислений.

Поскольку алгебра Ли векторных полей Киллинга замкнута, то они находятся в инволюции, и, согласно теореме Фробениуса, у распределения векторных полей Киллинга существуют интегральные подмногообразия, которыми, как мы увидим, являются сферы $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$.

Для того, чтобы получить явные выражения для векторных полей Киллинга на сфере $\mathbb{S}^3$ сделаем следующее. Переменные r, χ, θ, φ можно рассматривать, как локальные координаты в $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} w &:= r \cos \chi, & x &:= r \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \\ z &:= r \sin \chi \cos \theta, & y &:= r \sin \chi \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что значения $\chi = 0, \pi$ соответствуют северному и южному полюсу, а $\chi = \pi/2$ – экватору.

В дальнейшем нам понадобятся следующие формулы:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2 \chi, \\ w^2 + x^2 + y^2 + z^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Обратные преобразования координат имеют вид:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}, \\ \chi &= \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{w}, \\ \theta &= \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \varphi &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Для нахождения явного вида векторов Киллинга будут использованы частные производные, определяющие дифференциал отображения $(w, x, y, z) \mapsto (r, \chi, \theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial w} &= \cos \chi, & \frac{\partial \theta}{\partial w} &= 0, \\
\frac{\partial r}{\partial x} &= \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r \sin \chi}, \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r \sin \chi}, \\
\frac{\partial r}{\partial z} &= \sin \chi \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin \theta}{r \sin \chi}, \\
\frac{\partial \chi}{\partial w} &= -\frac{\sin \chi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial w} &= 0, \\
\frac{\partial \chi}{\partial x} &= \frac{\cos \chi \sin \theta \cos \varphi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin \varphi}{r \sin \chi \sin \theta}, \\
\frac{\partial \chi}{\partial y} &= \frac{\cos \chi \sin \theta \sin \varphi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos \varphi}{r \sin \chi \sin \theta}, \\
\frac{\partial \chi}{\partial z} &= \frac{\cos \chi \cos \theta}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{18.46}$$

Тогда несложные вычисления приводят к следующим выражениям для векторов Киллинга в новых координатах:

$$\begin{aligned}
K_{01} &= \sin \theta \cos \varphi \partial_\chi + \operatorname{ctg} \chi \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta - \frac{\operatorname{ctg} \chi \sin \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\
K_{02} &= \sin \theta \sin \varphi \partial_\chi + \operatorname{ctg} \chi \cos \theta \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\operatorname{ctg} \chi \cos \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\
K_{03} &= \cos \theta \partial_\chi - \operatorname{ctg} \chi \sin \theta \partial_\theta, \\
K_{12} &= \partial_\varphi, \\
K_{13} &= -\cos \varphi \partial_\theta + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \partial_\varphi, \\
K_{23} &= -\sin \varphi \partial_\theta - \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \partial_\varphi.
\end{aligned} \tag{18.47}$$

Мы видим, что все шесть векторов Киллинга направлены вдоль касательных векторов ∂_χ , ∂_θ и ∂_φ . Следовательно, гиперповерхности, выделяемые равенством $r = \text{const}$, являются интегральными гиперповерхностями распределения векторных полей Киллинга. Это в точности трехмерные сферы $\mathbb{S}^3$, и векторные поля Киллинга касательны к ним. Векторных поля Киллинга линейно независимы. Поскольку сфера трехмерна, то между векторными полями Киллинга можно написать линейную зависимость, коэффициентами которой будут не числа, а функции. Ситуация здесь аналогична вложению двумерной сферы $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, которое было рассмотрено в разделе 12.1.

Таким образом, векторные поля (18.47) являются векторными полями Киллинга на сфере $\mathbb{S}^3$, вложенной в четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$. Они удовлетворяют алгебре Ли (18.45), т.к. коммутатор векторных полей не зависит от выбора системы координат. При желании векторы Киллинга (18.47) можно записать в любой другой системе координат на сфере $\mathbb{S}^3$.

Согласно теореме 2.3.2 шесть – это максимально возможное число линейно независимых векторов Киллинга на трехмерном многообразии, и сфера $\mathbb{S}^3$ является пространством постоянной кривизны. Последнее утверждение уже было проверено с помощью прямых вычислений (18.42).

Рассмотрим южный полюс сферы $x = y = z = 0$, $w = -a$. Подгруппа группы изометрий сферы, оставляющей южный полюс неподвижным, является группа Ли трехмерных вращений $\mathbb{SO}(3)$. Это – группа изотропии южного полюса. Ее генераторами являются векторные поля Киллинга K_{12} , K_{13} и K_{23} , которые мы рассмотрим в декартовой системе координат (18.47), т.к. она невырождена в южном полюсе. Они обращаются в нуль в южном полюсе, и поэтому эта точка является неподвижной относительно действия подгруппы $\mathbb{SO}(3) \subset \mathbb{SO}(4)$. В южном полюсе остальные векторные поля Киллинга принимают вид

$$K_{01}^\circ = -a \partial_x, \quad K_{02}^\circ = -a \partial_y, \quad K_{03}^\circ = -a \partial_z,$$

т.е. имеют тот же вид, что и трансляции в трехмерном евклидовом пространстве. Мы видим, что эти векторные поля играют роль трансляций для южного полюса. Поэтому многообразие $\mathbb{S}^3$ однородно и изотропно в окрестности южного полюса. Из явного вида коммутатора векторных полей Киллинга (18.45) следует, что векторы Киллинга K_{01} , K_{02} и K_{03} не образуют подалгебры в алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ и, следовательно, не генерируют никакой подгруппы в группе Ли $\mathbb{SO}(4)$. Это отличает “трансляции” в группе $\mathbb{SO}(4)$ от трансляций в группе Пуанкаре, где они образуют подгруппу. Одно и то же векторное поле Киллинга может генерировать для одной точки сферы вращение, а для другой – трансляцию.

Поскольку группа Ли изометрий $\mathbb{SO}(4)$ действует на сфере $\mathbb{S}^3$ транзитивно, то все, сказанное выше о южном полюсе, справедливо для любой точки сферы. Поэтому сфера $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ является однородным и изотропным пространством в смысле определения, данного в разделе 2.3.

В дальнейшем нам понадобятся явные выражения для векторных полей Киллинга в стереографических координатах. Чтобы упростить их получение, введем обозначения для начальных декартовых координат в $\mathbb{R}^4$:

$$(w, x, y, z) \mapsto (w, y^\mu), \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Координаты y^μ связаны со стереографическими координатами (18.39) простой формулой

$$y^\mu = \frac{x^\mu}{1 + \frac{\rho^2}{4a^2}}, \quad (18.48)$$

где мы использовали равенство (18.37). Отсюда следует выражение для частных производных

$$\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\delta_\nu^\mu}{1 + \frac{\rho^2}{4a^2}} - \frac{x^\mu x_\nu}{2a^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2}\right)^2},$$

где $x_\nu := x^\mu \delta_{\mu\nu}$. Обратная матрица дает якобиан преобразования координат $y^\mu \mapsto x^\mu$:

$$J_\mu{}^\nu := \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} = \left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2}\right) \delta_\mu^\nu + \frac{1}{2a^2} \frac{1 + \frac{\rho^2}{4a^2}}{1 - \frac{\rho^2}{4a^2}} x^\nu x_\mu. \quad (18.49)$$

Уравнение сферы в координатах w, x^μ принимает вид

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = w^2 + \frac{\rho^2}{\left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2}\right)^2} = a^2.$$

Отсюда следует выражение для w через стереографические координаты:

$$w = \pm a \frac{1 - \frac{\rho^2}{4a^2}}{1 + \frac{\rho^2}{4a^2}}. \quad (18.50)$$

Используя полученное выражение для w и матрицу Якоби (18.49), легко вычислить векторы Киллинга:

$$\begin{aligned} K_{0\mu} &= w \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} = \pm a \left[\left(1 - \frac{\rho^2}{4a^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2a^2} x_\mu x^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} \right], \\ K_{\mu\nu} &= y_\mu \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} - y_\nu \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} = x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (18.51)$$

Мы видим важное отличие векторов Киллинга в различных системах координат. В сферической системе координат векторы Киллинга (18.47) не зависят от радиуса a сферы. Это кажется естественным, т.к. векторы Киллинга определяют симметрию многообразия, а она не зависит от радиуса сферы. В то же время три вектора Киллинга $K_{0\mu}$ (18.51), соответствующие трансляциям в южном полюсе, в стереографических координатах явно зависят от радиуса сферы. Векторы Киллинга $K_{\mu\nu}$ (18.51) соответствуют вращениям в южном полюсе и от радиуса сферы не зависят.

Трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ естественным образом вкладывается в четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$, как было описано в настоящем разделе. Группа вращений $\mathbb{SO}(4)$ действует на сфере транзитивно, т.е. для любых двух точек найдется такое вращение, которое переводит одну точку в другую. Следовательно, она является однородным пространством. Подгруппа изотропии каждой точки сферы изоморфна группе трехмерных вращений $\mathbb{SO}(3)$. Поэтому между точками сферы и точками факторпространства $\mathbb{SO}(4)/\mathbb{SO}(3)$ существует взаимно однозначное соответствие. Более того, на факторпространстве существует единственная структура вещественно аналитического многообразия. Поэтому сфера, как многообразие, диффеоморфна факторпространству

$$\mathbb{S}^3 \approx \frac{\mathbb{SO}(4)}{\mathbb{SO}(3)}. \quad (18.52)$$

С другой стороны, на трехмерной сфере была определена групповая структура $\mathbb{SU}(2)$:

$$\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{SU}(2). \quad (18.53)$$

Группа унитарных матриц $\mathbb{SU}(2)$ действует на сфере транзитивно и свободно, т.е. любой элемент группы, отличный от единичного, сдвигает все точки многообразия. Поэтому сфера $\mathbb{S}^3$ является главным однородным пространством, которое можно просто отождествить с $\mathbb{SU}(2)$.

18.2.2. Двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^3$. Рассмотрим четырехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$ с декартовой системой координат x, y, z, w и метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2. \quad (18.54)$$

Двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^3$ “радиуса” a с центром в начале координат задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -a^2, \quad a > 0. \quad (18.55)$$

При работе с трехмерным гиперboloидом $\mathbb{H}^3$ полезно иметь перед глазами картинку 12.2, где показано вложение двумерного двуполостного гиперboloида $\mathbb{H}^2$ в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$.

Будем считать, что топология, дифференцируемая структура и метрика на $\mathbb{H}^3$ индуцированы вложением $\mathbb{H}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^{3,1}$.

Из уравнения (18.55), определяющего вложение, можно исключить координату w :

$$w = \pm \sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

где знак $\pm$ соответствует северной и южной полам гиперboloида. Отсюда следует, что двуполостный гиперboloид состоит из двух компонент связности: северной и южной. Для дифференциалов справедлива формула

$$dw = \pm \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Подстановка полученного выражения в евклидов интервал (18.54) приводит к индуцированной метрике

$$ds^2 = \frac{(a^2 + y^2 + z^2) dx^2 + (a^2 + x^2 + z^2) dy^2 + (a^2 + x^2 + y^2) dz^2}{a^2 + x^2 + y^2 + z^2} - 2 \frac{xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz}{a^2 + x^2 + y^2 + z^2}. \quad (18.56)$$

Координаты x, y, z можно выбрать в качестве координат на двуполостном гиперboloиде $\mathbb{H}^3$. На каждой полё гиперboloида они пробегают все евклидово пространство $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.

Для определенности выберем северную полё гиперboloида. Она диффеоморфна $\mathbb{R}^3$, некомпактна, и система координат x, y, z является глобальной, т.е. покрывает всю полё гиперboloида. Для нее сохраним прежнее обозначение $\mathbb{H}^3$.

Индуцированная метрика на гиперboloиде $\mathbb{H}^3$ принимает более простой диагональный вид, если ввести сферические координаты r, θ, φ в подпространстве $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{3,1}$ с координатами x, y, z (18.33). Тогда уравнение гиперboloида примет вид

$$r^2 - w^2 = -a^2 \quad \Leftrightarrow \quad w = \pm \sqrt{a^2 + r^2}.$$

Отсюда следует равенство дифференциалов

$$dw = \pm \frac{r dr}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Подстановка dw в исходный интервал (18.54) приводит к диагональной индуцированной метрике

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/a^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (18.57)$$

Сферические координаты определены на всей верхней полё гиперboloида:

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Отсюда, в частности, следует, что индуцированная метрика на двуполостном гиперboloиде положительно определена. Это утверждение не является очевидным, т.к. исходным было пространство Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$.

Теперь сделаем замену радиальной координаты $r \mapsto \chi$:

$$r := a \operatorname{sh} \chi \quad \Rightarrow \quad dr = a \operatorname{ch} \chi d\chi,$$

где $\chi \in (0, \infty)$ – новая безразмерная радиальная координата. Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = a^2[d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (18.58)$$

Каждое двумерное сечение $r = a \operatorname{sh} \chi = \text{const}$ трехмерного гиперboloида $\mathbb{H}^3$ представляет собой двумерную сферу $\mathbb{S}_r^2 \subset \mathbb{H}^3$ с обычной индуцированной метрикой. Площадь этой сферы равна нулю в вершине $\chi = 0$ и бесконечно возрастает при $\chi \rightarrow \infty$.

Легко проверить, что объем каждой полы двуполостного гиперboloида бесконечен.

Теперь запишем метрику двуполостного гиперboloида $\mathbb{H}^3$ в стереографических координатах, которые часто встречаются в приложениях. Как и в случае трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$ совершим преобразование радиальной координаты $r \mapsto \rho(r)$ такое, чтобы было выполнено уравнение

$$\frac{1}{1 + r^2/a^2} \left(\frac{dr}{d\rho} \right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2}.$$

С точностью до несущественной постоянной интегрирования решение имеет вид

$$r = \frac{\rho}{1 - \frac{\rho^2}{4a^2}}.$$

После этого преобразования радиальной координаты метрика становится конформно плоской:

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{\left(1 - \frac{\rho^2}{4a^2}\right)^2}. \quad (18.59)$$

Метрика двуполостного гиперboloида $\mathbb{H}^3$ определена внутри шара $\rho < \frac{1}{2a}$. Значение $\rho = 0$ соответствует вершине гиперboloида $r = 0$, а $\rho = 2a$ – бесконечно удаленной точке $r = \infty$.

В евклидовом пространстве $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ можно ввести декартовы координаты (18.39). Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2}{\left(1 - \frac{x^2}{4a^2}\right)^2}. \quad (18.60)$$

Она отличается от метрики трехмерной сферы (18.40) только формальной заменой $a^2 \mapsto -a^2$.

Геометрические характеристики двуполостного гиперboloида получаются из формул (18.42)–(18.43) заменой $a^2 \mapsto -a^2$:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}}{a^2}, \\ R_{\mu\rho} &= \frac{2g_{\mu\rho}}{a^2}, \\ R &= \frac{6}{a^2}, \quad K = -\frac{3}{a^2}. \end{aligned} \quad (18.61)$$

Отсюда следует, что двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^3$ с индуцированной метрикой является пространством постоянной отрицательной кривизны.

Лоренцева метрика (18.54) и уравнение (18.55), определяющее вложение, инвариантны относительно группы Лоренца $\mathbb{O}(3, 1)$, которая действует в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$ обычным образом. Группа Ли $\mathbb{O}(3, 1)$ шестипараметрическая, и поэтому в $\mathbb{R}^{3,1}$ существует шесть векторов Киллинга:

$$K_{ij} := x_i \partial_j - x_j \partial_i, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (18.62)$$

где $\{x^i\} := \{x, y, z, w\}$, и $x_i := x^j \eta_{ji}$, $\eta_{ij} := \text{diag}(+++-)$. Нетрудно проверить, что векторные поля Киллинга удовлетворяют алгебре Ли $\mathfrak{so}(3, 1)$:

$$[K_{ij}, K_{kl}] = -\eta_{ik}K_{jl} + \eta_{il}K_{jk} + \eta_{jk}K_{il} - \eta_{jl}K_{ik}. \quad (18.63)$$

Чтобы получить явные выражения для векторов Киллинга на $\mathbb{H}^3$ поступим так же, как и в случае сферы $\mathbb{S}^3$. А именно, будем рассматривать переменные r, χ, θ, φ в качестве сферических координат в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$:

$$\begin{aligned} x &:= r \operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \varphi, & z &:= r \operatorname{sh} \chi \cos \theta, \\ y &:= r \operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \varphi, & w &:= r \operatorname{ch} \chi. \end{aligned}$$

При этом вершине гиперboloида соответствует значение $\chi = 0$.

Нетрудно проверить следующие формулы:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \operatorname{sh}^2 \chi \sin^2 \theta, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \operatorname{sh}^2 \chi, \\ -x^2 - y^2 - z^2 + w^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Обратные преобразования координат имеют вид

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{w^2 - x^2 - y^2 - z^2} \\ \chi &= \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{w}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Частные производные координат r, χ, θ, φ по координатам x, y, z, w легко вычисляются и имеют вид (18.46) с заменой

$$\sin \chi \mapsto \operatorname{sh} \chi, \quad \cos \chi \mapsto \operatorname{ch} \chi.$$

Поскольку мы находимся в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$, то декартовы координаты с нижним индексом имеют вид $(x_i) = (x, y, z, -w)$. Теперь нетрудно найти явный вид векторных полей Киллинга в сферических координатах:

$$\begin{aligned} K_{12} &= \partial_\varphi, \\ K_{13} &= -\cos \varphi \partial_\theta + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \partial_\varphi, \\ K_{14} &= \sin \theta \cos \varphi \partial_\chi + \operatorname{cth} \chi \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta - \frac{\operatorname{cth} \chi \sin \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\ K_{23} &= -\sin \varphi \partial_\theta - \operatorname{cth} \theta \cos \varphi \partial_\varphi, \\ K_{24} &= \sin \theta \sin \varphi \partial_\chi + \operatorname{cth} \chi \cos \theta \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\operatorname{cth} \chi \cos \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\ K_{34} &= \cos \theta \partial_\chi - \operatorname{cth} \chi \sin \theta \partial_\theta. \end{aligned} \tag{18.64}$$

Как видим, векторы Киллинга не зависят от радиуса r и не имеют вдоль него компонент.

Векторные поля Киллинга можно также записать в стереографических координатах аналогично тому, как это было сделано для сферы в предыдущем разделе.

Как и для сферы $\mathbb{S}^3$ распределение векторных полей Киллинга находится в инволюции и, согласно теореме Фробениуса, определяет интегральные подмногообразия в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$. Этими интегральными подмногообразиями являются двуполостные гиперboloиды $\mathbb{H}^3$, определяемые равенством $r = a$. Таким образом, на двуполостном гиперboloиде определено максимальное число (шесть) линейно независимых векторных полей Киллинга

(18.64). Следовательно, согласно теореме 2.3.2, двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^3$ является пространством постоянной кривизны, что уже было проверено нами с помощью прямых вычислений (18.61).

Рассмотрим вершину северной полу гиперboloида $x = y = z = 0$, $w = a$. Группа изометрий этой точки является группа Ли трехмерных вращений $\mathrm{SO}(3)$. Ее генераторами являются векторные поля Киллинга K_{12} , K_{13} и K_{23} , которые мы рассмотрим в декартовой системе координат (18.62). Они обращаются в нуль в вершине, и поэтому эта точка является неподвижной относительно действия подгруппы $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{SO}(3, 1)$. В вершине северной полу гиперboloида остальные векторные поля Киллинга принимают вид

$$K_{14}^\circ = a \partial_x, \quad K_{24}^\circ = a \partial_y, \quad K_{34}^\circ = a \partial_z,$$

т.е. имеют тот же вид, что и трансляции в трехмерном евклидовом пространстве. Поэтому эти векторные поля играют роль трансляций для вершины северной полу гиперboloида. Следовательно, многообразие $\mathbb{H}^3$ однородно и изотропно в окрестности вершины северной полу гиперboloида. Из явного вида коммутатора векторных полей Киллинга (18.63) вытекает, что векторы Киллинга K_{14} , K_{24} и K_{34} не образуют подалгебры в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3, 1)$ и, следовательно, не генерируют никакой подгруппы в группе Ли $\mathrm{SO}(3, 1)$. Это отличает “трансляции” в группе $\mathrm{SO}(3, 1)$ от трансляций в группе Пуанкаре, где они образуют подгруппу.

Поскольку группа Ли изометрий $\mathrm{O}(3, 1)$ действует на двуполостном гиперboloиде $\mathbb{H}^3$ транзитивно, то все, сказанное выше о вершине северной полу гиперboloида, справедливо для любой точки $\mathbb{H}^3$. Поэтому двуполостный гиперboloид $\mathbb{H}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ является однородным и изотропным пространством в смысле определения, данного в разделе 2.3.

Группа Лоренца $\mathrm{SO}(3, 1)$ действует на верхней полу гиперboloида $\mathbb{H}^3$ транзитивно. Поэтому верхняя полу гиперboloида является однородным пространством. Группа изотропии произвольной точки из $\mathbb{H}^3$ изоморфна группе трехмерных вращений $\mathrm{SO}(3)$. Поэтому, как многообразие, верхняя полу гиперboloида $\mathbb{H}^3$ изоморфна фактор пространству

$$\mathbb{H}^3 \approx \frac{\mathrm{SO}(3, 1)}{\mathrm{SO}(3)}. \quad (18.65)$$

18.3. Вселенная Фридмана

Во вселенной очень много объектов, типичными представителями которых являются звезды, вокруг которых вращаются планеты. Звезды объединены в галактики, которые, в свою очередь, образуют скопления галактик. Кроме этого во вселенной присутствует электромагнитное излучение, метеориты, кометы и множество других объектов, о многих из которых мы в настоящее время, вполне возможно, и не догадываемся. К настоящему времени человечество накопило довольно много данных, полученных в результате наблюдений за звездным небом.

Согласно современным наблюдательным данным трехмерное пространство, которое нас окружает, в каждый момент времени $t := x^0$ в крупном масштабе является однородным и изотропным. Правильнее сказать, что современные данные не противоречат предположению об однородности и изотропии вселенной, которые являются естественными с физической точки зрения. Физически однородность пространства означает, что свойства вселенной не зависят от того, какая точка выбрана в качестве начала системы координат, а изотропия – что свойства вселенной не зависят от направления, выбранного в каждой точке пространства. Однородность и изотропию вселенной часто называют *космологическим принципом*. Слова “в крупном масштабе” следует понимать по аналогии с однородностью газа: нельзя говорить об однородности в малых областях вселенной; она однородна только после усреднения по достаточно большим областям пространства, включающим много скоплений галактик.

Об изотропии вселенной говорит изотропия реликтового микроволнового излучения, которое было открыто А. Пензиасом и Р. Вилсоном в 1965 году [169]. За это открытие они получили Нобелевскую премию. Впоследствии реликтовое излучение было измерено в широком диапазоне частот. С высокой степенью точности оно является изотропным и неполяризованным, а его спектр соответствует излучению абсолютно черного тела с температурой около $2,7^\circ K$.

Для построения модели вселенной в рамках общей теории относительности слов однородная и изотропная вселенная недостаточно. Определение и математический смысл этим словам был дан в разделе 2.3. Там было доказано, что однородное и изотропное многообразие является пространством постоянной кривизны. Верно также обратное утверждение: если (псевдо)риманово многообразие является пространством постоянной кривизны в смысле определения (2.28) при $R = \text{const}$, то оно является однородным и изотропным. Для построения космологической модели мы требуем, чтобы все сечения пространства-времени, соответствующие постоянному времени, и которые мы предполагаем пространственноподобными, были однородными и изотропными, т.е. пространствами постоянной кривизны, которые имеют максимально возможное число (шесть) векторов Киллинга. При этом в каждой точке пространства три векторных поля Киллинга генерируют группу вращений $\mathbb{O}(3)$ (изотропия вселенной) и три векторных поля Киллинга – симметрию относительно “трансляций” (однородность вселенной), как было показано в разделах 18.2.1 и 18.2.2.

18.3.1. Метрика однородной и изотропной вселенной. При рассмотрении моделей вселенных Фридмана мы предполагаем, что пространство-время с топологической точки зрения представляет собой топологическое произведение $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$, где $t \in \mathbb{R}$ – временная ось и $x = (x^\mu) \in \mathbb{S}$, $\mu = 1, 2, 3$, – трехмерное пространство постоянной кривизны с отрицательно определенной метрикой. Это требование эквивалентно условию, что все пространственные сечения $\mathbb{M}$, соответствующие постоянному времени $t = \text{const}$, являются пространствами постоянной кривизны $\mathbb{S}$. Кроме того, мы также предполагаем, что пространство-время является геодезически полным, т.е. любую геодезическую (экстремаль) можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра. Это требование необходимо для того, чтобы, например, рассматривать в качестве пространства постоянной кривизны всю сферу целиком, а не какую либо ее часть.

В дальнейшем мы увидим, что космологические решения уравнений Эйнштейна часто имеют сингулярности, и решение определено не на всей оси времени, а на полуоси или на конечном интервале. Для таких решений пространство-время не является геодезически полным. В настоящем разделе мы рассматриваем только кинематические свойства метрики и, для простоты, будем считать, что метрика определена на всей вещественной оси $t \in \mathbb{R}$.

Прежде чем дать определение однородной и изотропной вселенной, напомним некоторые свойства пространств постоянной кривизны. В рассматриваемом случае под пространством постоянной кривизны мы понимаем пару $(\mathbb{S}, \overset{\circ}{g})$, где $\mathbb{S}$ – трехмерное многообразие и $\overset{\circ}{g}$ – заданная на нем метрика, которая удовлетворяет равенству

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\overset{\circ}{K}}{3} \left(\overset{\circ}{g}_{\mu\rho}\overset{\circ}{g}_{\nu\sigma} - \overset{\circ}{g}_{\mu\sigma}\overset{\circ}{g}_{\nu\rho} \right), \quad (18.66)$$

где $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ – тензор кривизны для метрики $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ и $\overset{\circ}{K} \in \mathbb{R}$ – некоторая постоянная (гауссова кривизна). Напомним, что на пространственных сечениях мы выбираем отрицательно определенную метрику, и поэтому для пространств положительной кривизны $\overset{\circ}{K} < 0$. Соответствующий тензор Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} = \frac{2\overset{\circ}{K}}{3}\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \quad \overset{\circ}{R} = 2\overset{\circ}{K}. \quad (18.67)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В разделах 18.2.1 и 18.2.2 было показано, что метрика пространств постоянной кривизны в стереографических координатах является конформно плоской. Это значит, что тензор Коттона для метрики $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ равен нулю. В этом также нетрудно убедиться с помощью прямых вычислений, используя явные выражения (18.66) и (18.67). Напомним, что тензор Вейля для трехмерных (псевдо)римановых многообразий тождественно равен нулю.

Координаты на $\mathbb{S}$ можно масштабировать таким образом, что гауссова кривизна $\overset{\circ}{K}$ будет принимать только три значения: $\overset{\circ}{K} = 1, 0, -1$. Следовательно, возможны три случая: $\overset{\circ}{K} = -1$, $\mathbb{S} \approx \mathbb{S}^3$ – трехмерная сфера (пространство положительной кривизны, замкнутая вселенная); $\overset{\circ}{K} = 0$, $\mathbb{S} \approx \mathbb{R}^3$ – трехмерное евклидово пространство (пространство нулевой кривизны, открытая вселенная) и $\overset{\circ}{K} = 1$, $\mathbb{S} \approx \mathbb{H}^3$ – трехмерное гиперболическое пространство или псевдосфера (пространство отрицательной кривизны, открытая вселенная).

Все три пространства постоянной кривизны $\mathbb{S} = \{\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3\}$ являются связными и односвязными. При этом под пространством $\mathbb{H}^3$ мы понимаем верхнюю полу́ двуполостного гиперболоида.

Отметим, что любое геодезически полное пространство постоянной кривизны является фактор пространством универсальной накрывающей $\mathbb{S} = \{\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3\}$ по некоторой группе преобразований $\mathbb{G}$, действующей на $\mathbb{S}$ свободно и собственнo разрывно (см., например, [24], следствие 2.4.10).

Если кривизна пространственных сечений равна нулю или отрицательна, то вселенная также может быть замкнута, если евклидово $\mathbb{R}^3$ или гиперболическое $\mathbb{H}^3$ пространства факторизовать по группе преобразований, действующей свободно и собственнo разрывно. Например, для евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ после факторизации мы получим трехмерный цилиндр или тор. Дальнейшее рассмотрение мы, для определенности, ограничим только универсальными накрывающими $\mathbb{S} = \{\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3\}$.

Любое пространство постоянной кривизны является однородным и изотропным (см. раздел 2.3). Это значит, что на пространственных сечениях определена шестипараметрическая группа преобразований

$$\mathbb{G} = \begin{cases} \mathrm{SO}(4), & \mathbb{S} = \mathbb{S}^3 \quad \text{– сфера,} \\ \mathrm{ISO}(3), & \mathbb{S} = \mathbb{R}^3 \quad \text{– евклидово пространство,} \\ \mathrm{SO}(3, 1), & \mathbb{S} = \mathbb{H}^3 \quad \text{– гиперболоид.} \end{cases} \quad (18.68)$$

Следовательно, на каждом трехмерном пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ определены шесть линейно независимых векторных полей Киллинга $K_i = K_i^\mu(x)\partial_\mu$, $i = 1, \dots, 6$. В каждой точке $x \in \mathbb{S}$ три векторных поля Киллинга соответствуют трансляциям (однородность), а три – вращениям (изотропия).

Поскольку пространство-время четырехмерно, а группа преобразований определена только на пространственных сечениях $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{M}$, то ее действие надо доопределить на всем $\mathbb{M}$. Будем считать, что группа преобразований не действует на время (см. раздел 2.5):

$$\begin{aligned} t &\mapsto t' = t, \\ x^\mu &\mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon K^\mu, \quad \epsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (18.69)$$

Тогда соответствующие векторные поля Киллинга на $\mathbb{M}$ имеют равную нулю временную компоненту, $\{K_i^\alpha\} = \{0, K_i^\mu\}$, где пространственные компоненты $K_i^\mu(t, x)$ в общем случае зависят от времени. Ясно, что алгебра Ли группы преобразований осталась прежней, т.к. время t входит в компоненты векторных полей Киллинга K_i как параметр.

Теперь у нас есть пространство-время $(\mathbb{M}, g)$, на котором определена группа преобразований, порожденная инфинитезимальными преобразованиями (18.69), и мы в состоянии дать

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вселенная $(\mathbb{M}, g)$ называется *однородной и изотропной*, если

- 1) многообразие $\mathbb{M}$ представляет собой топологическое произведение $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$, где $t \in \mathbb{R}$ – время и $\mathbb{S}$ – трехмерное пространство постоянной кривизны с отрицательно определенной метрикой;
- 2) метрика g на $\mathbb{M}$ инвариантна относительно преобразований (18.69), порожденных преобразованиями симметрии для $\mathbb{S}$.

Из теорем 2.5.1 и 2.5.2 вытекает, что с точностью до преобразования координат наиболее общий вид метрики однородной и изотропной вселенной следующий

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (18.70)$$

где $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$ – отрицательно определенная метрика на $\mathbb{S}$, не зависящая от времени. Выражение “наиболее общей” означает, что любая метрика однородной и изотропной вселенной приводится к виду (18.70) с помощью преобразования координат. Функция времени $a(t) > 0$ предполагается достаточно гладкой и называется *масштабным множителем*. При этом векторные поля Киллинга не зависят от времени. Как видим, требование однородности и изотропии вселенной приводит к тому, что вся зависимость метрики от времени содержится в масштабном множителе, который определяется уравнениями Эйнштейна.

Впервые метрику вида (18.70) для космологических моделей вселенных рассмотрел А. Фридман [170, 171], и она называется *метрикой Фридмана*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что из изотропии вселенной следует ее однородность (теорема 2.3.1), поэтому можно было бы просто говорить об изотропной вселенной. Тем не менее мы будем употреблять термин “однородная и изотропная вселенная”, поскольку эпитет “однородная” отражает важные физические свойства вселенной, и это также принято в современной литературе.

Из вида метрики (18.70) следует, что однородная и изотропная вселенная является сплетенным произведением вещественной прямой $\mathbb{R}$ и пространства постоянной кривизны $\mathbb{S}$, которое было определено в разделе 16.1.

Метрика (18.70) имеет блочно диагональный вид, и, в соответствии с результатами раздела 7.12.2, часы во всей вселенной можно синхронизировать. Поэтому система координат (t, x^μ) является синхронной, и координата t называется *космологическим временем*. Ситуация здесь аналогична тому, что имеет место в механике Ньютона: наблюдаемое время t едино для всех точек вселенной. Сравнение наблюдательных космологических данных с теорией проводится, как правило, с использованием метрики в виде (18.70). К сожалению, эта процедура не является инвариантной, т.к. вид метрики зависит от выбора системы отсчета.

Метрика Фридмана (18.70) допускает по крайней мере шестипараметрическую группу симметрии (18.68), которая действует на пространственных сечениях $t = \text{const}$. Масштабный множитель находится из уравнений Эйнштейна, и в некоторых случаях группа симметрии пространства-времени может быть шире.

Дадим эквивалентное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вселенная $(\mathbb{M}, g)$ называется *однородной и изотропной*, если

- 1) все сечения постоянного времени, $t = \text{const}$, являются пространствами постоянной кривизны $\mathbb{S}$;
- 2) внешняя кривизна гиперповерхностей $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{M}$ является однородной и изотропной.

Внешняя кривизна вложенных гиперповерхностей определена в разделе 8.3. Для блочно диагональной метрики (2.40) внешняя кривизна (8.44) пропорциональна производной по времени от метрики на пространственных сечениях

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{\mu\nu}.$$

Последнее определение однородной и изотропной вселенной эквивалентно первому определению. Действительно, первое требование эквивалентно тому, что пространство-время является топологическим произведением $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$. После этого метрику можно привести к блочно диагональному виду (2.40). Затем второе условие в определении ведет к уравнению (2.45), и можно следовать доказательству теоремы 2.5.2.

Заметим, что второе условие в определении является необходимым, т.к. метрика (18.84), рассмотренная в следующем разделе дает контрпример.

Вычислим геометрические характеристики метрики (18.70), не фиксируя координат на пространствах постоянной кривизны. Простые вычисления показывают, что только четыре символа Кристоффеля отличны от нуля:

$$\begin{aligned}\Gamma_{0\mu}{}^\nu &= \Gamma_{\mu 0}{}^\nu = \frac{\dot{a}}{a}\delta_\mu^\nu, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^0 &= -a\dot{a}\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho,\end{aligned}\tag{18.71}$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho$ – символы Кристоффеля для метрики $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ и точка обозначает дифференцирование по t . Тензор кривизны имеет только две отличные от нуля независимые компоненты:

$$\begin{aligned}R_{0\mu 0\nu} &= a\ddot{a}\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= a^2\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + a^2\dot{a}^2(\overset{\circ}{g}_{\mu\rho}\overset{\circ}{g}_{\nu\sigma} - \overset{\circ}{g}_{\mu\sigma}\overset{\circ}{g}_{\nu\rho}),\end{aligned}\tag{18.72}$$

где $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ – тензор кривизны (18.66) трехмерных пространственных сечений для метрики $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$. Теперь вычислим тензор Риччи и скалярную кривизну:

$$\begin{aligned}R_{00} &= 3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{0\mu} &= R_{\mu 0} = 0, \\ R_{\mu\nu} &= \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + \frac{2}{3}\overset{\circ}{K}\right)\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \\ R &= \frac{2}{a^2}(3a\ddot{a} + 3\dot{a}^2 + \overset{\circ}{K}),\end{aligned}\tag{18.73}$$

где мы воспользовались выражением для тензора Риччи пространства постоянной кривизны (18.67).

Зная тензор кривизны (18.72), нетрудно вычислить тензор Вейля. Оказывается, что он тождественно равен нулю. Следовательно, метрика Фридмана относится к типу D по классификации Петрова и является конформно плоской.

Заметим, что скалярная кривизна (18.73), которая является геометрическим инвариантом, не зависит от пространственных координат. Это находится в согласии с требованием симметрии скалярных полей относительно действия транзитивных групп преобразований.

Конкретный вид метрики пространства постоянной кривизны $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ зависит от системы координат, выбранной на $\mathbb{S}$. Часто используются безразмерные сферические координаты χ, θ, φ , в которых метрика (положительно определенная) имеет вид

$$\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \begin{cases} d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), & \mathbb{S}^3, \\ d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), & \mathbb{R}^3, \\ d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), & \mathbb{H}^3. \end{cases} \quad (18.74)$$

Безразмерные сферические координаты для сферы $\mathbb{S}^3$ и двуполостного гиперболоида $\mathbb{H}^3$ были рассмотрены в разделах 18.2.1 и 18.2.2 соответственно. В этом случае масштабный множитель имеет размерность длины, $[a] = l$.

В стереографических координатах на сечениях $t = \text{const}$ метрика Фридмана примет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \eta_{\mu\nu}}{(1 + b_0 x^2)^2} \end{pmatrix}, \quad (18.75)$$

где $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(- - -)$ – отрицательно определенная евклидова метрика, и постоянная b_0 связана с гауссовой кривизной простым соотношением $\overset{\circ}{K} = 12b_0$ (напомним, что, поскольку метрика $\eta_{\mu\nu}$ на пространственных сечениях отрицательно определена, то $x^2 := x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} \leq 0$). Метрике (18.75) соответствует интервал

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{(1 + b_0 x^2)^2}.$$

В такой записи размерности следующие:

$$[t] = [x^\mu] = l, \quad [a] = 1, \quad [b_0] = l^{-2}. \quad (18.76)$$

Для пространств положительной ($b_0 < 0$) и нулевой ($b_0 = 0$) кривизны стереографические координаты определены во всем евклидовом пространстве $x \in \mathbb{R}^3$. Для пространств отрицательной кривизны ($b_0 > 0$) координаты определены внутри шара $|x^2| < 1/b_0$.

Стереографические координаты удобны для проведения вычислений. Поэтому вычислим геометрические характеристики для метрики Фридмана в виде (18.75). Отличные от нуля символы Кристоффеля равны

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\mu}{}^\nu &= \Gamma_{\mu 0}{}^\nu = \frac{\dot{a}}{a} \delta_\mu^\nu, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^0 &= -\frac{\dot{a}a}{(1 + b_0 x^2)^2} \eta_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho. \end{aligned} \quad (18.77)$$

Прямые вычисления показывают, что только две независимые компоненты тензора кривизны отличны от нуля:

$$\begin{aligned} R_{0\mu 0\nu} &= \frac{\ddot{a}a}{(1 + b_0 x^2)^2} \eta_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= a^2 \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{\dot{a}^2 a^2}{(1 + b_0 x^2)^2} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}), \end{aligned} \quad (18.78)$$

где $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ – тензор кривизны (18.66), построенный по метрике $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$.

Выпишем отличные от нуля компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну в стереографических координатах:

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{0\mu} &= R_{\mu 0} = 0, \\ R_{\mu\nu} &= \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 - 8b_0}{(1 + b_0x^2)^2} \eta_{\mu\nu}, \\ R &= \frac{6\ddot{a}a + 6\dot{a}^2 - 24b_0}{a^2}. \end{aligned} \quad (18.79)$$

В дальнейшем метрика Фридмана, как правило, будет использоваться в общем виде (18.70) без использования конкретной системы координат на пространственных сечениях. Этого оказывается достаточно для анализа уравнений Эйнштейна.

Для исследования свойств метрики Фридмана часто используется другая система координат в пространстве-времени, в которой метрика Фридмана конформно эквивалентна некоторой статической метрике. А именно, совершим преобразование временной координаты $t \mapsto \eta$, где монотонная функция $t = t(\eta)$ определяется дифференциальным уравнением

$$dt = a(t) d\eta. \quad (18.80)$$

Это уравнение при достаточно общих предположениях имеет решение. Постоянная интегрирования соответствует сдвигу новой временной координаты, $\eta \mapsto \eta + \text{const}$, и является несущественной. После преобразования временной координаты интервал принимает вид

$$ds^2 = a^2 \left(d\eta^2 + \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right), \quad (18.81)$$

где $a = a(t(\eta))$ – функция нового времени η . Метрика, стоящая в скобках, статична, и вся зависимость от времени вынесена в общий конформный множитель. В таком виде удобно исследовать причинную структуру пространства-времени, т.к. световые конусы для метрики $g_{\alpha\beta}$ те же, что и для статической метрики, стоящей в скобках.

18.3.2. Пример. Рассмотрим поучительный пример метрики, для которой пространственные сечения для всех моментов времени являются пространствами постоянной кривизны, а метрика в целом, тем не менее, не является однородной и изотропной.

Пусть метрика Фридмана задана в стереографических координатах (18.75). Совершим преобразование координат $x^\mu \mapsto x^\mu/a$. Тогда метрика вселенной перестанет быть диагональной, а масштабный множитель исчезнет:

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\dot{b}^2 x^2}{4b^2(1 + bx^2)^2} & \frac{\dot{b}x_\nu}{2b(1 + bx^2)^2} \\ \frac{\dot{b}x_\mu}{2b(1 + bx^2)^2} & \frac{\eta_{\mu\nu}}{(1 + bx^2)^2} \end{pmatrix}, \quad (18.82)$$

где

$$b(t) := \frac{b_0}{a^2(t)}, \quad (18.83)$$

и точка обозначает дифференцирование по времени. Мы видим, что метрика однородной и изотропной вселенной может быть недиагональной и не содержать масштабного множителя.

При этом скалярная кривизна пространственных сечений, которая пропорциональна $b(t)$, явно зависит от времени.

Теперь просто отбросим недиагональные члены, положим $g_{00} = 1$ и восстановим масштабный множитель. Тогда метрика примет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \eta_{\mu\nu}}{(1 + bx^2)^2} \end{pmatrix}. \quad (18.84)$$

Эта метрика содержит две произвольные функции времени: $a(t) > 0$ и $b(t)$. Она невырождена для всех значений b , включая нуль. При этом все пространственные сечения $t = \text{const}$ являются пространствами постоянной кривизны и, следовательно, однородны и изотропны. Эта метрика представляет самостоятельный интерес, т.к. появляется возможность исследовать такие решения, если они существуют, для которых функция $b(t)$ проходит через нуль. Это означает, что соответствующие решения уравнений Эйнштейна описывают изменение топологии пространственных сечений в процессе эволюции. Таких решений в настоящее время не найдено.

Отметим, что произвольную функцию $b(t)$ нельзя обратить в константу путем преобразования координат без появления недиагональных членов в метрике. Поэтому возникает парадокс: с одной стороны мы доказали, что наиболее общий вид метрики для однородной и изотропной вселенной содержит одну произвольную функцию – масштабный множитель (теорема 2.5.2). С другой стороны, метрика (18.84) содержит две произвольные и независимые функции. При этом все пространственные сечения $t = \text{const}$ однородны и изотропны.

Решение этого парадокса следующее. Пространственные компоненты (μ, ν) уравнений Киллинга (2.43) удовлетворяются, поскольку все пространственные сечения – пространства постоянной кривизны. Однако смешанные компоненты $(0, \mu)$ уравнений Киллинга (2.42) не удовлетворены. Действительно, в стереографических координатах три векторных поля Киллинга зависят от функции $b(t)$ и, следовательно, от времени t (18.51) (в этих формулах a – это радиус сферы, определяющий кривизну, а не масштабный множитель). Это означает, что второе утверждение теоремы (2.5.1) не выполнено. Поэтому метрика (18.84) не описывает однородную и изотропную вселенную.

Существует и другой способ убедиться в том, что метрика (18.84) не является однородной и изотропной. С этой целью вычислим скалярную кривизну

$$R = -\frac{24b}{a^2} + 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{1 + bx^2} \left(4 \frac{\dot{a} \dot{b} x^2}{a} + \ddot{b} x^2 \right) + 3 \frac{\dot{b}^2 x^4}{(1 + bx^2)^2} \right].$$

Она явно зависит от x , и, следовательно, не является однородной и изотропной функцией.

18.3.3. Космологическое красное смещение. Если масштабный множитель меняется со временем, $\dot{a} \neq 0$, то расстояние между двумя наблюдателями, имеющими фиксированные пространственные координаты, скажем, $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, также меняется со временем. Это приводит к смещению частот световых сигналов. Если вселенная расширяется, $\dot{a} > 0$, то, как мы увидим, возникает красное смещение спектральных линий.

Свет распространяется вдоль нулевых экстремалей $\{t(\tau), x^\mu(\tau)\}$, $\tau \in \mathbb{R}$, при этом 4-вектор скорости $\{t', x^{\mu'}\}$, где штрих обозначает дифференцирование по каноническому параметру τ (точка зарезервирована для дальнейших обозначений), представляет собой 4-импульс фотона. Нулевая компонента импульса является энергией фотона и, следовательно, пропорциональна частоте фотона ω :

$$t' = \hbar \omega,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка. При этом длина волны фотона λ связана с частотой равенством

$$\lambda\omega = 2\pi c,$$

где c – скорость света.

Допустим, что мы находимся в точке x_0 и наблюдаем световой сигнал, испущенный кем-то в точке x_1 . Тогда величина красного смещения z определяется относительным смещением длин волн

$$z := \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1},$$

что можно выразить через нулевую компоненту скорости:

$$z = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{t'_1 - t'_0}{t'_0}. \quad (18.85)$$

Фотоны распространяются в пространстве-времени вдоль экстремалей $t(\tau), x^\mu(\tau)$. Уравнения для экстремалей определяются символами Кристоффеля (18.71) и имеют вид

$$\begin{aligned} t'' &= a\dot{g}_{\mu\nu}x^{\mu'}x^{\nu'}, \\ x^{\mu''} &= -2\frac{\dot{a}}{a}x^{\mu'}t' - \dot{\Gamma}_{\nu\rho}^{\mu}x^{\nu'}x^{\rho'}, \end{aligned} \quad (18.86)$$

где точка обозначает дифференцирование по t . Поскольку фотоны распространяются вдоль нулевых экстремалей, то для них выполнено равенство

$$t'^2 + a^2\dot{g}_{\mu\nu}x^{\mu'}x^{\nu'} = 0.$$

Подстановка этого выражения в правую часть первого уравнения (18.86) приводит к равенству

$$t'' + \frac{\dot{a}}{a}t'^2 = 0.$$

Разделим это равенство на t' и проинтегрируем вдоль экстремали. В результате получим условие на нулевую компоненту 4-скорости фотона:

$$at' = \text{const.}$$

Отсюда следует, что красное смещение можно выразить через масштабный множитель:

$$z = \frac{a_0 - a_1}{a_1}. \quad (18.87)$$

Это – универсальная и точная формула для красного смещения. Она определяется масштабным множителем a_1 в момент испускания света и a_0 в момент наблюдения, и не зависит от истории сигнала в промежуточные моменты времени. Из полученной формулы вытекает, что относительное смещение длин волн положительно, если вселенная расширяется, и отрицательно – если сжимается.

Другое важное следствие из вида метрики Фридмана – это связь красного смещения с расстоянием до объекта. Для света, испущенного и полученного в близких пространственно-временных точках, справедливо равенство

$$dt^2 = dl^2, \quad c = 1,$$

где dl – пространственное расстояние между событиями:

$$dl^2 := -a^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Поэтому из формулы (18.87) следуют равенства:

$$z := \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{da}{a} = \frac{\dot{a} dt}{a} = \frac{\dot{a}}{a} dl.$$

Введем *постоянную Хаббла*

$$H := \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0}. \quad (18.88)$$

Тогда красное смещение спектральных линий в настоящее время t_0 определяется *законом Хаббла*

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = H dl. \quad (18.89)$$

Содержание этого закона состоит в том, что относительное красное смещение спектральных линий прямо пропорционально расстоянию до объекта. Этот закон получен для бесконечно близких событий. На практике он приближенно справедлив для конечных расстояний, $dl \mapsto \Delta l$. Современные наблюдательные данные показывают, что закон Хаббла справедлив с высокой степенью точности, но все же “постоянная Хаббла” не является постоянной. Поэтому постоянную Хаббла называют также *параметром Хаббла*.

Если параметр Хаббла является постоянным, как долго считалось в середине XX века, то из уравнения (18.88) следует экспоненциальное поведение масштабного множителя

$$a = C e^{Ht}, \quad C > 0.$$

Если $H > 0$, то происходит экспоненциальный рост. Для решения некоторых космологических проблем, которые мы обсуждать не будем, предполагают, что масштабный множитель, по крайней мере на ранних этапах эволюции вселенной, экспоненциально растет. Такой экспоненциальный рост масштабного множителя называется *инфляцией*. Предположение об инфляционной стадии развития вселенной в настоящее время широко распространено. Космологических моделей, приводящих к инфляции, не так много. Позже мы увидим, что это происходит, например, в решении де Ситтера (18.130).

Наша интуиция основана на механике Ньютона. Поэтому посмотрим на наблюдаемое красное смещение спектральных линий с другой точки зрения. Пусть галактики движутся в плоском пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. Если галактика удаляется, то наблюдаемая длина волны светового сигнала будет увеличиваться, а частота – уменьшаться (красное смещение). Это явление известно как эффект Доплера. Тогда в нерелятивистском пределе $V/c \ll 1$ частота в первом порядке меняется по правилу

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{V}{c} \right),$$

где V – скорость галактики, и c – скорость света. Подстановка этого выражения в формулу для красного смещения (18.85) приводит к равенству

$$z = \frac{V}{c}. \quad (18.90)$$

Дальнейшее сравнение с законом Хаббла позволяет найти скорость галактики

$$V = cH\Delta l,$$

где Δl – расстояние между галактиками. Мы видим, что наблюдаемая скорость разбегания галактик прямо пропорциональна расстоянию.

В заключение вычислим наблюдаемую скорость разбегания галактик из других соображений. Согласно предложению 18.3.1, которое будет доказано в следующем разделе, в однородной и изотропной вселенной частицы среды (галактики) движутся вдоль экстремалей, совпадающих с координатными линиями времени. То есть пространственные координаты галактик x^μ остаются неизменными. Поэтому наблюдаемое расстояние до галактики примерно равно

$$\Delta l = a(t) \sqrt{-\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu}.$$

Это расстояние меняется только благодаря наличию масштабного множителя. Вычислим наблюдаемую скорость

$$V := \frac{d}{dt} \Delta l = c \frac{\dot{a}}{a} \Delta l = cH \Delta l, \quad (18.91)$$

где мы восстановили скорость света, $x^0 = ct$, и $\dot{a} := da/dx^0$. Как видим, полученная формула совпадает с тем, что было получено из закона Хаббла.

18.3.4. Уравнения движения. Масштабный множитель, входящий в метрику Фридмана, находится из уравнений Эйнштейна и зависит от выбора модели для полей материи. В дальнейшем мы рассмотрим несколько моделей вселенной, для которых масштабный множитель имеет явное аналитическое выражение.

Прежде всего получим уравнения Эйнштейна. Из компонент тензора Риччи и скалярной кривизны (18.73) составляем тензор Эйнштейна. Он имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= -3 \frac{\epsilon + \dot{a}^2}{a^2}, \\ G_0^\mu &= 0, \quad G_\mu^0 = 0, \\ G_\mu^\nu &= -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} \delta_\mu^\nu, \end{aligned} \quad (18.92)$$

где постоянная ϵ , которая введена для удобства, пропорциональна гауссовой кривизне $\overset{\circ}{K}$:

$$\epsilon := -\overset{\circ}{K}/3 = -4b_0. \quad (18.93)$$

Постоянная b_0 была определена стереографическими координатами (18.75). Пространственные сечения $t = \text{const}$ при этом являются сферой $\mathbb{S}^3$ ($\epsilon > 0$), евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ ($\epsilon = 0$) или гиперboloидом $\mathbb{H}^3$ ($\epsilon < 0$).

Мы записываем компоненты тензора Эйнштейна (18.92) с одним ковариантным и одним контравариантным индексом. Это удобно, т.к. в этом случае тензор энергии-импульса полей материи, как мы увидим, является диагональным.

Следующий шаг состоит в выборе тензора энергии-импульса материи. При построении моделей вселенной мы используем космологический принцип, который состоит из двух независимых требований:

- Метрика пространства-времени должна быть однородна и изотропна.
- Тензор энергии-импульса материи должен быть однороден и изотропен.

Первому требованию мы уже удовлетворили, выбрав метрику Фридмана (18.70).

Наиболее общий вид однородных и изотропных функций, векторов и тензоров второго ранга был установлен в разделе 2.4. В общей теории относительности тензор энергии-импульса

$T_{\alpha\beta}$ является четырехмерным симметричным тензором второго ранга. Группа изометрий действует только на пространственных сечениях, и по отношению к ее действию тензор энергии-импульса разлагается на три неприводимые компоненты:

$$\begin{aligned} T_{00} & - \text{скаляр,} \\ T_{\mu 0} = T_{0\mu} & - \text{вектор,} \\ T_{\mu\nu} & - \text{симметричный тензор второго ранга.} \end{aligned} \quad (18.94)$$

Из результатов, полученных в разделе 2.4, следует, что наиболее общий вид инвариантных компонент следующий

$$T_{00} = \mathcal{E}(t), \quad T_{0\mu} = T_{\mu 0} = 0, \quad T_{\mu\nu} = -\mathcal{P}(t)\overset{\circ}{g}_{\mu\nu},$$

где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$ – некоторые функции (скалярные поля). Сравнение этих компонент с тензором энергии-импульса сплошной среды

$$T^{\alpha\beta} = (\mathcal{E} + \mathcal{P})u^{\alpha}u^{\beta} - \mathcal{P}g^{\alpha\beta}, \quad (18.95)$$

показывает, что $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$ есть ни что иное как плотность энергии и давление материи соответственно, и тензор энергии-импульса записан в сопутствующей системе координат $u = (1, 0, 0, 0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18.3.1. *Если u метрика, u тензор энергии-импульса среды однородны и изотропны, то линии тока непрерывной среды являются геодезическими (экстремальными).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем систему координат так, чтобы метрика была метрикой Фридмана (18.70) и тензор энергии-импульса имел вид (18.94). Символы Кристоффеля были вычислены ранее (18.71), и уравнения для экстремалей имеют вид (18.86). Ясно, что координатные линии $x^0 = \tau$, $x^{\mu} = \text{const}$ являются экстремальными, где $\tau \in \mathbb{R}$ – канонический параметр. С другой стороны, эти координатные линии представляют собой линии тока для векторного поля скорости $u = (1, 0, 0, 0)$.

Таким образом, в рассматриваемой космологической модели выбрана синхронная система координат, в которой метрика имеет вид (18.70), и каждая точка сплошной среды движется вдоль экстремали, которая совпадает с координатной линией $x^0 := t$. Точки среды покоятся в том смысле, что пространственные координаты имеют постоянные значения $x^{\mu} = \text{const}$. При этом наблюдаемое расстояние между частицами среды может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от поведения масштабного множителя.

Здесь возникает вопрос. Если присутствует давление, то в общем случае частицы среды не будут двигаться по экстремальям, т.к. присутствуют не только гравитационные силы. Тем не менее рассматриваемая модель является самосогласованной. Действительно, поскольку давление зависит только от времени, то градиент давления параллелен вектору скорости. Следовательно, согласно уравнениям релятивистской гидродинамики (7.136), (7.137), движение частиц происходит вдоль экстремалей. Причиной этого является требование однородности и изотропии тензора энергии-импульса полей материи.

Приведенные выше аргументы однозначно фиксируют однородный и изотропный тензор энергии-импульса материи. С одним контра- и одним ковариантным индексом он всегда диагонален:

$$T_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} \end{pmatrix}. \quad (18.96)$$

Уравнения релятивистской гидродинамики $\nabla_\beta T_\alpha^\beta = 0$, выполнение которых необходимо для разрешимости уравнений Эйнштейна, для метрики Фридмана (18.75) принимают вид

$$\dot{\mathcal{E}} + \frac{3\dot{a}}{a}(\mathcal{E} + \mathcal{P}) = 0. \quad (18.97)$$

Если подставить выражение для тензора энергии-импульса (18.96) в уравнения Эйнштейна с космологической постоянной Λ

$$\Phi_\alpha^\beta := G_\alpha^\beta + \delta_\alpha^\beta \Lambda + \frac{1}{2} T_\alpha^\beta = 0,$$

где мы для простоты положили гравитационную постоянную равной единице, $\kappa = 1$, и учесть явный вид тензора Эйнштейна (18.92), то получим два уравнения:

$$-3\frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} + \Lambda + \frac{1}{2}\mathcal{E} = 0, \quad (18.98)$$

$$-\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} + \Lambda - \frac{1}{2}\mathcal{P} = 0. \quad (18.99)$$

Продифференцируем уравнение (18.98) по времени t и учтем уравнение совместности (18.97). В результате получим, что уравнение (18.99) тождественно удовлетворяется. Можно проверить, что это свойство является следствием линейной зависимости уравнений Эйнштейна

$$\nabla_\beta \Phi_\alpha^\beta = 0,$$

вытекающей из ковариантности (см. раздел 7.4).

Таким образом, у нас есть два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения (18.98) и (18.97) на три неизвестные функции $a(t)$, $\mathcal{E}(t)$ и $\mathcal{P}(t)$. Чтобы замкнуть систему уравнений будем считать, что давление среды связано с плотностью энергии уравнением состояния. Для баротропной жидкости уравнение состояния имеет вид

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E}), \quad (18.100)$$

где $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ – некоторая достаточно гладкая функция. Это равенство корректно, т.к. плотность энергии и давление – скалярные поля (функции).

Таким образом, для вселенной Фридмана мы имеем два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения на две независимые функции: масштабный множитель a и плотность энергии $\mathcal{E}$, которые мы запишем в следующем виде

$$\dot{a}^2 = \frac{a^2}{3} \left(\frac{1}{2}\mathcal{E} + \Lambda \right) - \epsilon, \quad (18.101)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E} + \mathcal{P}(\mathcal{E})} = -3\frac{da}{a}. \quad (18.102)$$

Это и есть полная система уравнений для космологических моделей Фридмана.

Таким образом, при заданном уравнении состояния (18.100), решая уравнение (18.102), мы находим зависимость плотности энергии от масштабного множителя: $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a)$. Подставляя эту функцию в уравнение (18.101), мы получаем одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка на масштабный множитель. Это уравнение является основным в стандартных моделях однородной и изотропной вселенной.

Для интегрирования уравнения (18.101) удобно ввести временную координату $\eta = \eta(t)$, определенную равенством (18.80). Тогда уравнение (18.101) можно формально проинтегрировать

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{1}{6}\mathcal{E}a^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - \epsilon}}. \quad (18.103)$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу временной координаты $\eta \mapsto \eta + \text{const}$ и является несущественной. Знак $\pm$ соответствует выбору направления течения времени: если функция $a(t)$ является решением уравнений Фридмана, то $a(-t)$ – также решение. Зависимость плотности энергии от масштабного множителя, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a)$, находится из уравнения (18.102). Это решает поставленную задачу в общем виде. На практике, уравнения (18.102) и (18.103) решаются в явном виде далеко не всегда.

Не смотря на то, что одно из уравнений Эйнштейна (18.99) было отброшено как следствие остальных, из него можно сделать важные выводы. Перепишем уравнение (18.99) в виде

$$\ddot{a} = -\frac{a}{12}(\mathcal{E} + 3\mathcal{P}) + \frac{a\Lambda}{3}, \quad (18.104)$$

где мы использовали уравнение (18.98) для исключения $\dot{a}^2 + \epsilon$. Пусть $\Lambda = 0$ и $\mathcal{E} > 0$ и $\mathcal{P} \geq 0$, что соответствует обычной материи. По предположению, масштабный множитель положителен, $a > 0$, и, следовательно, $\ddot{a} < 0$. Это означает, что функция $a(t)$ вогнутая. Допустим, что в настоящее время t_0 вселенная расширяется, $\dot{a}(t_0) > 0$, что соответствует современным наблюдательным данным. Качественное поведение масштабного множителя в этом случае показано на рис. 18.2. Мы видим, что при конечном значении времени t масштабный множитель дол-

Рис. 18.2. Качественное поведение масштабного множителя $a(t)$ в предположении, что вселенная в настоящее время расширяется, $\dot{a}(t_0) > 0$.

жен обратиться в нуль, что соответствует большому взрыву. Этот вывод является довольно общим, т.к. не зависит от уравнения состояния материи и не использует какое либо из решений уравнений Эйнштейна. В космологии принято отсчитывать наблюдаемое время t от большого взрыва при $t = 0$.

Из уравнений Эйнштейна (18.98), (18.99) следует, что наличие космологической постоянной можно трактовать как поля материи с диагональным тензором энергии-импульса

$$T_{\Lambda\alpha}{}^{\beta} := 2\Lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта материя необычна, т.к. при $\Lambda > 0$ плотность энергии положительна, а давление отрицательно. Материя, обладающая таким свойством, называется *темной энергией*.

Понятие темной энергии играет важную роль в космологии. В 1998 году Сол Перлмуттер [172], Брайан П. Шмидт и Адам Рисс [173] открыли, что в настоящее время вселенная не просто расширяется, а расширяется с ускорением. За это открытие они получили Нобелевскую премию в 2011 году. Если принять модель вселенной Фридмана за основу, то из уравнения (18.104) вытекает, что обычная материя, $\mathcal{E} > 0$ и $\mathcal{P} > 0$, приводит к замедлению, а положительная космологическая постоянная – к ускорению. Таким образом, к ускорению приводит либо положительная космологическая постоянная, либо какая-то другая материя с отрицательным давлением (плотность энергии всегда считается положительной), которая была названа темной энергией. В настоящее время к темной энергии относят положительную космологическую постоянную и (или) другие модели материи, обсуждение которых выходит за рамки тех ограничений, которые поставил перед собой автор этих строк. Наличие темной энергии приводит к антигравитации: отталкиванию вместо притяжения. Это отталкивание и приводит к ускоренному расширению вселенной.

Существующие в настоящее время наблюдательные данные не противоречат представлению о темной энергии, как о положительной космологической постоянной. Поэтому данная точка зрения считается стандартной в современной космологии.

ЗАМЕЧАНИЕ. Помимо темной энергии в космологии используется понятие *темной материи*. Это – гипотетическая материя, которая не взаимодействует с электромагнитным полем и, следовательно, не видна, т.к. не излучает и не отражает фотонов. Понятие темной материи стало обсуждаться с 1922 года, когда Джеймс Джинс [174] и Якобус Каптейн [175] пришли к выводу, что большая часть вещества в нашей галактике (Млечный Путь) невидима, т.к. гравитационного поля всех видимых звезд явно недостаточно для удержания звезд, находящихся на периферии. Впоследствии нехватка видимого вещества была подтверждена для многих других галактик. Кандидатов на роль темной материи много, и мы их обсуждать не будем.

В настоящее время наблюдательные данные указывают на то, что темная энергия составляет более 70% всего вещества вселенной, а темная материя – более 20%. Если учесть еще межгалактический газ, то на нашу долю (звезды, планеты и др.) остается меньше половины процента всего вещества вселенной.

18.3.5. Вселенная Эйнштейна. Одну из первых космологических моделей в рамках общей теории относительности предложил А. Эйнштейн [176] в 1917 году задолго до статей А. Фридмана. Он нашел точное статическое решение для однородной и изотропной замкнутой вселенной, все пространственные сечения которой являются сферами, $\mathbb{S} = \mathbb{S}^3$. Это решение укладывается в общую схему однородной и изотропной вселенной с метрикой Фридмана.

Космологические уравнения Фридмана (18.98), (18.99) допускают статические решения. Положим

$$a = \text{const}, \quad \mathcal{E} = \text{const}, \quad \mathcal{P} = \text{const}.$$

Тогда уравнения (18.98) и (18.99) определяют равновесное значение плотности энергии и давления

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2 \left(3 \frac{\epsilon}{a^2} - \Lambda \right), \\ \mathcal{P} &= 2 \left(-\frac{\epsilon}{a^2} + \Lambda \right). \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют много решений в зависимости от значений постоянных ϵ и Λ (для замкнутых вселенных $\epsilon > 0$). Для обычной материи $\mathcal{P} \leq \mathcal{E}/3$. Отсюда вытекает ограничение сверху на космологическую постоянную

$$\Lambda \leq \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{a^2}.$$

С другой стороны, давление обычной среды положительно, $\mathcal{P} \geq 0$. Это дает оценку снизу

$$\frac{\epsilon}{a^2} \leq \Lambda.$$

Вместе получаем ограничение на значение космологической постоянной при заданных кривизне и, следовательно, ϵ , и масштабном множителе a :

$$\frac{\epsilon}{a^2} \leq \Lambda \leq \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{a^2}. \quad (18.105)$$

Как видим, для обычной материи это неравенство имеет нетривиальные решения только при $\epsilon > 0$ (замкнутая вселенная) и положительной космологической постоянной Λ .

Метрику вселенной Эйнштейна можно записать в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (18.106)$$

Из формул (18.72) и (18.66) вытекает, что у полного тензора кривизны для модели Эйнштейна отличны от нуля только пространственные компоненты

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = a^2 \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = a^2 \epsilon \left(\overset{\circ}{g}_{\mu\rho} \overset{\circ}{g}_{\nu\sigma} - \overset{\circ}{g}_{\mu\sigma} \overset{\circ}{g}_{\nu\rho} \right).$$

В своей статье [176] А. Эйнштейн нашел решение для пыли, $\mathcal{P} = 0$, в замкнутой вселенной, $\epsilon > 0$. В этом случае $\epsilon = a^2 \Lambda$, и была отмечена необходимость введения положительной космологической постоянной.

Наблюдательные данные последних лет говорят о том, что вселенная расширяется. Это не укладывается в статическую модель, которая рассмотрена выше. Поэтому статическая модель вселенной Эйнштейна в настоящее время носит теоретический характер: необходимо знать, что уравнения общей теории относительности допускают такие решения.

18.3.6. Линейное уравнение состояния. Согласно современным наблюдательным данным вселенная расширяется. Это приводит к необходимости построения нестационарных моделей вселенных.

Для того, чтобы построить конкретную космологическую модель и решить уравнения Фридмана (18.101), (18.102), необходимо задать уравнение состояния $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Важный класс космологических моделей описывается линейным уравнением состояния. Например, когда вселенная заполнена идеальным газом с уравнением состояния (7.133), пылью или излучением (7.129). Для упрощения некоторых последующих формул запишем линейное уравнение состояния в виде

$$\mathcal{P} = (\gamma - 1)\mathcal{E}, \quad \gamma = \text{const}. \quad (18.107)$$

Для обычной материи $1 \leq \gamma \leq 4/3$. Граничное значение $\gamma = 1$ соответствует пыли ($\mathcal{P} = 0$), а $\gamma = 4/3$ – излучению ($\mathcal{P} = \mathcal{E}/3$).

Часто говорят, что в случае пыли вселенная заполнена *холодной материей*. Это значит, что вселенная состоит из массивных частиц, которые движутся с нерелятивистскими скоростями, а безмассовыми частицами (излучением) можно пренебречь. В противоположном случае излучения, $\gamma = 4/3$, мы говорим, что вселенная заполнена *горячей материей*. Частицы горячей материи движутся с околосветовыми скоростями и ведут себя так же, как и безмассовые. В настоящее время в качестве стандартной космологической модели рассматривается так называемая Λ CDM-модель. Эта модель содержит космологическую постоянную Λ и холодную материю (от английского сокращения CDM = Cold Dark Matter). Λ CDM-модель экономна, и ее следствия хорошо согласуются с современными наблюдательными данными.

Можно доказать, что скорость звука в непрерывной среде превышает скорость света при $\mathcal{P} > \mathcal{E}$. Поэтому на давление накладывают ограничение сверху $\mathcal{P} < \mathcal{E}$, что немного увеличивает интервал значений постоянной γ в уравнении состояния (18.107).

Для линейного уравнения состояния (18.107) уравнение (18.102) легко интегрируется

$$\mathcal{E} = \frac{C}{a^{3\gamma}}, \quad (18.108)$$

где $C > 0$ – постоянная интегрирования. Полученное решение имеет простой физический смысл: плотность энергии обратно пропорциональна объему вселенной в данный момент времени a^3 в степени γ . Для пыли ($\mathcal{P} = 0$, $\gamma = 1$) плотность энергии просто пропорциональна плотности числа частиц.

Для сопоставления предсказаний теории с наблюдательными данными, необходимо фиксировать постоянные интегрирования в решениях уравнений Фридмана. Обычно полагают, что в настоящее время $t = t_0$ масштабный множитель равен единице, $a(t_0) = 1$. Тогда постоянная интегрирования в (18.108) равна плотности энергии (плотности числа частиц) в настоящий момент времени, $C = \mathcal{E}_0$.

Теперь запишем уравнение Фридмана (18.101) в виде

$$\dot{a}^2 + V(a) = -\epsilon, \quad (18.109)$$

где

$$V(a) := -Ma^{-3\gamma+2} - La, \quad (18.110)$$

и

$$M := \frac{\mathcal{E}_0}{6} = \text{const}, \quad L := \frac{\Lambda}{3} = \text{const}. \quad (18.111)$$

Напомним, что $\epsilon := -\mathring{K}/3$, где $\mathring{K}$ – гауссова кривизна пространственных сечений $t = \text{const}$ с отрицательно определенной метрикой. Уравнение (18.109) имеет тот же вид, что и закон сохранения энергии в механике Ньютона при одномерном движении точечной частицы в потенциальном поле $V(a)$ с полной энергией $-\epsilon$. Поэтому, нарисовав потенциал для фиксированных значений постоянных M , L и γ , можно определить точки поворота и понять качественное поведение решений.

Продемонстрируем интегрирование уравнений модели Фридмана в простейшем случае пыли, когда давление равно нулю, $\mathcal{P} = 0$. В этом случае плотность энергии пропорциональна плотности частиц

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{a^3}. \quad (18.112)$$

Положим, для простоты, космологическую постоянную равной нулю, $\Lambda = 0$. Тогда подстановка решения (18.112) в уравнение (18.109) дает простое уравнение на масштабный множитель

$$\dot{a}^2 - \frac{M}{a} = -\epsilon. \quad (18.113)$$

Решение данного уравнения удобно записать, используя вместо времени t координату η , определенную уравнением (18.80). Это уравнение имеет различные решения в зависимости от знака ϵ , т.е. в зависимости от знака кривизны пространственных сечений:

$$a = \begin{cases} \frac{M}{2\epsilon} [1 - \cos(\sqrt{\epsilon}\eta)], & \epsilon > 0, \\ \frac{M\eta^2}{4}, & \epsilon = 0, \\ \frac{M}{2|\epsilon|} [\text{ch}(\sqrt{|\epsilon|}\eta) - 1], & \epsilon < 0. \end{cases} \quad (18.114)$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу $\eta \mapsto \eta + \text{const}$ и положена равной нулю. Параметр η связан с временем следующими соотношениями:

$$t = \begin{cases} \frac{M}{2\epsilon^{3/2}} [\sqrt{\epsilon} \eta - \sin(\sqrt{\epsilon} \eta)], & \epsilon > 0, \\ \frac{M\eta^3}{12}, & \epsilon = 0, \\ \frac{M}{2|\epsilon|^{3/2}} [\text{sh}(\sqrt{|\epsilon|} \eta) - \sqrt{|\epsilon|} \eta], & \epsilon < 0, \end{cases} \quad (18.115)$$

где постоянная интегрирования, соответствующая сдвигу времени, положена равной нулю. Поскольку уравнение (18.113) инвариантно относительно инверсии времени, $t \mapsto -t$, то каждому решению $a(t)$ соответствует также решение $a(-t)$. Таким образом, равенства (18.114) и (18.115) определяют масштабный множитель $a(t)$ в параметрическом виде. Качественное поведение масштабного множителя для пространственных сечений положительной, нулевой и отрицательной кривизны для пыли показано на рис. 18.3. Во всех случаях масштабный мно-

Рис. 18.3. Качественное поведение масштабного множителя для пространственных сечений положительной, нулевой и отрицательной кривизны для пыли и излучения.

житель равен нулю в момент большого взрыва при $t = 0$. В настоящее время при $t = t_0$ он положителен. Дальнейшая эволюция масштабного множителя зависит от кривизны пространственных сечений. Для открытых моделей вселенных $\epsilon \leq 0$ и масштабный множитель монотонно возрастает. Для замкнутых моделей вселенных $\epsilon > 0$, масштабный множитель возрастает, достигает своего максимального значения и затем начинает убывать до нулевого значения, которое соответствует большому сжатию.

Для излучения $\gamma = 4/3$ при нулевой космологической постоянной уравнение Фридмана (18.109) принимает вид

$$\dot{a}^2 - \frac{M}{a^2} = -\epsilon.$$

Это уравнение легко решается

$$a = \sqrt{t(2\sqrt{M} - \epsilon t)}. \quad (18.116)$$

Качественное поведение масштабного множителя для излучения такое же, как и для пыли, и показано на рис. 18.3 для трех случаев: $\epsilon < 0$, $\epsilon = 0$ и $\epsilon > 0$. Если вселенная замкнута, $\epsilon > 0$,

то большой взрыв заканчивается большим сжатием. При этом время меняется в конечном интервале $0 < t < 2\sqrt{M}/\epsilon$. Для открытой вселенной, $\epsilon < 0$ или $\epsilon = 0$, после большого взрыва происходит бесконечное расширение вселенной.

Как уже упоминалось, качественное поведение решений можно понять, анализируя “потенциал” (18.110). При нулевой космологической постоянной, $L = 0$, для пыли, $\gamma = 1$, и излучения, $\gamma = 4/3$, он изображен на рис. 18.4. Если “энергия” $-\epsilon$ отрицательна, т.е. $\epsilon > 0$, масштабный

Рис. 18.4. Качественное поведение “потенциала” для пыли, $\gamma = 1$, и излучения, $\gamma = 4/3$.

множитель меняется в конечных интервалах $0 < a < a_{\max}$. Максимальное значение масштабного множителя определяется из условия

$$\dot{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V(a) = \epsilon.$$

Для пыли и излучения получаем следующие значения

$$a_{\max} = \begin{cases} M/\epsilon, & \gamma = 1, \\ \sqrt{M/\epsilon}, & \gamma = 4/3. \end{cases}$$

Для открытой вселенной $\epsilon \leq 0$, и масштабный множитель меняется в бесконечном полуинтервале $0 < a < \infty$, что соответствует бесконечному расширению.

Для уравнения Фридмана (18.109) аналитические решения известны 1) при $\epsilon = 0$ для всех γ ; 2) при $L = 0$ для $\gamma = 1$ и $\gamma = 4/3$ и 3) при $\gamma = 4/3$ для всех L и ϵ . Детальный анализ приведен в [177], глава 5. Некоторые решения не имеют космологических особенностей, но они не приемлемы с других точек зрения.

В заключение проанализируем более детально космологическую особенность для пыли и излучения. Уравнение Фридмана для пыли в общем случае имеет вид

$$\dot{a}^2 = \frac{M}{a} + La^2 - \epsilon. \quad (18.117)$$

Космологическая особенность возникает в решениях этого уравнения при $a \rightarrow 0$. Вблизи особенности уравнение принимает вид

$$\dot{a}^2 = \frac{M}{a},$$

независимо от значений космологической постоянной Λ и ϵ . Поэтому асимптотика масштабного множителя вблизи космологической особенности следующая

$$a \approx \left(\frac{9M}{4} \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}, \quad (18.118)$$

где мы положили постоянную интегрирования равной нулю. Подстановка полученной асимптотики в выражение для скалярной кривизны (18.79) приводит к следующей асимптотике при $t \rightarrow 0$

$$R \approx \frac{2}{t^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{2}{3} t^{-\frac{2}{3}} + K_0 \right) \approx \frac{4}{3t^2}.$$

Мы видим, что при конечном значении наблюдаемого времени $t = 0$ масштабный множитель обращается в нуль, метрика вырождается, и кривизна обращается в бесконечность. Отметим, что асимптотика скалярной кривизны не зависит от постоянных M , L и ϵ , входящих в уравнение Фридмана.

Для излучения уравнение Фридмана вблизи особенности имеет вид

$$\dot{a}^2 = \frac{M}{a^2},$$

также независимо от значения космологической постоянной Λ и кривизны пространственных сечений ϵ . Его решение имеет вид

$$a \approx M^{\frac{1}{4}} \sqrt{2t}. \quad (18.119)$$

Для скалярной кривизны (18.79) получаем следующую асимптотику

$$R \approx \frac{\overset{\circ}{K}}{\sqrt{M}t}.$$

Мы видим, что для излучения возникает сингулярность скалярной кривизны только при отличной от нуля кривизне пространственных сечений. Тем не менее кривизна имеет особенность и при $\overset{\circ}{K} = 0$. Для этого достаточно вычислить квадрат тензора Риччи, который является геометрическим инвариантом,

$$R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \frac{9\ddot{a}^2}{a^2} + \frac{3}{a^4} \left(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + \frac{2}{3} \overset{\circ}{K} \right)^2,$$

где мы использовали явный вид компонент тензора Риччи (18.79). Подстановка в это выражение асимптотики масштабного множителя (18.119) приводит к следующему ответу:

$$R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \approx \frac{3}{4t^4}.$$

Следовательно, квадрат тензора Риччи имеет особенность при $t \rightarrow 0$, которая не зависит от кривизны пространственных сечений. Интересно отметить, что асимптотика квадрата тензора Риччи не зависит также от M и L .

Таким образом, кривизна имеет неустранимую особенность при $a(0) = 0$, и, следовательно, соответствующие космологические решения непродолжаемы. Поскольку координатные линии времени являются геодезическими (экстремалиями) и время t является каноническим параметром, то построенные космологические решения геодезически неполны.

18.4. Вакуумные решения

Вакуумные решения уравнений Фридмана, хотя, возможно, и менее реалистичны, но представляют значительный интерес. В настоящем разделе мы покажем, что все вакуумные космологические решения для однородной и изотропной вселенной – это плоское пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ ($\Lambda = 0$), пространство де Ситтера dS ($\Lambda > 0$) и анти-де Ситтера AdS ($\Lambda < 0$).

18.4.1. Пространство-время Минковского. Ниже мы покажем, что плоское пространство-время Минковского является единственным решением вакуумных уравнений Фрийдмана при нулевой космологической постоянной.

Положим $\Lambda = 0$ и предположим, что материя отсутствует, $\mathcal{E} = \mathcal{P} = 0$. Тогда уравнение (18.117) принимает вид

$$\dot{a}^2 = -\epsilon.$$

Оно имеет решение только при $\epsilon \leq 0$. Следовательно, в отсутствие материи (вакуумное решение) и космологической постоянной пространственные сечения должны иметь неположительную кривизну, т.е. представляют собой либо трехмерное гиперболическое пространство $\mathbb{H}^3$, либо трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Это соответствует открытой модели вселенной.

Если $\epsilon = 0$, то $a = \text{const}$ и метрика Фрийдмана переходит в метрику Лоренца. Поэтому пространство-время становится плоским пространством Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$.

При $\epsilon < 0$ масштабный множитель линеен по времени

$$a = \sqrt{-\epsilon} t, \quad (18.120)$$

где мы отбросили несущественную постоянную интегрирования и выбрали знак плюс у квадратного корня. Это вакуумное решение имеет особенность, поскольку при $t = 0$ масштабный множитель обращается в нуль, и метрика вырождается. Если вычислить компоненты тензора кривизны (18.72), то они окажутся тождественно равными нулю. Поэтому линейный масштабный множитель (18.120) в метрике Фрийдмана описывает плоское пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$.

Полученный вывод можно подтвердить явным преобразованием координат. Интервал для вакуумного решения (18.120) после растяжки пространственных координат можно записать в виде

$$ds^2 = dt^2 - t^2 [d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)],$$

где мы выбрали сферические координаты (18.74) на пространственных сечениях $t = \text{const}$. Если теперь совершить преобразование координат $t, \chi \mapsto \tau, r$, где

$$\tau := t \text{ch } \chi, \quad r := t \text{sh } \chi,$$

то интервал станет евклидовым,

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Якобиан преобразования координат $t, \chi \mapsto \tau, r$ равен $J = t$ и вырожден при $t = 0$. Если масштабный множитель $a(t)$ определен при положительных временах $t > 0$, то временная координата τ в пространстве Минковского также положительна $\tau > 0$.

Таким образом, вакуумное решение при $\epsilon < 0$, сводится к плоскому пространству Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$, которое никаких особенностей не имеет. Отсюда вытекает, что особенность в решении (18.120) при $t = 0$ является координатной.

То, что мы получили одно и то же пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ и при $\epsilon = 0$, и при $\epsilon < 0$ связано с различным выбором пространственных сечений в пространстве Минковского.

Полученное космологическое решение для вакуума следовало ожидать. Действительно, метрика (18.75) является блочно диагональной и сферически симметричной. Это очевидно в безразмерных сферических координатах. Следовательно, должна быть выполнена теорема Бирхгоффа, утверждающая, что единственным сферически симметричным решением вакуумных уравнений Эйнштейна является решение Шварцшильда, которое при нулевой массе дает пространство Минковского. При этом решение Шварцшильда с отличной от нуля массой возникнуть не может, т.к. оно не является однородным.

18.4.2. Пространство-время де Ситтера dS. Одну из первых моделей вселенных предложил де Ситтер [178, 179]. Эта модель описывает пустую вселенную и является максимально симметричной. Она представляет самостоятельный интерес, хотя и не является реалистичной с современной точки зрения.

Пусть $\Lambda > 0 \Leftrightarrow L > 0$ и материя отсутствует, $\mathcal{E} = \mathcal{P} = 0$. Тогда уравнения Фридмана (18.104) и (18.109) принимают вид

$$\ddot{a} = La, \quad (18.121)$$

$$\dot{a}^2 = La^2 - \epsilon. \quad (18.122)$$

Конечно, первое уравнение (18.121) есть следствие второго уравнения (18.122). Однако в данном случае проще их совместное рассмотрение. Первое уравнение имеет решение, зависящее от двух постоянных интегрирования:

$$a = c_+ e^{t/R} + c_- e^{-t/R}, \quad c_{\pm} = \text{const}, \quad (18.123)$$

где введено обозначение

$$R := \frac{1}{\sqrt{L}}.$$

Подстановка этого решения в уравнение (18.122) приводит к связи между постоянными интегрирования

$$c_+ c_- = \frac{\epsilon}{4L} = \frac{R^2 \epsilon}{4}. \quad (18.124)$$

Таким образом, решение уравнений Фридмана зависит только от одной постоянной интегрирования. Эту постоянную интегрирования можно фиксировать, используя инвариантность уравнения (18.122) относительно сдвига времени $t \mapsto t + \text{const}$.

При растяжке пространственных координат постоянная ϵ умножается на положительный множитель. Поэтому, не ограничивая общности, рассмотрим последовательно три случая $\epsilon = 1$, $\epsilon = 0$ и $\epsilon = -1$.

Сфера $\mathbb{S}^3$. Если пространственные сечения являются сферами, $\epsilon = 1$, положим

$$c_+ = c_- = \frac{R}{2}.$$

Тогда масштабный множитель будет равен

$$a = R \operatorname{ch}(t/R),$$

и метрика примет вид

$$ds^2 = dt^2 - R^2 \operatorname{ch}^2(t/R) \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (18.125)$$

где мы использовали метрику на пространственных сечениях в виде (18.34). Эта метрика называется *метрикой де Ситтера* и определена при

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (18.126)$$

Как видим, она определена при всех временах и никакой космологической особенности не имеет.

Из формулы (18.125) не видно, что метрика де Ситтера описывает пространство-время постоянной кривизны и инвариантна относительно группы Лоренца $\mathbb{SO}(1, 4)$. Тем не менее это так. Для доказательства построим пространство постоянной кривизны и укажем необходимое преобразование координат.

Рассмотрим пятимерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$ с декартовой системой координат v, w, x, y, z . По определению, метрика пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = dv^2 - dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (18.127)$$

Пусть в него вложен однополостный гиперболоид $d\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,4}$

$$v^2 - w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -R^2, \quad R > 0. \quad (18.128)$$

Будем считать, что топология, дифференцируемая структура и метрика на гиперболоиде индуцированы вложением. Тогда уравнение (18.128) определяет связное четырехмерное псевдориманово многообразие, вложенное в пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$ (см. рис. 18.5, на котором показаны сечения гиперболоида плоскостями $y = z = 0$). Это и есть *пространство де Ситтера* $d\mathbb{S}$.

Рис. 18.5. Пространство-время де Ситтера $d\mathbb{S}$.

И метрика (18.127), и уравнение гиперболоида (18.128) инвариантны относительно группы Лоренца $\mathbb{SO}(1, 4)$. Поэтому она является группой изометрий построенного гиперболоида. Для четырехмерного многообразия эта группа максимальна, и, следовательно, однополостный гиперболоид (18.128) является пространством постоянной кривизны (теорема 2.3.2).

Каждое сечение гиперболоида $v = \text{const}$ определяет трехмерную сферу $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, определенную уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + v^2.$$

При $v = 0$ радиус сферы минимален и равен R . Условимся считать, что значения $0 < w < \sqrt{R^2 + v^2}$ покрывают верхнюю (северную) полусферу, а $-\sqrt{R^2 + v^2} < w < 0$ – нижнюю (южную).

Теперь совершим преобразование координат $v, w, x, y, z \mapsto R, r, t, \theta, \varphi$

$$\begin{aligned} v &:= R \operatorname{sh}(t/R), \\ w &:= \pm R \sqrt{1 - r^2} \operatorname{ch}(t/R), \\ x &:= R r \operatorname{ch}(t/R) \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= R r \operatorname{ch}(t/R) \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= R r \operatorname{ch}(t/R) \cos \theta. \end{aligned} \quad (18.129)$$

Знак $\pm$ в преобразовании координаты w соответствует выбору либо верхней полусферы $\mathbb{S}^3$, либо нижней. Тогда уравнение гиперboloида (18.128) сведется к тождеству $R^2 = R^2$. Таким образом, в новой системе координат гиперboloид задается равенством $R = \text{const}$, и координаты t, r, θ, φ можно выбрать в качестве координат на гиперboloиде. Для получения явного вида метрики, индуцированной на гиперboloиде, необходимо просто выразить дифференциалы dv, dw, dx, dy, dz через $dt, dr, d\theta, d\varphi$, используя формулы (18.129), и подставить их в исходную метрику (18.127). Для упрощения вычислений, вспомним, что для сферической системы координат в подпространстве $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{1,4}$, натянутом на координатные оси x, y, z , справедлива формула

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(R r \operatorname{ch}(t/R))]^2 + R^2 r^2 \operatorname{ch}^2(t/R) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

С учетом этого равенства после несложных вычислений получим в точности метрику де Ситтера (18.125).

Мы видим, что область значений координат (18.126) при $0 < t < \infty$ покрывают либо верхнюю полусферу (знак $+$ в уравнениях (18.129)), либо нижнюю (знак $-$). Если зафиксировать знак в преобразовании координат (18.129) и разрешить времени меняться на всей вещественной прямой $-\infty < t < \infty$, то метрика де Ситтера (18.125) покрывает дважды либо верхнюю, либо нижнюю полусферы $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$.

Пространственные сечения метрики де Ситтера (18.125) задаются сечениями $t = \text{const}$. В исходном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$ время параметризует гиперплоскости $\mathbb{R}^4$, которые задаются уравнением

$$v = R \operatorname{sh}(t/R) = \text{const}.$$

Это значит, что пространственные сечения метрики де Ситтера соответствуют сечениям гиперboloида гиперплоскостями $\mathbb{R}^4$, которые определяются условием $v = \text{const}$.

Для решения де Ситтера в виде (18.125) параметр Хаббла равен

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\operatorname{th}(t/R)}{R}$$

и не является постоянной.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Зафиксируем $\epsilon = 0$ и положим $c_- = 0$ и $c_+ = R$. Тогда масштабный множитель равен

$$a = R e^{t/R}. \quad (18.130)$$

Метрика де Ситтера теперь примет вид

$$ds^2 = dt^2 - R^2 e^{2t/R} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (18.131)$$

Она соответствует слоению однополостного гиперboloида евклидовыми гиперплоскостями $\mathbb{R}^3$. Полученная метрика определена при

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (18.132)$$

Для того, чтобы доказать, что метрика (18.131) действительно является метрикой де Ситтера, вернемся к вложению $dS \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,4}$, рассмотренному в предыдущем разделе. Совершим преобразование координат $v, w, x, y, z \mapsto R, r, t, \theta, \varphi$, которое задано следующими формулами:

$$\begin{aligned} v &:= \pm R \left[\frac{1}{2} r^2 e^{t/R} + \operatorname{sh}(t/R) \right], \\ w &:= \pm R \left[\frac{1}{2} r^2 e^{t/R} - \operatorname{ch}(t/R) \right], \\ x &:= Rr e^{t/R} \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= Rr e^{t/R} \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= Rr e^{t/R} \cos \theta. \end{aligned} \quad (18.133)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (18.128), задающее вложение гиперboloида, сводится к тождеству $R^2 = R^2$. Это означает, что в новых координатах уравнение гиперboloида задается уравнением $R = \text{const}$. Чтобы получить метрику, индуцированную на гиперboloиде, в координатах t, r, θ, φ , необходимо подставить дифференциалы dv, dw, dx, y и dz из уравнений (18.133) в исходную метрику Лоренца (18.127). Чтобы упростить вычисления, заметим что

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(Rr e^{t/R})]^2 + R^2 r^2 e^{2t/R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Теперь нетрудно проверить, что индуцированная метрика равна метрике де Ситтера в форме (18.131).

Пространственные сечения $\mathbb{R}^3$ для метрики (18.131) задаются сечениями $t = \text{const}$. Эти сечения в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^{1,4}$ задают нулевые гиперплоскости

$$v - w = \pm R e^{t/R}.$$

Таким образом, пространственные сечения в метрике де Ситтера (18.131) получаются при сечении гиперboloида нулевыми гиперплоскостями.

Нетрудно вычислить параметр Хаббла для решения де Ситтера в виде (18.131)

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{R}.$$

Как видим, при таком выборе координат он действительно постоянен. Тем самым пространство-время де Ситтера при $\epsilon = 0$ дает один из немногих примеров инфляционного развития вселенной.

Гиперboloид $\mathbb{H}^3$. При $\epsilon = -1$ пространственными сечениями пространства-времени являются двуполостные гиперboloиды $\mathbb{H}^3$, описанные в разделе 18.2.2. В этом случае выберем

$$c_+ = -c_- = \frac{R}{2}.$$

Тогда масштабный множитель равен

$$a = R \operatorname{sh}(t/R),$$

и метрика де Ситтера принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - R^2 \operatorname{sh}^2(t/R) \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (18.134)$$

Эта метрика определена при следующих значениях координат

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad (18.135)$$

и вырождена при $t = 0$.

Для того, чтобы доказать, что это действительно метрика де Ситтера, снова вернемся к вложению $dS \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,4}$. Совершим преобразование координат $w, v, x, y, z \mapsto R, r, t, \theta, \varphi$:

$$\begin{aligned} v &:= R\sqrt{1+r^2} \operatorname{sh}(t/R), \\ w &:= R \operatorname{ch}(t/R), \\ x &:= Rr \operatorname{sh}(t/R) \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= Rr \operatorname{sh}(t/R) \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= Rr \operatorname{sh}(t/R) \cos \theta. \end{aligned} \quad (18.136)$$

Если подставить эти выражения в определяющее уравнение гиперboloида (18.128), то получим тождество $R^2 = R^2$. Следовательно, в исходном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$ гиперboloид задается равенством $R = \text{const}$.

Для получения явного вида метрики, индуцированной на гиперboloиде, необходимо подставить дифференциалы dv, dw, dx, dy и dz из (18.136) в исходную метрику (18.127). Учтем равенство

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(Rr \operatorname{sh}(t/R))]^2 + R^2 r^2 \operatorname{sh}^2(t/R)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Теперь нетрудно проверить, что в новых координатах метрика действительно принимает вид (18.134).

Пространственные сечения метрики де Ситтера (18.134) задаются равенством $t = \text{const}$. В исходном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$ время t параметризует гиперплоскости $\mathbb{R}^{1,3}$, которые задаются уравнением

$$w = R \operatorname{ch}(t/R) = \text{const}.$$

Это значит, что пространственные сечения метрики де Ситтера задаются сечениями гиперboloида гиперплоскостями $w = \text{const}$.

Параметр Хаббла в данной системе координат равен

$$H = \frac{\operatorname{cth}(t/R)}{R}$$

и вовсе не является постоянной.

Координаты Шварцшильда. Снова рассмотрим вложение пространства де Ситтера $dS \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,4}$. Еще одна важная система координат $R, \rho, \tau, \theta, \varphi$ для пространства де Ситтера задается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} v &:= R\sqrt{1-\rho^2} \operatorname{sh} \tau, \\ w &:= R\sqrt{1-\rho^2} \operatorname{ch} \tau, \\ x &:= R\rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= R\rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= R\rho \cos \theta. \end{aligned} \quad (18.137)$$

Как и ранее, гиперboloид (18.128) задается уравнением $R = \text{const}$. Индуцированная метрика на гиперboloиде в координатах Шварцшильда $\tau, \rho, \theta, \varphi$ принимает вид

$$ds^2 = R^2 \left[(1 - \rho^2) d\tau^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2} - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (18.138)$$

Данная метрика определена при

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (18.139)$$

В этих координатах метрика де Ситтера статична.

Таким образом, при положительной космологической постоянной Λ и в отсутствие полей материи, для всех значений кривизны пространственных сечений: $\epsilon = 1$, $\epsilon = 0$ и $\epsilon = -1$ мы получили пространство-время де Ситтера. Это космологическое решение не имеет никаких особенностей и после максимального продолжения вдоль экстремалей (геодезических) описывает пространство постоянной кривизны. Его группа изометрий $\mathbb{SO}(1, 4)$ максимальна. Мы видим, что метрика пространства де Ситтера может быть записана в форме метрики Фридмана со всеми возможными пространственными сечениями: S^3 , $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{H}^3$. Кроме этого, параметр Хаббла в различных системах координат имеет различный вид. Пример метрики де Ситтера показывает насколько сильно космологические выводы зависят от выбора системы координат. Даже ответ на вопрос о том, является ли вселенная замкнутой или открытой, может зависеть от выбора системы координат. Это является существенным недостатком всех космологических моделей.

18.4.3. Пространство-время анти-де Ситтера AdS. Рассмотрим случай отрицательной космологической постоянной, $\Lambda < 0$, в пустом пространстве-времени, $\mathcal{E} = \mathcal{P} = 0$. Уравнения Фридмана по прежнему имеют вид (18.121), (18.122), где $L = \Lambda/3 < 0$. Из второго уравнения следует, что решения существуют только при $\epsilon = -1$, т.е. пространственными сечениями метрики Фридмана являются двуполостные гиперboloиды $\mathbb{H}^3$. При отрицательной космологической постоянной решение (18.123) является вещественным только если $c_- = c_+^*$. Положим теперь

$$R := \frac{1}{\sqrt{-L}}$$

и выберем $c_+ = 1/2$. Тогда масштабный множитель (18.123) примет вид

$$a = R \cos(t/R) \quad (18.140)$$

и метрика вселенной равна

$$ds^2 = dt^2 - R^2 \cos^2(t/R) \left[\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (18.141)$$

где мы использовали метрику двуполого пространственного гиперboloида $\mathbb{H}^3$ в форме (18.57). Эта метрика называется *метрикой анти-де Ситтера* и определена при

$$-\pi R/2 < t < \pi R/2, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (18.142)$$

При $t = \pm \pi R/2$ метрика вырождается.

Опять, из вида метрики анти-де Ситтера (18.141) совершенно не видно, что эта метрика описывает пространство-время постоянной кривизны. Чтобы доказать это, совершим следующее построение.

Рассмотрим плоское пятимерное пространство $\mathbb{R}^{2,3}$ с декартовыми координатами v, w, x, y, z . По определению, его метрика имеет вид

$$ds^2 = dv^2 + dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (18.143)$$

Рассмотрим однополостный вложенный гиперboloид $\text{AdS} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,3}$, который определен уравнением

$$v^2 + w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2. \quad (18.144)$$

На рис. 18.6 изображены двумерные сечения пространства анти-де Ситтера, соответствующие $y = z = 0$.

Рис. 18.6. Пространство-время анти-де Ситтера AdS .

Поскольку уравнения (18.143) и (18.144) инвариантны относительно действия группы $\mathbb{SO}(2,3)$, то эта группа является группой изометрий пространства анти-де Ситтера. Для четырехмерного пространства-времени она максимальна, и ее алгебра содержит 10 независимых векторных полей Киллинга. Согласно теореме 2.3.2 пространство-время анти-де Ситтера является однородным и изотропным и представляет собой пространство постоянной кривизны. Группа $\mathbb{SO}(2,3)$ называется *группой анти-де Ситтера*.

Чтобы доказать, что метрика (18.141) описывает пространство постоянной кривизны, совершим преобразование координат $v, w, x, y, z \mapsto R, r, t, \theta, \varphi$, определяемое формулами:

$$\begin{aligned} v &:= R \sin(t/R), \\ w &:= \pm R \sqrt{1 + r^2} \cos(t/R), \\ x &:= Rr \cos(t/R) \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= Rr \cos(t/R) \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= Rr \cos(t/R) \cos \theta. \end{aligned} \quad (18.145)$$

В новой системе координат гиперboloид задается равенством $R = \text{const}$.

Для получения индуцированной метрики используем равенство

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(Rr \cos(t/R))]^2 + R^2 r^2 \cos^2(t/R) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Прямые вычисления показывают, что индуцированная метрика принимает вид (18.141), что и следовало доказать.

Пространственные сечения метрики анти-де Ситтера соответствуют постоянному времени $t = \text{const}$. В исходном пространстве $\mathbb{R}^{2,3}$ время t параметризует гиперплоскости $\mathbb{R}^{1,3}$, которые задаются уравнением

$$v = R \sin(t/R) = \text{const}.$$

Это значит, что пространственные сечения метрики анти-де Ситтера (18.141) задаются сечениями гиперboloида гиперплоскостями $v = \text{const}$.

Параметр Хаббла для метрики анти-де Ситтера в рассматриваемой системе координат равен

$$H = -\frac{\text{tg}(t/R)}{R}$$

и не является постоянным.

Таким образом, метрика анти-де Ситтера (18.141) представляет собой метрику пространства постоянной кривизны. Однако однополостный гиперboloид (18.144) не является пространством-временем анти-де Ситтера. Дело в том, что сечения гиперboloида двумерными плоскостями, определяемыми постоянными значениями пространственных координат $x, y, z = \text{const}$, представляют собой окружности

$$v^2 + w^2 = R^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Эти окружности являются замкнутыми времениподобными кривыми и приводят к нарушению причинности (машина времени). Чтобы исправить ситуацию необходимо от однополостного гиперboloида (18.144) перейти к его универсальной накрывающей. Для этого гиперboloид нужно “развернуть” вдоль времениподобной координаты v . Это достигается путем перехода к новым координатам $t, r \mapsto \tau, \chi$, оставляя координаты θ, φ прежними. Зададим преобразование координат неявными формулами:

$$v := R \frac{\sin \tau}{\cos \chi}, \quad w := R \frac{\cos \tau}{\sin \chi},$$

где

$$0 < \tau < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$v^2 + w^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \chi},$$

и из уравнения гиперboloида следует равенство

$$r \cos(t/R) = \text{tg} \chi.$$

В новых координатах

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 \frac{d\chi^2}{\cos^4 \chi} + R^2 \text{tg}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Теперь нетрудно вычислить метрику пространства-времени анти-де Ситтера

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \chi} [d\tau^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (18.146)$$

Мы видим, что координата τ является временем. Эта метрика статична и вейлевски (конформно) эквивалентна метрике трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$. Важно, что она определена при всех $-\infty < \tau < \infty$. При этом гиперboloид возникает после отождествления $\tau \sim \tau + 2\pi$. Под пространством анти-де Ситтера AdS понимается именно универсальная накрывающая однополостного гиперboloида с метрикой (18.146). В этом пространстве-времени замкнутые времениподобные кривые отсутствуют.

Координаты Шварцшильда. Рассмотрим вложение $\text{AdS} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,3}$ из предыдущего раздела. Метрику анти-де Ситтера можно записать в координатах Шварцшильда. Для этого в объемлющем пространстве введем координаты

$$\begin{aligned} v &:= R\sqrt{1+\rho^2} \sin \tau, \\ w &:= R\sqrt{1+\rho^2} \cos \tau, \\ x &:= R\rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= R\rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= R\rho \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (18.147)$$

Нетрудно проверить, что гиперboloид задается равенством $R = \text{const}$. Метрика, индуцированная на гиперboloиде, в координатах Шварцшильда $\tau, \rho, \theta, \varphi$ принимает вид

$$ds^2 = R^2 \left[(1 + \rho^2) d\tau^2 - \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (18.148)$$

Эта метрика определена при

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 < \rho < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (18.149)$$

В координатах Шварцшильда метрика де Ситтера статична.

18.4.4. Вложения вселенной Фридмана. Для того, чтобы лучше представить себе, как устроена вселенная Фридмана, полезно вложить однородное и изотропное пространство-время $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ в плоское (псевдо)евклидово пространство. Оказывается, что указанное вложение можно осуществить в плоское пятимерное пространство [180].

Сфера $\mathbb{S}^3$. Замкнутые вселенные Фридмана, когда пространственными сечениями пространства-времени являются трехмерные сферы $\mathbb{S}^3$, можно вложить глобально в плоское пятимерное пространство Минковского.

Рассмотрим пятимерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$ с декартовой системой координат $Z^1, \dots, Z^5$. По определению, метрика такого пространства имеет вид

$$ds^2 = (dZ^1)^2 - (dZ^2)^2 - (dZ^3)^2 - (dZ^4)^2 - (dZ^5)^2. \quad (18.150)$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{1,4}$ гиперповерхность вращения $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,4}$, которая определяется следующим уравнением

$$(Z^2)^2 + (Z^3)^2 + (Z^4)^2 + (Z^5)^2 = a^2, \quad (18.151)$$

при этом $Z^1 \in \mathbb{R}$. Эта гиперповерхность представляет собой цилиндр с направляющей $Z^1 \in \mathbb{R}$, в основании которого лежит трехмерная сфера радиуса a , которая определяется уравнением (18.151). Теперь положим

$$Z^1 := \int dt \sqrt{1 + \dot{a}^2}, \quad Z^2 = aw, \quad Z^3 := ax, \quad Z^4 := ay, \quad Z_5 := az, \quad (18.152)$$

где $a = a(t)$ – масштабный множитель. Тем самым мы предполагаем, что радиус сферы a зависит от первой координаты: $a = a(t(Z^1))$. Теперь уравнение гиперповерхности (18.151) примет вид

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (18.153)$$

То есть в координатах w, x, y, z мы имеем трехмерную сферу единичного радиуса, обычным образом вложенную в четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Из уравнения вложения (18.153) вытекает соотношение между дифференциалами:

$$w dw + x dx + y dy + z dz = 0, \quad (18.154)$$

которое нам понадобится в дальнейшем.

Найдем метрику, индуцированную на гиперповерхности (18.151). В качестве независимых координат на гиперповерхности можно выбрать, например, t, x, y, z . Однако проще рассматривать координаты t, w, x, y, z , на которые наложено условие (18.153). Тогда из определения (18.152) следуют выражения для дифференциалов:

$$\begin{aligned} dZ^1 &= \sqrt{1 + \dot{a}^2} dt, & dZ^2 &= w \dot{a} dt + a dw, & dZ^3 &= x \dot{a} dt + a dx, \\ dZ^4 &= y \dot{a} dt + a dy, & dZ^5 &= z \dot{a} dt + a dz. \end{aligned} \quad (18.155)$$

Подстановка этих выражений в метрику (18.150) приводит к индуцированной метрике

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + \dot{a}^2) dt^2 - (w^2 + x^2 + y^2 + z^2) \dot{a}^2 dt^2 - \\ &\quad - 2(w dw + x dx + y dy + z dz) a \dot{a} dt - a^2 (dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) = \\ &= dt^2 - a^2 (dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2), \end{aligned} \quad (18.156)$$

где учтены уравнения (18.153) и (18.154). Мы видим, что индуцированная метрика совпадает с метрикой Фридмана

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ — отрицательно определенная метрика на сфере (18.153) единичного радиуса.

Для вселенной Эйнштейна (см. раздел 18.3.5) масштабный множитель равен константе, $a = \text{const}$. Поэтому, как многообразие, вселенная Эйнштейна представляет собой цилиндр в пятимерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$ с постоянным сечением (18.151), которым является трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$. Поэтому часто говорят о *цилиндрическом мире Эйнштейна*.

В общем случае замкнутая вселенная Фридмана представляет собой цилиндр переменного сечения, который вложен в пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$. Это согласуется с представлением $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$.

Гиперболоид $\mathbb{H}^3$. Открытая вселенная Фридмана, пространственными сечениями которой являются гиперболоиды $\mathbb{H}^3$, вкладывается в плоское псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{2,3}$. Вложение глобально и определяется аналогично тому, как это было сделано в предыдущем случае замкнутой вселенной.

Метрика плоского псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{2,3}$ в декартовой системе координат имеет вид

$$ds^2 = (dZ^1)^2 + (dZ^2)^2 - (dZ^3)^2 - (dZ^4)^2 - (dZ^5)^2. \quad (18.157)$$

Рассмотрим вложение четырехмерного цилиндра в это пространство, которое задано следующим уравнением

$$(Z^2)^2 - (Z^3)^2 - (Z^4)^2 - (Z^5)^2 = a^2, \quad (18.158)$$

при этом $Z^1 \in \mathbb{R}$. В основании этого цилиндра лежат гиперболоиды (18.158) (как и ранее, мы рассматриваем верхнюю полу́ двуполостного гиперболоида, рассмотренного в разделе 18.2.2).

Теперь введем в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2,3}$ координаты t, w, x, y, z с помощью соотношений

$$Z^1 := \int dt \sqrt{1 - \dot{a}^2}, \quad Z^2 = aw, \quad Z^3 := ax, \quad Z^4 := ay, \quad Z^5 := az, \quad (18.159)$$

которые отличаются только знаком в определении Z^1 от формул (18.159). Тогда гиперboloид, лежащий в основании цилиндра, будет задан уравнением

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad (18.160)$$

откуда следует равенство дифференциалов

$$w dw - x dx - y dy - z dz = 0. \quad (18.161)$$

Подстановка дифференциалов dZ в метрику (18.157) приводит к интервалу

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - \dot{a}^2)dt^2 + (w^2 - x^2 - y^2 - z^2)\dot{a}^2 dt^2 + \\ &\quad + 2(w dw - x dx - y dy - z dz)a\dot{a} dt + a^2(dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) = \\ &= dt^2 + a^2(dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2), \end{aligned} \quad (18.162)$$

где учтены равенства (18.160) и (18.161). Таким образом, мы получили метрику Фридмана для открытой вселенной.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Открытая вселенная Фридмана, пространственными сечениями которой являются евклидовы пространства $\mathbb{R}^3$, вкладывается в пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$. Однако это вложение несколько сложнее, чем в двух предыдущих случаях.

Если в рассматриваемом случае $a = \text{const}$, то метрика Фридмана растяжкой координат приводится к метрике Лоренца, и вкладывать нечего. Поэтому рассмотрим случай $\dot{a} \neq 0$.

Метрика пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,4}$ в декартовых координатах имеет вид (18.150). Положим

$$\begin{aligned} Z^1 &:= \frac{a}{2b}(b^2 + r^2) + f(t), \\ Z^2 &:= \frac{a}{2b}(b^2 - r^2) - f(t) = ab - Z^1, \\ Z^3 &:= ax, \quad Z^4 := ay, \quad Z^5 := az, \end{aligned} \quad (18.163)$$

где

$$b = \text{const} > 0, \quad 2bf := \int \frac{dt}{\dot{a}}, \quad r^2 := x^2 + y^2 + z^2.$$

Если рассматривать переменные t, x, y, z в качестве координат на вложенной гиперповерхности $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,4}$, то уравнение вложения можно записать в следующем виде

$$(Z^1)^2 - (Z^2)^2 - (Z^3)^2 - (Z^4)^2 - (Z^5)^2 = 2abf, \quad (18.164)$$

где в правой части надо подставить $f = f(t(Z^1))$.

Чтобы получить выражение для индуцированной метрики, вычислим дифференциалы

$$\begin{aligned} dZ^1 &= \frac{\dot{a} dt}{2b}(b^2 + r^2) + \frac{a}{b}(x dx + y dy + z dz) + \dot{f} dt, \\ dZ^2 &= b\dot{a} dt - dZ^1, \end{aligned}$$

при этом дифференциалы dZ^3 , dZ^4 и dZ^5 имеют тот же вид (18.155), что и раньше. Простые вычисления приводят к равенствам:

$$\begin{aligned} (dZ^1)^2 - (dZ^2)^2 &= dt^2 + \dot{a}^2 r^2 dt^2 + 2(x dx + y dy + z dz)a\dot{a} dt, \\ (dZ^3)^2 + (dZ^4)^2 + (dZ^5)^2 &= r^2 \dot{a}^2 dt^2 + 2(x dx + y dy + z dz)a\dot{a} dt + a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \end{aligned}$$

Разность полученных выражений приводит к индуцированной метрике

$$ds^2 = dt^2 - a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Мы видим, что индуцированная метрика совпадает с метрикой Фридмана для $\overset{\circ}{K} = 0$.

Заметим, что из определения (18.163) следует неравенство

$$Z^1 + Z^2 = ab > 0.$$

Это значит, что пространство-время представлено только половиной вложенной гиперповерхности (18.164).

В заключение рассмотрим вложение пространства де Ситтера, для которого масштабный множитель имеет вид (18.130):

$$a = R e^{t/R}, \quad R = \text{const} > 0.$$

В этом случае уравнение вложения (18.164) принимает вид

$$(Z^1)^2 - (Z^2)^2 - (Z^3)^2 - (Z^4)^2 - (Z^5)^2 = -R^2,$$

что совпадает с вложением (18.128), описанным ранее.

18.4.5. Экстремали во вселенной Фридмана. Рассмотрим однородное и изотропное пространство-время $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ с метрикой Фридмана (18.70). Эта метрика определяет символы Кристоффеля (18.71), которые задают уравнения экстремалей (геодезических). Оказывается, что, если масштабный множитель известен, то уравнения экстремалей во вселенной Фридмана интегрируются в квадратурах в общем виде [180].

Сначала рассмотрим экстремали на пространственных сечениях $\mathbb{S}$, по которым будут строиться экстремали во вселенной Фридмана $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$. На пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ уравнения экстремалей имеют вид

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} = -\overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\rho}{du}, \quad (18.165)$$

где u – канонический параметр вдоль экстремали. Для определенности, выберем длину экстремали в качестве канонического параметра:

$$du^2 := -\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0. \quad (18.166)$$

Поскольку $\mathbb{S}$ – пространство постоянной кривизны, то все экстремали просто описываются. Для евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ все прямые и только они являются экстремалими. Для сферы, вложенной в четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ (раздел 18.2.1), все экстремали – это сечения сферы трехмерными плоскостями, проходящими через начало координат. Аналогично, сечения гиперboloида $\mathbb{H}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ (раздел 18.2.2) трехмерными времениподобными плоскостями, проходящими через начало координат, определяют все экстремали. Таким образом, все экстремали $x^\mu(u)$ на пространственных сечениях $\mathbb{S}$ можно считать известными.

Теперь исследуем экстремали в пространстве-времени Фридмана. Уравнения (18.86) для экстремалей $x^\alpha(s)$ вселенной Фридмана, где s – канонический параметр, уже были выписаны при рассмотрении красного смещения спектральных линий.

Покажем, что знание экстремалей на пространствах постоянной кривизны $\mathbb{S}$, позволяет описать все экстремали во вселенной Фрийдмана. Для этой цели запишем уравнение экстремалей на $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ не в канонической, а в произвольной параметризации. Пусть u – произвольный параметр вдоль экстремали $x^\alpha(u)$ и s – длина экстремали (канонический параметр). Тогда параметры связаны равенством

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du}, \quad (18.167)$$

и уравнение экстремалей принимает вид (3.26)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{du^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{du} \frac{dx^\gamma}{du} + \frac{dx^\alpha}{du} \frac{d^2 s}{du^2} \frac{du}{ds}. \quad (18.168)$$

Отметим, что это уравнение инвариантно относительно линейного преобразования канонического параметра $s \mapsto ks$, $k \neq 0$. Важно также, что при получении уравнения (18.168) было использовано условие $ds/du \neq 0$.

Теперь отождествим параметр u вдоль экстремали на $\mathbb{M}$ с каноническим параметром вдоль экстремали на $\mathbb{S}$ (18.166). Тогда для метрики Фрийдмана справедливы равенства:

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2 du^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(\frac{dt}{du}\right)^2 - a^2. \quad (18.169)$$

Последнее равенство справедливо только для времениподобных экстремалей.

Уравнения для экстремали (18.168) разбиваются на временную и пространственные компоненты:

$$\frac{d^2 t}{du^2} = -a \frac{da}{dt} + \frac{dt}{du} \frac{d^2 s}{du^2} \frac{du}{ds}, \quad (18.170)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} = -\overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\rho}{du} + \frac{dx^\mu}{du} \left(\frac{d^2 s}{du^2} \frac{du}{ds} - \frac{2}{a} \frac{da}{du} \right), \quad (18.171)$$

где мы учли явный вид символов Кристоффеля (18.71).

По построению системы координат, в которой метрика имеет блочно диагональный вид (18.70), координатные линии $x^\mu = \text{const}$, перпендикулярные пространственным сечениям $\mathbb{S}$, являются экстремалими. Для них уравнение (18.171) тождественно удовлетворяется. Поскольку для этих экстремалей $du = 0$, то вместо уравнения (18.170) следует использовать первое из уравнений (18.86), которое сводится к равенству

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = as + b, \quad a, b = \text{const}. \quad (18.172)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18.4.1. *Экстремали на пространственных сечениях $\mathbb{S}$ являются экстремалими вселенной Фрийдмана $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ тогда и только тогда, когда масштабный множитель постоянен, $a = \text{const}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Экстремали, целиком лежащие в $\mathbb{S}$, определяются условием $t = \text{const}$. В этом случае уравнение (18.170) приводит к равенству $\dot{a} = 0$.

Теперь проанализируем времениподобные экстремали общего положения. Продифференцируем по u последнее равенство (18.169) и подставим в него вторую производную $d^2 t/du^2$ из уравнения (18.170):

$$2 \frac{ds}{du} \frac{d^2 s}{du^2} = 2 \left(\frac{dt}{du}\right)^2 \frac{d^2 s}{du^2} \frac{du}{ds} - 4a \frac{da}{du}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d^2 s}{du^2} \frac{du}{ds} = \frac{2}{a} \frac{da}{du}, \quad (18.173)$$

где учтено равенство (18.169). Полученное соотношение сводит уравнение (18.171) к уравнению (18.165). Таким образом, уравнения (18.165) для времениподобных экстремалей $x^\mu(u)$ на $\mathbb{S}$ вытекают из уравнений (18.170), (18.171) для экстремалей $x^\alpha(u)$ на $\mathbb{M}$. При доказательстве мы использовали одну и ту же параметризацию экстремалей, которая является канонической только для экстремалей на $\mathbb{S}$.

В обратную сторону утверждение также верно. Действительно, вместо уравнения (18.170) в системе уравнений для экстремалей (18.170), (18.171) можно использовать уравнение (18.173), которое легко интегрируется:

$$\frac{ds}{du} = Ca^2, \quad C = \text{const} \neq 0. \quad (18.174)$$

Знак постоянной интегрирования C определяет взаимную ориентацию параметров s и u . Поэтому, не ограничивая общности, положим $C > 0$. С учетом полученного решения равенство (18.169) для времениподобных экстремалей принимает вид

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = a^2(1 + C^2 a^2) \quad \Leftrightarrow \quad u = \pm \int \frac{dt}{a\sqrt{1 + C^2 a^2}}. \quad (18.175)$$

Последний интеграл определяет функцию $t(u)$ в квадратурах. Знак $\pm$ определяет взаимную ориентацию оси времени t и параметра u , и является несущественным.

При желании можно получить экстремаль, как функцию канонического параметра. Из уравнений (18.174) и (18.175) следуют равенства:

$$ds = Ca^2 du = \pm \frac{Ca dt}{\sqrt{1 + C^2 a^2}} \quad \Leftrightarrow \quad s = \pm C \int \frac{dt a}{\sqrt{1 + C^2 a^2}}. \quad (18.176)$$

Тем самым функция $t(s)$ задана в квадратурах.

Длина касательного вектора к экстремалиям равна

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du} = \left(\frac{dt}{du}\right)^2 - a^2 = C^2 a^4 > 0.$$

Если параметр канонический, то длина касательного вектора постоянна:

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du} = 1.$$

Таким образом, проекции времениподобных экстремалей общего положения на пространственные сечения являются экстремалиями на $\mathbb{S}$, а зависимость временной координаты $t(u)$ задается интегралом (18.175), где $C > 0$. В пределе $C \rightarrow \infty$ возникают экстремали, перпендикулярные $\mathbb{S}$.

Светоподобные (нулевые) экстремали определяются теми же формулами, что и времениподобные экстремали общего положения при $C = 0$.

Для пространственноподобных экстремалей уравнение (18.169) необходимо заменить на следующее равенство

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{dt}{du}\right)^2.$$

Дальнейший анализ проводится так же, как и в предыдущем случае. При этом зависимости $t(u)$ и $t(s)$ даются интегралами:

$$u = \pm \int \frac{dt}{a\sqrt{1-C^2a^2}}, \quad s = \pm C \int \frac{dt a}{\sqrt{1-C^2a^2}} \quad C > 0. \quad (18.177)$$

При этом надо следить, чтобы подкоренное выражение было неотрицательно.

Таким образом, мы нашли все экстремали вселенной Фридмана.

ТЕОРЕМА 18.4.1. *Экстремали вселенной Фридмана $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ делятся на два класса.*

- 1) *Экстремали (18.172), перпендикулярные всем пространственным сечениям и проходящие через каждую точку $\mathbb{S}$.*
- 2) *Экстремали $(t(u), x^\mu(u))$, где $x^\mu(u)$ – экстремали на $\mathbb{S}$ и функция $t(u)$ определена либо интегралом (18.175) для времениподобных ($C > 0$) и светоподобных ($C = 0$) экстремалей, либо интегралом (18.177) для пространственноподобных экстремалей. Параметр u является каноническим параметром только для экстремалей на $\mathbb{S}$.*

ПРИМЕР 18.4.1. Рассмотрим вселенную де Ситтера (см. раздел 18.4.2), представленную в виде топологического произведения $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. В этом случае экстремали на $\mathbb{S} = \mathbb{R}^3$ – это все возможные прямые

$$x^\mu = n^\mu u + x_0^\mu,$$

где x_0^μ – координаты точки, через которую проходит прямая, и n^μ – компоненты единичного направляющего вектора.

Масштабный множитель имеет вид (18.130)

$$a = R e^{t/R}, \quad R = \text{const},$$

и соответствует инфляционной вселенной. Зависимость временной координаты t от параметра u для времениподобных экстремалей задается интегралом (18.175)

$$u = \pm \int \frac{dt}{R e^{t/R} \sqrt{1 + C^2 R^2 e^{2t/R}}} = \mp \sqrt{C^2 R^2 + e^{-2t/R}}.$$

Канонический параметр вдоль экстремалей определяется интегралом (18.177), который также легко берется:

$$s = \pm C \int \frac{dt R e^{t/R}}{\sqrt{1 + C^2 R^2 e^{2t/R}}} = \pm \left[t + R \ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{e^{-2t/R}}{C^2 R^2}} \right) \right].$$

Формулы, полученные в настоящем разделе, дают общую схему анализа экстремалей для вселенной Фридмана. При построении конкретной космологической модели сначала нужно найти масштабный множитель из уравнений Эйнштейна, а затем провести анализ экстремалей.

18.4.6. Космологические горизонты. Пространство-время в космологических моделях, построенных в рамках общей теории относительности, может иметь глобальные отличия от пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$, которые важны с физической точки зрения. Ниже мы продемонстрируем эти свойства на примере вселенной Фридмана.

Рассмотрим вселенную Фридмана, метрику которой запишем в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (18.178)$$

где $\epsilon = 1$ для замкнутой вселенной ($\mathbb{S} = \mathbb{S}^3$), $\epsilon = 0$ для открытой вселенной ($\mathbb{S} = \mathbb{R}^3$) и $\epsilon = -1$ также для открытой вселенной ($\mathbb{S} = \mathbb{H}^3$). Выше мы использовали метрику сферы в виде (18.34) и гиперboloида в виде (18.57). Координатные линии времени являются экстремалими по построению, и их длина, которая является каноническим параметром, равна разности $t_2 - t_1$, где $t_{1,2}$ – начало и конец экстремали. Если масштабный множитель определен при всех $t \in (-\infty, \infty)$, то эти экстремали полны. При наличии особенности, $a(t_b) = 0, \infty$, при конечных значениях t_b пространство-время будет геодезически неполным.

Предположим, что наблюдатель расположен в начале координат $r = 0$. Это не ограничивает общности, т.к. вселенная однородна. Нулевые радиальные экстремали, $ds^2 = 0$, для него определяются уравнением

$$dt^2 = a^2 dr^2.$$

Поэтому световой конус с вершиной в точке t_0 задается следующими соотношениями:

$$\int_{t_0}^t \frac{d\tau}{a(\tau)} = \pm r, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad (18.179)$$

где знак $\pm$ в правой части интеграла соответствует световому конусу будущего, $t > t_0$, и прошлого, $t < t_0$. В момент времени t_0 наблюдатель может видеть только те события, которые находятся в световом конусе прошлого. Допустим, что вселенная родилась в момент времени $t_b < t_0$. В этот момент масштабный множитель равен нулю, $a(t_b) = 0$, и допустим, что интеграл (18.179) при $t = t_b$ сходится:

$$\int_{t_0}^{t_b} \frac{dt}{a} = -r_b > -\infty.$$

Это значит, что наблюдатель в момент времени t_0 может наблюдать только те события, для которых $r < r_b$. Теперь допустим, что интеграл (18.179) сходится в бесконечности, $t \rightarrow \infty$:

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a} = r_{\infty}.$$

В такой ситуации наблюдатель никогда не сможет увидеть те точки вселенной, для которых

$$r > r_b + r_{\infty} = \int_{t_b}^{\infty} \frac{dt}{a}.$$

Поверхность светового конуса прошлого с вершиной в точке $t_0 \rightarrow \infty$ называется *горизонтом событий* наблюдателя.

Для замкнутой вселенной на радиус наложено дополнительное условие $r < 1$. Поэтому для существования горизонта событий необходимо, чтобы $r_b + r_{\infty} < 1$.

Таким образом, в рассматриваемом случае наблюдатель в принципе никогда не может наблюдать события, происходящие в некоторых областях вселенной (за горизонтом событий). И эти области вселенной могут оказаться большими.

С другой стороны, наблюдатель может повлиять только на те события, которые находятся в световом конусе будущего. Максимальный конус будущего для наблюдателя, находящегося в начале системы координат, $r = 0$, соответствует значению $t \rightarrow t_b$. Поэтому наблюдатель никак не сможет повлиять на события с $r > r_b + r_{\infty}$. Поверхность светового конуса будущего с вершиной в точке $t \rightarrow t_b$ называется *горизонтом частицы*. Таким образом, наблюдатель никак не может влиять на события, находящиеся за горизонтом частицы.

Анализ других космологических моделей на наличие горизонтов производится аналогично в каждом конкретном случае.

Если в пространстве-времени есть космологические горизонты, то это означает, что существуют такие области вселенной, которые между собой никак причинно не связаны. Наличие горизонтов представляет собой большую космологическую проблему: каким образом во вселенной может установиться постоянная плотность материи, температура и т.д., если некоторые части вселенной никак между собой не взаимодействуют? Ответ на этот вопрос в настоящее время не ясен.

18.5. Однородные вселенные

В предыдущем разделе мы рассмотрели однородные и изотропные модели вселенной. При этом из изотропии вселенной вытекает ее однородность (предложение 2.3.1). Обратное утверждение неверно: однородных многообразий намного больше, чем изотропных. Трехмерных связных и односвязных изотропных многообразий, по существу, всего три: это сфера $\mathbb{S}^3$, евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ и двуполостный гиперболоид $\mathbb{H}^3$. Классификация всех трехмерных однородных многообразий в настоящее время неизвестна. Поэтому мы упростим задачу. Будем требовать, чтобы пространственные сечения постоянного времени $t = \text{const}$ были не просто однородными, а главными однородными пространствами. Напомним, что главным однородным пространством называется группа преобразований (M, G) , которая действует на многообразии M транзитивно и свободно. В этом случае размерности многообразия и группы Ли G равны, и многообразие M можно отождествить с самой группой Ли. Поэтому классификация главных однородных пространств сводится к классификации трехмерных групп Ли. Известно, что каждой алгебре Ли соответствует единственная, с точностью до изоморфизма, связная и односвязная группа Ли (универсальная накрывающая). Все остальные связные группы Ли с той же алгеброй являются фактор группами универсальной накрывающей по некоторой нормальной подгруппе, действующей свободно и собственнo разрывно. Таким образом, если пространственными сечениями вселенной являются связные и односвязные главные однородные пространства, то их классификация сводится к классификации трехмерных алгебр Ли. Эта классификация хорошо известна.

18.5.1. Классификация Бианки. Трехмерные алгебры Ли были классифицированы Луиджи Бианки [181].

Пусть задана трехмерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с базисом L_i , $i = 1, 2, 3$. Коммутатор базисных левоинвариантных векторных полей,

$$[L_i, L_j] = f_{ij}^k L_k, \quad (18.180)$$

определяется структурными константами f_{ij}^k , которые, по построению, антисимметричны по нижним индексам

$$f_{ij}^k = -f_{ji}^k. \quad (18.181)$$

Кроме того, структурные константы должны удовлетворять тождествам Якоби

$$f_{ij}^l f_{kl}^m + f_{jk}^l f_{il}^m + f_{ki}^l f_{jl}^m = 0. \quad (18.182)$$

Верно также обратное утверждение. Произвольный набор структурных констант, удовлетворяющих условиям (18.181) и (18.182), однозначно определяет некоторую алгебру Ли.

Таким образом, классификация трехмерных алгебр Ли сводится к перечислению всех возможных наборов структурных констант с точностью до некоторого отношения эквивалентности. В данном случае отношение эквивалентности – это выбор базиса в алгебре Ли. Мы

говорим, что два базиса эквивалентны, $L_i \sim L'_i$, если они связаны некоторым невырожденным линейным преобразованием:

$$L_i \sim L'_i \quad \Leftrightarrow \quad L'_i = S_i^j L_j, \quad S \in \text{GL}(3, \mathbb{R}).$$

Из определения структурных констант (18.180) вытекает, что при таких преобразованиях структурные константы ведут себя как тензор третьего ранга с одним контравариантным и двумя ковариантными индексами. Поскольку базис алгебры Ли L_i , как базис произвольного векторного пространства, определен с точностью до произвольных невырожденных линейных преобразований, то мы используем этот произвол для приведения структурных констант к некоторому каноническому виду.

Изначально в трехмерном векторном пространстве алгебры Ли $\mathfrak{g}$ никакой метрики нет, и мы не можем поднимать и опускать индексы у структурных констант. Зато есть два полностью антисимметричных тензора третьего ранга: один с ковариантными, ε_{ijk} , а другой с контравариантными индексами, ε^{ijk} . Мы принимаем соглашение, что $\varepsilon_{123} = 1$ и $\varepsilon^{123} = 1$. Их свойства описаны в приложении 19.2.

Поскольку структурные константы антисимметричны по паре индексов, то их можно взаимно однозначно задать тензором второго ранга:

$$f_{ij}{}^k = \varepsilon_{ijl} t^{lk} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^{ijl} f_{ij}{}^k = 2t^{lk}.$$

Тензор второго ранга t^{lk} в общем случае никакой симметрией не обладает, и его можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$b^{lk} := \frac{1}{2}(t^{lk} + t^{kl}), \quad d^{lk} := \frac{1}{2}(t^{lk} - t^{kl}).$$

В свою очередь, антисимметричный тензор второго ранга можно параметризовать ковектором:

$$d^{ij} = \varepsilon^{ijk} a_k \quad \Leftrightarrow \quad d^{ij} \varepsilon_{ijk} = 2a_k.$$

Таким образом, в трехмерном случае структурные константы взаимно однозначно параметризуются симметричным тензором второго ранга b^{ij} и ковектором a_i :

$$f_{ij}{}^k = \varepsilon_{ijl} b^{lk} + \delta_i^k a_j - \delta_j^k a_i. \quad (18.183)$$

Отметим, что при получении данного представления никакая метрика на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ не использовалась.

Теперь подставим структурные константы (18.183) в тождества Якоби (18.182). Для упрощения вычислений заметим, что левая сторона равенства (18.182) антисимметрична по трем индексам i, j, k и поэтому эквивалентна равенству

$$\varepsilon^{ijk} f_{ij}{}^l f_{kl}{}^m = 0.$$

Подставляя сюда выражение для структурных констант (18.183) приходим к равенству

$$b^{ij} a_j = 0. \quad (18.184)$$

Таким образом, для классификации алгебр Ли необходимо перечислить все симметричные тензоры $b^{ij} = b^{ji}$ и ковекторы a_i , на которые наложено условие (18.184) и отношение эквивалентности, которое связано со свободой выбора базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Из определения

следует, что b^{ij} и a_i при замене базиса в алгебре Ли ведут себя как тензоры. Чтобы привести структурные константы к каноническому виду совершим следующее преобразование.

Уравнение (18.184) означает, что ковектор a , если он отличен от нуля, лежит в одном из главных направлений тензора b^{ij} , в том, которое отвечает нулевому собственному значению b^{ij} . С помощью ортогонального преобразования базиса алгебры Ли симметричную матрицу b всегда можно преобразовать к диагональному виду

$$b^{ij} = b^{(i)} \delta^{ij}, \quad \text{суммирование по } i \text{ нет,}$$

где на диагонали стоят собственные числа. Не ограничивая общности, можно считать, что ковектор a лежит в первом главном направлении, т.е. $a = (a, 0, 0)$. Тогда уравнение (18.184) примет вид $b^{(1)}a$, откуда следует, что либо $b^{(1)} = 0$, либо $a = 0$.

После таких преобразований правила коммутации базисных векторных полей алгебры Ли примут вид

$$[L_1, L_2] = b^{(3)} L_3 - a L_2, \quad [L_2, L_3] = b^{(1)} L_1, \quad [L_3, L_1] = b^{(2)} L_2 + a L_3. \quad (18.185)$$

У нас имеется также свобода в масштабировании базиса (умножению на отличные от нуля постоянные). Совершим масштабное преобразование

$$L_1 \mapsto L'_1 := k_1 L_1, \quad L_2 \mapsto L'_2 := k_2 L_2, \quad L_3 \mapsto L'_3 := k_3 L_3, \quad k_1 k_2 k_3 \neq 0.$$

Тогда для нового базиса правила коммутации (18.185) останутся прежними, но с заменой

$$b'^{(1)} = \frac{k_1}{k_2 k_3} b^{(1)}, \quad b'^{(2)} = \frac{k_2}{k_3 k_1} b^{(2)}, \quad b'^{(3)} = \frac{k_3}{k_1 k_2} b^{(3)}, \quad a' = \frac{a}{k_1}.$$

Допустим, что все собственные значения $b^{(i)}$ отличны от нуля, и положим

$$k_1 = \frac{k_2 k_3}{|b^{(1)}|}, \quad k_2 = \frac{k_1 k_3}{|b^{(2)}|}, \quad k_3 = \frac{k_1 k_2}{|b^{(3)}|}.$$

Эти уравнения имеют решения

$$k_1^2 = |b^{(2)} b^{(3)}|, \quad k_2^2 = |b^{(3)} b^{(1)}|, \quad k_3^2 = |b^{(1)} b^{(2)}|. \quad (18.186)$$

Тогда новые собственные значения будут равны по модулю единице $b'^{(i)} = \pm 1$, при этом $a = 0$, как следует из уравнения (18.184).

Заметим также, что изменение знака одной постоянной, например, k_1 при извлечении корня в (18.186) приводит к одновременному изменению всех знаков собственных значений $b^{(i)}$.

Аналогично можно доказать, что при $a = 0$ все отличные от нуля собственные значения $b^{(i)}$ можно по модулю приравнять единице. При этом еще остается свобода одновременного изменения знаков всех собственных значений. В таблице 18.1 приведена классификация Бианки трехмерных алгебр Ли. Первые шесть строк отведены случаю $a = 0$, который мы только что обсудили.

Если $a \neq 0$, то с необходимостью $b^{(1)} = 0$. При $b^{(2)} = b^{(3)} = 0$ и $b^{(2)} = 0, b^{(3)} \neq 0$, выбрав $k_1 = a$, получим $a' = 1$. Одновременно можно преобразовать $b^{(3)} \neq 0$ в единицу. Если $b^{(2)} \neq 0$ и $b^{(3)} \neq 0$, то возможны два неэквивалентных случая: $b^{(2)} > 0, b^{(3)} > 0$ и $b^{(2)} > 0, b^{(3)} < 0$.

Если $b^{(2)} > 0, b^{(3)} > 0$, то выберем

$$k_2 = \frac{k_1 k_3}{b^{(2)}}, \quad k_1 = \pm \sqrt{b^{(2)} b^{(3)}}. \quad (18.187)$$

Тип	a	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	η_{ij}
I	0	0	0	0	$\text{diag}(0, 0, 0)$
II	0	1	0	0	$\text{diag}(0, 0, 0)$
VII ₀	0	1	1	0	$\text{diag}(0, 0, 2)$
VI ₀	0	1	-1	0	$\text{diag}(0, 0, -2)$
IX	0	1	1	1	$\text{diag}(2, 2, 2)$
VIII	0	1	1	-1	$\text{diag}(-2, -2, 2)$
V	1	0	0	0	$\text{diag}(-2, 0, 0)$
IV	1	0	0	1	$\text{diag}(-2, 0, 0)$
VII _a , $a > 0$	a	0	1	1	$\text{diag}(2 - 2a^2, 0, 0)$
III	1	0	1	-1	$\text{diag}(-4, 0, 0)$
VI _a , $a > 0$	a	0	1	-1	$\text{diag}(-2 - 2a^2, 0, 0)$

Таблица 18.1. Классификация трехмерных алгебр Ли по Бианки.

Тогда $b^{(2)} = 1$ и $b^{(3)} = 1$, а параметр a преобразуется по правилу

$$a' = \pm \frac{a}{\sqrt{b^{(2)}b^{(3)}}}.$$

Мы видим, что с помощью выбора знака k_1 в масштабном преобразовании (18.187) можно изменить знак постоянной a , но не ее модуль. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать $a > 0$. Таким образом, в типе VII_a мы имеем однопараметрическое семейство алгебр, которые параметризуются положительным числом $a > 0$.

В случае $b^{(2)} > 0$, $b^{(3)} < 0$ можно проделать аналогичное построение.

Таким образом, по классификации Бианки мы имеем девять типов трехмерных алгебр Ли I–IX, две из которых, VII_a и VI_a параметризуются положительным числом a .

В последней колонке таблицы 18.1 указана форма Киллинга–Картана

$$\eta_{ij} := -f_{ik}^l f_{jl}^k = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} b^{km} b^{ln} - 2a_i a_j.$$

В выбранном базисе матрица b^{ij} диагональна и $a = (a, 0, 0)$. Поэтому форма Киллинга–Картана тоже диагональна. Ее диагональные элементы равны:

$$\eta_{11} = 2b^{(2)}b^{(3)} - 2a^2, \quad \eta_{22} = 2b^{(1)}b^{(3)} \quad \eta_{33} = 2b^{(1)}b^{(2)}.$$

Они и приведены в таблице.

Согласно теореме Картана алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга–Картана невырождена. Из таблицы следует, что среди трехмерных алгебр Ли только две являются полупростыми: это алгебры VIII и IX.

Алгебры Ли типа I–VII можно реализовать в виде полупрямого произведения алгебры двумерных матриц $\mathbb{R}(2)$ на одномерную алгебру $\mathbb{R}$, которая действует в $\mathbb{R}(2)$ с помощью некоторой матрицы M . Различные типы алгебр соответствуют различным матрицам M , как описано ниже.

Тип I. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_i, L_j] = 0. \quad (18.188)$$

Это – коммутативная унимодулярная алгебра Ли $\mathbb{R}(3)$ сдвигов в $\mathbb{R}^3$. Соответствующая универсальная накрывающая группа Ли представляет собой коммутативную группу сдвигов в

трехмерном евклидовом пространстве, которую можно отождествить с самим $\mathbb{R}^3$. В этом случае $M = 0$.

Тип II. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = 0, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = 0. \quad (18.189)$$

Это – нильпотентная унимодулярная алгебра Ли, которая изоморфна алгебре Ли группы Гейзенберга $\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$ (группа верхне треугольных 3×3 матриц с единицами на диагонали). В этом случае матрица M нильпотентна, но отлична от нуля (оба собственных значения равны нулю).

Тип III. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = -L_3 - L_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_2 + L_3. \quad (18.190)$$

Это – разрешимая неунимодулярная алгебра Ли.

Перейдем к новому базису

$$\tilde{L}_1 := \frac{1}{2}L_1, \quad \tilde{L}_2 := L_2 + L_3, \quad \tilde{L}_3 := L_2 - L_3.$$

Тогда коммутационные соотношения примут вид

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_2] = -\tilde{L}_2, \quad [\tilde{L}_1, \tilde{L}_3] = 0, \quad [\tilde{L}_2, \tilde{L}_3] = 0.$$

Алгебра типа III изоморфна прямой сумме $\mathfrak{a}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$, где $\mathfrak{a}(\mathbb{R})$ – алгебра Ли группы аффинных преобразований прямой, натянутой на $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ и $\mathbb{R}$ – алгебра Ли сдвигов прямой. В этом случае одно собственное значение матрицы M равно нулю, а другое – отлично от нуля.

Тип IV. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = L_3 - L_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_3. \quad (18.191)$$

Это – разрешимая неунимодулярная алгебра Ли. Матрица M при этом имеет равные отличные от нуля собственные значения, но не является полупростой.

Тип V. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = -L_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_3. \quad (18.192)$$

Это – разрешимая неунимодулярная алгебра Ли. Матрица M при этом имеет равные отличные от нуля собственные значения.

Тип VI_a. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = -L_3 - aL_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_2 + aL_3. \quad (18.193)$$

Это – разрешимая неунимодулярная (при $a \neq 0$) алгебра Ли. При $a = 0$ алгебра Ли унимодулярна. Алгебра Ли типа VI₀ изоморфна алгебре Ли двумерной группы Пуанкаре $\mathfrak{io}(1, 1)$ (движения двумерной плоскости Минковского), где базисные векторы L_2 и L_3 генерируют трансляции, а L_1 – вращения.

В частном случае $a = 1$ алгебра Ли VI₁ совпадает с алгеброй типа III.

Коммутационные соотношения (18.193) можно упростить. Для этого заметим, что в силу второго коммутационного соотношения произвольные линейные комбинации векторов L_2 и L_3 коммутируют между собой. Совершим линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} \tilde{L}_2 \\ \tilde{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}_2 \\ \tilde{L}_3 \end{pmatrix}, \quad (18.194)$$

где $\det := AD - BC \neq 0$. Простые вычисления приводят к следующим коммутаторам:

$$\begin{aligned} [L_1, \tilde{L}_2] &= \frac{1}{\det} (-a \det + AC - BD) \tilde{L}_2 + \frac{1}{\det} (B^2 - A^2) \tilde{L}_3, \\ [L_1, \tilde{L}_3] &= \frac{1}{\det} (C^2 - D^2) \tilde{L}_2 + \frac{1}{\det} (-a \det - AC + BD) \tilde{L}_3. \end{aligned}$$

Положим $B = A$ и $C = -D$ (случай $B = A$ и $C = D$ приводит к вырожденному преобразованию). Тогда коммутационные соотношения принимают вид

$$[L_1, \tilde{L}_2] = -(1+a) \tilde{L}_2, \quad [L_1, \tilde{L}_3] = (1-a) \tilde{L}_3.$$

Введем новый базисный вектор

$$\tilde{L}_1 := (1+a) L_1.$$

Тогда коммутационные соотношения алгебры VI_a примут вид

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_2] = -\tilde{L}_2, \quad [\tilde{L}_2, \tilde{L}_3] = 0, \quad [\tilde{L}_1, \tilde{L}_3] = h \tilde{L}_3, \quad (18.195)$$

где введен новый параметр

$$h := \frac{1-a}{1+a}. \quad (18.196)$$

Функция $h(a)$ монотонно убывает, и при положительных a принимает значения $h \in (-1, 1)$. Поэтому алгебру VI_a , $a > 0$, обозначают также VI_h , $|h| < 1$.

Тип VII_a. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = L_3 - a L_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_2 + a L_3. \quad (18.197)$$

Это – разрешимая неунимодулярная (при $a \neq 0$) алгебра Ли. При $a = 0$ алгебра Ли унимодулярна. Алгебра Ли типа VII_0 изоморфна алгебре Ли неоднородных двумерных вращений $\mathfrak{io}(2)$ (движения двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$), где базисные векторы L_2 и L_3 генерируют трансляции, а L_1 – вращения.

Коммутационные соотношения (18.197) можно упростить. С этой целью совершим линейное преобразование (18.194). Тогда коммутационные соотношения примут вид

$$\begin{aligned} [L_1, \tilde{L}_2] &= -\frac{1}{\det} (a \det + AC + BD) \tilde{L}_2 + \frac{1}{\det} (A^2 + B^2) \tilde{L}_3, \\ [L_1, \tilde{L}_3] &= -\frac{1}{\det} (C^2 + D^2) \tilde{L}_2 + \frac{1}{\det} (-a \det + AC + BD) \tilde{L}_3. \end{aligned}$$

Положим

$$AC + BD = a \det, \quad \tilde{L}_1 := \frac{\det}{C^2 + D^2} L_1.$$

Тогда

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_2] = -2a \frac{\det}{C^2 + D^2} \tilde{L}_2 + \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \tilde{L}_3, \quad [\tilde{L}_1, \tilde{L}_3] = -\tilde{L}_2.$$

Пусть выполнено равенство

$$A^2 + B^2 = C^2 + D^2.$$

Это уравнение имеет много решений:

$$\begin{aligned} A &= r \cos \psi, & C &= r \cos \varphi, \\ B &= r \sin \psi, & D &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

где $r > 0$ и ψ, φ – произвольные углы. При этом $\det = r^2 \sin(\varphi - \psi)$, и для невырожденности преобразования (18.194) необходимо потребовать выполнение неравенства $\varphi \neq \psi$. Теперь коммутационные соотношения примут вид

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_2] = -h\tilde{L}_2 + \tilde{L}_3, \quad [\tilde{L}_2, \tilde{L}_3] = 0, \quad [\tilde{L}_1, \tilde{L}_3] = -\tilde{L}_2,$$

где

$$h := 2a \sin(\varphi - \psi).$$

Поскольку $a > 0$ и φ, ψ ($\varphi \neq \psi$) произвольны, то при фиксированном a на модуль h имеется ограничение: $0 < |h| < 2a$.

Тип VIII. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = -L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2. \quad (18.198)$$

Это – полупростая унимодулярная алгебра Ли. Алгебра Ли типа VIII изоморфна алгебре Лоренца $\mathfrak{so}(2, 1)$. Универсальная накрывающая для группы Лоренца довольно сложно устроена. Как многообразие, она некомпактна и диффеоморфна евклидову пространству $\mathbb{R}^3$.

Тип IX. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2. \quad (18.199)$$

Это – полупростая унимодулярная алгебра Ли трехмерных вращений $\mathfrak{so}(3)$. Ее универсальной накрывающей является группа Ли $\mathrm{SU}(2)$, которая, как многообразие, диффеоморфна трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$.

Можно доказать, что перечисленные в таблице алгебры Ли неразложимы в прямые суммы, за исключением алгебр типа I и III.

18.5.2. Уравнения движения для однородной вселенной. В настоящем разделе мы покажем, что для однородных моделей вселенных, у которых все пространственные сечения $x^0 := t = \text{const}$ являются главными однородными пространствами, уравнения Эйнштейна сводятся к системе *обыкновенных* дифференциальных уравнений. Это является существенным упрощением задачи нахождения точных решений, хотя построить их в явном виде удастся далеко не всегда.

Пусть $\mathbb{H}$ – трехмерное главное однородное пространство с координатами x^μ , $\mu = 1, 2, 3$. Предположим, что на $\mathbb{H}$ определена правоинвариантная метрика, т.е. произвольная невырожденная матрица, заданная в некоторой точке $\mathbb{H}$, разнесена по всему однородному пространству $\mathbb{H}$ с помощью группового действия справа. Для главного однородного пространства такая метрика единственна. Пусть $K = K^\mu \partial_\mu$ – один из векторов Киллинга, действующих на $\mathbb{H}$. Выберем естественные координаты на $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$ в виде $\{x^\alpha\} = \{t, x^\mu\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Теперь продолжим действие транзитивной группы преобразований с $\mathbb{H}$ на все $\mathbb{M}$ с помощью инфинитезимальных преобразований

$$t \mapsto t' := t, \quad x \mapsto x'^\mu := x^\mu + \epsilon K^\mu(t, x), \quad \epsilon \ll 1. \quad (18.200)$$

То есть группа преобразований не действует на время.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вселенная $\mathbb{M}$ называется *однородной*, если она имеет вид топологического произведения вещественной прямой $\mathbb{R} \ni t$ на трехмерное главное однородное пространство $\mathbb{H} \ni x$, т.е. $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{H}$. При этом мы предполагаем, что метрика на $\mathbb{M}$ инвариантна относительно группы транзитивных преобразований, действующих на $\mathbb{H}$ и продолженных на все $\mathbb{M}$ по правилу (18.200).

Из определения однородной вселенной и теоремы 2.5.1 следует, что в некоторой окрестности каждой точки M существует такая система координат, что метрика пространства-времени имеет блочно диагональный вид

$$ds^2 = dt^2 + \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (18.201)$$

где $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(t, x)$ – инвариантная метрика на однородном пространстве $\mathbb{H}$, зависящая от времени t как от параметра. При этом векторные поля Киллинга не зависят от времени, $K^\mu = K^\mu(x)$.

Отметим отличие метрики (18.201) от метрики однородной и изотропной вселенной. Метрика Фридмана (18.70) в силу изотропии зависит от времени только через масштабный множитель. Теперь мы рассматриваем более широкий класс метрик, т.к. для построения однородной метрики на каждом сечении постоянного времени $t = \text{const}$ в единице группы можно выбрать свою отрицательно определенную матрицу и разнести ее по всему пространству-времени с помощью группового действия. При этом необходимо только позаботиться только о достаточно гладкой зависимости метрики от времени.

Однородное пространство – это транзитивная группа преобразований $(\mathbb{H}, \mathbb{G})$. Для определенности, мы считаем, что группа преобразований действует справа. В моделях вселенной Фридмана пространственные сечения являются пространствами постоянной кривизны. Группа симметрии действует на них транзитивно, и поэтому они являются однородными, но не главными однородными пространствами.

По определению пространство $\mathbb{H}$ является главным однородным пространством, и его можно отождествить с трехмерным многообразием группы Ли, $\mathbb{H} = \mathbb{G}$. При этом инвариантные структуры на $\mathbb{G}$ строятся следующим образом. Мы фиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{G}$ (например, единицу группы), задаем в этой точке компоненты некоторого тензора и разносим его по всему групповому многообразию с помощью группового действия справа. В результате, по построению, получим инвариантный тензор, заданный на группе Ли $\mathbb{G}$. Здесь важно, что однородное пространство является главным, т.к. в этом случае решение уравнения $x = x_0 a$, где $x, x_0 \in \mathbb{G}$ – две произвольные точки, для $a \in \mathbb{G}$ единственно. Если же однородное пространство не является главным, то в общем случае разнесение тензорных компонент, заданных в точке x_0 , не является единственным и поэтому не определено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathbb{H}$ является просто однородным пространством, то в общем случае может существовать несколько элементов группы $\mathbb{G}$, связывающих две точки $\mathbb{H}$: $x = x_0 a = x_0 b$, где $x, x_0 \in \mathbb{H}$ и $a, b \in \mathbb{G}$. Если группа неабелева, то результат переноса метрики из точки x_0 в точку x может оказаться неоднозначным. Например, двумерная сфера $\mathbb{S}^2 \approx \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ является однородным, но не главным однородным пространством. Группа вращений $\text{SO}(3)$ действует на $\mathbb{S}^2$ транзитивно, но не свободно. Поэтому мы не можем получить $\text{SO}(3)$ инвариантную метрику на сфере $\mathbb{S}^2$, выбрав в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{S}^2$ произвольную невырожденную матрицу и разнеся ее по сфере с помощью группового действия, т.к. результат перенесения в общем случае зависит от выбора пути на сфере. В то же время на сфере $\mathbb{S}^2$ существует единственная $\text{SO}(3)$ инвариантная метрика – это метрика, индуцированная обычным вложением $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. В этом случае двумерная сфера становится однородным и изотропным пространством (пространством постоянной кривизны).

Трехмерную сферу $\mathbb{S}^3 \approx \text{SO}(4)/\text{SO}(3)$ можно рассматривать как однородное пространство, на котором транзитивно действует группа вращений $\text{SO}(4)$. При этом на ней существует единственная метрика, инвариантная относительно действия группы $\text{SO}(4)$, которая индуцирована обычным вложением $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. В этом случае сфера $\mathbb{S}^3$ становится пространством постоянной кривизны, и мы возвращаемся к модели однородной и изотропной вселенной, рассмотренной в предыдущих разделах. С другой стороны, сферу $\mathbb{S}^3$ можно рассматривать, как главное однородное пространство, поскольку $\mathbb{S}^3 \approx \text{SU}(2)$. В этом случае на ней можно задать множество

метрик, инвариантных относительно действия группы $\text{SU}(2)$ справа (или слева). Для этого достаточно выбрать произвольную невырожденную матрицу (любой сигнатуры), например, в единице группы и разнести ее по групповому многообразию с помощью действия группы справа (слева). Если построенная метрика отрицательно определена, то мы получим однородную модель вселенной, которая и является предметом настоящего раздела.

В предыдущем разделе мы построили все трехмерные алгебры Ли. Если соответствующая группа Ли является полупростой, то на групповом многообразии существует естественная двусторонне инвариантная метрика – форма Киллинга–Картана. Из классификации Бианки следует, что таких групп всего две: типы VIII и IX. При этом форма Киллинга–Картана для типа VIII не является знакоопределенной и ее нельзя использовать в качестве инвариантной метрики на пространственных сечениях в космологических моделях. Поэтому в качестве инвариантной метрики мы используем не двусторонне инвариантную метрику, а метрику, инвариантную относительно действия группы справа.

Пусть $R_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ – произвольный правоинвариантный базис на группе Ли $\mathbb{G}$, который получается фиксированием некоторого базиса в касательном пространстве к единице группы $R_i(x_0)$ с последующим разнесением по всей группе с помощью группового действия справа. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathbb{G}$ – это алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{G}$. Базис алгебры Ли $L_i(x)$ строится так же, как и базис правоинвариантных векторных полей, но с помощью группового действия слева. При этом в единице группы, по предположению, векторные поля совпадают, $R_i(x_0) = L_i(x_0)$. Базисы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[L_i, L_j] = f_{ij}^k L_k, \quad [R_i, R_j] = -f_{ij}^k R_k, \quad (18.202)$$

где f_{ij}^k – структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$. Базис алгебры Ли генерирует действие группы Ли справа. В частности, это действие сохраняет правоинвариантные векторные поля. Формально это записывается в виде равенства нулю производной Ли:

$$\mathcal{L}_{L_i} R_j = [L_i, R_j] = 0. \quad (18.203)$$

Если на группе Ли в какой то окрестности задана система координат x^μ , $\mu = 1, 2, 3$, то базисы право- и левоинвариантных векторных полей можно разложить по координатному базису:

$$R_i = e^\mu_i \partial_\mu, \quad L_i = l^\mu_i \partial_\mu, \quad (18.204)$$

$e^\mu_i(x)$ и $l^\mu_i(x)$ – компоненты соответствующих реперов. В трехмерном случае реперы называют также *триадами*. Инвариантный дуальный базис кокасательных пространств R^i и L^i (базис 1-форм) определяется следующими равенствами:

$$R^i(R_j) = \delta_j^i, \quad L^i(L_j) = \delta_j^i. \quad (18.205)$$

В координатном базисе он имеет следующий вид

$$R^i = dx^\mu e_\mu^i, \quad L^i = dx^\mu l_\mu^i, \quad (18.206)$$

где e_μ^i и l_μ^i – компоненты обратных реперов. Эти базисы удовлетворяют уравнениям Маурера–Картана:

$$dR^i = \frac{1}{2} R^j \wedge R^k f_{jk}^i, \quad dL^i = -\frac{1}{2} L^j \wedge L^k f_{jk}^i, \quad (18.207)$$

где d и $\wedge$ обозначают внешнюю производную и внешнее произведение форм.

ПРИМЕР 18.5.1. Если группа коммутативна, т.е. $f_{ij}^k = 0$, то можно выбрать $R_i = L_i = \partial_i$, где x^i некоторая система координат на $\mathbb{G}$.

Для нахождения явного вида реперов $e^\mu_i(x)$ и $l^\mu_i(x)$ необходимо знание функции композиции для группы $\mathbb{G}$. К сожалению, она известна только в простейших случаях. Однако для проведения вычислений этого, как правило, и не нужно. Все вычисления можно провести непосредственно в базисе R_i . Этот базис в общем случае не голономен, поскольку коммутатор базисных векторных полей отличен от нуля (18.202). При этом коэффициенты неголономности равны структурным константам, взятым с обратным знаком. Все формулы, необходимые для вычислений, приведены в [23], раздел 6.9.

Ясно, что правоинвариантный базис касательных пространств на всем многообразии $\mathbb{M}$ состоит из векторов $\{\partial_0 := \partial_t, R_i\}$, а форм – из 1-форм $\{dt, R^i\}$. Пусть на $\mathbb{M}$ задано произвольное тензорное поле, например, $T = dx^\alpha T_\alpha^\beta \partial_\beta$. Тогда его можно разложить по правоинвариантному базису:

$$T = dt T_0^0 \partial_0 + dt T_0^i R_i + R^i T_i^0 \partial_0 + R^i T_i^j R_j.$$

Под действием группы $\mathbb{G}$ базисные векторные поля не меняются по построению. Поэтому для того, чтобы тензорное поле было правоинвариантным, необходимо и достаточно, чтобы его компоненты в правоинвариантном базисе зависели только от времени $t = x^0$. Формально условие правой инвариантности тензорного поля записывается в виде равенства нулю производной Ли

$$L_{L_i} T = 0.$$

При преобразовании координат на $\mathbb{G}$ меняются компоненты триад e^μ_i и l^μ_i по обычному тензорному закону (индекс μ), но не сами векторные поля R_i и L_i . При этом компоненты тензорного поля относительно правоинвариантного базиса ведут себя как скаляры и, следовательно, не зависят от x .

Например, наиболее общая правоинвариантная метрика на $\mathbb{M}$ имеет вид

$$ds^2 = dt^2 + h_{ij} R^i R^j, \quad (18.208)$$

где $h_{ij}(t)$ – произвольная невырожденная симметричная отрицательно определенная матрица, зависящая только от времени. Это значит, что в момент времени t мы выбираем матрицу $h_{ij}(t)$ в единице группы и разносим ее по групповому многообразию с помощью действия группы справа. При этом мы предполагаем, что матрица $h_{ij}(t)$ достаточно гладко зависит от времени.

Приступим к вычислению геометрических характеристик многообразия $\mathbb{M}$ с метрикой (18.208), используя формулы [23], раздел 6.9. Несложные вычисления показывают, что только четыре компоненты линейной связности отличны от нуля

$$\begin{aligned} \omega_{0ij} &= \omega_{i0j} = \frac{1}{2} \dot{h}_{ij}, \\ \omega_{ij0} &= -\frac{1}{2} \dot{h}_{ij}, \\ \omega_{ijk} &= -\frac{1}{2} (f_{ijk} - f_{jki} + f_{kij}), \end{aligned} \quad (18.209)$$

где $f_{ijk} := f_{ij}{}^l h_{kl}$ и точка обозначает дифференцирование по времени. Теперь можно вычислить компоненты тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R_{0i0j} &= \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij} - \frac{1}{4}\dot{h}_{ik}\dot{h}_{jl}h^{kl}, \\ R_{0ijk} &= -\frac{1}{4}(f_{ik}{}^l - f_k{}^l{}_i + f^l{}_{ik})\dot{h}_{jl} + \frac{1}{4}(f_{ij}{}^l - f_j{}^l{}_i + f^l{}_{ij})\dot{h}_{kl}, \\ R_{ijkl} &= \frac{1}{4}(\dot{h}_{ik}\dot{h}_{jl} - \dot{h}_{il}\dot{h}_{jk}) + \hat{R}_{ijkl}, \end{aligned} \quad (18.210)$$

где тензор кривизны группы Ли имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ijkl} &= \frac{1}{2}f_{ij}{}^m f_{klm} + \frac{1}{4}[f_{ik}{}^m f_{jlm} - f_{jk}{}^m f_{ilm} + f_{ij}{}^m (f_{kml} - f_{lmk}) + f_{kl}{}^m (f_{imj} - f_{jmi}) + \\ &\quad + (f^m{}_{ik} + f^m{}_{ki})(f_{mjl} + f_{mlj}) - (f^m{}_{jk} + f^m{}_{kj})(f_{mil} + f_{mli})]. \end{aligned} \quad (18.211)$$

Следующий шаг состоит в вычислении компонент тензора Риччи:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}h^{ij} - \frac{1}{4}\dot{h}_{ik}\dot{h}_{jl}h^{ij}h^{kl}, \\ R_{0i} &= \frac{1}{2}f_k{}^{lk}\dot{h}_{il} - \frac{1}{2}f_i{}^{kl}\dot{h}_{kl}, \\ R_{ij} &= \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij} - \frac{1}{2}\dot{h}_{ik}\dot{h}_{jl}h^{kl} + \frac{1}{4}\dot{h}_{ij}\dot{h}_{kl}h^{kl} + \hat{R}_{ij}, \end{aligned} \quad (18.212)$$

где

$$\hat{R}_{ij} = \frac{1}{2}f_i{}^{kl}(f_{jkl} + f_{jlk}) + \frac{1}{2}(f^k{}_{ij} + f^k{}_{ji})f_{kl}{}^l - \frac{1}{4}f^{kl}{}_i f_{klj}. \quad (18.213)$$

Скалярная кривизна принимает вид

$$R = \ddot{h}_{ij}h^{ij} - \frac{3}{4}\dot{h}_{ik}\dot{h}_{jl}h^{ij}h^{kl} + \frac{1}{4}(\dot{h}_{ij}h^{ij})^2 + \hat{R}, \quad (18.214)$$

где

$$\hat{R} = \frac{1}{4}f^{ijk}f_{ijk} - \frac{1}{2}f^{ijk}f_{kij} + f^{ik}{}_k f_{ik}{}^k. \quad (18.215)$$

Для интегрирования уравнений движения удобно ввести тензор внешней кривизны гиперповерхности $t = \text{const}$, который определен формулой (8.44). В рассматриваемом случае блочно-диагональной метрики (18.208) – это обычная производная по времени от трехмерной метрики:

$$K_{ij} := -\frac{1}{2}\dot{h}_{ij}, \quad K := K_{ij}h^{ij} = -\frac{1}{\sqrt{|h|}}\frac{d}{dt}\sqrt{|h|}. \quad (18.216)$$

Учитывая формулу

$$\dot{K} = \frac{d}{dt}(K_{ij}h^{ij}) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{h}_{ij}h^{ij}) = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}h^{ij} - \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}h^{ij} + 2K_{ij}K^{ij},$$

выражение для нулевой компоненты тензора Риччи (18.212) принимает вид

$$R_{00} = -\dot{K} + K_{ij}K^{ij}. \quad (18.217)$$

Смешанные компоненты тензора Риччи также выражаются через внешнюю кривизну

$$R_{0i} = -f_k{}^{lk}K_{il} + f_i{}^{kl}K_{kl}. \quad (18.218)$$

Чтобы упростить выражение для пространственных компонент тензора Риччи, заметим, что справедливы формулы:

$$\begin{aligned}\dot{K}_{ik}h^{kj} &= \frac{d}{dt}(K_{ik}h^{kj}) - K_{ik}\dot{h}^{kj} = \dot{K}_i^j - 2K_{ik}K^{jk}, \\ \frac{1}{\sqrt{|h|}}\frac{d}{dt}(\sqrt{|h|}K_i^j) &= \dot{K}_i^j + \frac{K_i^j}{\sqrt{|h|}}\frac{d}{dt}\sqrt{|h|} = \dot{K}_i^j - K_i^jK,\end{aligned}\quad (18.219)$$

где $h := \det h_{ij}$. Тогда пространственные компоненты тензора Риччи с одним ковариантным и одним контравариантным индексом примут вид

$$R_i^j = -\frac{1}{\sqrt{|h|}}\frac{d}{dt}(\sqrt{|h|}K_i^j) + \hat{R}_i^j. \quad (18.220)$$

Теперь потребуем инвариантности тензора энергии-импульса материи, которая рассматривается как сплошная среда, относительно группы $\mathbb{G}$. Вектор скорости будет инвариантен тогда и только тогда, когда его компоненты относительно правоинвариантного базиса будут зависеть только от времени:

$$u = u^\alpha \partial_\alpha = u^0(t)\partial_0 + u^i(t)R_i.$$

Из условия

$$u^2 = (u^0)^2 + u^i u^j h_{ij} = 1$$

находим временную компоненту скорости

$$u^0 = \sqrt{1 - u^i u^j h_{ij}},$$

где мы выбрали положительный корень, т.к. материя движется вперед по времени. Таким образом, инвариантный тензор энергии-импульса в правоинвариантном базисе имеет вид

$$T^{ab} = (\mathcal{E} + \mathcal{P})u^a u^b - \mathcal{P}g^{ab}, \quad (18.221)$$

где $(a) = (0, i)$, $a = 0, 1, 2, 3$,

$$(u^a) = (\sqrt{1 - u^k u_k}, u^i)$$

и метрика имеет вид блочно диагональный вид (18.208). В правоинвариантном базисе тензор энергии-импульса (18.221) зависит только от времени t .

Запишем уравнения Эйнштейна в правоинвариантном базисе с одним контра- и одним ковариантным индексом

$$\Phi_a^b := R_a^b - \delta_a^b \Lambda + \frac{1}{2} \left[(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_a u^b - \frac{1}{2}(\mathcal{E} - \mathcal{P})\delta_a^b \right] = 0. \quad (18.222)$$

С учетом явного вида компонент тензора Риччи (18.217), (18.218) и (18.220) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}-\dot{K} + K_{ij}K^{ij} &= \Lambda - \frac{1}{2} \left[(\mathcal{E} + \mathcal{P})(1 - u^i u_i) - \frac{1}{2}(\mathcal{E} - \mathcal{P}) \right], \\ -f_k^{lk} K_{il} + f_i^{kl} K_{kl} &= -\frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})u^0 u_i, \\ -\frac{1}{\sqrt{|h|}}\frac{d}{dt}(\sqrt{|h|}K_i^j) + \hat{R}_i^j &= \delta_i^j \Lambda - \frac{1}{2} \left[(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_i u^j - \frac{1}{2}\delta_i^j(\mathcal{E} - \mathcal{P}) \right].\end{aligned}\quad (18.223)$$

Таким образом, мы свели уравнения Эйнштейна для однородной вселенной к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Систему уравнений (18.223) необходимо дополнить уравнениями релятивистской гидродинамики $\nabla_\beta T_\alpha^\beta = 0$, которые являются условиями интегрируемости уравнений Эйнштейна. Поскольку ковариантная производная от репера равна нулю, то в неголономном базисе уравнения релятивистской гидродинамики примут вид

$$\nabla_b T_a^b = e^\beta_b \partial_\beta T_a^b - \omega_{ba}^c T_c^b + \omega_{bc}^b T_a^c = 0. \quad (18.224)$$

Компоненты линейной связности для однородной вселенной в правоинвариантном базисе уже были посчитаны (18.209). След компонент линейной связности $\omega_a := \omega_{ba}^b$ имеет вид

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} h^{ij}, \quad \omega_i = -f_{ji}^j. \quad (18.225)$$

Положим в уравнениях (18.224) сначала $a = 0$, а затем $a = i$. Тогда после простых вычислений получим уравнения релятивистской гидродинамики:

$$\begin{aligned} \partial_0 [(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_0 u^0 - \mathcal{P}] + \frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\dot{h}_{ij}(h^{ij}u_0 u^0 - u^i u^j) - (\mathcal{E} + \mathcal{P})f_{kj}^k u_0 u^j &= 0, \\ \partial_0 [(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_i u^0] + \frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\dot{h}_{jk}h^{jk}u_i u^0 - (\mathcal{E} + \mathcal{P})f_{ijk}u^j u^k - (\mathcal{E} + \mathcal{P})f_{kj}^k u_i u^j &= 0. \end{aligned} \quad (18.226)$$

Для трехмерного случая структурные константы f_{ij}^k можно записать в каноническом виде (18.183), который использовался при классификации Бианки трехмерных алгебр Ли. В каноническом виде след структурных констант имеет вид

$$f_{kj}^k = 2a_j.$$

Кроме этого, справедлива формула

$$f_{ijk}u^j u^k = \varepsilon_{ijl}b^{lk}u_k u^j + a_j u^j u_i - a_i u^j u_j.$$

Теперь уравнения релятивистской гидродинамики примут вид

$$\begin{aligned} \partial_0 [(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_0 u^0 - \mathcal{P}] + \frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\dot{h}_{ij}(h^{ij}u_0 u^0 - u^i u^j) - 2(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_0 a_j u^j &= 0, \\ \partial_0 [(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_i u^0] + \frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\dot{h}_{jk}h^{jk}u_i u^0 - (\mathcal{E} + \mathcal{P})(\varepsilon_{ijl}b^{lk}u_k u^j + 3a_j u^j u_i - a_i u^j u_j) &= 0. \end{aligned} \quad (18.227)$$

Конечно, для замыкания системы уравнений необходимо ее дополнить уравнением состояния $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$.

Таким образом, мы получили 15 уравнений (18.223), (18.227) (плюс уравнение состояния) на 11 неизвестных функций h_{ij} , $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ и u^i . Поскольку уравнения Эйнштейна зависимы, $\partial_b \Phi_a^b = 0$, то независимых уравнений движения также одиннадцать.

Система уравнений (18.223) интегрируется в явном виде далеко не всегда. Простейший случай, когда общее решение можно записать явно, рассмотрен в следующем разделе.

18.5.3. Вселенная Казнера. Простейшая и интересная модель однородной, но не изотропной вселенной называется моделью Казнера [182]. Она относится к типу I по классификации Бианки и представляет собой вакуумное решение уравнений Эйнштейна без космологической постоянной.

Однородное пространство типа I – это абелева группа Ли трансляций трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, которая как многообразие совпадает с $\mathbb{R}^3$. Пусть x^μ , $\mu = 1, 2, 3$ – декартовы координаты в евклидовом пространстве. Поскольку группа абелева, то правоинвариантные векторные поля совпадают с левоинвариантными векторными полями и координатным базисом: $R_\mu = L_\mu = \partial_\mu$. Поэтому наиболее общая инвариантная метрика (18.201) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 + g_{\mu\nu}(t) dx^\mu dx^\nu, \quad (18.228)$$

где $g_{\mu\nu}(t)$ – произвольная симметричная невырожденная отрицательно определенная матрица, зависящая только от времени. Прямая подстановка этой метрики в вакуумные уравнения Эйнштейна приводит к трудоемким вычислениям. Поэтому мы поступим иначе, тем более, что формулы, полученные ниже, еще пригодятся.

Для дальнейших целей рассмотрим более общий случай, когда метрика на пространственных сечениях зависит не только от времени, но и от пространственных координат, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t, x)$. В разделе 8.4 были получены выражения для тензора кривизны в АДМ параметризации метрики через тензор внешней кривизны $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$ вложенной гиперповерхности $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{M}$. Поскольку в рассматриваемом случае метрика блочно диагональна, то функции хода и сдвига имеют вид

$$N = 1, \quad N_\mu = 0,$$

что существенно упрощает формулы. Тогда тензор внешней кривизны (8.44) пропорционален производной по времени t от метрики, которую обозначим точкой:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{\mu\nu}. \quad (18.229)$$

Из формул (8.49) следуют выражения для линейно независимых компонент тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R_{0\mu 0\nu} &= -\dot{K}_{\mu\nu} - K_\mu{}^\rho K_{\nu\rho}, \\ R_{\mu\nu\rho 0} &= \hat{\nabla}_\mu K_{\nu\rho} - \hat{\nabla}_\nu K_{\mu\rho}, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + K_{\mu\rho} K_{\nu\sigma} - K_{\mu\sigma} K_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (18.230)$$

где $\hat{\nabla}_\mu$ и $\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ – трехмерные ковариантная производная и тензор кривизны, построенные по метрике $g_{\mu\nu}$. Соответствующий тензор Риччи (8.51) имеет следующие линейно независимые компоненты:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\hat{g}^{\mu\nu} \dot{K}_{\mu\nu} - K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}, \\ R_{0\mu} &= \hat{\nabla}_\nu K^\nu{}_\mu - \partial_\mu K, \\ R_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} - \dot{K}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} K - 2K_\mu{}^\rho K_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (18.231)$$

где $\hat{g}^{\mu\nu}$ – матрица, обратная к $g_{\mu\nu}$, с помощью которой мы поднимаем пространственные индексы, и

$$K := K^\mu{}_\mu = -\frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu} \dot{g}_{\mu\nu} = -\frac{\dot{\hat{e}}}{\hat{e}} = -\frac{d}{dt} \ln \hat{e}. \quad (18.232)$$

– след тензора внешней кривизны. Выше $\hat{e} := \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$ – форма пространственного объема, и была использована формула (10.116).

Для скалярной кривизны (8.53) получаем выражение

$$R = \hat{R} - 2\hat{g}^{\mu\nu} \dot{K}_{\mu\nu} - 3K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} + K^2. \quad (18.233)$$

Поскольку

$$\hat{g}^{\mu\nu} \dot{K}_{\mu\nu} = \frac{d}{dt}(\hat{g}^{\mu\nu} K_{\mu\nu}) - \frac{d\hat{g}^{\mu\nu}}{dt} K_{\mu\nu} = \dot{K} - 2K^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

то выражения для R_{00} и R можно упростить:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\dot{K} + K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}, \\ R &= \hat{R} - 2\dot{K} + K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} + K^2. \end{aligned} \quad (18.234)$$

Заметим также, что справедлива формула

$$\frac{1}{\hat{e}} \frac{d}{dt}(\hat{e} K_\mu^\nu) = \dot{K}_\mu^\nu + \frac{\dot{\hat{e}}}{\hat{e}} K_\mu^\nu = \dot{K}_\mu^\nu - K K_\mu^\nu.$$

Поэтому выражение для пространственной компоненты тензора Риччи с одним верхним и одним нижним индексом также упрощается:

$$R_\mu^\nu = \hat{R}_\mu^\nu - \frac{1}{\hat{e}} \frac{d}{dt}(\hat{e} K_\mu^\nu) \quad (18.235)$$

Для анализа особенностей полезно знать выражение для квадрата тензора кривизны, который является геометрическим инвариантом. Несложные вычисления дают следующий ответ

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 4\dot{K}_{\mu\nu} \dot{K}_{\rho\sigma} \hat{g}^{\mu\rho} \hat{g}^{\nu\sigma} + 8\dot{K}_{\mu\nu} K^{\mu\rho} K^\nu{}_\rho + 2K_\mu^\nu K_\nu{}^\rho K_\rho{}^\sigma K_\sigma{}^\mu + 2(K_\mu^\nu K_\nu{}^\mu)^2 + \\ &+ 8\hat{\nabla}_\mu K_{\nu\rho} \hat{\nabla}^\mu K^{\nu\rho} - 8\hat{\nabla}_\mu K_{\nu\rho} \hat{\nabla}^\nu K^{\mu\rho} + \hat{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + 4\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} K^{\mu\rho} K^{\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (18.236)$$

Теперь вернемся к решению вакуумных уравнений Эйнштейна для вселенной Казнера. Поскольку пространственная часть метрики (18.228) не зависит от x , то $R_{\mu 0} = 0$. Поэтому необходимо решить только два уравнения $R_{00} = 0$ и $R_\mu^\nu = 0$. Из выражений (18.234) и (18.235) следует, что полная система уравнений движения для вселенной Казнера имеет вид

$$-\dot{K} + K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = 0, \quad (18.237)$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{e} K_\mu^\nu) = 0. \quad (18.238)$$

Конечно, эта система уравнений является частным случаем системы уравнений Эйнштейна (18.223) при отсутствии полей материи, $\Lambda = 0$ и $f_{ij}{}^k = 0$.

Второе уравнение имеет общее решение

$$\hat{e} K_\mu^\nu = -\lambda_\mu^\nu = \text{const},$$

где λ_μ^ν – некоторая постоянная матрица. Свертка полученного решения по индексам μ и ν приводит к равенствам

$$K = -\frac{\lambda}{\hat{e}} = -\frac{\dot{\hat{e}}}{\hat{e}}, \quad \lambda := \lambda_\mu^\mu,$$

где учтено выражение для скалярной внешней кривизны (18.232). Отсюда вытекает, что элемент объема является линейной функцией времени

$$\hat{e} = \lambda t, \quad (18.239)$$

где мы положили несущественную постоянную интегрирования равной нулю. Растяжкой координат всегда можно обратить след матрицы λ в единицу. Поэтому, не ограничивая общности, положим $\hat{e} = t$. Тогда $\lambda = 1$ и $K = -1/t$. В этом случае

$$K_\mu^\nu = -\frac{1}{t} \lambda_\mu^\nu, \quad (18.240)$$

где $\lambda_\mu{}^\nu$ – постоянная матрица с единичным следом. Подстановка этой формулы в уравнение $R_{00} = 0$ приводит к еще одному условию на неизвестную матрицу

$$\lambda_\mu{}^\nu \lambda_\nu{}^\mu = 1. \quad (18.241)$$

Возвращаясь к определению внешней кривизны (18.229), получаем обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение на метрику

$$\dot{g}_{\mu\nu} = \frac{2}{t} \lambda_\mu{}^\rho g_{\rho\nu}. \quad (18.242)$$

Это уравнение определяет метрику с точностью до умножения на произвольную отличную от нуля постоянную. Несущественная постоянная интегрирования соответствует сдвигу времени, и будет положена равной нулю.

Обозначим через p_1 , p_2 и p_3 собственные значения матрицы $\lambda_\mu{}^\nu$. Будем считать, что они вещественны и различны. Пусть $n_\mu^{(1)}$, $n_\mu^{(2)}$ и $n_\mu^{(3)}$ соответствующие собственные ковекторы:

$$\lambda_\mu{}^\rho n_\rho^{(i)} = p_i n_\mu^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда решение уравнения (18.242) можно представить в виде

$$g_{\mu\nu} = -t^{2p_1} n_\mu^{(1)} n_\nu^{(1)} - t^{2p_2} n_\mu^{(2)} n_\nu^{(2)} - t^{2p_3} n_\mu^{(3)} n_\nu^{(3)}. \quad (18.243)$$

Здесь мы выбрали отрицательно определенную метрику в соответствии с нашим соглашением. Теперь выберем векторы $n^{(i)}$ в качестве направляющих векторов новых координатных осей, которые обозначим x, y, z , и нормируем их на единицу. В результате получим *метрику Казнера*

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2, \quad (18.244)$$

где p_1, p_2 и p_3 – произвольные различные числа, удовлетворяющие двум условиям:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (18.245)$$

Первое равенство вытекает из требования $\lambda = 1$, а второе – из условия (18.241).

Чтобы представить себе область допустимых значений параметров p_1, p_2 и p_3 , заметим, что первое условие (18.245) определяет плоскость, а второе – сферу в евклидовом пространстве $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$. Поэтому область допустимых значений параметров представляет собой пересечение плоскости со сферой. По предположению, собственные числа должны быть различными. Расположим их в порядке возрастания $p_1 < p_2 < p_3$. Чтобы найти интервалы возможных значений собственных чисел, рассмотрим случай совпадения двух собственных чисел. Это возможно только для двух троек чисел $(-1/3, 2/3, 2/3)$ и $(0, 0, 1)$. Отсюда следует, что одно из собственных чисел должно быть отрицательно, а два других – положительны, причем их значения лежат в интервалах

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1. \quad (18.246)$$

Таким образом, метрика Казнера (18.244) описывает однородное, но не изотропное пространство-время. Форма пространственного объема $\hat{e} = t$ линейно растет с течением времени. Это значит, что в целом вселенная расширяется. При этом линейные расстояния вдоль оси x уменьшаются, а вдоль осей y и z – увеличиваются. То есть в одном направлении происходит сжатие, а в двух других – растяжение.

Рассмотрим некоторые свойства тензора кривизны для метрики Казнера. Для вычислений нам понадобится явный вид тензора внешней кривизны

$$K_{\mu}^{\nu} = -\frac{1}{t} \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}, \quad K_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} p_1 t^{2p_1-1} & 0 & 0 \\ 0 & p_2 t^{2p_2-1} & 0 \\ 0 & 0 & p_3 t^{2p_3-1} \end{pmatrix}. \quad (18.247)$$

Простые вычисления показывают, что скалярная кривизна (18.233) для метрики Казнера равна нулю, $R = 0$. Это естественно, т.к. для метрики Казнера тензор Риччи равен нулю, $R_{\alpha\beta} = 0$ (вакуумные уравнения движения). Однако это не значит, что вселенная Казнера является плоской. Действительно, квадрат тензора кривизны (18.236), который является геометрическим инвариантом, принимает вид

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4\dot{K}_{\mu\nu} \dot{K}_{\rho\sigma} \hat{g}^{\mu\rho} \hat{g}^{\nu\sigma} + 8\dot{K}_{\mu\nu} K^{\mu\rho} K^{\nu}_{\rho} + 2K_{\mu}^{\nu} K_{\nu}^{\rho} K_{\rho}^{\sigma} K_{\sigma}^{\mu} + 2(K_{\mu}^{\nu} K_{\nu}^{\mu})^2.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае тензор кривизны совпадает с тензором Вейля. Подстановка в это выражение тензора внешней кривизны (18.247) приводит к следующему результату

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{4}{t^4} (2 - 2p_1^3 - 2p_2^3 - 2p_3^3 - p_1^2 p_2^2 - p_2^2 p_3^2 - p_1^2 p_3^2). \quad (18.248)$$

В общем случае правая часть обращается в бесконечность при $t = 0$. То есть решение Казнера содержит неустранимую особенность, где тензор кривизны расходится. Заметим, что при $t = 0$ метрика Казнера (18.244) также имеет особенность, т.к.

$$g_{11} \rightarrow \infty, \quad g_{22} \rightarrow 0, \quad g_{33} \rightarrow 0, \quad \det g \rightarrow 0.$$

Эта особенность соответствует большому взрыву.

Посмотрим, существуют ли среди метрик Казнера плоские. В плоском случае полный тензор кривизны должен обратиться в нуль, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Для этого необходимо, чтобы $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. Из вида пространственных компонент тензора кривизны (18.230) вытекает необходимое условие того, чтобы метрика Казнера была плоской:

$$K_{11} K_{22} = 0, \quad K_{11} K_{33} = 0, \quad K_{22} K_{33} = 0.$$

Если собственные числа упорядочены, то эта система уравнений имеет единственное решение $p_1 = p_2 = 0$ и $p_3 = 1$. В этом пределе метрика Казнера принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - t^2 dz^2.$$

После замены координат

$$\tau := t \operatorname{ch} z, \quad \zeta := t \operatorname{sh} z,$$

метрика Казнера переходит в метрику Лоренца.

Случаи совпадающих собственных значений матрицы λ_{μ}^{ν} рассмотрены в [6], §117.

19. Дополнение

19.1. Кватернионы

Кватернионы играют большую роль в математической физике. Особенно в теории алгебр Клиффорда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим четырехмерное векторное пространство $\mathbb{H}$ над полем вещественных чисел, которое содержит поле вещественных чисел как подпространство. Обозначим базис этого пространства символами $1, i, j, k$, где 1 – единица из поля вещественных чисел. Тогда произвольный элемент $q \in \mathbb{H}$ представим в виде

$$q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (19.1)$$

Введем некоммутативное билинейное умножение в $\mathbb{H}$, положив следующее правило умножения базисных векторов:

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Элементы вида (19.1) с операциями сложения, умножения на действительные числа и умножения (19.2) называются *кватернионами*.

С помощью прямых вычислений можно проверить, что кватернионы с так определенным умножением образуют ассоциативную, но некоммутативную алгебру с единицей $\mathbb{H}$ над полем вещественных чисел. Напомним, что ассоциативная алгебра с единицей называется унитарной.

Алгебру кватернионов можно представить в виде комплексных матриц $A(q) \in \mathbf{mat}(2, \mathbb{C})$

$$A(q) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}, \quad (19.3)$$

где i – мнимая единица. Прямые вычисления показывают, что отображение $q \mapsto A(q)$ является гомоморфизмом, то есть

$$A(q_1 q_2) = A(q_1) A(q_2).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно проверить его для $q = i, j, k$. В частности, при $q = i, j, k$ имеем равенства:

$$A(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.4)$$

Эти матрицы с точностью до множителя $-i$ совпадают с матрицами Паули:

$$\sigma_1 = -iA(k), \quad \sigma_2 = -iA(j), \quad \sigma_3 = -iA(i). \quad (19.5)$$

Введем операцию сопряжения в $\mathbb{H}$, то есть поставим каждому кватерниону вида (19.1) его сопряженный элемент

$$\bar{q} := a - bi - cj - dk. \quad (19.6)$$

Это отображение $q \mapsto \bar{q}$ является антиавтоморфизмом алгебры кватернионов, т.е.

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2, \quad \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1.$$

Число a называется вещественной частью $\operatorname{re} q := a$, а остаток $\operatorname{im} q := bi + cj + dk$ – мнимой частью кватерниона. Легко проверяется свойство

$$\operatorname{re}(q_1 q_2) = \operatorname{re}(q_2 q_1).$$

Поскольку выполнены также равенства

$$\bar{\bar{q}} = q \quad \text{и} \quad \overline{aq} = a\bar{q}, \quad a \in \mathbb{R},$$

то сопряжение в вещественной алгебре кватернионов является инволюцией. Кроме того справедливы формулы:

$$\operatorname{re} q = \frac{1}{2}(q + \bar{q}), \quad \operatorname{im} q = \frac{1}{2}(q - \bar{q}),$$

как и в поле комплексных чисел.

В алгебре кватернионов можно ввести симметричное скалярное произведение

$$(q_1, q_2) := \operatorname{re} q_1 \bar{q}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2, \quad (19.7)$$

которое совпадает с обычным евклидовым произведением в $\mathbb{R}^4$. Поскольку каждый кватернион представим в виде $q = \operatorname{re} q + \operatorname{im} q$, то алгебра кватернионов распадается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, где $\mathbb{R}$ – прямая, состоящая из вещественных кватернионов, а $\mathbb{R}^3$ – ортогональное трехмерное евклидово пространство мнимых кватернионов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19.1.1. *Кватернион q является вещественным тогда и только тогда, когда он коммутирует со всеми кватернионами из $\mathbb{H}$. То есть первое слагаемое $\mathbb{R}$ в прямой сумме $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ является центром алгебры кватернионов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка.

Определим норму кватерниона

$$\|q\|^2 := q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (19.8)$$

Нетрудно проверить, что

$$\|q\|^2 = \det A(q).$$

Отсюда следует, что $\|q_1 q_2\|^2 = \|q_1\|^2 \|q_2\|^2$.

Каждый отличный от нуля кватернион обладает единственным обратным элементом

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1,$$

где

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

Это означает, что множество кватернионов относительно операции сложения и умножения (19.2) (без умножения на действительные числа) образует тело, при этом умножение некоммутативно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19.1.2. *Пусть $I \in \mathbb{H}$ – фиксированный чисто мнимый кватернион с единичной нормой, $\|I\| = 1$. Тогда множество кватернионов вида $a1 + bI \in \mathbb{H}$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$ образует двумерную подалгебру в $\mathbb{H}$, которая изоморфна алгебре комплексных чисел $\mathbb{C}$. В частности, эта подалгебра коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку кватернион I чисто мнимый и обладает единичной нормой, то справедливы равенства:

$$\bar{I} = -I, \quad I^2 = -I\bar{I} = -1.$$

Поэтому кватернион $a + bI \in \mathbb{H}$ можно отождествить с комплексным числом $a + ib \in \mathbb{C}$. Согласованность умножения очевидна, т.к. $1 \cdot I = I$.

Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ допускает естественное отождествление с двумерным комплексным пространством $\mathbb{C}^2$. Используя определение умножения в алгебре кватернионов $k = -ji$ (19.2), запишем кватернион в виде

$$q = (a + ib) + j(c - id) = z_1 + j\bar{z}_2,$$

где линейные комбинации $z_1 := a + ib$ и $z_2 := c + id$ можно отождествить с парой комплексных чисел. При этом 1 и j рассматриваются, как базис в $\mathbb{C}^2$.

Рассмотрим мнимый кватернион, не содержащий вещественной части,

$$r = bi + cj + dk, \quad \|r\| = b^2 + c^2 + d^2.$$

Его можно представить, как вектор в трехмерном евклидовом пространстве $r \in \mathbb{R}^3$. Пусть $q \in \mathbb{H}$ произвольный обратимый (в смысле кватернионного умножения) кватернион. Тогда кватернион qrq^{-1} снова является мнимым кватернионом с той же нормой:

$$qrq^{-1} \in \mathbb{R}^3, \quad \|qrq^{-1}\| = \|r\|.$$

Это значит, что каждому обратимому кватерниону, т.е. отличному от нуля, ставится в соответствие некоторое вращение. При этом двум кватернионам q и $-q$, отличающимся знаком, соответствует одно и то же вращение. Можно проверить, что любое вращение можно реализовать с помощью кватерниона единичной нормы. Поскольку кватернионы единичной нормы параметризуют трехмерную сферу единичного радиуса, то существует гомеоморфизм

$$\mathrm{SO}(3) \approx \frac{\mathbb{S}^3}{\mathbb{Z}_2}.$$

Рассмотрим отображение кватернионов $q \in \mathbb{H}$, задаваемое двумя кватернионами $a, b \in \mathbb{H}$ единичной нормы

$$q \mapsto aqb^{-1}, \quad \|a\| = \|b\| = 1.$$

Это отображение задает вращение четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, поскольку сохраняет норму q . Можно проверить, что любое вращение определяет пару a и b с точностью до знака, так как кватернионы a, b и $-a, -b$ определяют одно и то же вращение. Это значит, что существует гомеоморфизм

$$\mathrm{SO}(4) \approx \frac{\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3}{\mathbb{Z}_2},$$

где $\mathbb{Z}_2 := \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

Множество обратимых кватернионов образует группу по умножению, которую мы обозначим $\mathbb{H}^\times$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19.1.3. Множество кватернионов с единичной нормой, $\|q\| = 1$ образует подгруппу $\mathrm{SU}(2) \subset \mathbb{H}^\times$, которая, как многообразие, совпадает с трехмерной сферой $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Групповые аксиомы легко проверяются. Изоморфизм следует из точного представления (19.3), поскольку для кватернионов единичной нормы справедливы равенства:

$$A^\dagger A = AA^\dagger = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}.$$

Вложение является прямым следствием определения нормы (19.8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19.1.4. Множество кватернионов, удовлетворяющих условию $q^2 = -1$, образует двумерную сферу $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$q^2 = (\operatorname{re} q)^2 + 2 \operatorname{re} q \operatorname{im} q + (\operatorname{im} q)^2 = -1,$$

то $\operatorname{re} q = 0$, т.е. кватернион является чисто мнимым. Тогда из условия $q^2 = -1$ следует, что $\|q\| = 1$, что влечет за собой вложение $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

19.2. Полностью антисимметричные тензоры

Полностью антисимметричный тензор ранга n в n -мерном евклидовом пространстве единственен с точностью до умножения на произвольную ненулевую постоянную и имеет всего одну независимую компоненту. Его всегда можно представить в виде константы, умноженной на тензор, все ненулевые компоненты которого равны по модулю единице. Этот тензор часто используется в приложениях и имеет специальное обозначение

$$\begin{aligned} \varepsilon^{a_1 \dots a_n} &= \varepsilon^{[a_1 \dots a_n]}, & \varepsilon^{12 \dots n} &= 1, \\ \varepsilon_{a_1 \dots a_n} &= \varepsilon^{a_1 \dots a_n}, & \varepsilon_{12 \dots n} &= 1. \end{aligned} \quad (19.9)$$

Здесь подъем индексов произведен с помощью евклидовой метрики. Произведения и свертки двух таких тензоров выражаются через символы Кронекера:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} &= n! \delta_{b_1 \dots b_n}^{[a_1 \dots a_n]} = \det \begin{pmatrix} \delta_{b_1}^{a_1} & \delta_{b_1}^{a_2} & \dots & \delta_{b_1}^{a_n} \\ \delta_{b_2}^{a_1} & \delta_{b_2}^{a_2} & \dots & \delta_{b_2}^{a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{b_n}^{a_1} & \delta_{b_n}^{a_2} & \dots & \delta_{b_n}^{a_n} \end{pmatrix} \\ \varepsilon^{b_1 a_2 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} &= (n-1)! \delta_{b_2 \dots b_n}^{[a_2 \dots a_n]} = \frac{n!}{C_n^1} \delta_{b_2 \dots b_n}^{[a_2 \dots a_n]} \\ \varepsilon^{b_1 b_2 a_3 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} &= 2(n-2)! \delta_{b_3 \dots b_n}^{[a_3 \dots a_n]} = \frac{n!}{C_n^2} \delta_{b_3 \dots b_n}^{[a_3 \dots a_n]} \\ \varepsilon^{b_1 \dots b_k a_{k+1} \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} &= k!(n-k)! \delta_{b_{k+1} \dots b_n}^{[a_{k+1} \dots a_n]} = \frac{n!}{C_n^k} \delta_{b_{k+1} \dots b_n}^{[a_{k+1} \dots a_n]} \\ \varepsilon^{b_1 \dots b_{n-1} a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} &= (n-1)! \delta_{b_n}^{a_n} = \frac{n!}{C_n^{n-1}} \delta_{b_n}^{a_n} \\ \varepsilon^{b_1 \dots b_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} &= n! \end{aligned} \quad (19.10)$$

Полностью антисимметричный тензор максимального ранга в пространстве с метрикой произвольной сигнатуры определяется соотношениями

$$\varepsilon_{12 \dots n} = 1, \quad \varepsilon^{12 \dots n} = \operatorname{sgn}, \quad (19.11)$$

где множитель $\text{sgn} := \text{sign}(\det g_{\alpha\beta})$ равен знаку определителя метрики. Этот множитель возникает при подъеме индексов. Для таких пространств правые части (19.10) необходимо умножить на множитель sgn .

Определитель произвольной квадратной матрицы A в евклидовом пространстве можно записать в виде

$$\begin{aligned} \det(A_a^b) &= \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} A_1^{b_1} A_2^{b_2} \dots A_n^{b_n} = \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} A_{a_1}^1 A_{a_2}^2 \dots A_{a_n}^n \\ &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} A_{a_1}^{b_1} A_{a_2}^{b_2} \dots A_{a_n}^{b_n}. \end{aligned} \quad (19.12)$$

Полностью антисимметричный тензор в n -мерном евклидовом пространстве инвариантен относительно $\mathbb{SO}(n)$ вращений с матрицей $S_a^{a'} \in \mathbb{SO}(n)$:

$$\varepsilon^{a'_1 \dots a'_n} = \varepsilon^{a_1 \dots a_n} S_{a_1}^{a'_1} \dots S_{a_n}^{a'_n} = \det(S_a^{a'}) \varepsilon^{a'_1 \dots a'_n}. \quad (19.13)$$

Полностью антисимметричный тензор в голономном базисе на многообразии имеет следующие компоненты:

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = e^{\alpha_1}_{a_1} \dots e^{\alpha_n}_{a_n} \varepsilon^{a_1 \dots a_n}, \quad (19.14)$$

и в геометрии Римана–Картана является ковариантно постоянным:

$$\nabla_\beta \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0. \quad (19.15)$$

По определению, полностью антисимметричный тензор в пространстве Минковского четного числа измерений меняет знак при пространственном отражении $(x^0, x^i) \mapsto (x^0, -x^i)$, то есть является псевдотензором. Приставку “псевдо” мы, как правило, опускаем. В четномерном пространстве Минковского полностью антисимметричный тензор меняет знак при отражении одной из пространственных координат, например, $(x^0, x^1, x^2, \dots) \mapsto (x^0, -x^1, x^2, \dots)$.

Полностью антисимметричная тензорная плотность $\hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ веса -1 определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} &:= \sqrt{|g|} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \\ \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &:= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}. \end{aligned} \quad (19.16)$$

Ее ненулевые компоненты равны по модулю единице в любой системе координат,

$$\hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \begin{cases} +1 & \text{— четная перестановка индексов,} \\ -1 & \text{— нечетная перестановка индексов,} \\ 0 & \text{— совпадение любой пары индексов.} \end{cases} \quad (19.17)$$

Отсюда следует, что все частные производные антисимметричной тензорной плотности равны нулю:

$$\partial_\beta \hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0. \quad (19.18)$$

Приведем явные формулы для трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, которые часто используются в физических приложениях,

$$\varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon^{123} = 1. \quad (19.19)$$

Свертки:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{lmn}\varepsilon_{ijk} &= \delta_{ijk}^{lmn} + \delta_{ijk}^{mnl} + \delta_{ijk}^{nlm} - \delta_{ijk}^{lnm} - \delta_{ijk}^{mln} - \delta_{ijk}^{nml} = \det \begin{pmatrix} \delta_i^l & \delta_i^m & \delta_i^n \\ \delta_j^l & \delta_j^m & \delta_j^n \\ \delta_k^l & \delta_k^m & \delta_k^n \end{pmatrix} \\
\varepsilon^{klm}\varepsilon_{ijm} &= \delta_{ij}^{kl} - \delta_{ij}^{lk}, \\
\varepsilon^{jkl}\varepsilon_{ikl} &= 2\delta_i^j, \\
\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6.
\end{aligned} \tag{19.20}$$

Полностью антисимметричный тензор второго ранга в евклидовом пространстве имеет две ненулевые компоненты

$$\varepsilon_{12} = 1, \quad \varepsilon^{12} = 1 \tag{19.21}$$

или

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon^{ab} = \varepsilon_a^b = \varepsilon^a_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19.22}$$

Свертки:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{ab}\varepsilon_{cd} &= \delta_{cd}^{ab} - \delta_{cd}^{ba} = \det \begin{pmatrix} \delta_c^a & \delta_c^b \\ \delta_d^a & \delta_d^b \end{pmatrix} \\
\varepsilon^{ab}\varepsilon_{ad} &= \delta_d^b, \\
\varepsilon^{ab}\varepsilon_{ab} &= 2.
\end{aligned} \tag{19.23}$$

В пространстве Минковского нечетного числа измерений формулы для сверток полностью антисимметричных тензоров те же, что и в евклидовом пространстве. В пространстве Минковского четного числа измерений полностью антисимметричные тензоры с верхними и нижними индексами отличаются знаком. Определим антисимметричный тензор четвертого ранга в пространстве Минковского следующим образом

$$\varepsilon_{0123} = 1, \quad \varepsilon^{0123} = -1. \tag{19.24}$$

Свертки:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{efgh} &= -\delta_{efgh}^{abcd} - \delta_{efgh}^{acdb} - \delta_{efgh}^{adbc} + \delta_{efgh}^{acbd} + \delta_{efgh}^{abdc} + \delta_{efgh}^{adcb} \\
&\quad + \delta_{efgh}^{bcd a} + \delta_{efgh}^{bdac} + \delta_{efgh}^{bacd} - \delta_{efgh}^{bdca} - \delta_{efgh}^{bcad} - \delta_{efgh}^{badc} \\
&\quad - \delta_{efgh}^{cdab} - \delta_{efgh}^{cabd} - \delta_{efgh}^{cbda} + \delta_{efgh}^{cadb} + \delta_{efgh}^{cdba} + \delta_{efgh}^{cbad} \\
&\quad + \delta_{efgh}^{dabc} + \delta_{efgh}^{dbca} + \delta_{efgh}^{dcab} - \delta_{efgh}^{dbac} - \delta_{efgh}^{dacb} - \delta_{efgh}^{dcba} \\
\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{afgh} &= -\delta_{fgh}^{bcd} - \delta_{fgh}^{cdb} - \delta_{fgh}^{dbc} + \delta_{fgh}^{cbd} + \delta_{fgh}^{bdc} + \delta_{fgh}^{dcb} \\
\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{abgh} &= -2(\delta_{gh}^{cd} - \delta_{gh}^{dc}), \\
\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{abch} &= -6\delta_h^d, \\
\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{abcd} &= -24.
\end{aligned} \tag{19.25}$$

Полностью антисимметричные тензоры в трехмерном евклидовом пространстве и пространстве Минковского связаны следующими соотношениями

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{0ijk}, \quad \varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{0ijk}. \tag{19.26}$$

Полностью антисимметричный тензор второго ранга в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ имеет две ненулевые компоненты:

$$\varepsilon_{01} = 1, \quad \varepsilon^{01} = -1 \quad (19.27)$$

или

$$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^a{}_b = -\varepsilon_a{}^b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (19.28)$$

Свертки:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ab} \varepsilon_{cd} &= -\delta_{cd}^{ab} + \delta_{cd}^{ba}, \\ \varepsilon^{ab} \varepsilon_{ad} &= -\delta_d^b, \\ \varepsilon^{ab} \varepsilon_{ab} &= -2. \end{aligned} \quad (19.29)$$

В двумерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ можно ввести проекционные операторы

$$\Pi^\pm{}_a{}^b := \frac{1}{2}(\delta_a^b \pm \varepsilon_a{}^b).$$

Отметим, что аналогичная конструкция в евклидовом пространстве не приводит к проекционным операторам.

Пусть в римановом пространстве $(\mathbb{M}, g)$, $\dim \mathbb{M} = n$, задано тензорное поле с компонентами $K_{\alpha\beta}$ типа $(0, 2)$ такое, что $\det K_{\alpha\beta} \neq 0$. Тогда существует обратное тензорное поле $K^{\alpha\beta}$ типа $(2, 0)$,

$$K^{\alpha\beta} K_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha,$$

и его можно представить в виде

$$K^{\alpha\beta} = \frac{1}{|\det K|(n-1)!} \hat{\varepsilon}^{\alpha\gamma_2 \dots \gamma_n} \hat{\varepsilon}^{\beta\delta_2 \dots \delta_n} K_{\delta_2 \gamma_2} \dots K_{\delta_n \gamma_n}, \quad (19.30)$$

Если метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то в пространстве четного числа измерений в правой части появляется знак минус.

Список литературы

- [1] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, третье изд., Наука, М., 1967.
- [2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, издание четвертое, Наука, М., 1998.
- [3] С. П. Новиков, И. А. Тайманов, *Современные геометрические структуры и поля*, МЦНМО, М., 2005.
- [4] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1926; Перевод: Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, ИЛ, М., 1948.
- [5] L. P. Eisenhart, *Continuous Groups of Transformations*, Dover Publ., New York, 1961; Перевод: Л. П. Эйзенхарт, *Непрерывные группы преобразований*, ИЛ, М., 1947.
- [6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, издание седьмое, Наука, М., 1988.
- [7] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, издание второе, Физматгиз, М., 1961.
- [8] J. L. Synge, *Relativity: The general theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960; Перевод: Дж. Синг, *Общая теория относительности*, ИЛ, М., 1963.
- [9] R. Penrose, *Structure of Space-time*, W. A. Benjamin, Inc., New York – Amsterdam, 1968; Перевод: Р. Пенроуз, *Структура пространства-времени*, Мир, М., 1972.
- [10] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972; Перевод: С. Вейнберг, *Гравитация и космология*, Мир, М., 1975.
- [11] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973; Перевод: С. Хокинг, Дж. Эллис, *Крупномасштабная структура пространства-времени*, Мир, М., 1977.
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973; Перевод: Ч. Мизнер, К. С. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*. Т. 1–3, Мир, М., 1977.
- [13] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc., New York – London, 1975; Перевод: П. А. М. Дирак, *Общая теория относительности*, Атомиздат, М., 1978.
- [14] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, and E. Herlt, *Exact Solutions of the Einsteins Field Equations*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980; Перевод: Д. Крамер, Х. Штефани, Э. Херльт, М. Мак-Каллум, *Точные решения уравнений Эйнштейна*, Энергоиздат, М., 1982.
- [15] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*. V. 1, 2, Clarendon Press, Oxford, 1983; Перевод: С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*. Т. 1, 2, Мир, М., 1986.
- [16] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [17] И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика черных дыр*, Наука, М., 1986.
- [18] *Новейшие проблемы гравитации*, ред. Д. Д. Иваненко (ред.), ИЛ, М., 1961.
- [19] *Гравитация и топология. Актуальные проблемы*, ред. Д. Д. Иваненко (ред.), Мир, М., 1966.
- [20] *General relativity*, eds. S. W. Hawking and W. Israel (eds), Cambridge University Press, Cambridge, 1979; Перевод: *Общая теория относительности*, ред. С. Хокинг, В. Израэль (ред.), Мир, М., 1983.
- [21] W. Killing, “Über die Grunglagen der Geometrie”, *J. Reine Angew. Math.*, **109** (1892), 121–186.
- [22] L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Spoeerri, Pisa, 1918.
- [23] М. О. Катанаев, *Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 1*, Лекционные курсы НОЦ, 1 25, МИАН, М., 2015.
- [24] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, University of California, Berkley, California, 1972; Перевод: Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, М., 1982.
- [25] P. Stäckel, *Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differentialgleichung mittelst Separation der Variablen*, Habilitationsschrift, Halle, 1891.
- [26] P. Stäckel, “Über die Bewegung eines Punktes in einer n -fachen Mannigfaltigkeit”, *Math. Ann.*, **42** (1893), 537–563.
- [27] P. Stäckel, “Sur des problem de dynamique se reduisent a des quadratures”, *Comptes rendus hebd, S. Acad. Sci. (Paris)*, **116** (1893), 1284–1286.
- [28] P. Stäckel, “Sur une classe de problemes de dynamique”, *Comptes rendus hebd, S. Acad. Sci. (Paris)*, **116** (1893), 485–487.
- [29] P. Stäckel, “Sur l’integration de l’équation différentielle de Hamilton”, *Comptes rendus hebd, S. Acad. Sci. (Paris)*, **121** (1895), 489–492.

- [30] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics”, *Phys. Rev. Lett.*, **11**:5 (1963), 237–238.
- [31] В. В. Обухов, *Штеккелевы пространства в теории гравитации*, Изд. Томского государственного педагогического университета, Томск, 2006.
- [32] В. В. Обухов, К. Е. Осетрин, *Классификационные проблемы в теории гравитации*, Изд. Томского государственного педагогического университета, Томск, 2007.
- [33] Th. De Donder, *La Gravifique Einsteinienne*, Gauthier-Villars & cie, Paris, 1921.
- [34] K. Lanczos, “Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen”, *Phys. Zs.*, **23** (1922), 537–539.
- [35] В. А. Фок О движении конечных масс в общей теории относительности, *ЖЭТФ*, **9**:4 (1939), 375–410.
- [36] E. Fermi, “Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria”, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat.*, **31** (1922), 21–23; 51–52; 101–103.
- [37] J. H. C. Whitehead, “Convex regions in the geometry of paths”, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **3** (1932), 33–42.
- [38] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия*, Издательство МГУ, М., 1988.
- [39] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, American Mathematical Society, Rhode Island, 2001; Перевод: С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, М., 2005.
- [40] М. М. Постников, *Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1982.
- [41] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, издание четвертое, Наука, М., 1988.
- [42] P. J. Olver, *Application of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1986; Перевод: П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989, 637 с. с.
- [43] Л. Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, УРСС, М., 1998.
- [44] E. Noether, “Invariante variationsprobleme.”, *Nachr. D. Königl. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse*, 1918, pages 235–257; Перевод в кн.: Э. Нётер, *Вариационные принципы в механике*, Физматгиз, М., 1959, 611.
- [45] B. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York – London, 1965; Перевод: Б. С. ДеВитт, *Динамическая теория групп и полей*, Наука, М., 1987, 287 с. с.
- [46] S. Coleman, “Classical lumps and their quantum descendants”, *New Phenomena in Subnuclear Physics*, Lectures at the 1975 international school of subnuclear physics “Ettore Majorana” (Erice), ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1977, 297–421.
- [47] Л. Д. Фаддеев, “В поисках многомерных солитонов”, *Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля*, Д2-9788, ОИЯИ, Дубна, 1977, 207–223.
- [48] R. Palais, “The principle of symmetric criticality”, *Comm. Math. Phys.*, **69**:1 (1979), 19–30.
- [49] О. А. Ладыженская, Л. В. Капитанский, “О принципе Коулмена нахождения стационарных точек инвариантных функционалов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 15, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **127**, 1983, 84–102.
- [50] R. Schmid and L. Simoni, “On infinite-dimensional variational principles with constraints”, *J. Math. Phys.*, **30**:5 (1989), 1171–1176.
- [51] L. Michel and L. Radicati, “On the dynamical breaking of $su(3)$ ”, *Proc. 5th Coral Gables Conf. Symmetry Principle at High Energy*, eds. B. Krsunoglu, A. Pearlmutter, C. A. Hurst, Benjamin, New York, 1968.
- [52] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, третье изд., Наука, М., 1989, 472 с. с.
- [53] Lee Hwa-Chung, “Invariants of hamilton systems and applications to to the theory of canonical transformations”, *Proc. Roy. Soc. Edinburg. A*, **62** (1947), 237–247.
- [54] Ф. Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, третье изд., Физматлит, М., 2001.
- [55] P. A. M. Dirac, “Generalized Hamiltonian dynamics”, *Proc. Roy. Soc. London. A*, **246** (1958), 326–332; Перевод в сб. “Новейшие проблемы гравитации”, ред. Д. Иваненко, ИЛ, М., 1961.
- [56] P. A. M. Dirac, “The theory of gravitation in hamiltonian form”, *Proc. Roy. Soc. London. A*, **246** (1246) (1958), 333–343; Перевод в сб. “Новейшие проблемы гравитации”, ред. Д. Иваненко, ИЛ, М., 1961.

- [57] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer, Yeshiva University, New York, 1964; Перевод в кн.: П. А. М. Дирак, *Принципы квантовой механики*, Наука, М., 1979.
- [58] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1990.
- [59] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1992.
- [60] В. П. Павлов, *Неголономная механика Дирака и дифференциальная геометрия*, Лекционные курсы НОЦ, МИАН, М., 2014.
- [61] Л. Д. Фаддеев, “Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов”, *ТМФ*, **1**:1 (1969), 3–18.
- [62] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, *Quantization of relativistic systems with constraints – equivalence of canonical and covariant formalism in quantum theory of gravitational field*, CERN Preprint TH 2332, 1977.
- [63] A. Einstein, “Die Feldgleichungen der Gravitation”, *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, **48**:2 (1915), 844–847; Перевод: Альберт Эйнштейн, *Собрание научных трудов*. Т. 1, Наука, М., 1965, 448–451.
- [64] D. Hilbert, “Die grundlagen der physik”, *Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse*, **Heft 3**, (1915), 395; Перевод в сб.: *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, Мир, М., 1979, 133–145.
- [65] A. Einstein, “Die-Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”, *Ann. d. Phys.*, **49** (1916), 769–822; Перевод в сб.: *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, Мир, М., 1979, 146–196.
- [66] von M. Fierz, “Über die physikalische deutung der erweiterten gravitationstheorie P. Jordans”, *Helv. Phys. Acta*, **29** (1956), 128–134.
- [67] P. Jordan, “Zum gegenwärtigen stand der diracschen kosmologischen hypothesen”, *Z. Phys.*, **157** (1959), 112–121.
- [68] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s prinsiple and a relativistic theory of gravitation”, *Phys. Rev.*, **124**:3 (1961), 925–935.
- [69] P. A. M. Dirac, “A new basis for cosmology”, *Proc. Roy. Soc. London. A*, **165**:921 (1938), 199–208.
- [70] A. Peres, “Polynomial expansion of gravitational lagrangian”, *Nuovo Cimento*, **28**:4 (1963), 865–867.
- [71] M. O. Katanaev, “Polynomial form of the Hilbert–Einstein action”, *Gen. Rel. Grav.*, **38** (2006), 1233–1240; gr-qc/0507026.
- [72] R. Penrose, “A remarkable property of plane waves in general relativity”, *Rev. Mod. Phys.*, **37**:1 (1965), 215–220.
- [73] N. A. Chernikov and E. A. Tagirov, “Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time”, *Ann. Inst. Henri Poincaré. A*, **9**:2 (1968), 109–141.
- [74] Н. Х. Ибрагимов, “К групповой классификации дифференциальных уравнений второго порядка”, *ДАН*, **183**:2 (1968), 274–277.
- [75] C. G. Callan, S. Coleman, and R. Jackiw, “A new improved energy–momentum tensor”, *Ann. Phys.*, **59**:42–73 (1970).
- [76] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, издание пятое, Наука, М., 1988.
- [77] M. Fierz and W. Pauli, *Proc. Roy. Soc. London. A*, **173**, 1939.
- [78] W. G. Unruh, “Experimental black-hole evaporation?”, *Phys. Rev. Lett.*, **46** (1981), 1351–1353.
- [79] W. G. Unruh, “Sonic analogue of black holes and the effect of high frequencies on black holes evaporation”, *Phys. Rev. D*, **51**:6 (1995), 2827–2838.
- [80] M. Visser, “Acoustic black holes: Horizons, ergospheres, and Hawking radiation”, *Class. Quantum Grav.*, **15** (1998), 1767–1791.
- [81] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, третье издание, Наука, М., 1986.
- [82] А. З. Петров, *Новые методы в общей теории относительности*, Наука, М., 1966.
- [83] R. Arnowitt, S. Deser, and S. W. Misner, “The dynamics of general relativity”, *Gravitation: an introduction to current research*, ed. L. Witten, John Wiley & Sons, Inc., New York – London, 1962; gr-qc/0405109.
- [84] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. I. The canonical theory”, *Phys. Rev.*, **160**:5 (1967), 1113–1148.
- [85] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, М., 1986.
- [86] H. Weyl, *Raum – Zeit – Materie*, Springer, Berlin, 1918; Перевод: Г. Вейль, *Пространство, время, материя*, Янус, М., 1996.

- [87] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, New York, 1958; Перевод: В. Паули, *Теория относительности*, Наука, М., 1991.
- [88] E. Schrödinger, *Space-time Structure*, Cambridge U.P., Cambridge, 1950; Перевод: Э. Шредингер, *Пространственно-временная структура Вселенной*, Наука, М., 1986.
- [89] W. Gordon, “Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie”, *Zs. f. Phys.*, **40**:1, 2 (1926), 117–133.
- [90] V. A. Fock, “Zur Schrödingerschen Wellenmechanik”, *Zs. f. Phys.*, **38**:3 (1926), 242–250.
- [91] V. A. Fock, “Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt”, *Zs. f. Phys.*, **39**:2, 3 (1926), 226–232.
- [92] O. Klein, “Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips”, *Zs. f. Phys.*, **41**:10 (1927), 407–442.
- [93] J. Goldstone, “Field theories with “superconductor” solutions”, *Nuovo Cim.*, **19**:1 (1961), 154–164.
- [94] E. P. Wigner, *Group Theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, Academic Press, New York – London, 1959; Перевод: Е. Вейль, *Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров*, ИЛ, М., 1961.
- [95] J. van Bladel, “Lorenz or Lorentz?”, *IEEE Antennas and Propagation Magazin*, **33**:2 (1991), 69.
- [96] F. Englert and R. Brout, “Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons”, *Phys. Rev. Lett.*, **13**:9 (1964), 321–323.
- [97] P. W. Higgs Broken symmetries, massless particles and gauge fields, *Phys. Lett.*, **12**:2 (1964), 132–133.
- [98] A. Proca, “Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs”, *J. Physique*, **8**:347–353 (1936).
- [99] A. Proca, “Sur la théorie du positon”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **202** (1936), 1366.
- [100] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, 5 изд., Наука, М., 1977.
- [101] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*, Физ.-мат. лит., М., 1958.
- [102] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [103] W. Pauli, “Contributions mathematiques a la theorie des matrices de Dirac”, *Ann. Inst. H. Poincare*, **6** (1936), 109.
- [104] R. H. Good, Jr., *Rev. Mod. Phys.*, **27**, 1955.
- [105] M. Fierz, “Zur fermischen theorie des β -zerfalls”, *Z. Phys.*, **104** (1937), 553–556.
- [106] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, W. A. Benjamin, Inc., New York – Amsterdam, 1964; Перевод: Р. Стритер, А. С. Вайтман, *PCT, спин, статистика и все такое*, Наука, М., 1966.
- [107] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron”, *Proc. Roy. Soc. London. A*, **117** (1928), 610–624; Перевод в сб.: П. А. М. Дирак, *К созданию квантовой теории поля*, ред. Б. В. Медведев, Наука, М., 1990, 113–128.
- [108] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron. Part II”, *Proc. Roy. Soc. London. A*, **118** (1928), 351–361; Перевод в сб.: П. А. М. Дирак, *К созданию квантовой теории поля*, ред. Б. В. Медведев, Наука, М., 1990, 129–141.
- [109] E. Majorana, “Teoria simmetrica dell’elettrone e del positrone”, *Nuovo Cim.*, **14** (1937), 171–195.
- [110] V. A. Fock, “Geometrizierung der Diracschen Theorie des Electrons”, *Zs. f. Phys.*, **57**:3, 4 (1929), 261–277; Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации, Мир, М., 1979, 415–432.
- [111] H. Weyl, “Gravitation and the electron”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **15** (1929), 323–334.
- [112] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физ-мат литература, Лаборатория базовых знаний, М., 2000.
- [113] J. A. Thorpe, *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1979; Перевод: Дж. Торп, *Начальные главы дифференциальной геометрии*, Мир, М., 1982.
- [114] T. K. Milnor, “Efimov’s theorem about complete immersed surfaces of negative curvature”, *Advances in Math.*, **8** (1972), 474–543.
- [115] N. H. Kuiper, “On C^1 isometric embeddings. II”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **58** (1955), 683–689.
- [116] М. О. Катанаев, *J. Math. Phys.*, **34**, 1993.

- [117] L. Liouville, “Sur l’équation aux différences partielles $\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u \partial v} \pm \lambda a^2 = 0$ ”, *J. Math. Pures Appl.*, **18**:71–72 (1853).
- [118] M. D. Kruskal, “Maximal extension of Schwarzschild metric”, *Phys. Rev.*, **119**:5 (1960), 1743–1745.
- [119] G. Szekeres, *Publ. Mat. Debrecen*, **7**, 1960.
- [120] K. Schwarzschild, “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin*, 1916, 189–196; Перевод в сб.: *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, Мир, М., 1979, 199–207.
- [121] J. Droste, “Over het veld van een enkel centrum in einstein’s theorie der zwaarte-kracht”, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam*, **23**:968–981 (1914–1915); English translation: “On the field of a single centre in Einstein’s theory of gravitation”, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, **17** (1915), 998–1011.
- [122] J. Droste, “Het veld van twee bolvormige restunde centra in Einstein’s theorie der zwaartekracht”, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam*, **24** (1915–1916), 749–757; English translation: “On the field of two Spherical Fixed Centres in Einstein’s Theory of Gravitation”, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, **18** (1916), 760–769.
- [123] J. Droste, “Het veld van een enkel centrum in einstein’s theorie der zwaartekracht, en de beweging van een stoffelijk punt in dat veld”, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam*, **25** (1916–1917), 163–180; English translation: “The Field of a Single Centre in Einstein’s Theory of Gravitation, and the Motion of a Particle in That Field”, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, **19** (1917), 197–215; Reprinted, with historical comments in *Gen. Rel. Grav.*, **34** (2002), 1545.
- [124] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, “String model with dynamical geometry and torsion”, *Phys. Lett. B*, **175**:4 (1986), 413–416.
- [125] T. Klösch and T. Strobl, “Classical and quantum gravity in 1 + 1 dimensions: II. The universal coverings”, *Class. Quantum Grav.*, **13** (1996), 2395–2421.
- [126] M. O. Katanaev, W. Kummer, and H. Liebl, “Geometric interpretation and classification of global solutions in generalized dilaton gravity”, *Phys. Rev. D*, **53**:10 (1996), 5609–5618.
- [127] M. O. Katanaev, W. Kummer, and H. Liebl, “On the completeness of the black hole singularity in 2d dilaton theories”, *Nucl. Phys. B*, **486** (1997), 353–370.
- [128] M. O. Katanaev, “Global solutions in gravity: Euclidean signature.”, *Fundamental Interactions. A Memorial Volume for Wolfgang Kummer*, eds. D. Vassilevich D. Grumiller, A. Rebhan, World Scientific, Singapore, 2010, 249–266; gr-qc/0808.1559.
- [129] B. Carter, “Black hole equilibrium states”, *Black Holes*, eds. C. DeWitt and B. C. DeWitt, Gordon & Breach, New York, 1973, 58–214.
- [130] H. Reissner, “Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie”, *Ann. Physik (Leipzig)*, **50** (1916), 106–120.
- [131] G Nordström, “On the energy of the gravitational field in Einstein’s theory”, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **20** (1918), 1238–1245.
- [132] A. S. Eddington, “A comparison of Whitehead’s and Einstein’s formulae”, *Nature*, **113** (1924), 192.
- [133] D. Finkelstein, “Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle”, *Phys. Rev.*, **110**:4 (1958), 965–967.
- [134] И. В. Волович, М. О. Катанаев, “Квантовые струны с динамической геометрией”, *Письма в ЖЭТФ*, **43**:5 (1986), 212–213.
- [135] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, *Ann. Phys.*, **197**, 1990.
- [136] М. О. Катанаев, “Новая интегрируемая модель – двумерная гравитация с динамическим кручением”, *ДАН СССР*, **309**:3 (1989), 591–593.
- [137] M. O. Katanaev, “Complete integrability of two-dimensional gravity with dynamical torsion”, *J. Math. Phys.*, **31**:4 (1990), 882–891.
- [138] M. O. Katanaev, “Conformal invariance, extremals, and geodesics in two-dimensional gravity with torsion”, *J. Math. Phys.*, **32**:9 (1991), 2483–2496.
- [139] M. O. Katanaev, T. Klösch, and W. Kummer, “Global properties of warped solutions in general relativity”, *Ann. Phys.*, **276** (1999), 191–222.
- [140] M. O. Katanaev, “Canonical quantization of the string with dynamical geometry and anomaly free nontrivial string in two dimensions”, *Nucl. Phys. B*, **416** (1994), 563–605.
- [141] W. Kummer, H. Liebl, and D. V. Vassilevich, “Exact path integral quantization of generic 2D dilaton gravity”, *Nucl. Phys. B*, **493** (1997), 491–502.

- [142] W. Kummer and G. Tieber, “Universal conservation law and modified Noether symmetry in $2d$ models of gravity with matter”, *Phys. Rev. D*, **59** (1998), 044001.
- [143] M. O. Katanaev, “New integrable model – two-dimensional gravity with dynamical torsion”, *Sov. Phys. Dokl.*, **34**:3 (1989), 982–984.
- [144] W. Kummer and D. J. Schwarz, “General analytic solution of R^2 -gravity with dynamical torsion in two dimensions”, *Phys. Rev. D*, **45**:8 (1992), 3628–3635.
- [145] S. N. Solodukhin, “Black-hole solution in $2d$ gravity with torsion”, *JETP Lett.*, **57**:6 (1993), 329–334.
- [146] E. W. Mielke, F. Gronwald, Yu. N. Obukhov, R. Tresguerres, and F. W. Hehl, “Towards complete integrability of two dimensional Poincaré gauge gravity”, *Phys. Rev. D*, **48**:8 (1993), 3648–3662.
- [147] P. Schaller and T. Strobl, “Canonical quantization of non-Einsteinian gravity and the problem of time”, *Class. Quantum Grav.*, **11** (1994), 331–346.
- [148] W. Kummer and P. Widerin, “Conserved quasilocal quantities and general covariant theories in two dimensions”, *Phys. Rev. D*, **52**:12 (1995), 6965–6975.
- [149] B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko, and A. M. Chervjakov, “Solitons in some geometrical field theories”, *Theor. Math. Phys.*, **40**:1 (1979), 15–27.
- [150] R. Jackiw, “Liouville field theory: a two-dimensional model for gravity”, *Quantum theory of gravity*, ed. S. Christensen, Hilger, Bristol, 1984, 403–420.
- [151] C. Teitelboim, “Gravitation and Hamiltonian structure in two spacetime dimensions”, *Phys. Lett. B*, **126**:1, 2 (1983), 41–45.
- [152] N. Ikeda and K.-J. Izawa, “General form of dilaton gravity and nonlinear gauge theory”, *Prog. Theor. Phys.*, **89**:5 (1993), 237–246.
- [153] P. Schaller and T. Strobl, “Poisson structure induced (topological) field theories”, *Mod. Phys. Lett. A*, **9**:33 (1994), 3129–3136.
- [154] G. D. Birkhoff, *Relativity and modern physics*, Cambridge, Harvard University Press, Cambridge, 1923.
- [155] J. T. Jebsen, “Über die allgemeinen kugelsymmetrischen losungen der einsteinschen gravitationsgleichungen im vakuum”, *Ark. Mat. Ast. Fys.*, **15**:18 (1921), 1–9.
- [156] F. Kottler, “Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie”, *Ann. Physik (Leipzig)*, ser. 4, **56**:14 (1918), 401–462.
- [157] A. Einstein and N. Rosen, “The particle problem in the general theory of relativity”, *Phys. Rev.*, **43** (1935), 73–77.
- [158] L. Flamm, “Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie”, *Physik. Z.*, **17** (1916), 448.
- [159] P. Painlevé, “La mécanique classique et la théorie de la relativité”, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **173** (1921), 677–680.
- [160] A. Gullstrand, “Allgemeine lösung des statischen einkörper-problems in der Einsteinschen gravitations theorie”, *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, **16**:8 (1922), 1–15.
- [161] E. Kasner, “The impossibility of Einstein fields immersed in flat space of five dimensions”, *Am. J. Math.*, **43**:2 (1921), 126–129.
- [162] С. А. Пастон, А. А. Шейкин, “Вложения для решений уравнений Эйнштейна”, *ТМФ*, **3** (2013), 429–441.
- [163] C. Fronsdal, “Completion and embedding of the Schwarzschild solution”, *Phys. Rev.*, **116**:3 (1959), 778–781.
- [164] E. Kasner, “Finite representation of the solar gravitational field in flat space of six dimensions”, *Am. J. Math.*, **43**:2 (1921), 130–133.
- [165] T. Fujitani, M. Ikeda, and M. Matsumoto, “On the embedding of the Schwarzschild”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **1**:1 (1961), 43–61.
- [166] A. K. Raychaudhuri, “Relativistic cosmology. I”, *Phys. Rev.*, **98**:4 (1955), 1123–1126; “Reprinted, with historical comments:”, *Gen. Rel. Grav.*, **32** (2000), 743.
- [167] A. K. Raychaudhuri, “Singular state in relativistic cosmology”, *Phys. Rev.*, **106** (1957), 172.
- [168] J. Ehlers, “Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien [contributions to the relativistic mechanics of continuous media]”, *Abhandlungen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Akademie der Wissenschaften und Literatur Mainz*, **11** (1961); English translation: *Gen. Rel. Grav.*, **25**:12 (1993), 1225–1266.
- [169] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s”, *Astrophys. J.*, **142**:3 (1965), 419–421.

- [170] A. Friedmann, “Über die Krümmung des Raumes”, *Zs. Phys.*, **10** (1922), 377–386.
- [171] A. Friedmann, “Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes”, *Zs. Phys.*, **21** (1924), 326–332.
- [172] S. Perlmutter and et al, “Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae”, *Astrophys. J.*, **517**:2 (1999), 565–586.
- [173] A. G. Riess and et al, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”, *Astron. J.*, **116**:3 (1998), 1009–1038.
- [174] J. H. Jeans, “The motions of stars in a Kapteyn-universe”, *MNRAS*, **82** (1922), 122–132.
- [175] J. C. Kapteyn, “First attempt at a theory of the arrangement and motion of the sidereal system”, *Astrophys. J.*, **55** (1922), 302–328.
- [176] A. Einstein, “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie”, *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, **1** (1917), 142–152; Перевод: Альберт Эйнштейн. *Собрание научных трудов*. Т. 1, Наука, М., 1965, 601–612.
- [177] P. Hájíček, *An Introduction to the Relativistic Theory of Gravitation*, Springer, Heidelberg, 2008.
- [178] W. de Sitter, “On the relativity of inertia: Remark concerning Einstein’s latest hypothesis”, *Proc. Sect. Sci. K. ned. Akad. Wet.*, **19** (1916–1917), 1217–1225.
- [179] W. de Sitter, “On the curvature of space”, *Proc. Sect. Sci. K. ned. Akad. Wet.*, **20** (1917), 229–243.
- [180] H. P. Robertson, “Relativistic cosmology”, *Rev. Mod. Phys.*, **5** (1933), 62–90.
- [181] L. Bianchi, “Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti”, *Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat.*, **11** (1897), 267.
- [182] E. Kasner, “Geometrical theorems on Einstein’s cosmological equations”, *Am. J. Math.*, **43**:4 (1921), 217–221.