Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, Введение в теорию обобщенных функций, *Лекц. курсы НОЦ*, 2006, выпуск 5, 3–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn5>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:28:43

Оглавление

1. Предварительные сведения и основные определения . .	5
2. Топологические и метрические пространства	11
3. Топологические векторные пространства (ТВП)	29
4. Локально выпуклые топологические пространства (ЛВП)	42
5. Теорема Хана–Банаха	61
6. Бочечные и борнотопологические пространства	64
7. Индуктивные пределы	69
8. Пространства основных функций. Примеры	73
9. Пространство обобщенных функции $\mathcal{D}'$	92
10. Обобщенные функции медленного роста. Пространство $S'(\mathbb{R}^n)$	124
11. Преобразование Фурье обобщенных функций	130
12. Преобразование Лапласа обобщенных функций	138
13. Асимптотически однородные обобщенные функции . .	146

Предисловие

Это записи лекций, прочитанных весной 2006 года в научно-образовательном центре при Математическом институте им. В. А. Стеклова. Предлагаемый курс состоит из двух частей: элементы функционального анализа, § 1–§ 7, и теория обобщенных функций, § 8–§ 13, и представляет собой неформальное введение в теорию обобщенных функций с примерами и задачами.

Хотя прочитанный курс назывался “Обобщенные функции и некоторые их приложения в математической физике”, однако краткость курса не позволила в полной мере изложить весь намеченный материал. В частности, мы совсем не касались теории двойственности, определяющей топологию пространств обобщенных функций. Также осталась почти совсем незатронутой область приложений теории к конкретным задачам математической физики. С этими вопросами в дальнейшем можно ознакомиться, изучая монографии, приведенные в литературе. Лекции рассчитаны на студентов, начиная с третьего курса и предполагают знание основ математического анализа и желательного (хотя бы начального) знакомства с теорией интеграла Лебега.

Теория обобщенных функций – область функционального анализа, которая возникла и развивалась в связи с потребностями современной математической физики и позволила правильно поставить и решить ряд теоретических и прикладных задач. Если вы хотите серьезно заниматься исследованием математических моделей физических явлений, то вам обязательно потребуется изучить основной язык современной математической физики – теорию обобщенных функций.

Желаем успеха на этом трудном пути.

Авторы.

§ 1. Предварительные сведения и основные определения

Множества Множество, класс, семейство, совокупность элементов – синонимы. Это неопределяемые понятия. Пишем $a \in A$ тогда и только тогда, когда a является элементом (или членом, или точкой) множества A . *Объединение* множеств A и B обозначается через $A \cup B$, а через $A \cap B$ – *пересечение* этих множеств. Операции объединения (сложения) и пересечения множеств ком-

мутативны, ассоциативны и взаимно дистрибутивны, то есть

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ A \cap B &= B \cap A, & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C), \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

Разностью $C = A \setminus B$ (пишут еще $A - B$) двух множеств A и B называют множество тех элементов из A , которые не содержатся в B . *Симметрическую разность* множеств A и B определим как

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

В том случае, если множество $\mathcal{M}$ считают основным множеством, а все другие множества его подмножествами (например, $A \subset \mathcal{M}$), то разность $\mathcal{M} \setminus A$ называют *дополнением* множества A (до $\mathcal{M}$) и пишут $\mathbf{C}A$. *Принцип двойственности* состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества $\mathcal{M}$, может быть получено другое (двойственное) равенство путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, сумм множеств – их пересечением, а пересечений – их суммами. Он основывается на двух соотношениях:

1. Дополнение суммы равно пересечению дополнений

$$\mathcal{M} \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (\mathcal{M} \setminus A_{\alpha}) \quad (1.1)$$

2. Дополнение пересечений равно сумме дополнений

$$\mathcal{M} \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (\mathcal{M} \setminus A_{\alpha}) \quad (1.2)$$

Пустое множество (множество не содержащее элементов) обозначаем так $\emptyset$.

Отношения. Функции Пусть A и B – множества. Декартовым произведением $A \times B$ этих множеств называют совокупность упорядоченных пар $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. *Отношение* – это некоторое подмножество (этих пар) из $A \times B$. *Область определения*

отношения – совокупность всех первых координат этих пар. *Область значений* – совокупность их вторых координат.

Далее мы будем рассматривать бинарные отношения, то есть отношения на $X \times X$ и полагать, что их области определения все X . Тогда обратным отношением к отношению R называется отношение R^{-1} с измененным порядком координат, $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$. *Композицией* RS отношений R и S называется отношение, состоящее из всех пар (x, z) таких, что $(x, y) \in S$ и $(y, z) \in R$ для некоторого y . Заметим, что операция композиции, вообще говоря, не коммутативна, но

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$. Диагональ $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$.

Если $\Delta(X) \subset R$, то отношение R называется *рефлексивным*. Отношение R называется *симметричным*, если $R = R^{-1}$. Отношение R называется *антисимметричным*, если $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, то $x = y$. Отношение R называется *транзитивным*, если $RR \subset R$.

Отношение *эквивалентности* – это рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение.

Рефлексивное, антисимметричное, транзитивное бинарное отношение называют *частичной упорядоченностью*, а про множество X в этом случае говорят, что оно частично упорядочено.

Частным случаем отношения является функция. Пусть M и N – два произвольных множества. Будем говорить, что на M определена функция f , принимающая значения из N , если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствии один и только один элемент $y = f(x) \in N$. Пишем $f : M \mapsto N$. Таким образом, f есть отношение на $M \times N$, (то есть совокупность пар $\{(x, f(x)) : x \in M, f(x) \in N\}$) такое, что

- 1) его область определения есть M ;
- 2) если (x, y) и (x, z) – элементы f , то $y = z$.

Пусть множество $A \subset M$; множество $\{y = f(x) \in N, x \in A\}$ назовем образом множества A и обозначим $f(A)$. Пусть теперь множество $B \in N$; через $f^{-1}(B)$ обозначим совокупность всех тех элементов из M , образы которых принадлежат B . Множество $f^{-1}(B) \in M$ называется *прообразом* множества B .

Если $f(M) = N$, то будем говорить, что f есть отображение множества M “на” N (сюръекция). Если же $f(M) \subset N$, то f есть

отображение множества M “в” N . Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из M элементы $f(x_1)$ и $f(x_2)$ из N различны, то f называется инъекцией. Функция $f: M \mapsto N$, которая одновременно есть сюръекция и инъекция, называется биекцией или *взаимно однозначным соответствием* между M и N .

УПРАЖНЕНИЕ. Будет ли f^{-1} функцией на $f(M)$? А если f – биекция? Пусть A и B некоторые множества из M . Докажите следующие свойства:

$$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Верно ли $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

Разбиение множества. Упорядочения Если множество M представлено как сумма своих попарно непересекающихся подмножеств, то говорят о *разбиении множества M на классы*. Множество чаще всего разбивается на классы на основе какого либо свойства (признака), по которому элементы M объединяются в подмножества M (классы). Не любой “признак” позволяет разбить множество на классы. Например, попробуйте разбить прямую на непересекающиеся подмножества по следующему “признаку”: две точки принадлежат разным подмножествам, если расстояние между ними больше 1. Всякое разбиение множества на классы определяет между элементами этого множества некоторое отношение R . Пара $(a, b) \in R$, если a и b находятся в одном классе. Легко проверить, что это отношение будет отношением эквивалентности. Рефлексивность и симметричность очевидны, а транзитивность докажете сами.

УКАЗАНИЕ. Если множество $M = \bigcup_{\alpha} M_{\alpha}$ и $M_{\alpha_1} \cap M_{\alpha_2} = \emptyset$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то множество

$$R = \bigcup_{\alpha} M_{\alpha} \times M_{\alpha} \subset M \times M$$

и будет отношением эквивалентности. Обратно, пусть R некоторое отношение эквивалентности между элементами множества M и множество $M_a = \{y \in M: (a, y) \in R\}$. Тогда либо два множества M_a и M_b совпадают, либо не пересекаются. Докажете сами.

Итак, справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Для того чтобы множество разбивалось на классы (на попарно не пересекающиеся подмножества) необходимо и достаточно, чтобы отношение (“признак”), по которому элементы множества объединяются в классы, было отношением эквивалентности.*

Пусть теперь M – частично упорядоченное множество, то есть на нем задано некоторое бинарное отношение $R \subset M \times M$ частичной упорядоченности. Принято частичную упорядоченность обозначать символом $\leq$, то есть $a \leq b$ означает, что пара $(a, b) \in R$. Про элемент a в этом случае говорят еще, что он подчинен b или a предшествует b . В случае, когда $a \leq b$ и $a \neq b$ пользуются символом $a < b$ и говорят, что a меньше b или b больше a .

Примеры:

1. Всякое множество можно тривиальным образом частично упорядочить, если положить $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

2. Пусть $C[a, b]$ – множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Положим $f \leq g$ тогда и только тогда, когда $f(x) \leq g(x)$ для всех $x, a \leq x \leq b$. Очевидно (докажите?), что получим частичную упорядоченность.

3. Множество всех подмножеств некоторого фиксированного множества частично упорядочено по включению: ($M_1 \leq M_2$ означает, что $M_1 \subset M_2$).

Элемент x частично упорядоченного множества M называется *верхней (нижней) гранью* его подмножества A , если для любого $y \in A$ всегда $y \leq x$ (всегда $x \leq y$). Множество M может иметь много верхних (нижних) граней подмножества A . Верхняя (нижняя) грань $a \in M$ называется *наименьшей верхней (наибольшей нижней) гранью* множества A , если для любой верхней (нижней) грани y этого множества $a \leq y$ ($a \geq y$). Нетрудно видеть, что наибольшие нижние и наименьшие верхние грани, если они существуют, единственны. Если множество имеет верхнюю (нижнюю) грань, то мы говорим, что оно ограничено сверху (снизу).

Элемент $a \in A$ называется *максимальным (минимальным)* в A , если в A нет элемента большего a , то есть если $x \in A$ и $x \geq a$, то $x = a$ (если в A нет элемента меньшего a , то есть если $x \in A$ и $x \leq a$, то $x = a$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Если у каждого ограниченного сверху подмножества множества M есть наименьшая верхняя грань, то у каждого его подмножества, ограниченного снизу, есть наибольшая нижняя грань.

Действительно, пусть $A \subset M$ и B – множество всех его нижних граней (оно не $\emptyset$ и ограничено сверху любым элементом $y \in A$). По условию у B есть наименьшая верхняя грань, скажем b . Следовательно, b меньше любой (не равной ему) верхней грани множества B . В частности, b предшествует произвольному не равному ему элементу из A , то есть b – нижняя грань A . Но b – верхняя грань B , то есть b больше или равно произвольной не равной ему нижней грани A . Следовательно, b – наибольшая нижняя грань A .

Будем говорить, что множество M является *линейно упорядоченным или цепью*, если оно частично упорядоченно и для любых двух его элементов $a, b \in M$, обязательно либо $a \leq b$, либо $b \leq a$. Цепь называется максимальной, если она не содержится в качестве собственного подмножества ни в какой другой цепи, принадлежащей M , другими словами, максимальная цепь – это максимальный элемент в множестве всех цепей, содержащихся в M . Очевидно, что любое подмножество линейно упорядоченного множества есть линейно упорядоченное множество. Например, множество натуральных чисел, множество чисел отрезка $[0, 1]$ и т.п.

Линейно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество содержит минимальный элемент.

ТЕОРЕМА ХАУСДОРФА. В частично упорядоченном множестве всякая цепь содержится в некоторой его максимальной цепи.

(Это утверждение иногда называют еще леммой Куратовского).

ЛЕММА ЦОРНА. Если всякая цепь в частично упорядоченном множестве M имеет верхнюю грань, то всякий элемент из M подчинен некоторому максимальному элементу.

ТЕОРЕМА ЦЕРМЕЛО. Каждое множество может быть вполне упорядочено.

Каждое из этих утверждений эквивалентно следующей аксиоме

АКСИОМА ВЫБОРА. Пусть A – некоторое множество индексов α и пусть для каждого $\alpha \in A$ задано некоторое подмножество $M_\alpha \subset M$. Тогда можно построить функцию f на A со значениями в M , сопоставляющую каждому $\alpha \in A$ некоторый элемент $x_\alpha \in M_\alpha$.

§ 2. Топологические и метрические пространства

Топологические пространства Топологическое пространство есть множество X вместе с выделенным семейством его подмножеств $\mathfrak{T}$, называемыми *открытыми множествами*, которое обладает следующими свойствами:

- 1) пустое подмножество $\emptyset \in \mathfrak{T}$ и $X \in \mathfrak{T}$;
- 2) если $A, B \in \mathfrak{T}$, то $A \cap B \in \mathfrak{T}$;
- 3) если $A_\alpha \in \mathfrak{T}$ при всех α из некоторого множества индексов I , то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathfrak{T}$.

Семейство $\mathfrak{T}$ называется *топологией* в X . Итак, топологическое пространство – это пара $(X, \mathfrak{T})$. Простейшими примерами топологий в X являются тривиальная топология (множество $\mathfrak{T}$ состоит только из $\emptyset$ и самого X) и дискретная топология ($\mathfrak{T}$ есть семейство всех подмножеств множества X). Семейство всех топологий в X частично упорядочено по включению. Говорят, что топология $\mathfrak{T}_1$ слабее топологии $\mathfrak{T}_2$, если $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$, то есть подмножеств в $\mathfrak{T}_2$ больше (точнее, не меньше), чем в $\mathfrak{T}_1$.

Подмножество $V \subset X$ называется *окрестностью* точки $x \in V$, если существует открытое множество U такое, что $x \in U \subset V$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Подмножество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда оно содержит окрестность каждой своей точки.

Действительно, если A открыто, то оно же является окрестностью каждой своей точки, $x \in A \subset A$. Если A содержит окрестность $V_x \subset A$ каждой своей точки, то для любого $x \in A$ существует открытое множество $U_x \subset V_x \subset A$. Поэтому $\bigcup_{x \in A} U_x = A$.

Точка x называется *предельной точкой* (или точкой *накопления*) подмножества A топологического пространства $(X, \mathfrak{T})$, если любая окрестность точки x содержит отличную от x точку множества A .

Подмножество A топологического пространства называется *замкнутым*, если его дополнение $\complement A = X \setminus A$ открыто.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *Подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Действительно, если A замкнуто и $x \notin A$, то $x \in \complement A$ вместе с некоторой своей окрестностью, ибо $\complement A$ открыто, то есть x – не предельная точка A . Следовательно, A содержит все свои предельные точки. Обратно, пусть $A \subset X$ и содержит все свои предельные точки. Для $\forall x \in \complement A \exists U_x: U_x \cap A = \emptyset$, ибо $x \notin A$ и найдется окрестность, в которой нет точек A . Поэтому $U_x \subset \complement A$ и, следовательно, $\complement A$ открыто. Но тогда A замкнуто.

Из принципа двойственности (1.1) и (1.2) следует, что объединение конечного семейства замкнутых множеств, как и пересечение любого семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество. Ясно, что пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество $A \subset X$, – замкнутое множество. Оно называется *замыканием* A и обозначается $\bar{A}$. Это наименьшее замкнутое множество, содержащее A .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. *Замыкание множества A есть объединение этого множества и множества всех его предельных точек.*

Это следует из того, что предельная точка множества предельных точек A есть предельная точка A . Докажите.

Точка x некоторого множества A топологического пространства X называется *внутренней* точкой A , если A является окрестностью этой точки. Совокупность внутренних точек A называется *внутренностью* множества A и обозначается $\text{int } A$. *Граница* множества A (обозначается ∂A) состоит из всех точек, которые не являются внутренними ни для A , ни для $X \setminus A$, то есть $\partial A = \bar{A} \setminus \text{int } A$.

Множество замкнуто тогда и только тогда, когда ему принадлежит его граница; множество открыто тогда и только тогда, когда оно не имеет общих точек со своей границей. Докажите сами.

По определению топологического пространства $(X, \mathfrak{T})$ пустое множество $\emptyset$ и само X одновременно и открыты, и замкнуты. Пространство, в котором нет никаких других множеств, одновременно открытых и замкнутых, называется *связным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $x \in X$ называется *пределом* последовательности $\{x_n \in X\}$, если для любой окрестности точки x все точки этой последовательности, начиная с некоторой, находятся в этой окрестности. В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x .

В произвольном топологическом пространстве у одной и той же последовательности может быть много пределов.

УПРАЖНЕНИЕ. На числовой оси назовем открытыми множествами всю ось с удаленным конечным числом точек оси. Топология ли это? Опишите сходящиеся последовательности. Например, сходятся ли последовательности $x_n = n$ или $x_n = \frac{1}{n}$. Если да, то к какой точке?

Чтобы обеспечить единственность предела, достаточно потребовать, чтобы X было отделимым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство называется *отделимым* (или *Хаусдорфовым*), если для любых точек $x, y, x \neq y$, существуют открытые множества O_1 и O_2 такие, что $x \in O_1$, $y \in O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что в отделимом топологическом пространстве предел любой последовательности, если он существует, определен однозначно.

Семейство множеств $\mathfrak{B}$ называется *базой топологии* $\mathfrak{T}$, если $\mathfrak{B}$ содержится в $\mathfrak{T}$ и для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U существует элемент $V \in \mathfrak{B}$ такой, что $x \in V \subset U$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. *Подсемейство $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}$ тогда и только тогда является базой топологии $\mathfrak{T}$, когда каждый элемент из $\mathfrak{T}$ есть объединение элементов из $\mathfrak{B}$.*

Действительно, пусть $\mathfrak{B}$ база топологии $\mathfrak{T}$ и $U \in \mathfrak{T}$. Положим $V = \{\cup \tau : \tau \in \mathfrak{B}, \tau \subset U\}$, так что $V \subset U$. Возьмем теперь любой $x \in U$; тогда в $\mathfrak{B}$ существует элемент W такой, что $x \in W \subset U$. Отсюда следует, что $x \in V$, следовательно, $U \subset V$, так что $U = V$. Обратно. Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}$ и каждый элемент $\mathfrak{T}$ является объединением элементов семейства $\mathfrak{B}$. Если $U \in \mathfrak{T}$ и $x \in U$, то в совокупности элементов из $\mathfrak{B}$, объединением которых является множество U , найдется такой элемент V , что $x \in V \subset U$. А потому $\mathfrak{B}$ – база топологии $\mathfrak{T}$.

Семейство подмножеств $\mathfrak{N}_x$ множества X называется *базой окрестностей точки* $x \in X$, если любой элемент $U \in \mathfrak{N}_x$ есть окрестность точки x и для любой окрестности V_x этой точки существует элемент $U \in \mathfrak{N}_x$ такой, что $U \subset V_x$. Ясно, что если $\mathfrak{B}$ – база топологии $\mathfrak{T}$, то совокупность всех элементов $\mathfrak{B}$, содержащих точку x , будет базой окрестностей точки x .

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если система окрестностей произвольной его точки обладает счетной базой.

Про топологическое пространство, топология которого обладает счетной базой, говорят, что оно удовлетворяет *второй аксиоме счетности*.

Пусть задано семейство множеств $\mathfrak{B}$ и пусть $X = \cup\{U : U \in \mathfrak{B}\}$. ВОПРОС. Будет ли это семейство базой какой либо топологии на X ? ОТВЕТ. Не всегда!

УПРАЖНЕНИЕ. Пусть X состоит из точек 1, 2, 3, а семейство $\mathfrak{B}$ из множеств $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $\emptyset$, X . Докажите, что это семейство множеств не может служить базой никакой топологии на X .

ТЕОРЕМА 2.1. Семейство множеств $\mathfrak{B}$ является базой некоторой топологии на множестве $X = \cup\{U : U \in \mathfrak{B}\}$ в том и только в том случае, если для любых двух элементов U, V этого семейства и любой точки $x \in U \cap V$ существует такой элемент $W \in \mathfrak{B}$, что $x \in W$ и $W \subset U \cap V$.

Действительно, пусть $\mathfrak{B}$ база какой то топологии, U, V элементы базы и $x \in U \cap V$. Тогда множество $U \cap V$ открыто, а потому в $\mathfrak{B}$ существует элемент, содержащий точку x и содержащийся в $U \cap V$. Обратно, пусть семейство множеств $\mathfrak{B}$ удовлетворяет нужными свойствами и $\mathfrak{T}$ – семейство всевозможных объединений элементов из $\mathfrak{B}$. Докажем, что $\mathfrak{T}$ есть топология на X .

1) Объединение любой совокупности элементов из $\mathfrak{T}$ является (по построению) объединением некоторой совокупности элементов из $\mathfrak{B}$, а потому само принадлежит $\mathfrak{T}$.

2) Покажем, что пересечение двух элементов U, V из $\mathfrak{T}$ снова принадлежит $\mathfrak{T}$. Возьмем любую точку $x \in U \cap V$, тогда в $\mathfrak{B}$ найдутся элементы U' и V' такие, что $x \in U' \subset U$ и $x \in V' \subset V$. Теперь (по условию) в $\mathfrak{B}$ найдется элемент W , для которого $x \in W \subset U' \cap V' \subset U \cap V$. Следовательно, множество $U \cap V$ является

объединением элементов семейства $\mathfrak{B}$. Но 1) и 2) означают, что $\mathfrak{T}$ – топология.

Пусть $(X, \mathfrak{T})$ – топологическое пространство и дано семейство множеств $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}$. Когда оно будет базой именно этой топологии? Для этого необходимо и достаточно, чтобы для каждого открытого множества U и каждой точки $x \in U$ существовало такое $U_x \in \mathfrak{B}$, что $x \in U_x \subset U$. Действительно, если это условие выполнено, то каждое открытое множество $U = \bigcup_{x \in U} U_x$, то есть $\mathfrak{B}$ – база топологии $\mathfrak{T}$. Обратное утверждение следует из определения базы.

Пусть $\mathcal{A}$ некоторое семейство подмножеств множества X . Можно ли на X построить наименьшую топологию, так чтобы $\mathcal{A}$ было подсемейством этой топологии?

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное семейство подмножеств X , так что $X = \bigcup \{U : U \in \mathcal{A}\}$. Тогда семейство всевозможных конечных пересечений элементов из $\mathcal{A}$ образует базу некоторой топологии на X .

Действительно, пусть $\mathfrak{B}$ – семейство всевозможных конечных пересечений элементов $\mathcal{A}$, тогда пересечение любых двух элементов из $\mathfrak{B}$ снова элемент из $\mathfrak{B}$. По предыдущему утверждению заключаем, что $\mathfrak{B}$ является базой некоторой топологии. Ясно, что эта топология будет слабейшей из всех топологий, содержащих $\mathcal{A}$.

Такое семейство $\mathcal{A}$ называется *предбазой* топологии $\mathfrak{B}$.

Непрерывные отображения Пусть X и Y – два топологических пространства. Отображение (функция) f пространства X в Y называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности V_{y_0} точки $y_0 = f(x_0)$ найдется такая окрестность U_{x_0} точки x_0 , что $f(U_{x_0}) \subset V_{y_0}$. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $(X, \mathfrak{T})$ и $(Y, \mathfrak{B})$ – топологические пространства. Для того чтобы отображение $f: X \rightarrow Y$ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз $A = f^{-1}(B)$ всякого открытого (в топологии $\mathfrak{B}$) множества $B \subset Y$ был открыт (в топологии $\mathfrak{T}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f непрерывно и $B \subset Y$ – открытое множество. Пусть теперь x – произвольная точка $A = f^{-1}(B)$ и

$y = f(x)$, тогда B – окрестность y , и по определению непрерывности существует окрестность U_x точки x , так что $f(U_x) \subset B$, то есть $U_x \subset A$. Значит, A открыто. Обратно. Пусть $A = f^{-1}(B)$ открыто, если $B \subset Y$ открыто. Пусть $x \in X$ и V_y – любая окрестность точки $y = f(x)$. Точка $x \in f^{-1}(V_y)$ и, следовательно, множество $f^{-1}(V_y)$ служит той окрестностью точки x , образ которой содержится в V_y .

Отметим, что прообраз топологии $\mathfrak{B}$ (то есть совокупность всех множеств $f^{-1}(B)$, где $B \in \mathfrak{B}$) будет топологией в X . Обозначим ее $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G} = f^{-1}(\mathfrak{B})$).

УПРАЖНЕНИЕ. 1. Докажите, что отображение $f: X \mapsto Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда топология $\mathfrak{G}$ не сильнее топологии $\mathfrak{T}$.

2. Докажите, что отображение $f: X \mapsto Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого замкнутого множества из Y замкнут в X .

УКАЗАНИЕ. Перейдите к дополнениям.

3. Будет ли при непрерывном отображении образ всякого открытого (замкнутого) множества открыт (замкнут)?

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите пример: отображение $X = [0, 1)$ на окружность и множество $A = [\frac{1}{2}, 1)$.

Отображение f топологического пространства X на топологическое пространство Y называют *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно, причем f и f^{-1} непрерывны. При этом пространства X и Y называют гомеоморфными.

Сходимость и направленности Как вы знаете из анализа, если x – предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^n$, то всегда в A имеется последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к x . В произвольном топологическом пространстве, это, вообще говоря, не так.

ПРИМЕР 2.1 (ГЕЛЬФАНД И. М.). Пусть X – совокупность ограниченных вещественных функций $\varphi(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Окрестностями $U = U_{(\varphi_0, t_1, \dots, t_n, \varepsilon)}$ в X любого элемента $\varphi_0(t) \in X$ зададим указанием конечного числа точек $t_1, t_1, \dots, t_n$, и числа $\varepsilon > 0$, как совокупность всех функций $\varphi \in X$, для которых

$$|\varphi(t_i) - \varphi_0(t_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нетрудно видеть, что это – топологическое пространство. Множество A есть совокупность элементов X (то есть функций $\varphi(t)$), каждая из которых всюду равна 1, кроме конечного числа точек отрезка $[0, 1]$, где она равна 0. Очевидно, что элемент $\varphi_0(t) \equiv 0$ есть предельная точка для множества A . Но никакая последовательность элементов $\varphi_\nu(t) \in A$ не может сходиться к $\varphi_0(t)$, ибо всегда можно указать точку t_0 , в которой все $\varphi_\nu(t)$ равны 1 (из за несчетности точек отрезка), а потому ни один из элементов последовательности не попадет в окрестность $U_{(\varphi_0, t_0, \frac{1}{2})}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Частично упорядоченное множество, для любых двух точек a и b которого найдется следующая за ними точка c ($a \leq c, b \leq c$), называется *направленным множеством*.

Пусть I направленное множество. *Направленность* в топологическом пространстве X есть отображение (функция) из направленного множества I в X . Будем ее обозначать $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

ПРИМЕР 2.2. Пусть X – топологическое пространство и $x \in X$. Тогда совокупность всех окрестностей точки x есть направленное множество.

Направленное множество играет роль множества индексов. Например, если I есть множество натуральных чисел, то направленностями будут просто последовательности элементов из X . Направленность есть обобщение понятия последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *сходится* к точке $x \in X$ (пишут $x_\alpha \rightarrow x$), если для любой окрестности U точки x существует $\beta \in I$ такое, что $x_\alpha \in U$ при любом $\alpha \geq \beta$.

Если же для любого $\beta \in I$ существует $\alpha_0 \geq \beta$ такое, что $x_{\alpha_0} \in U$, то говорят, что x – предельная точка направленности x_α .

УПРАЖНЕНИЕ. Пусть X – отделимое пространство. Тогда направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ в X может иметь не более одного предела (то есть если $x_\alpha \rightarrow x$ и $x_\alpha \rightarrow y$, то $x = y$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Пусть A – некоторое множество в топологическом пространстве X . Тогда точка $x \in \bar{A}$ в том и лишь в том случае, если существует направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, так что $x_\alpha \in A$ и $x_\alpha \rightarrow x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \bar{A}$ и I – система окрестностей точки x с упорядочиванием по вложению ($U_1 \leq U_2$, если $U_1 \subset U_2$).

Для каждого $U \in I$ существует точка $x_U \in A \cap U$. Теперь $\{x_U\}_{U \in I}$ есть направленность и $x_U \rightarrow x$. Обратное очевидно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ называется *поднаправленностью* направленности $\{y_\beta\}_{\beta \in J}$, если существует функция $F: I \rightarrow J$ со свойствами:

- 1) $x_\alpha = y_{F(\alpha)} \quad \forall \alpha \in I$;
- 2) для любого $\beta' \in J$ существует такое $\alpha' \in I$, что из $\alpha \geq \alpha'$ следует, что $F(\alpha) \geq \beta'$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. Точка y_0 в топологическом пространстве X есть предельная точка направленности $\{y_\beta\}_{\beta \in J}$ тогда и только тогда, когда какая-нибудь поднаправленность этой направленности сходится к y_0 .

УКАЗАНИЕ. Возьмите в качестве направленного множества $I = \{(\beta, U): \beta \in J, U \in \tau_{y_0}: y_\beta \in U\}$, где τ_{y_0} – семейство окрестностей точки y_0 . Докажите, что поднаправленность $\{x_{(\beta, U)} = y_\beta\}_{(\beta, U) \in I}$ будет искомой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. Пусть X и Y топологические пространства. Функция $f: X \rightarrow Y$ непрерывна тогда и только тогда, когда для любой сходящейся направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ в X , такой, что $x_\alpha \rightarrow x$, направленность $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ сходится в Y к $y = f(x)$.

УКАЗАНИЕ. Если f непрерывна, то утверждение очевидно. В обратную сторону доказываем от противного и воспользуемся идеей, рассмотренной при доказательстве теоремы 2.3.

Компактность Топологическое пространство X называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Отделимое (хаусдорфово) компактное пространство называют *компактом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Систему подмножеств $\mathfrak{G}$ множества X называют *центрированной*, если любое конечное пересечение $\bigcap_{i=1}^n A_i$ элементов этой системы не пусто.

ТЕОРЕМА 2.4. Для того чтобы топологическое пространство X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы любая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X компактно и G_α – центрированная система. Множества $U_\alpha = X \setminus G_\alpha$ открыты, и из факта центрированности следует, что никакая конечная система множеств U_i не покрывает X ; но X компактно, следовательно все U_α не образуют покрытия, то есть $\bigcap G_\alpha$ не пусто. Обратно, пусть условие теоремы выполнено и U_α – открытое покрытие X . Положив $G_\alpha = X \setminus U_\alpha$, получим, что $\bigcap G_\alpha = \emptyset$, откуда следует, что система $\{G_\alpha\}$ не может быть центрированной. Другими словами существуют такие G_i , $i = 1, 2, \dots, n$, пересечение которых пусто, но тогда U_i образуют конечное покрытие.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если X компактно, то каждое его бесконечное подмножество имеет хотя бы одну предельную точку.*

Действительно, пусть это не так и у множества $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, нет предельных точек. Тогда множества $A_n = \{x_n, \dots\}$ образуют центрированную систему замкнутых множеств, имеющих пустое пересечение, то есть X не компактно.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Замкнутое подмножество компактного пространства само компактно.*

Действительно, пусть X – компактное пространство и $F \subset X$ – замкнутое множество. Возьмем любую центрированную систему $F_\alpha \subset F$. При этом F_α замкнуты в F , а следовательно, и в X , а тогда $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$. И по теореме F – компактное множество.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. *Компакт замкнут в любом содержащем его отделимом пространстве.*

Действительно, пусть K – компакт в X и точка $y \notin K$. Для любой точки $x \in K$ найдутся окрестности U_x точки x и $V_{y,x}$, так что $U_x \cap V_{y,x} = \emptyset$. Окрестности U_x образуют открытое покрытие K и в силу его компактности существует его конечное покрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$. Положим

$$V = V_{y,x_1} \cap V_{y,x_2} \cap \dots \cap V_{y,x_n}, \quad y \in V,$$

но V не пересекается с $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} \supset K$. Следовательно, y не предельная точка K , и потому $K = \bar{K}$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Непрерывный образ компактного пространства есть компактное пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – компактное топологическое пространство и f – его непрерывное отображение в топологическое пространство Y . Пусть $\{V_\alpha\}$ – покрытие образа $f(X) \subset Y$ открытыми в $f(X)$ множествами. Положим $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. Множества $\{U_\alpha\}$ открыты как прообразы открытых множеств и образуют покрытие X . Из этого покрытия (в силу компактности) выделим конечное покрытие $U_1, U_2, \dots, U_n$. Теперь множества V_i , $i = 1, 2, \dots, n$, покрывают весь образ $f(X)$. Следовательно, $f(X)$ компактно.

СЛЕДСТВИЕ. *Взаимно однозначное и непрерывное отображение f компакта X на отдельное пространство Y есть гомеоморфизм, то есть f^{-1} тоже непрерывно.*

Действительно, пусть F – замкнутое множество в X и $V = f(F)$ – его образ в Y . Согласно теореме V – компакт и, следовательно, замкнуто в Y , так что прообраз при отображении f^{-1} всякого замкнутого множества $F \subset X$ замкнут. Это и означает непрерывность f^{-1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство $(X, \mathfrak{T})$ называется *локально компактным*, если всякая его точка имеет компактную окрестность.

УПРАЖНЕНИЯ. 1) Докажите, что непрерывное отображение компакта X в $\mathbb{R}^1$ (то есть непрерывная вещественная функция, заданная на компакте) достигает на нем своего максимума и минимума.

2) (Одноточечная компактификация). Пусть X – локально компактное хаусдорфово пространство. Построим новое пространство. Положим $X^* = X \cup \{\infty\}$, где ∞ – точка, не принадлежащая X . Назовем $\mathcal{O}$ открытым в X^* , если либо точка $\infty \notin \mathcal{O}$ и $\mathcal{O}$ открыто в X , либо $\infty \in \mathcal{O}$ и $X^* \setminus \mathcal{O}$ компактно (в X). Докажите, что X^* с так введенной топологией компактно.

Задание топологии на множестве Пусть X некоторое множество. В этом пункте мы разберем несколько способов задания топологии на этом множестве в различных, часто встречающихся ситуациях.

Пусть для любого $x \in X$ задана система подмножеств $\mathfrak{A}_x$ такая, что: 1) любой элемент $A \in \mathfrak{A}_x$ содержит точку x ; 2) если $A, B \in \mathfrak{A}_x$, то существует элемент $C \in \mathfrak{A}_x$ такой, что $C \subset A \cap B$.

Построим в X топологию. Назовем множество O открытым в X тогда и только тогда, когда для любого $x \in O$ существует элемент $A \in \mathfrak{A}_x$, такой что $A \subset O$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9. *Так построенная система открытых множеств делает X топологическим пространством.*

Проверьте это. Будут ли в этой топологии множества из $\mathfrak{A}_x$ окрестностями точки x ? Другими словами, будет ли $\mathfrak{A}_x$ базой окрестностей точки x ? Вообще говоря, это не всегда так. Проверьте справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.10. *Если для любого $A \in \mathfrak{A}_x$ существует множество $C \subset A$ такое, что $x \in C$ и для любого $y \in C$ найдется элемент $B \in \mathfrak{A}_y$ такой, что $B \subset C$, то $\mathfrak{A}_x$ будет базой окрестностей точки x .*

Напомним, что если $\mathcal{A}$ – произвольное непустое семейство множеств такое, что $X = \bigcup \{U : U \in \mathcal{A}\}$, то семейство всевозможных конечных пересечений множеств из $\mathcal{A}$ образуют базу $\mathfrak{B}$ некоторой топологии на X . Семейство $\mathcal{A}$ называется *предбазой* этой топологии.

УПРАЖНЕНИЯ. Пусть дано некоторое семейство $\{\mathfrak{T}_\alpha, \alpha \in I\}$ топологий на множестве X .

1) Докажите, что $\mathfrak{T} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{T}_\alpha$ – наибольшая топология, которая не больше любой из топологий данного семейства. (Может случиться, что $\mathfrak{T} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{T}_\alpha$).

2) Покажите, что объединение двух топологий может не быть топологией.

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите X , состоящее из трех точек.

3) Существует единственная наименьшая из всех топологий, которая не меньше каждой из топологий этого семейства. Докажите.

УКАЗАНИЕ. Предбазой исходной топологии может служить семейство $\mathfrak{G} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathfrak{T}_\alpha$.

Задачи 1) и 3) показывают, что семейство всех топологий на множестве X образует полную решетку, то есть любое подсемейство топологий обладает наименьшей верхней гранью и наибольшей нижней гранью.

Пусть X – множество, $\{(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha), \alpha \in I\}$ – семейство топологических пространств и $\{f_\alpha, \alpha \in I\}$ – семейство отображений f_α :

$X \mapsto X_\alpha$. *Проективной топологией* на X относительно семейства $\{(X_\alpha, f_\alpha), \alpha \in I\}$ называется слабая топология, в которой каждое f_α непрерывно. В качестве предбазы этой топологии можно взять семейство множеств $\{f_\alpha^{-1}(U), \alpha \in I, U \in \mathfrak{T}_\alpha\}$.

Двойственным образом, если $\{g_\alpha, \alpha \in I\}$ – семейство отображений $g_\alpha: X_\alpha \mapsto X$, то *индуктивной топологией* на X относительно семейства $\{(X_\alpha, g_\alpha), \alpha \in I\}$ называется сильнейшая топология на X , в которой каждое g_α непрерывно. В качестве базы этой топологии можно взять все множества $V \subset X$, для которых $g_\alpha^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_\alpha, \alpha \in I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(X, \mathfrak{T})$ – топологическое пространство и пусть $A \subset X$. *Индукцированная* топология на A есть семейство множеств $\mathfrak{T}_A = \{U \cap A: U \in \mathfrak{T}\}$. Подмножество A с топологией $\mathfrak{T}_A$ называется подпространством X .

Пусть $A \subset X$; рассмотрим отображение $f: A \mapsto X$, которое отождествляет точки (точку из A рассматриваем как точку в X); оно называется *вложением* A в X . Ясно, что индуцированная топология – это слабая топология, в которой f непрерывна.

Свойство “универсальности”. Пусть E – топологическое пространство и задано отображение $g: E \mapsto X$ такое, что $g(E) \subset A$. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow h & \nearrow f \\ & A & \end{array}$$

Легко видеть, что h непрерывно тогда и только тогда, когда g непрерывно.

Задание метрики – один из важнейших способов задания топологии.

Метрические пространства Пусть задано множество X . *Метрика* – это неотрицательная вещественная функция $\rho(x, y)$, $x, y \in X$, (определенная на $X \times X$), обладающая свойствами:

- 1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых x, y, z из X (аксиома треугольника).

Число $\rho(x, y)$ называется расстоянием от точки x до точки y . Пусть $r > 0$; множество $B_r(x) = \{y \in X: \rho(y, x) < r\}$ называется открытым шаром радиуса r с центром в точке x . Положим $\mathfrak{B}_x = \{B_{\frac{1}{n}}(x), n = 1, 2, \dots\}$. Ясно, что если множества U_1 и U_2 принадлежат $\mathfrak{B}_x$, то найдется $U_3 \in \mathfrak{B}_x$ такое, что $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. Построим топологию, объявив открытыми все множества $\mathcal{O} \subset X$ такие, что $x \in \mathcal{O}$, если найдется $U \in \mathfrak{B}_x: U \subset \mathcal{O}$. Покажем, что шары $B_r(x)$ – открытые множества. Действительно, если $y \in B_r(x)$, то есть $\rho(x, y) < r$, то для $\varepsilon < r - \rho(x, y)$ шар $B_y(\varepsilon) \subset B_r(x)$, ибо для любого $z \in B_y(\varepsilon)$ имеем $\rho(z, x) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < r$. И теперь ясно, что $\mathfrak{B}_x$ – база окрестностей точки x . Замечая, что каждая точка $z \in B_r(x) \cap B_s(y)$ принадлежит пересечению шаров вместе с шаром $B_t(z)$ радиуса $t = \min\{r - \rho(x, z), s - \rho(y, z)\}$, видим, что множество всех открытых шаров в X образует базу некоторой топологии $\mathfrak{T}$ (слабейшей топологии, содержащей все открытые шары). Эту топологию называют *метрической*, а $(X, \mathfrak{T})$ – *метрическим пространством* с метрикой $\rho(x, y)$.

Отметим, что множества $\overline{B}_r(x) = \{y: \rho(y, x) \leq r\}$ – замкнутые множества (шары) в этой топологии. Покажите.

Пусть A, B – некоторые множества точек из X . Расстоянием от точки x до множества A называется число $\rho(A, x) = \inf\{\rho(y, x): y \in A\}$, а расстоянием между этими множествами – $\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y): x \in A, y \in B\}$. Диаметром множества A называется $\sup\{\rho(x, y): x \in A, y \in A\}$.

УПРАЖНЕНИЯ. Докажите, что:

1) (Неравенство четырехугольника). Разность двух противоположных сторон не больше суммы двух других сторон, то есть

$$\rho(x, y) - \rho(u, z) \leq \rho(x, u) + \rho(y, z).$$

Выведите отсюда, что $|\rho(x, y) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, z)$.

2) Отображение $\rho(A, x)$ – непрерывная функция на X со значениями в $\mathbb{R}^1$.

3) Если x предельная точка множества A , то существует последовательность $x_n \rightarrow x, x_n \in A$.

4) $\bar{A} = \{x: \rho(A, x) = 0\}$

УКАЗАНИЕ. Воспользуйтесь задачей 1.

5) Каждое метрическое пространство гомеоморфно метрическому пространству, диаметр которого не превосходит единицы.

УКАЗАНИЕ. Совокупность всех шаров радиуса $r \leq 1$ образует базу топологии. Если (X, ρ) метрическое пространство, то таково же и $(X, d(x, y))$, где $d(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$. Если неотрицательные числа $a + b \geq c$, то $\min\{1, a\} + \min\{1, b\} \geq \min\{1, c\}$ и полагая $a = \rho(x, z)$, $b = \rho(y, z)$ и $c = \rho(x, y)$, получим для $d(x, y)$ неравенство треугольника.

6) Каждое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности (для $\forall x \in X$ существует счетная база окрестности этой точки).

УКАЗАНИЕ. Базой каждой точки $x \in X$ могут служить шары с центром в этой точке, радиусы которых рациональны.

Заметим, что бывают метрические пространства, в которых не выполняется вторая аксиома счетности (счетность базы топологии).

7) Пусть $f(t)$ – непрерывная неубывающая (вещественная) функция определенная на $[0, +\infty)$, причем $f(t) = 0$ только при $t = 0$, и выпуклая к низу. Это означает, что ее подграфик – (множество $\{(t, y) : y \leq f(t)\}$) – выпуклое множество. Докажите, что тогда $f(t + \tau) \leq f(t) + f(\tau)$ при всех $t, \tau \in [0, \infty)$. Отметим, что если $f(t)$ дифференцируема, то ее производная положительна и не возрастает.

8) Пусть $f(t)$ – (вещественная) функция такая же, как в задаче 7). Пусть $(X, \rho(x, y))$ – метрическое пространство; тогда $(X, f(\rho(x, y)))$ – метрическое пространство, топология которого совпадает с топологией (X, ρ) . В частности, рассмотрите случай $f(t) = \frac{t}{1+t}$.

9) Пусть X – некоторое множество; положим $\rho(x, y) = 0$, если $x = y$ и $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$. Будет ли X метрическим пространством? Если да, то какова в нем топология?

10) Пусть $\rho_n(x, y)$, $n = 1, 2, \dots$, – метрики на множестве X . Будет ли

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_i(x, y)}{1 + \rho_i(x, y)}$$

метрикой? Что за топологию определяет эта метрика?

Пусть X – векторное пространство (см. далее). Метрика $\rho(x, y)$ на X называется инвариантной относительно сдвигов, если для любых $x, y, z \in X$, $\rho(x - z, y - z) = \rho(x, y)$.

11) Если $d(x, y)$ инвариантная относительно сдвигов метрика на векторном пространстве X , то для любого $x \in X$ и любого натурального n имеем $d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$.

УКАЗАНИЕ. Имеем

$$d(nx, 0) \leq \sum_{k=1}^n d(kx, (k-1)x) = nd(x, 0).$$

12. Если $\{x_n\} \rightarrow 0$ в метризуемом топологическом векторном пространстве X с инвариантной относительно сдвигов метрикой $d(x, y)$, то существуют такие положительные скаляры a_n , что $a_n \rightarrow +\infty$, а $a_n x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

УКАЗАНИЕ. Так как $d(x_n, 0) \rightarrow 0$, то найдется такая возрастающая последовательность целых чисел n_k , что $d(x_{n_k}, 0) < \frac{1}{k^N}$ при $n \geq n_k$. Положим $a_1 = 1$ при $n < n_1$ и $a_n = k^{N-1}$ при $n_k \leq n < n_{k+1}$. Теперь если n удовлетворяет последним неравенствам, то

$$d(a_n x_n, 0) = d(k^{N-1} x_n, 0) \leq k^{N-1} d(x_n, 0) < \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Мы воспользовались результатами предыдущей задачи.

Пусть на множестве X заданы две метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$. Если они определяют на X одну и ту же систему открытых множеств, тогда они называются *эквивалентными*. Другими словами, тождественное отображение $(X, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (X, \mathfrak{T}_2)$ топологического пространства, определяемого первой метрикой, на $(X, \mathfrak{T}_2)$, определяемого второй метрикой, является гомеоморфизмом.

Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется *фундаментальной или последовательностью Коши*, если она удовлетворяет условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует число N_ε такое, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для любых $n > N_\varepsilon$ и $m > N_\varepsilon$.

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. Докажите.

Если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится к тому же пределу. Докажите.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Метрическое пространство (X, ρ) , в котором всякая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*.

УПРАЖНЕНИЕ (ПРОСТРАНСТВО $C[a, b]$). Докажите, что множество всех непрерывных вещественных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, с метрикой

$$\rho(f(t), g(t)) = \max_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)|$$

есть полное метрическое пространство.

УКАЗАНИЕ. Если последовательность $\{x_n(t)\}$ фундаментальна, то есть

$$\forall \varepsilon \quad \exists N: \sup_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m, n > N,$$

то она равномерно сходится. Поэтому (как известно из анализа) ее предел $x(t)$ будет непрерывной функцией.

Аналогом леммы о вложенных отрезках, известной в анализе, в метрическом пространстве (X, ρ) служит лемма о вложенных шарах.

ЛЕММА 2.1. *Метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X полно и $\overline{B}_{r_1}(x_1) \supset \overline{B}_{r_2}(x_2) \supset \overline{B}_{r_3}(x_3) \cdots$ — последовательность вложенных друг в друга шаров с центрами x_n и радиусами $r_n \rightarrow 0$. Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, ибо $\rho(x_n, x_m) < r_n$ при $m > n$. В силу полноты существует $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, причем $x \in \bigcap_n B_n$, ибо B_n содержит все точки x_i при $i > n$. То есть точка x — предельная точка для каждого шара $\overline{B}_n$ и, в силу их замкнутости, $x \in \overline{B}_n$ для всех n .

Обратно, пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность; покажем, что она имеет предел. Выберем из последовательности элемент x_{n_1} так, чтобы $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ при всех $n \geq n_1$, и пусть B_1 замкнутый шар радиуса 1 и с центром в x_{n_1} . Далее, выберем x_{n_2} так, чтобы $n_2 > n_1$ и $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ при всех $n \geq n_2$. Примем точку x_{n_2} за центр замкнутого шара B_2 радиуса $\frac{1}{2}$. Если точки $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ уже выбраны ($n_1 < n_2 < \dots < n_k$), то выберем $x_{n_{k+1}}$ так, чтобы $n_{k+1} > n_k$ и $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ при всех $n \geq n_{k+1}$. Пусть B_{k+1} — замкнутый шар с центром в точке $x_{n_{k+1}}$ и радиусом $\frac{1}{2^k}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность замкнутых шаров B_k , вложенных друг в друга, и шар B_k

имеет радиус $\frac{1}{2^{k-1}}$. Эта последовательность шаров по предположению имеет общую точку x и ясно, что эта точка служит пределом подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$. Итак, фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, следовательно она сама сходится, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11. Для того чтобы метризуемое пространство X было компактно, необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность $\{x_n \in X, n = 1, 2, \dots\}$ имела хотя бы одну предельную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость уже доказана, см. следствие 1 к теореме 2.4. Докажем достаточность. Итак, пусть задано покрытие $\mathfrak{G}$ пространства X и любая последовательность имеет предельную точку (хотя бы одну). Сперва покажем, что найдется ε такое, что любой шар с произвольным центром радиуса $\leq \varepsilon$ будет полностью содержаться хотя бы в одном из открытых множеств покрытия. Пусть это не так; тогда для любого n найдется точка x_n такая, что шар радиуса $\frac{1}{n}$ с центром в x_n не лежит целиком ни в одном из открытых множеств покрытия $\mathfrak{G}$. Бесконечная последовательность $\{x_n\}$ имеет предельную точку, скажем, a . Пусть $U \in \mathfrak{G}$ – то открытое множество, в которое попало a . Как открытое множество в нем существует открытый шар $B_\alpha(a)$ некоторого радиуса α с центром в a . При n достаточно больших ($\frac{1}{n} \leq \frac{\alpha}{2}$) найдутся шары с центрами в x_n радиуса $\frac{1}{n}$, целиком лежащие в $B_\alpha(a)$, а следовательно, и в U . Это противоречие и доказывает сформулированное утверждение. Теперь заметим, что при любом $\varepsilon > 0$ метрическое пространство X может быть полностью покрыто конечным числом шаров радиуса ε . Действительно, выберем точку x_1 и шар $B_\varepsilon(x_1)$ с центром в этой точке и радиусом ε . Если $X = B_\varepsilon(x_1)$, то процесс завершаем, если нет, то найдется точка $x_2 \notin B_\varepsilon(x_1)$. Берем шар $B_\varepsilon(x_2)$ и рассматриваем множество $B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)$. Если оно равно X , то мы пришли к нужному результату, если нет, то существует точка $x_3 \notin B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)$. Берем третий шар $B_\varepsilon(x_3)$ радиуса ε с центром в точке x_3 и т. д. Мы получим последовательность шаров $\{B_\varepsilon(x_n), n = 1, 2, \dots\}$. Если $X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$, то процесс завершен, если нет, то продолжаем его дальше. На каком то шаге процесс завершится, ибо в противном случае мы получим последовательность $\{x_n\}$, которая не может иметь предельной точки (каждая точка отстоит от любой другой на расстоянии $\geq \varepsilon$, что

противоречит предположению. Поскольку каждый шар лежит в некотором открытом множестве покрытия, то мы и возьмем это конечное число таких открытых множеств. Ясно, что они покрывают все X .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть X – метрическое пространство. Множество $M \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности в M можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $M \subset X$ называется *предкомпактным* (в X), когда его замыкание в пополнении X компактно.

Ясно, что множество $M \subset X$ предкомпактно тогда и только тогда, когда из всякой последовательности в M можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Пусть (X, ρ) и (Y, ρ') – два метрических пространства и f – взаимно однозначное соответствие между X и Y , причем $\rho(x, z) = \rho(f(x), f(z))$ для любых $x, z \in X$. Такое f называют *изометрией*, а пространства *изометричными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Полное метрическое пространство (X^*, ρ) называется *полным метрическим пространством* (X, ρ) , если:

- 1) (X, ρ) является подпространством пространства (X^*, ρ) ;
- 2) (X, ρ) плотно в (X^*, ρ) ($\bar{X} = X^*$).

ТЕОРЕМА 2.6. Каждое метрическое пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки этого метрического пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [1].

УПРАЖНЕНИЕ (ДИАГОНАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ). Пусть в метрическом пространстве имеется система сходящихся последовательностей

$$\begin{aligned} x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, \dots &\rightarrow y^1 \\ x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots &\rightarrow y^2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

и последовательность предельных элементов $\{y^n\}$ сама сходится к элементу y . Тогда можно, выбрав должным образом по одному элементу из каждой строки, получить последовательность $x_{n_1}^1, x_{n_2}^2, \dots, x_{n_k}^k, \dots$, сходящуюся к y . Докажите.

§ 3. Топологические векторные пространства (ТВП)

Через K будем обозначать либо поле вещественных чисел R , либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Линейные (векторные) пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество L элементов $x, y, z, \dots$ называется *векторным* (иногда линейным) пространством над полем K , если

1) определена операция на элементах называемая суммой (и обозначаемая $+$) такая, что для любых двух элементов $x \in L$ и $y \in L$ определен элемент $x + y \in L$, причем:

- a) $x + y = y + x$ (коммутативность);
- b) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность);
- c) в L существует элемент $\{0\}$ такой, что $\forall x \in L \quad x + \{0\} = x$ (существование нуля);
- d) для каждого $x \in L$ существует элемент $-x \in L$ такой, что $x + (-x) = \{0\}$ (существование противоположного элемента).

2) для любого числа $\alpha \in K$ и любого $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$ (произведение элемента на число), причем

- a) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
- b) $1 \cdot x = x \quad \forall x \in L$;
- c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- d) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность).

Заметим, что $0 \cdot x = \{0\}$. Действительно, $x + \{0\} = x = 1 \cdot x = (1 + 0)x = x + 0 \cdot x$. Прибавляя теперь к обеим частям этого тождества по противоположному к x элементу, получим требуемое. Поэтому всюду далее обозначают $\{0\}$ как 0 .

Если $K = \mathbb{C}$, то говорят о комплексном векторном пространстве, если $K = R$, то о вещественном векторном пространстве.

Например, пространство $C[a, b]$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа является линейным пространством.

Множество $A \subset L$ называется *линейно независимым*, если

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{влечет} \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

для любого n и при любом выборе элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ из A . Линейно независимое множество такое, что любой элемент из L есть линейная комбинация конечного числа элементов из A , называется алгебраическим *базисом* (или базисом Гамеля) линейного пространства L .

ТЕОРЕМА 3.1 (БАЗИС ГАМЕЛЯ). Пусть A линейно независимое подмножество линейного пространства L . Тогда существует алгебраический базис B пространства L такой, что $A \subset B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – множество всех линейно независимых подмножеств из L . Ясно, что A есть элемент этого множества. Это множество частично упорядочено по включению. Ясно, что если $\mathcal{N}$ – цепь в M , то объединение всех множеств из $\mathcal{N}$ есть ее верхняя грань. По лемме Цорна A находится в некотором максимальном элементе B . Каждая точка из L является линейной комбинацией точек из B , ибо, если бы хоть одна точка, скажем, x , не обладала этим свойством, то можно было бы к $\mathcal{N}$ присоединить элемент $B \cup \{x\}$ в противоречии с максимальнойностью B . Теорема доказана.

Множество $M \subset L$ называется подпространством линейного пространства L , если для любых $x, y \in M$ и числа α , $x + y \in M$, $\alpha x \in M$, то есть если $M + M \subset M$ и $\alpha M \subset M$ для любого числа α . Например, пусть S – некоторое подмножество векторного пространства L . Множество всевозможных конечных линейных комбинаций $\{\sum_i \lambda_i x_i\}$, где λ_i – числа, а $x_i \in S$ является линейным подпространством пространства L порожденным множеством S . Отметим, что в любом L имеется подпространство, состоящее только из одного нуля – нулевое подпространство.

Факторпространство Пусть L_0 – подпространство линейного пространства L . Определим отношение эквивалентности R на $L \times L$ следующим образом: пара $(x, y) \in R$, если $x - y \in L_0$. (Докажите, что это отношение действительно есть эквивалентность). Оно определяет разбиение множества L на попарно не пересекающиеся подмножества (классы смежности). Совокупность всех таких классов называется *факторпространством* и обозначается L/L_0 . В нем можно ввести операции сложения (выберем в каждом из классов $\xi, \eta \in L/L_0$ по представителю x и y и назовем суммой этих классов тот класс, куда попадет элемент $x + y$, а произведением класса ξ на число α тот класс, который содержит элемент

αx). Докажите, что после этого L/L_0 становится линейным пространством. Размерность факторпространства L/L_0 называется *коразмерностью* подпространства L_0 в пространстве L .

Пусть L_0 имеет конечную коразмерность, скажем, m ; тогда в L существуют элементы $x_1, x_2, \dots, x_m$ такие, что любой элемент $x \in L$ однозначно представим в виде $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + y$. Здесь $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$ — числа, а $y \in L_0$. Действительно, в L/L_0 существует базис, состоящий из m элементов $\xi_1, \dots, \xi_m$. Теперь, если x любой элемент из L и ξ тот класс эквивалентности, который содержит этот x , то ясно, что $\xi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \xi_i$. Выберем по одному элементу $x_i \in \xi_i$. Согласно определению каждый элемент из ξ , в том числе и x , отличается от любого другого (в том числе и от линейной комбинации $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in \xi$) на элемент из L_0 .

Линейные функционалы. Гиперплоскости Числовая функция f , определенная на некотором векторном пространстве L называется *функционалом*. Его числовое значение на элементе $x \in L$ обозначаем как $f(x)$. Функционал f называется *линейным*, если

- 1) $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in L$ (аддитивность);
- 2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для любого числа α (однородность).

ПРИМЕР 3.1. Пусть $y(t)$ — фиксированная, а $x(t)$ — произвольная непрерывные функции на отрезке $[a, b]$; тогда $f(x) = \int_a^b y(t)x(t) dt$ задает линейный функционал на линейном пространстве $C[a, b]$. Другой линейный функционал $f(x) = x(0)$ носит специальное название “ δ -функции”. (Предполагается, что отрезок $[a, b]$ содержит 0).

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что множество всех линейных функционалов на линейном пространстве тоже будет линейным пространством. Оно называется *алгебраически сопряженным* к L и обозначается $L^\#$.

Пусть $f(x)$ — линейный функционал, совокупность элементов $x \in L$, для которых $f(x) = 0$, является подпространством. Проверьте. Оно называется *ядром* функционала f и обозначается $\text{Ker } f$. Если $f \neq 0$, то подпространство $\text{Ker } f$ имеет коразмерность 1. Действительно, пусть $f(x_0) = 1$; положим для любого $x \in L, y = x - f(x)x_0$. Тогда $f(y) = 0$, то есть $y \in \text{Ker } f$.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что представление элемента x в виде $x = \alpha x_0 + y$, где $y \in \text{Ker } f$, при фиксированном x_0 единственно.

Отсюда следует, что x_1 и x_2 тогда и только тогда принадлежат одному классу смежности по подпространству L_0 , когда $f(x_1) = f(x_2)$. Таким образом, пространство L/L_0 одномерно.

Подпространство $\text{Ker } f$ определяет линейный функционал, обращающийся на нем в нуль, с точностью до постоянного множителя. Обратно, для любого подпространства L_0 коразмерности 1, можно указать такой функционал f , что $\text{Ker } f = L_0$. Действительно, пусть $x_0 \notin L_0$. Представим любой $x \in L$ в виде $x = \alpha x_0 + y$, где $y \in L_0$. Такое представление единственно. Убедитесь. Теперь положим $f(x) = \alpha$. Получаем требуемый линейный функционал. Докажите.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L_0 – какое-то подпространство L коразмерности 1; тогда всякий класс смежности линейного пространства L по подпространству L_0 называется *гиперплоскостью*, параллельной подпространству L_0 (само L_0 – гиперплоскость, содержащая 0).

Гиперплоскость M параллельная L_0 – это множество, получающееся из L_0 параллельным переносом на какойнибудь вектор $x_0 \in L$:

$$M = L_0 + x_0 = \{y: y = x + x_0, x \in L_0\}.$$

Если $f(x) \neq 0$, то $M_f = \{x: f(x) = 1\}$ – гиперплоскость, параллельная подпространству $\text{Ker } f$. Обратно, если M – какая-то гиперплоскость, параллельная подпространству L_0 и не проходящая через 0, то существует единственный линейный функционал f такой, что $M = \{x: f(x) = 1\}$.

Действительно, пусть $M = L_0 + x_0$, $x_0 \in L$. Тогда всякий $x \in L$ однозначно представим в виде $x = \alpha x_0 + y$, где $y \in L_0$. Положим $f(x) = \alpha$. Докажите, что это требуемый функционал. Таким образом, имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Между всеми нетривиальными линейными функционалами, определенными на L , и всеми гиперплоскостями в L , не проходящими через начало координат установлено взаимно однозначное соответствие.*

Топологические векторные пространства. (ТВП)

Пусть задано векторное пространство X над полем K , где K – поле вещественных или комплексных чисел, и топология $\mathfrak{T}$ на нем. Пара $(X, \mathfrak{T})$ называется *топологическим векторным пространством*, если

- 1) отображение $(x, y) \mapsto x + y$ пространства $X \times X$ в X непрерывно;
- 2) отображение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ пространства $K \times X$ в X непрерывно.

Другими словами, для любых x и y из X и любой окрестности U точки $x + y$ найдутся окрестности U_x и U_y точек x и y соответственно, такие, что из того, что $x' \in U_x$ и $y' \in U_y$, следует, что $x' + y' \in U$. Точно также, для любых $\lambda \in K$ и $x \in X$ и любой окрестности U точки λx существуют такая окрестность U_x точки x и такое число δ , что, из того что $x' \in U_x$ и $|\lambda - \lambda'| < \delta$, следует, что $\lambda' x' \in U$.

Перечислим некоторые свойства, которые вытекают из этих определений. Для каждого $a \in X$ перенос $f: f(x) = x + a$ есть гомеоморфизм пространства X на себя, и если $\mathfrak{B}$ – базис окрестностей нуля, то $a + \mathfrak{B}$ – базис окрестностей точки a .

Таким образом, топологическая структура в X определяется базисом окрестностей нуля. Если U – окрестность (нуля), то $U + a$ – окрестность точки a , и точка $x \in U + a$ тогда и только тогда, когда $x - a \in U$. Топологии, обладающие таким свойством, называются топологиями, *инвариантными относительно сдвигов*.

Для любого $\alpha \neq 0$ отображение $f: f(x) = \alpha x$ есть гомеоморфизм X на себя, и если U – окрестность нуля, то αU – тоже окрестность нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножество A векторного пространства X называется *поглощающим*, если для любого $x \in X$ существует такое λ , что $x \in \mu A$ для всех $\mu \geq \lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество A в линейном пространстве L называется *уравновешенным*, если каково бы ни было $x \in A$ элементы $\lambda x \in A$ для всех λ таких, что $|\lambda| \leq 1$. (Уравновешенные множества иногда называют еще “закругленными”).

Уравновешенная оболочка множества A – это множество $\{\lambda x: x \in A, |\lambda| \leq 1\}$.

УПРАЖНЕНИЯ. Докажите, что: объединение и пересечение любого семейства уравновешенных множеств – уравновешенное множество; если A и B уравновешенны, то и множество $A + B$ – уравновешенно.

ТЕОРЕМА 3.2. X – ТВП тогда и только тогда, когда множество X – линейное пространство с топологией, инвариантной относительно сдвигов и обладающей свойствами: существует база $\mathfrak{B}$ окрестностей нуля такая, что для любого $U \in \mathfrak{B}$:

- 1) U – поглощающее и уравновешенное множество;
- 2) $\exists V \in \mathfrak{B}$, такое что $V + V \subset U$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – ТВП и пусть $x \in X$ и $f(\alpha) = \alpha x$. Так как f непрерывна в точке $\alpha = 0$, то для любой окрестности нуля U существует окрестность $\{\alpha: |\alpha| < \varepsilon\}$, отображаемая этой функцией в U . Итак $\alpha x \in U$, так что $x \in \lambda U$ при $|\lambda| \geq \varepsilon^{-1}$. Таким образом любая окрестность нуля – поглощающее множество.

Так как $h(\alpha, x) = \alpha x$ непрерывна в точке $(\alpha, x) = (0, 0)$, то для любой U существует окрестность V и $\varepsilon > 0$ такие, что $\alpha x \in U$ для всех α при $|\alpha| \leq \varepsilon$ и всех $x \in V$. Следовательно, $\alpha V \subset U$ для всех $|\alpha| < \varepsilon$. Положим теперь $W = \bigcup_{|\alpha| < \varepsilon} \alpha V$. Ясно, что W – уравновешенная окрестность нуля и $W \subset U$. Итак, множество поглощающих и уравновешенных окрестностей есть база окрестностей нуля.

Далее, так как $g(x, y) = x + y$ непрерывна в нуле $(x, y) = (0, 0)$, то для любой уравновешенной окрестности нуля U существуют окрестности нуля V_1 и V_2 (их можно считать уравновешенными) такие, что $x + y \in U$ для всех $x \in V_1$ и всех $y \in V_2$. Положим $V = V_1 \cap V_2$. Следовательно, $V + V \subset U$.

Обратно. Нам нужно показать, что операции линейного пространства непрерывны (согласованы с данной топологией).

Проверим, что $(x, y) \mapsto x + y$ – непрерывно. Фиксируем точку (x_0, y_0) . Нужно проверить, что отображение $(\Delta x, \Delta y) \mapsto \Delta x + \Delta y$ непрерывно в нуле. Но это непосредственно следует из условия 2.

Проверим непрерывность отображения $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$. Фиксируем (λ_0, x_0) и положим $\lambda - \lambda_0 = \Delta \lambda$ и $x - x_0 = \Delta x$. Пусть $U \in \mathfrak{B}$ и $\lambda_0 x_0 + U$ – произвольная окрестность точки $\lambda_0 x_0$. Нужно доказать, что существуют окрестность V и ε такие, что

$$\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U \quad \text{при} \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \quad x \in x_0 + V,$$

то есть $(\lambda_0 + \Delta\lambda)(x_0 + \Delta x) \subset \lambda_0 x_0 + U$, как только $|\Delta\lambda| < \varepsilon$ и $\Delta x \in V$. Или

$$\Delta\lambda \cdot x_0 + \lambda_0 \cdot \Delta x + \Delta\lambda \cdot \Delta x \subset U. \quad (3.1)$$

Из условия 2 следует, что найдется $W \in \mathfrak{B}$ (поглощающее и уравновешенное) такое, что $W + W + W \subset U$. Так как W поглощающее, то найдется ε_0 такое, что $\Delta\lambda \cdot x_0 \subset W$ при $|\Delta\lambda| < \varepsilon_0$. Последнее слагаемое в (3.1) попадет в W , если $\Delta x \subset W$ и $|\Delta\lambda| < 1$ (в силу уравновешенности W). Рассмотрим второе слагаемое в (3.1). Пусть $2^n > \lambda_0$. Из условия 2 следует, что найдется $W_n \in \mathfrak{B}$ такое, что $2^n W_n \subset W$. Теперь если $\Delta x \subset W_n$, то $\lambda_0 \Delta x = \frac{\lambda_0}{2^n} 2^n W_n \subset W$ (в силу уравновешенности W). Полагая теперь $V = W_n$ и $\varepsilon = \min\{1, \varepsilon_0\}$, завершим доказательство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *ТВП X отделимо тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$, $x \neq 0$, существует окрестность нуля $U \in \mathfrak{B}$ такая, что $x \notin U$.*

Действительно, если X отделимо и $x \neq 0$, то существует $U \in \mathfrak{B}$, не содержащее x . Если же выполнено это условие и $x \neq y$, то $\exists U \in \mathfrak{B}$, не содержащее $x - y$, и по теореме 3.2 существует уравновешенная окрестность V такая, что $V + V \subset U$. Теперь $x + V$ и $y + V$ — непересекающиеся окрестности точек x и y , ибо, если бы $z \in (x + V) \cap (y + V)$, то

$$x - y = (z - y) - (z - x) \in V - V = V + V \subset U.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *В топологическом векторном пространстве X точка x и не содержащее ее замкнутое множество имеют непересекающиеся окрестности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть точку $x = 0$ и замкнутое множество F , такое что $0 \notin F$. Положим $U = X \setminus F$. Так как $0 \in U$, по теореме 3.2 найдется уравновешенная окрестность нуля W такая, что $W - W \subset U$. Проверим, что $\overline{W} \subset U$. Пусть $y \in \overline{W}$; тогда каждая окрестность точки y , в частности, $y + W$, содержит какую-либо точку $z \in W$. Следовательно, $z - y \in W$, то есть $y \in W - W \subset U$. Итак, W и $X \setminus \overline{W}$ искомые окрестности точки 0 и замкнутого множества F .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть X — топологическое пространство. Говорят, что X удовлетворяет аксиоме T_1 , если для любых его точек $x_1 \neq x_2$ существует окрестность U точки x_1 такая, что $x_2 \notin U$.

Если в X выполнена аксиома T_1 , то любая точка в нем есть замкнутое множество. (Докажите).

Говорят, что X удовлетворяет аксиоме T_2 , если для любых двух точек $x_1 \neq x_2$ существуют окрестности U_1 , $x_1 \in U_1$, и U_2 , $x_2 \in U_2$, такие, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. (Эта аксиома – уже знакомая нам аксиома отделимости или хаусдорфности.)

Говорят, что X удовлетворяет аксиоме T_3 , если для любой точки $x \in X$ и замкнутого множества $K \subset X$ такого, что $x \notin K$, существуют открытые множества U_1 , $x \in U_1$, и U_2 , $K \subset U_2$, такие, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Наконец, говорят, что X удовлетворяет аксиоме T_4 , если для любых двух замкнутых множеств K_1 и K_2 таких, что $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, существуют открытые множества U_1 , $K_1 \subset U_1$, и U_2 , $K_2 \subset U_2$, такие, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Утверждение 3.2 означает, что в ТВП из T_1 вытекает T_2 . Утверждение 3.3 означает, что в ТВП аксиома T_3 выполняется всегда. Аксиома T_4 в ТВП может не выполняться, однако всегда имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. Пусть K и C – подмножества топологического векторного пространства X , причем K компактно, а C замкнуто и $K \cap C = \emptyset$. Тогда существует такая окрестность нуля V , что $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.

Действительно, пусть $x \in K$, и так как $x \notin C$, то существует уравновешенная окрестность нуля U_x такая, что $x + U_x \cap C = \emptyset$. Из теоремы 3.2 следует, что существует окрестность нуля V_x такая, что $V_x + V_x + V_x \subset U_x$. Легко видеть, что $(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset$. В силу компактности K найдется конечное множество точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ такое, что $K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i})$. Положим $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Тогда

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}).$$

Так как ни одно из множеств $(x_i + V_{x_i} + V_{x_i})$ не пересекается с $C + V$, получаем требуемое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножество A топологического векторного пространства X называется *ограниченным*, если оно поглощается любой окрестностью нуля, то есть для каждой окрестности нуля U в X найдется такое число $s > 0$, что $A \subset tU$ при всех $t > s$.

УПРАЖНЕНИЯ. 1) Если окрестность V ограничена в топологическом векторном пространстве X и $\delta_1 > \delta_2 > \dots$, $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то семейство $\{\delta_n V : n = 1, 2, \dots\}$ является базой окрестностей нуля. Докажите.

РЕШЕНИЕ. Действительно, пусть U окрестность нуля, найдется $s > 0$, так что $V \subset tU$ при всех $t > s$. Если n достаточно велико, что $s\delta_n < 1$, то $V \subset \frac{1}{\delta_n}U$. Поэтому U содержит все множества $\delta_n V$, кроме конечного числа.

2) Каждое компактное подмножество K топологического векторного пространства X ограничено. Докажите.

РЕШЕНИЕ. Действительно, пусть U – окрестность нуля и V – уравновешенная окрестность нуля такая, что $V \subset U$. Согласно теореме 3.2 $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$. Поскольку K компактно, найдутся такие $n_1 < n_2 < \dots < n_s$, что $K \subset n_1 V \cup n_2 V \cup \dots \cup n_s V = n_s V$. (Последнее равенство следует из уравновешенности V .) Отсюда $K \subset tB \subset tU$ при $t > n_s$.

Полнота ТВП Пусть $(X, \mathfrak{T})$ – топологическое векторное пространство и $\mathfrak{B}$ – база окрестностей нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Направленность $\{x_\alpha \in X, \alpha \in I\}$ называется *направленностью Коши*, если для любой окрестности $U \in \mathfrak{B}$ существует $\alpha_0 \in I$ такое, что $x_\alpha - x_\beta \in U$, если $\alpha, \beta > \alpha_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отделимое ТВП называется *полным*, если всякая направленность Коши сходится.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. *Всякое отдельное ТВП изоморфно вкладывается в полное ТВП как плотное подпространство.*

(Доказательство опускаем).

Докажем, что в метрическом пространстве так определенная полнота эквивалентна ранее определенной полноте (для метрического пространства). Для этого достаточно доказать, что если в X всякая последовательность Коши сходится, то сходится и всякая направленность Коши.

Действительно, пусть X – ТВП и топология задана метрикой $\rho(x, y)$. Пусть, далее, $\{x_\alpha \in X, \alpha \in I\}$ – направленность Коши. Построим (по индукции) последовательность $\{\alpha_n \in I, n = 1, 2, \dots\}$ со свойствами

$$\rho(x_\alpha, x_\beta) \leq \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad \alpha, \beta \geq \alpha_n; \quad \alpha_{n+1} \geq \alpha_n.$$

(Отметим, что $\{x_{\alpha_n}\}$ – не обязательно поднаправленность $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$.) Нетрудно видеть, что $\{x_{\alpha_n}, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность Коши. По условию

$$x_{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, \quad \text{то есть} \quad \rho(x_{\alpha_n}, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$, найдем N так, чтобы $\rho(x_{\alpha_n}, x_0) \leq \varepsilon$. Далее выбираем $n_\varepsilon > \max\{N, \frac{1}{\varepsilon}\}$, имеем

$$\rho(x_\alpha, x_0) \leq \rho(x_\alpha, x_{n_\varepsilon}) + \rho(x_{n_\varepsilon}, x_0) \leq 2\varepsilon,$$

что и доказывает сходимость направленности Коши.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Если X – отделимое ТВП и M – его полное подпространство, то M замкнуто в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \overline{M}$, тогда по утверждению 2.5 существует направленность $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ – сходящаяся к x и $x_\alpha \in M$. Тогда $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ – направленность Коши в M и в силу полноты M должна сходиться к элементу из M . Следовательно, $x \in M$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в условиях утверждения 3.6 X – полное, а M – его замкнутое подпространство, то M – полное подпространство X . (Докажите).

УПРАЖНЕНИЕ. 1. Докажите, что последовательность Коши (а следовательно и любая сходящаяся последовательность) ограничена.

РЕШЕНИЕ. Действительно, пусть $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность Коши и V и W – уравновешенные окрестности нуля такие, что $V + V \subset W$. Тогда существует N такое, что $x_n \in x_N + V$ для всех $n \geq N$. Выберем такое $s > 1$, чтобы $x_N \in sV$ (окрестности нуля поглощающие); тогда $x_n \in sV + V \subset sV + sV \subset sW$ ибо $n \geq N$. Следовательно, если t достаточно велико, то $x_n \in tW$ для всех n .

2. Для того чтобы множество A топологического векторного пространства X было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \in A$ и любой сходящейся к нулю последовательности чисел $\alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, последовательность $\alpha_n x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите.

РЕШЕНИЕ. Действительно. Пусть A ограничено и V уравновешенная окрестность нуля, тогда для некоторого t имеем $A \subset tV$. так как $\alpha_n \rightarrow 0$, то найдется N такое, что $t\alpha_n < 1$ при $n > N$. Пусть $x_n \in A$, так как $t^{-1}A \subset V$ и V уравновешена, то $\alpha_n x_n \in V$ при всех $n > N$. Следовательно, $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.

Обратно. Пусть множество A не ограничено, тогда найдутся окрестность нуля V и последовательность чисел $r_n \rightarrow \infty$ такие, что ни одно из множеств $r_n V$ не содержит A . Выберем $x_n \in A$ такие, что $x_n \notin r_n V$. Но тогда ни одна из точек $r_n^{-1}x_n$ не принадлежит V , следовательно, $\frac{1}{r_n}x_n$ не сходится к нулю.

3. Пусть X – ТВП. Точка $x \in X$, $x \neq 0$, и $A = \{nx : n = 1, 2, \dots\}$. Докажите, что множество A не ограничено (отсюда будет следовать, что никакое подпространство, кроме $\{0\}$, топологического векторного пространства X не может быть ограниченным).

УКАЗАНИЕ. Существует окрестность нуля V такая, что $x \notin V$, при этом $nx \notin nV$. Следовательно, A не содержится ни в одном из nV .

Пусть X и Y – топологические векторные пространства и $F: X \rightarrow Y$ – линейное отображение. Это отображение называется *ограниченным*, если оно переводит ограниченные множества в ограниченные. Оно называется *открытым*, если оно открытые множества переводит в открытые.

4. Докажите, что ненулевой линейный функционал f на топологическом векторном пространстве X отображает открытые множества из X на открытые множества скаляров K .

РЕШЕНИЕ. Действительно, пусть A открыто и $x \in A$. Тогда $A - x$ – окрестность нуля и потому поглощающее множество. Пусть $f(a) = 1$, найдется $\alpha > 0$ такое, что $\lambda a \in A - x$ для всех $|\lambda| \leq \alpha$, а потому $f(\lambda a) \in f(A - x)$, то есть $f(x) + \lambda \in f(A)$ при $|\lambda| \leq \alpha$. Каждое $f(x)$ для $x \in A$ входит в $f(A)$ с некоторой окрестностью. Значит, $f(A)$ открыто.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7. Если M – подпространство топологического векторного пространства X , то его замыкание $\overline{M}$ – также подпространство X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in \overline{M}$ и U – окрестность. Существует уравновешенная окрестность V такая, что $V + V \subset U$.

Ясно, что $x + V$ и $y + V$ пересекаются с M , а потому $x + y + U$ пересекается с $M + M = M$. Значит, $x + y \in \bar{M}$.

Вспоминая, что такое гиперплоскость, отсюда выводим: в топологическом векторном пространстве X всякая гиперплоскость либо замкнута, либо плотна. Действительно, если L – гиперплоскость, то ее коразмерность равна 1, но $\bar{L} \supset L$ и, следовательно, либо $\bar{L} = L$, либо $\bar{L} = X$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть F – линейный нетривиальный функционал на топологическом векторном пространстве X . Тогда следующие свойства эквивалентны:

- a) $F(x)$ – непрерывен;
- b) $\text{Ker } F$ – замкнуто;
- c) $\text{Ker } F$ – не плотно в X ;
- d) F – ограничен в некоторой окрестности нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. a) $\Rightarrow$ b). Так как $\text{Ker } F = F^{-1}(0)$, а $\{0\}$ – замкнутое подмножество поля скаляров, то из непрерывности F следует замкнутость $\text{Ker } F$.

b) $\Rightarrow$ c). Так как F – нетривиальный функционал, то $\text{Ker } F \neq X$, а потому и выполняется c).

c) $\Rightarrow$ d). По условию c) дополнение к $\text{Ker } F$ имеет непустую внутренность, поэтому

$$(x + V) \cap \text{Ker } F = \emptyset \quad (3.2)$$

для некоторого $x \in X$ и некоторой уравновешенной окрестности V . При этом $F(V)$ – уравновешенное подмножество поля скаляров ($\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$), поэтому либо $F(V)$ ограничено, и тогда d) справедливо, либо $F(V) = \mathbb{C}$, но тогда найдется $y \in V$ такая, что $F(y) = -F(x)$. А это противоречит (3.2).

d) $\Rightarrow$ a). По условию $|F(x)| < M$ для всех $x \in V$ (где V некоторая окрестность нуля) и некоторого числа M . Пусть $\varepsilon > 0$ и $W = (\frac{\varepsilon}{M})V$; тогда $|F(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in W$. Таким образом, отображение F непрерывно в нуле, а следовательно, и всюду.

Топологических векторных пространств не всегда хватает для нужд анализа функций. Следующий пример показывает, что существуют топологические векторные пространства функций, в которых вообще нет линейных непрерывных функционалов (кроме тривиального), а следовательно, над ними нельзя строить теорию обобщенных функций.

ПРИМЕР 3.2 ПРОСТРАНСТВО $\hat{L}_p(\mathbb{R}^1)$, $0 < p < 1$. Через $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ обозначим совокупность всех финитных (отличных от нуля только на компактах $\mathbb{R}^1$) бесконечно дифференцируемых функций. Такие функции существуют, например “шапочка”

$$\omega_\alpha(t) = \begin{cases} C_\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - |t|^2}} & \text{при } |t| < \alpha, \\ 0 & \text{при } |t| \geq \alpha, \end{cases} \quad (3.3)$$

где постоянная C_α подобрана так, что $\int \omega_\alpha(t) dt = 1$. Будем считать $\omega_1(t) = \omega(t)$. Положим $\mu(f) = \int |f(t)|^p dt$. Обозначим $\hat{L}_p(\mathbb{R}^1)$, $0 < p < 1$, пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ с метрикой $\rho(f, g)$, задаваемой формулой $\rho(f, g) = \mu(f - g)$. То, что это метрика вытекает из неравенства $\mu(f + g) \leq \mu(f) + \mu(g)$, которое легко следует из неравенства $(\alpha + \beta)^p \leq \alpha^p + \beta^p$, справедливого при $0 < p < 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Базой окрестностей нуля являются шары

$$U_n = \left\{ f \in \hat{L}_p : \rho(f, 0) = \mu(f) < \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Нетрудно видеть, что выполнены все условия теоремы 3.2, а потому $\hat{L}_p$ – топологическое векторное пространство (метризуемое, с первой аксиомой счетности). Покажем, что в этом пространстве нет ни одного нетривиального линейного непрерывного функционала.

Шаг 1. Пусть $\psi_n(t) = n\omega(nt)$, где $\omega(t)$ – “шапочка”, см. (3.3). Имеем

$$\begin{aligned} \mu(\psi_n(t - \xi)) &= \int \psi_n(t - \xi) dt = \int \psi_n(t) dt \\ &= \int n^p \omega^p(nt) dt = n^{p-1} \int \omega^p(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Откуда следует, что $\psi_n(t - \xi) \rightarrow 0$ в $\hat{L}_p$ равномерно по ξ .

Шаг 2. Возьмем теперь произвольную функцию $f \in \hat{L}_p$ и покажем, что свертка

$$\int f(\xi) \psi_n(t - \xi) d\xi \rightarrow f(t) \quad \text{в } \hat{L}_p \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Имеем

$$\int f(\xi) n\omega(nt - n\xi) d\xi = \int f\left(\frac{\eta}{n}\right) \omega(nt - \eta) d\eta = \int f\left(\frac{\eta}{n} + t\right) \omega(-\eta) d\eta.$$

Откуда ясно, что свертка сходится к $f(t)$ поточечно, а так как подынтегральные функции ограничены постоянной, не зависящей от n и сосредоточены все на одном компакте (следовательно, ограничивающая функция интегрируема), то по теореме Лебега свертка сходится и в $\hat{L}_p$.

Шаг 3. Пусть $F[f]$ – линейный непрерывный функционал в $\hat{L}_p$. Покажем, что для любого $n = 1, 2, \dots$

$$F\left[\int f(\xi)\psi_n(t-\xi)d\xi\right] = \int f(\xi)F[\psi_n(t-\xi)]d\xi. \quad (3.6)$$

Действительно, фиксируя n , представим интеграл как предел интегральных сумм Римана; имеем

$$\int f(\xi)\psi_n(t-\xi)d\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f(\xi_k)\psi_n(t-\xi_k)\delta\xi_k.$$

Интегральная сумма справа поточечно по t сходится, и все слагаемые в ней находятся на одном и том же компакте и ограничены постоянной, не зависящей от разбиения и от t . Пользуясь теоремой Лебега, видим, что интегральная сумма сходится и в $\hat{L}_p$. Применяя F к обеим частям этого неравенства, получим (3.6).

Шаг 4. Учитывая непрерывность функционала F , имеем

$$\begin{aligned} F[f] &= \lim_{n \rightarrow \infty} F\left[\int f(\xi)\psi_n(t-\xi)d\xi\right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(\xi)F[\psi_n(t-\xi)]d\xi = 0. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы учли непрерывность функционала и соотношения (3.4) и (3.6).

§ 4. Локально выпуклые топологические пространства (ЛВП)

Пусть x и y – две какие то точки линейного пространства L . Множество всех его элементов вида

$$\alpha x + \beta y, \quad \text{где } \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1,$$

называется замкнутым отрезком в L , а без концевых точек x и y – открытым отрезком (интервалом).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $M \subset L$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит и соединяющий их замкнутый отрезок.

УПРАЖНЕНИЯ. Пусть L – линейное пространство, s, t – скаляры, A, B – подмножества L .

1) Пусть все M_α – выпуклые множества. Докажите, что $M = \bigcap_\alpha M_\alpha$ – тоже выпуклое множество, и что объединение линейно упорядоченного (относительно включения) семейства выпуклых множеств выпукло.

2) $2A \subset A + A$. Может случиться, что $2A \neq A + A$.

3) A выпукло тогда и только тогда, когда $(s+t)A = sA + tA$ для всех положительных s и t . В частности, если $2A = A + A$.

Пусть L – векторное пространство. Если $A \subset L$, то пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A , называется *выпуклой оболочкой* множества A . Это наименьшее выпуклое множество, содержащее A , обозначают $\text{ch } A$. Выпуклая оболочка A это множество $\sum \lambda_\nu x_\nu$, где $\lambda_\nu \geq 0$, $\sum \lambda_\nu = 1$ и $\{x_\nu\}$ пробегает множество всех непустых конечных подмножеств множества A , то есть

$$\text{ch } A = \left\{ y: y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N, \right. \\ \left. \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu = 1, \lambda_\nu \geq 0, x_\nu \in A, N = 1, 2, \dots \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое векторное пространство называется *локально выпуклым* (ЛВП), если в нем всякая окрестность нуля содержит выпуклую окрестность нуля.

Нетрудно видеть, что если векторное топологическое пространство локально выпукло, то в нем существует базис выпуклых уравновешенных поглощающих окрестностей нуля.

Действительно, пусть X – ЛВП и $\mathfrak{B}$ – базис окрестностей нуля, состоящий из уравновешенных и поглощающих окрестностей нуля (следствие того, что X – ТВП). Теперь любая окрестность нуля $U \in \mathfrak{B}$ содержит выпуклую окрестность нуля $V \subset U$, которая, в свою очередь, содержит уравновешенную окрестность нуля $V_1 \subset V$. (Это следует из того, что функция $h(\alpha, x) = \alpha x$ непрерывна в точке $(\alpha, x) = (0, 0)$, см. доказательство теоремы 3.2.) Возьмем теперь выпуклую оболочку V_1 и получим выпуклую уравновешенную поглощающую окрестность нуля.

Одновременно выпуклое и уравновешенное множество называется *абсолютно выпуклым*.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что множество A абсолютно выпукло тогда и только тогда, когда каковы бы ни были x и y из A , элементы $\lambda x + \mu y \in A$ для всех чисел λ и μ таких, что $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

Пусть $V_\alpha, \alpha \in I$ абсолютно выпуклые множества. Тогда через $\Gamma \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ будем обозначать абсолютно выпуклую оболочку объединения множеств V_α . (Это выпуклая оболочка уравновешенной оболочки этого объединения.)

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что

$$\Gamma \bigcup_{\alpha} V_{\alpha} = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \leq 1, x_i \in V_{\alpha_i}, N = 1, 2, \dots \right\}. \quad (4.1)$$

ТЕОРЕМА 4.1. X – ЛВП тогда и только тогда, когда X – линейное пространство с топологией, инвариантной относительно сдвигов, такой, что существует базис $\mathfrak{B}$ окрестностей нуля:

- 1) каждое $U \in \mathfrak{B}$ абсолютно выпуклое и поглощающее;
- 2) для любого $U \in \mathfrak{B}$ найдется $V \in \mathfrak{B}$ такое, что $V \subset \frac{1}{2}U$.

Действительно, в силу сказанного выше достаточно доказать выполнение свойства 2 теоремы 3.2. Но оно непосредственно следует из 2) и того факта, что если U выпукло, то $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \subset U$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в векторном пространстве X задано семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств X , инвариантное относительно сдвигов, обладающее свойствами 1), 2) и

3) для любых $U \in \mathfrak{B}$ и $V \in \mathfrak{B}$ существует $W \in \mathfrak{B}$ такое, что $W \subset U \cap V$, то в построенной по этому множеству топологии X – ЛВП, причем $\mathfrak{B}$ – базис окрестностей нуля.

Действительно, за множество окрестностей точки $x \in X$ примем множество $x + \mathfrak{B}$. Нетрудно проверить, что выполнены все аксиомы топологического пространства и условия утверждения 2.10. Так же, как при доказательстве теоремы 3.2, проверяется, что эта топология согласуется с линейной структурой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть τ – произвольное множество абсолютно выпуклых поглощающих подмножеств векторного пространства X . Тогда в X существует слабейшая топология, согласующаяся с алгебраической структурой, в которой каждое множество из

τ является окрестностью нуля. В этой топологии X – локально выпуклое пространство с базисом окрестностью нуля, образованным множествами вида

$$\varepsilon \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i, \quad \varepsilon > 0, \quad V_i \in \tau. \quad (4.2)$$

Действительно, множество $\mathfrak{B}$ всех подмножеств вида (4.2) удовлетворяет всем условиям теоремы, так что $\mathfrak{B}$ – базис окрестностей, в которой X – локально выпуклое пространство. С другой стороны, что это слабейшая топология, очевидно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *В топологическом векторном пространстве замыкание выпуклого множества выпукло, уравновешенного множества уравновешенно и абсолютно выпуклого множества абсолютно выпукло.*

Действительно, покажем это, например, для абсолютно выпуклого множества. Пусть A абсолютно выпукло, $a, b \in \bar{A}$ и $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Для любой окрестности U существует уравновешенная окрестность V такая, что $V + V \subset U$. Тогда существуют $x \in A \cap (a + V)$ и $y \in A \cap (b + V)$, для которых

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &\in (\lambda A + \mu A) \cap (\lambda a + \mu b + \lambda V + \mu V) \subset \\ &\subset A \cap (\lambda a + \mu b + V + V) \subset A \cap (\lambda a + \mu b + U). \end{aligned}$$

Это и означает, что $\lambda a + \mu b \in \bar{A}$, а потому $\bar{A}$ абсолютно выпукло.

Полунормы. Функционалы Минковского Неотрицательная (конечная) вещественная функция p на векторном пространстве L называется *полунормой*, если для всех $x, y \in L$ и для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ или $\lambda \in \mathbb{R}$ (в зависимости от того, L – комплексное или вещественное пространство):

- 1) $p(x) \geq 0$;
- 2) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$;
- 3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Отметим, что $p(0) = 0$, но может случиться, что для некоторого $x \neq 0$, $p(x) = 0$. Вообще говоря, множество прообразов нуля $\{p^{-1}(0)\}$ – линейное подпространство в L . Если из того, что $p(x) = 0$ вытекает, что $x = 0$, то $p(x)$ называется *нормой*.

Отметим также, что из 3) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} p(x) &= p(y + x - y) \leq p(y) + p(x - y), \\ p(y) &= p(x + y - x) \leq p(x) + p(y - x), \end{aligned}$$

а потому

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y). \quad (4.3)$$

Между полунормами и абсолютно выпуклыми поглощающими множествами существует связь, а именно,

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть p – полунорма на линейном пространстве L . Тогда для любого $\alpha > 0$ множества

$$\{x \in L: p(x) < \alpha\} \quad \text{и} \quad \{x \in L: p(x) \leq \alpha\} \quad (4.4)$$

абсолютно выпуклые и поглощающие.

Обратно. Пусть $A \subset L$ – абсолютно выпуклое поглощающее множество; тогда функция $p(x)$, определяемая формулой

$$p(x) = \inf\{\lambda: \lambda > 0, x \in \lambda A\}, \quad (4.5)$$

является полунормой, при этом

$$\{x: p(x) < 1\} \subset A \subset \{x: p(x) \leq 1\}. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – полунорма. Рассмотрим множество A , задаваемое одной из формул (4.4), и пусть $x, y \in A$ и $r + t = 1$, $r, t \geq 0$. Тогда в силу свойств 2) и 3) $p(rx + ty) \leq rp(x) + tp(y) \leq \alpha$, то есть A выпукло. Его уравновешенность вытекает из 2). Покажем, что A – поглощающее. Пусть $y \in L$ и $\lambda_y = \frac{p(y)}{\alpha}$; тогда при $\lambda > \lambda_y$, $p(y) \leq \lambda\alpha$, то есть $y \in \lambda A$.

Обратно. Пусть функция p определяется формулой (4.5); тогда, так как A поглощающее множество, то $p(x)$ для любого $x \in L$ конечна. Условия 1) и 2) очевидны. Проверим выпуклость. Пусть даны $x_i \in L$, $i = 1, 2$, и $\varepsilon > 0$. Выберем r_i так, чтобы $p(x_i) < r_i < p(x_i) + \varepsilon$, тогда $\frac{x_i}{r_i} \in A$. Положим $r = r_1 + r_2$ и рассмотрим отрезок с концами $\frac{x_1}{r_1}$ и $\frac{x_2}{r_2}$. Так как A выпуклое множество, то этот отрезок принадлежит ему, а потому точка

$$\frac{x_1 + x_2}{r} = \frac{r_1}{r} \frac{x_1}{r_1} + \frac{r_2}{r} \frac{x_2}{r_2} \quad \text{принадлежит } A,$$

следовательно,

$$p_A(x_1 + x_2) \leq r = r_1 + r_2 < p(x_1) + \varepsilon + p(x_2) + \varepsilon.$$

Откуда и вытекает выпуклость $p(x)$. Теперь отношение (4.6) очевидно.

Полунорма p , сопоставленная абсолютно выпуклому поглощающему множеству A формулой (4.5), называется *функционалом Минковского* множества A . Мы будем обозначать его $p_A(x)$; таким образом,

$$p_A(x) = \inf\{\lambda: \lambda > 0, x \in \lambda A\}, \quad (4.7)$$

Из его определения непосредственно следует, что если $\alpha \neq 0$, то функционалом Минковского множества αA будет функционал $\frac{1}{|\alpha|}p(x)$. Пусть B – также абсолютно выпуклое и поглощающее множество, функционалом Минковского которого пусть будет $p_B(x)$, тогда функционал Минковского множества $A \cap B$ равен $\sup\{p_A(x), p_B(x)\}$. Если $A \subset B$, то $p_B(x) \leq p_A(x) \quad \forall x \in L$.

УПРАЖНЕНИЯ. Докажите:

- 1) если $A = L$, то $p_L(x) \equiv 0$;
- 2) если A – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r , то $p_A(x) = \frac{\|x\|}{r}$, где $\|x\|$ – длина вектора x .

Пусть X – ЛВП. Напомним, что для каждой полунормы $p(x)$ множества $\{x \in X: p(x) < \alpha\}$ и $\{x \in X: p(x) \leq \alpha\}$ при любом $\alpha > 0$ абсолютно выпуклые и поглощающие. И обратно, каждому абсолютно выпуклому и поглощающему множеству $A \in X$ соответствует функционал Минковского (его называют еще *калибровочной функцией*), определяемый формулой (4.7), причем справедливо соотношение (4.6). Эта связь наводит на мысль описывать топологии локально выпуклых пространств с помощью полунорм.

Пусть $\mathfrak{B}$ – база из абсолютно выпуклых поглощающих окрестностей нуля ЛВП X и пусть $\mathcal{A}$ – подсемейство $\mathfrak{B}$ такое, что для любого $U \in \mathfrak{B}$ существует конечный набор окрестностей $V_1, V_2, \dots, V_n$, принадлежащих $\mathcal{A}$, и $\varepsilon \geq 0$ такие, что $\varepsilon(V_1 \cup \dots \cup V_n) \subset U$. Обозначим через Q множество полунорм вида $\{p_V(x), V \in \mathcal{A}\}$. Ясно, что базой окрестностей нуля может служить множество вида

$$\left\{x \in X: \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0\right\}, \quad (4.8)$$

где $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, – любой конечный набор полунорм из Q .

Итак, в любом ЛВП топология может быть задана семейством полунорм, причем базу окрестностей нуля образуют множества (4.8).

Верно и обратное. Если X – векторное пространство и Q некоторое семейство полунорм, то в X существует топология, базу окрестностей нуля которой образуют множества (4.8).

Ясно, что X отделимо тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$, $x \neq 0$, существует полунорма $p(x) \in Q$ такая, что $p(x) \neq 0$.

Если X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то множество Q можно считать счетным. В этом случае X называют *счетно нормированным пространством*. Перенумеровав полунормы Q и введя новую эквивалентную систему полунорм $\{q_i(x)$, $i = 1, 2, \dots\}$ по формуле $q_i(x) = \max_{j \leq i} p_j(x)$, $i = 1, 2, \dots$, добьемся того, что эти новые полунормы обладают свойством монотонности $q_{i+1} \leq q_i$, $i = 1, 2, \dots$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Множество $A \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда каждая полунорма $p(x) \in Q$ ограничена на A .*

Действительно, предположим, что множество $A \subset X$ ограничено. Фиксируем некоторую полунорму $p \in Q$. Так как $V = \{x: p(x) < 1\}$ – окрестность нуля при $\varepsilon = 1$, $n = 1$ и $p = p_1$, то $A \subset kV$ для некоторого k . Но тогда $p(x) < k$ для всех $x \in A$. Обратно. Пусть каждая полунорма $p \in Q$ ограничена на множестве A и U – окрестность нуля. Пусть также p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и ε выбраны так, чтобы окрестность начала, определяемая формулой (4.9) с этими p_i и ε содержалась в U . Существуют такие числа M_i , что $p_i(x) < M_i$ для $x \in A$, $1 \leq i \leq n$. Отсюда следует, что $A \subset tU$ при $t > \varepsilon \cdot \max\{M_1, \dots, M_n\}$. Откуда и следует, что A ограничено.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. *В локально выпуклом пространстве X полунорма $p(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда она непрерывна в нуле.*

Функция Минковского $p_U(x)$ абсолютно выпуклого поглощающего множества U непрерывна тогда и только тогда, когда U – окрестность. При этом $\{x: p_U(x) < 1\}$ есть внутренность U , а $\{x: p_U(x) \leq 1\}$ – замыкание.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если p непрерывна в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля V , для всех точек которой

$p(x) < \varepsilon$. Теперь, если a произвольная точка X , то $|p(x) - p(a)| \leq p(x - a) < \varepsilon$ для всех $x \in a + V$.

Если U – абсолютно выпуклая окрестность, то для любого $\varepsilon > 0$ имеем $p_U(x) \leq \varepsilon$ для всех $x \in \varepsilon U$, так что $p_U(x)$ непрерывна в нуле и по предыдущему во всем X . Обратно. Пусть p_U непрерывна, тогда множество $V = \{x: p_U(x) < 1\}$ открыто (как прообраз $(-1, 1)$) и $V \subset U$. Поэтому U – окрестность. Покажем, что $\bar{V} = \{x: p_U(x) \leq 1\}$. Действительно, это множество замкнуто и содержит V . Если x – точка этого множества и W – любая окрестность нуля, то существует μ такое, что $0 < \mu < 1$ и $-\mu x \in W$ (ибо W – поглощающее). Отсюда

$$(1 - \mu)x \in x + W; \quad p((1 - \mu)x) = (1 - \mu)p(x) \leq (1 - \mu) < 1,$$

так что $(1 - \mu)x \in V$, а следовательно, $x + W$ пересекается с V . Итак, $x \in \bar{V}$. Теперь покажем, что V есть внутренность $\bar{V}$. Действительно, если x принадлежит внутренности $\bar{V}$, то существует окрестность W такая, что $x + W \subset \bar{V}$, и существует μ такое, что $0 < \mu < 1$ и $\mu x \in W$. А тогда $(1 + \mu)x \in \bar{V}$, откуда $p((1 + \mu)x) \leq 1$. Поэтому $p_U(x) < 1$, и тем самым $x \in V$. Наконец, $V \subset U \subset \bar{V}$ и, следовательно, V есть внутренность U и $\bar{U} = \bar{V}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $p(x)$ – полунорма и множество $A_p = \{x: p(x) < 1\}$ содержит открытое множество $\mathcal{O}$, то есть $\mathcal{O} \subset A_p$, тогда $p(x)$ непрерывна.

Действительно, пусть $x \in \mathcal{O}$, тогда $-x \in A_p$, и потому $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathcal{O} \subset A_p$ (ибо A_p – абсолютно выпуклое и поглощающее). Следовательно, A_p содержит выпуклую уравновешенную поглощающую окрестность нуля U . Поэтому $p(x) \leq p_U(x)$ для $x \in X$. Следовательно, $p(x)$ непрерывна в нуле, а потому и всюду.

Напомним, что вещественнозначная функция $f(x)$ на топологическом пространстве X называется *полу непрерывной сверху*, если для любого числа c множество $\{x: f(x) < c\}$ открыто. Таким образом, мы получили, что полунорма $p(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда она непрерывна сверху.

Пусть, по-прежнему, Q – семейство полунорм, задающее топологию в X . Ясно, что любая полунорма $p(x) \in Q$ непрерывна. С другой стороны, если $q(x)$ – произвольная полунорма, то она непрерывна тогда и только тогда, когда существует конечный набор полунорм $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\}$ из Q и константа C такие,

что

$$q(x) \leq C \max_{1 \leq i \leq n} p_i(x), \quad x \in X. \quad (4.9)$$

Отметим, что если X – счетно нормированное пространство и $p_1(x) \leq p_2(x) \leq \dots$ – монотонная система полунорм, задающая в X топологию, то условие (4.9) можно переформулировать следующим образом.

Полунорма $q(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда существует номер N и число C такие, что

$$q(x) \leq Cp_N(x), \quad x \in X. \quad (4.10)$$

Пусть $f(x)$ – линейный функционал на X ; тогда $q(x) = |f(x)|$ – полунорма на X . Ясно, что $f(x)$ непрерывен тогда и только тогда, когда $q(x)$ непрерывна. Таким образом, мы получили следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. *Линейный функционал $f(x)$ в ЛВП X непрерывен тогда и только тогда, когда существует конечный набор $p_i(x) \in Q$, $i = 1, 2, \dots, n$, и число C такие, что*

$$|f(x)| \leq C \max_{1 \leq i \leq n} p_i(x), \quad x \in X. \quad (4.11)$$

Аналогичный результат справедлив и для линейных отображений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. *Пусть E и X – ЛВП, а Q_1 и Q_2 – семейства полунорм, задающих топологии в E и X , соответственно. Пусть также A – линейное отображение E в X . Отображение $A: E \rightarrow X$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любой полунормы $p(x) \in Q_2$ существуют число C и полунорма $q(x) \in Q_1$ такие, что*

$$p(A(x)) \leq Cq(x) \quad \forall x \in E. \quad (4.12)$$

Факторпространство Пусть X – ЛВП и M – его подпространство. Тогда существует каноническое отображение $f: X \rightarrow X/M$, отображающее X на факторпространство $X \mapsto X/M$ так, что $f(x)$ – это класс эквивалентности, которому принадлежит x , то есть $f(x) = x + M$. Это отображение называется *каноническим отображением*. Пусть $\mathfrak{B}$ – базис абсолютно выпуклых окрестностей; тогда $\{f(U): U \subset \mathfrak{B}\}$ образуют базис топологии в X/M , называемой *фактортопологией*. Пространство X/M , наделенное этой топологией, будет локально выпуклым пространством. Проверьте. А так как $U \subset f^{-1}(f(U))$ для каждого $U \in \mathfrak{B}$,

то f непрерывно и открыто. При этом фактортопология – сильнейшая из топологий в X/M , при которых f непрерывно. Пусть p_U – функция Минковского абсолютно выпуклой окрестности U ; тогда функция Минковского $q(\xi)$, $\xi = x + M$, окрестности $f(U)$ выражается формулой

$$\begin{aligned} q(\xi) &= \inf\{\lambda: \lambda \geq 0, \xi \in \lambda f(U)\} = \\ &= \inf_{x \in \xi} \inf\{\lambda: \lambda \geq 0, x \in \lambda U\} = \inf\{p_U(x): x \in \xi\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Факторпространство, наделенное фактортопологией, отделимо тогда и только тогда, когда M – замкнутое подпространство.

Действительно, если X/M отделимо, то ноль в нем замкнут, а потому его прообраз, $f^{-1}(0) = M$, замкнут, ибо f непрерывно. Обратно, пусть M замкнуто в X и $\xi \neq 0$ – произвольная точка в X/M ; тогда из $x \in \xi$ следует, что $x \notin M$. Поэтому найдется абсолютно выпуклая окрестность U такая, что $x + U \cap M = \emptyset$. Следовательно, $x \notin M + U$, и потому $\xi \notin f(U)$, что и означает отделимость X/M .

Если X метризуемо (обладает счетным базисом окрестностей нуля), а M замкнуто, то X/M отделимо и обладает счетным базисом окрестностей, а потому метризуемо. Если X нормируемо, а M замкнуто, то X/M тоже нормируемо с нормой $\|\xi\| = \inf\{\|x\|: x \in \xi\}$.

Пусть теперь g – линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство E , причем g отображает M в нуль. Тогда g представляется в виде композиции двух линейных отображений $g = h \cdot f$, где $h: X/M \rightarrow E$. (Заметьте, что $g(x) = g(x + M) = g(f(x)) \equiv h(\xi)$.) Другими словами, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & E \\ & \searrow f \quad \nearrow h & \\ & X/M & \end{array}$$

Отображение g непрерывно тогда и только тогда, когда какова бы ни была окрестность V в E , множество

$$g^{-1}(V) = (h \cdot f)^{-1}(V) = f^{-1}(h^{-1}(V))$$

является окрестностью в X , то есть $h^{-1}(V)$ – окрестностью в X/M . Так что g непрерывна тогда и только тогда, когда h непрерывно. Итак мы получили следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.6. *Линейное отображение g локально выпуклого пространства X в локально выпуклое пространство E представляется композицией $g = h \cdot f$, где h – взаимно однозначное линейное отображение $X/g^{-1}(0)$ в E , а f – каноническое отображение X на $X/g^{-1}(0)$. Причем g непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно h .*

Произведение пространств Пусть для каждого индекса α из некоторого множества индексов I задано векторное топологическое пространство $(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$. Декартово произведение $\prod \{X_\alpha : \alpha \in I\}$ определяется как множество всех функций $x = \{x(\alpha) : \alpha \in I\}$ (писать будем $x = x_\alpha : \alpha \in I$) таких, что “координата” $x_\alpha \in X_\alpha$ для каждого α из I . Множество X_α называется α -м координатным множеством. Проектирование $P_\alpha(x)$ на α -е координатное множество определяется формулой $P_\alpha(x) = x_\alpha$. Чтобы обеспечить непрерывность отображений проектирований рассмотрим в декартовом произведении совокупность следующих множеств: фиксируем α_0 и пусть $U \in \mathfrak{T}_{\alpha_0}$ – произвольное открытое множество в X_{α_0} , положим множество $P_{\alpha_0}^{-1}(U)$ открытым в произведении (заметим, что это “цилиндрическое” множество – по α_0 -й координате оно U , а по каждой из остальных оно все – соответствующее пространство X_α , $\alpha \in I$, $\alpha \neq \alpha_0$). Совокупность всех таких “открытых” множеств (и по всем α_0 , и по всем U) будем рассматривать как предбазу некоторой топологии на так определенном произведении. Базу топологии произведения $\mathfrak{B}$ образует семейство всевозможных конечных пересечений элементов указанной предбазы. Произвольный элемент этой базы имеет вид

$$\bigcap_{\alpha \in J} P_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \{x : x_\alpha \in U_\alpha \text{ для каждого } \alpha \in J\},$$

где J – конечное подмножество множества I и U_α – открытое множество пространства X_α для каждого α из J .

Декартово произведение с так введенной топологией называется *произведением пространств*. Отметим, что эта топология слабейшая из топологий, в которых все проектирования непрерывны. Проектирования $P_\alpha(x)$ пространства произведений на координатные пространства есть открытые отображения.

Ясно, что произведение отделимых пространств – отделимое пространство (вспомните, как определялись открытые множества на произведении пространств). Нетрудно показать, что направленность в произведении сходится к точке в том и только в том случае, если ее проекция в любое координатное пространство сходится к соответствующей проекции этой точки.

Легко видеть, что если все X_α , $\alpha \in I$, – ЛВП, то и $\prod\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ – ЛВП.

Далее мы считаем все X_α локально выпуклыми пространствами.

Свойство универсальности. Пусть E – ЛВП, и задано семейство линейных отображений $g_\alpha : E \rightarrow X_\alpha$, $\alpha \in I$; тогда существует единственное линейное отображение $h : E \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g_\alpha} & X_\alpha \\ & \searrow h & \nearrow P_\alpha \\ & \prod_{\alpha \in I} X_\alpha & \end{array}$$

коммутативна. h непрерывно тогда и только тогда, когда все g_α , $\alpha \in I$, непрерывны.

Нормированные пространства Напомним, что в векторном пространстве полунорму $p(x)$, для которой из того, что $p(x) = 0$, следует, что $x = 0$, называют нормой. Норму принято обозначать так: $p(x) \equiv \|x\|$. Линейное пространство, в котором задана норма, называется *нормированным пространством*. Заметим, что в нем всегда можно ввести метрику по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Это – инвариантная относительно сдвигов метрика. Следовательно, нормированное пространство обладает всеми свойствами метрического пространства. В частности, если оно полно, то оно называется *банаховым пространством*. Нетрудно видеть, что базой окрестностей нуля будут шары $B_r = \{x \in X : \|x\| < r, r > 0\}$, при этом можно считать, что $r = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$.

Непосредственно из теоремы 3.3 следует, что для того чтобы линейный функционал $f(x)$ был непрерывен на нормируемом пространстве X , необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен на единичном шаре ($\|x\| \leq 1$). По определению число

$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ называется *нормой* функционала. В нормируемом пространстве справедливы следующие соотношения:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}; \quad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|. \quad (4.13)$$

УПРАЖНЕНИЕ. В пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $C([-1, 1])$ с нормой $\|x\| = \sup_t |x(t)|$ вычислите норму функционала $\delta(t)$, определяемого формулой $(\delta(t), x) = x(0)$.

В векторном пространстве X две нормы называются *эквивалентными*, если соответствующие им метрики эквивалентны, то есть определяют эквивалентные базы окрестностей нуля. Докажите, что две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ на векторном пространстве X эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют постоянные k_1 и k_2 такие, что

$$\|x\|_2 \leq k_1 \|x\|_1, \quad \|x\|_1 \leq k_2 \|x\|_2 \quad \forall x \in X.$$

Отметим, что если выполнено только первое из этих неравенств, то топология, порождаемая первой нормой сильнее (точнее, не слабее) топологии, порождаемой второй нормой. В этом случае говорят о *сравнимости* норм. Если X_1 и X_2 – векторные пространства X с соответствующими сравнимыми нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, то вложение пространства X_1 в X_2 непрерывно. Покажите это.

Пусть X – ТВП, а M – его N -мерное подпространство. Напомним, что через K мы обозначаем поле либо вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Всегда можно установить взаимно однозначное соответствие (изоморфизм) между M и K^N . Однако топологии в них разные. В M топология наследуется топологией пространства X , а в K^N – евклидова топология. (K^N – это либо $\mathbb{R}^N$, либо $\mathbb{C}^N$.)

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.7. Пусть X – отдельное ТВП над полем K и M – его N -мерное подпространство. Тогда любой линейный изоморфизм K^N ($\mathbb{R}^N$ или $\mathbb{C}^N$) на M является гомеоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по N . Пусть сперва $N = 1$ и $F: \mathbb{R} \mapsto M$ – линейное взаимно однозначное отображение, задаваемое формулой $F(1) = u \in M$; $F(a) = au$. Из непрерывности операций векторного пространства в M , следует, что F –

непрерывное отображение, причем F^{-1} – линейный функционал с ядром $\{0\}$, которое в силу отделимости X (а значит, и M) является замкнутым множеством в X (а следовательно и в M). По теореме 3.3 этот функционал непрерывен.

Предположим теперь, что для $N - 1$ утверждение справедливо. Отсюда, в частности, следует, что любое $N - 1$ мерное подпространство в любом отделимом ТВП, как пространство, изоморфное K^N , полно, а потому замкнуто в нем (см. утверждение 3.6). Значит, любой линейный функционал на N -мерном подпространстве непрерывен, ибо его ядро есть $N - 1$ мерное подпространство (см. теорему 3.3). Пусть $F: K^N \mapsto M$ – изоморфизм. Пусть $\{e_1, \dots, e_N\}$ – базис в K^N . Положим $F(e_i) = u_i$, $i = 1, \dots, N$. Тогда если $a = (a_1, \dots, a_N) \in K^N$, то $F(a) = \sum_{i=1}^N a_i u_i$, и из непрерывности операций векторного пространства в M следует, что F непрерывно. Поскольку F – изоморфизм, то $\{u_1, \dots, u_N\}$ – базис в M . А потому существуют такие линейные функционалы $\gamma_i(u)$, $i = 1, \dots, N$ на M , что каждый вектор $u \in M$ единственным способом представим в виде $u = \sum_{i=1}^N \gamma_i(u) u_i$. Как замечено выше, каждый γ_i непрерывен. Поскольку для каждого $u \in M$; $F^{-1}(u) = (\gamma_1(u), \dots, \gamma_N(u))$, то F^{-1} – непрерывное отображение. Что и доказывает справедливость утверждения для N .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Единственная топология, в которой конечно-мерное пространство X есть отделимое ЛВП, – это стандартная (евклидова) топология.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *В конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквивалентны.*

Нормируемость и метризуемость ЛВП Пусть X – ЛВП. Когда оно нормируемое пространство? А когда метризуемое? Ответ на эти вопросы дают следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.8. *Топологическое векторное пространство X нормируемо тогда и только тогда, когда в нем существует выпуклая ограниченная окрестность нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X нормируемо, то $\{x: \|x\| < 1\}$ – открытый единичный шар – является выпуклой ограниченной окрестностью нуля. Обратно. Пусть V выпуклая ограниченная окрестность нуля в X . Она содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля U , которая (как очевидно) тоже ограничена.

Тогда множество $\{rU, r > 0\}$ – база окрестностей нуля. Положим $\|x\| = p(x)$, $x \in X$, где p – функционал Минковского для U . Если $x \neq 0$, то $x \notin rU$ для некоторого $r > 0$ и, следовательно, $r \leq p(x) = \|x\|$. Итак, эта функция Минковского определяет норму.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.9. *Локально выпуклое пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда оно отделимо и обладает счетным базисом окрестностей нуля. Причем топология метризуемого пространства X может быть задана метрикой, инвариантной относительно переносов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X метризуемо, то очевидно, что оно отделимо и обладает счетным базисом окрестностей нуля. Обратное. Пусть X обладает счетным базисом. Тогда существует счетный базис абсолютно выпуклых окрестностей $\{U_n\}$. Пусть $p_n(x)$ – их функции Минковского.

Положим $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \inf\{p_n(x), 1\}$; тогда

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad f(-x) = f(x)$$

и если $f(x) = 0$, то $p_n(x) = 0$ для всех n и, значит, $x = 0$ (поскольку X отделимо). Теперь $d(x, y) = f(x - y)$ – инвариантная относительно переносов метрика. В этой метрике множества $V_n = \{x: f(x) < 2^{-n}\}$ образуют базис окрестностей. Но V_n открыто в исходной топологии (ибо p_n , а значит, и f , непрерывны). С другой стороны, $V_n \subset U_n$ (ибо если $x \notin U_n$, то $p_n(x) \geq 1$, и потому $f(x) \geq 2^{-n}$). А значит, $d(x, y)$ определяет в X исходную топологию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полное отделимое метризуемое локально выпуклое пространство X называется пространством Фреше.

Проективные пределы Пусть X – векторное пространство, $\{(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha), \alpha \in I\}$ – семейство ЛВП, и f_α для $\alpha \in I$ есть линейное отображение X в локально выпуклое пространство X_α . Тогда в X существует слабейшая, согласующаяся с алгебраической структурой, топология, в которой все f_α непрерывны. Она может быть построена следующим образом. Если $\mathfrak{B}_\alpha$ – базис абсолютно выпуклых окрестностей в X_α , то пересечения всевозможных конечных семейств множеств $f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, $V_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$ для $\alpha \in I$ образуют базис $\mathfrak{B}$ абсолютно выпуклых окрестностей этой топологии в X .

Пространство X , наделенное этой топологией, будет локально выпуклым. Эта топология на X называется проективной топологией относительно семейства $\{(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha), \alpha \in I\}$.

Если все $(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$ – отделимые ЛВП и $\bigcap_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(0) = \{0\}$, то X – отделимое ЛВП.

Пусть I – направленное множество индексов, $\{(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha), \alpha \in I\}$ – семейство ЛВП и для $\alpha \leq \beta$ заданы непрерывные линейные отображения $g_{\alpha\beta}: X_\beta \rightarrow X_\alpha$, причем $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}$, если $\gamma \geq \beta \geq \alpha$. Пусть X – подпространство произведения $\prod_\alpha X_\alpha$, элементы которого $x = (x_\alpha)$, $\alpha \in I$, удовлетворяют отношению $x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta)$ для всех $\alpha \leq \beta$. Очевидно, что топология X , индуцируемая топологией произведения $\prod_\alpha X_\alpha$ – это проективная топология относительно семейства $\{(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha), f_\alpha, \alpha \in I\}$, где f_α – сужение на X проекции $p_\alpha: \prod_{\alpha \leq \beta} X_\beta \rightarrow X_\alpha$. Пространство X называют *проективным пределом* семейства $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ относительно отображений $g_{\alpha\beta}$. (При этом пишут $X = \lim_{\leftarrow} g_{\alpha\beta} X_\beta$.)

Проективный предел удовлетворяет свойству “универсальности”. Пусть X проективный предел семейства $\{(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha), \alpha \in I\}$ – ЛВП относительно отображений $g_{\alpha\beta}$ и $f_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ – канонические отображения. Пусть, далее, есть какое-то Y – ЛВП, и семейство отображений $\ell_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$, $\alpha \in I$, такое, что диаграмма (при $\alpha_1 \geq \alpha_2$)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\ell_{\alpha_1}} & X_{\alpha_1} \\ & \searrow \ell_{\alpha_2} & \swarrow g_{\alpha_2 \alpha_1} \\ & & X_{\alpha_2} \end{array}$$

коммутативна. Тогда существует единственное линейное непрерывное отображение $h: Y \rightarrow X$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\ell_\alpha} & X_\alpha \\ & \searrow h & \swarrow f_\alpha \\ & & X \end{array}$$

коммутативна.

Это свойство можно было бы принять за определение проективного предела, а предыдущее построение считать доказательством его существования.

Условие построения проективного предела часто реализуется в следующей специальной ситуации.

Все X_α , $\alpha \in I$, есть подпространства некоторого векторного пространства $\tilde{X}$. Если $\alpha \leq \beta$, то $X_\beta \subset X_\alpha$ и топология $\mathfrak{T}_\beta$ не слабее $\mathfrak{T}_\alpha$ (то есть это вложение непрерывно). В данной ситуации, если в качестве $g_{\alpha\beta}$ взять отображение естественного вложения X_β в X_α , то проективный предел семейства $\{(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha), \alpha \in I\}$, относительно $g_{\alpha\beta}$ можно отождествить с пространством $X = \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$ с проективной топологией индуцируемой естественными вложениями $X \subset X_\alpha$.

В этом случае назовем соответствующий проективный предел *строгим*.

Отметим, что эта специальная ситуация реализуется тогда и только тогда, когда все отображения $g_{\alpha\beta}$ инъективны.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.10. *Проективный предел семейства полных отделимых ЛВП – полное отделимое ЛВП.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \lim_{\leftarrow} g_{\alpha\beta} X_\beta$ и $F = \prod_{\alpha} X_\alpha$. Если все X_α полны, то произведение F тоже полно, и если мы покажем, что X замкнуто в F , то и X будет полным (см. замечание к утверждению 3.6). Покажем, что X действительно замкнуто в F . Для каждой пары $(\alpha, \beta) \in I \times I$ такой, что $\alpha \leq \beta$; обозначим через $V_{\alpha\beta}$ подпространство в F такое, что $\{x: x_\alpha - g_{\alpha\beta}(x_\beta) = 0\}$. Так как X_α отделимо и $V_{\alpha\beta}$ есть нуль-пространство непрерывных линейных отображений $p_\alpha - g_{\alpha\beta} \cdot p_\beta$ пространства F в X_α , то $V_{\alpha\beta}$ замкнуто. Таким образом, $X = \bigcap_{\alpha \leq \beta} V_{\alpha\beta}$ замкнуто в F .

ТЕОРЕМА 4.3. *Каждое полное отделимое локально выпуклое пространство есть проективный предел банаховых пространств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – полное отделимое ЛВП, $\mathfrak{B} = \{U_\alpha, \alpha \in I\}$ – базис абсолютно выпуклых окрестностей нуля, I – направленное множество по вложению, так что если $\alpha \geq \beta$, то $U_\alpha \subset U_\beta$. Пусть $p_{U_\alpha}(x) \equiv p_\alpha(x)$ – функция Минковского U_α и $F_\alpha = X/p_\alpha^{-1}(0)$. Это нормированное пространство, где $\|x + p_\alpha^{-1}(0)\|_\alpha = p_\alpha(x)$. Если $\alpha \geq \beta$, то $p_\alpha(x) \geq p_\beta(x)$, а потому $p_\alpha^{-1}(0) \subset p_\beta^{-1}(0)$ и, следовательно, $X/p_\alpha^{-1}(0) \hookrightarrow X/p_\beta^{-1}(0)$. Тем самым определено линейное непрерывное отображение $g_{\beta\alpha}: F_\alpha \hookrightarrow F_\beta$. Ясно, что $g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = g_{\beta\alpha}$ для $\alpha \geq \gamma \geq \beta$.

Пусть M – проективный предел F_α , $\alpha \in I$, относительно отображений $g_{\beta\alpha}$. Таким образом, $M \subset \prod_{\alpha} F_\alpha$. Пусть $x \in X$. Положим $h(x) = \{x_\alpha \in f_\alpha(x), \alpha \in I\}$, где $f_\alpha: X \hookrightarrow X/p_\alpha^{-1}(0)$ – каноническое

отображение X в факторпространство. Ясно, что $h: X \mapsto M$. Это легко следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_\alpha} & X/p_\alpha^{-1}(0) \\ & \searrow f_\beta & \nearrow g_{\beta\alpha} \\ & X/p_\beta^{-1}(0) & \end{array}$$

Докажем, что h инъективно. Действительно, если $f_\alpha(x) = 0$ для всех $\alpha \in I$, то $p_\alpha(x) = 0$, и из отделимости X следует, что тогда $x = 0$.

Покажем, что h есть отображение X на все M . Действительно, пусть $\{x_\alpha, \alpha \in I\} \in M$, то есть $x_\beta = g_{\beta\alpha}x_\alpha$ при $\alpha \geq \beta$. Поскольку $x_\beta = \hat{x}_\beta + p_\beta^{-1}(0)$, где $\hat{x}_\beta \in X$ и

$$\hat{x}_\alpha + p_\alpha^{-1}(0) \subset \hat{x}_\beta + p_\beta^{-1}(0) \quad \text{при } \alpha \geq \beta,$$

то $\hat{x}_\alpha \in \bigcap_{i=1}^n x_{\beta_i}$ для любого конечного набора $\{\beta_i\}$. Следовательно, $\{x_\alpha\}$ – центрированное семейство замкнутых множеств в X . В силу полноты X его пересечение не пусто, то есть содержит какой-то элемент $x \in X$. Ясно, что $h(x) = \{x_\alpha\}$.

Пространства X и M не только линейно изоморфны, но и изоморфны как ЛВП, ибо топологии и в X , и в M суть проективные топологии относительно канонических отображений соответственно $f_\alpha: X \mapsto F_\alpha$ и $p_\alpha: M \mapsto F_\alpha$. (После отождествления X и M это одно и то же семейство отображений.)

Теперь, взяв пополнение $\prod_\alpha F_\alpha$, и замечая, что: 1) это пополнение есть $\prod_\alpha \hat{F}_\alpha$, где $\hat{F}_\alpha$ есть пополнение F_α по соответствующей норме $\|\cdot\|_\alpha$; 2) отображения $g_{\beta\alpha}$ продолжаются на $\hat{F}_\alpha$ как линейные непрерывные отображения; 3) пополнение M есть само M (ибо оно изоморфно полному пространству X), завершаем доказательство теоремы.

Отметим, что построенный в теореме 4.3 проективный предел, вообще говоря, может не быть строгим. Однако он будет строгим при некоторых дополнительных предположениях. Для того чтобы сформулировать эти предположения, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, заданные в векторном пространстве X , называются *согласованными*, если всякая последовательность $x_\nu \in X$, $\nu = 1, 2, \dots$, фундаментальная по обоим

нормам и по одной из них сходящаяся к нулю, по другой норме также сходится к нулю.

Пусть на векторном пространстве X заданы две сравнимые нормы, причем $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, $x \in X$. Ясно, что всякая фундаментальная последовательность по более сильной норме будет фундаментальной и по слабой норме. Если мы теперь пополним X по этим нормам и рассмотрим два полных нормированных пространства, X_1 – пополнение X по первой норме и X_2 – пополнение по второй, то каждый элемент $x \in X_2$ определяется фундаментальной по второй (более сильной) норме последовательностью $x_\nu \in X$, $\nu = 1, 2, \dots$. Но эта последовательность фундаментальна и по первой норме, поэтому определяет элемент $x \in X_1$. Однако может случиться так, что разные элементы пространства X_2 могут соответствовать одному и тому же элементу пространства X_1 . Нетрудно видеть, что в случае сравнимых и согласованных норм этого не случится.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.11. *Если в векторном пространстве X заданы две сравнимые согласованные нормы ($\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$), и X_1 и X_2 – соответствующие пополнения пространства X по этим нормам, то определено естественное непрерывное вложение $X_2 \subset X_1$.*

С учетом этого утверждения из доказательства теоремы 4.3 следует следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.12. *Если в векторном пространстве X топология задается семейством норм таких, что любые сравнимые нормы также и согласованы, то X есть строгий проективный предел банаховых пространств.*

При этом если число этих норм счетно, то X – пространство Фреше.

ПРИМЕР 4.1. Пусть на $C^1([a, b])$ (непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f(t)$) заданы нормы

$$\|f\|_1 = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|, \quad \|f\|_2 = \max_{t \in [a, b]} \{|f(t)| + |f'(t)|\}.$$

Покажите, что они сравнимы и согласованы. Теперь пусть

$$\|f\|_1 = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|, \quad \|f\|_2 = \max_{t \in [a, b]} |f(t)| + |f'(a)|.$$

Укажите последовательность $f_\nu(t)$, равномерно сходящуюся к нулю (для которой $f'_\nu(a) = 1$). Ясно, что эта последовательность фундаментальна по обеим нормам, однако по первой норме она стремится к нулю, а по второй нет.

Отметим, что если нормы согласованы, но несравнимы, то можно ввести норму $\|\varphi\|_3 = \max\{\|\varphi\|_1, \|\varphi\|_2\}$ так, что она согласована и сравнима с каждой из норм.

Множество $A \subset X$ – проективного предела пространств $(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, \alpha \in I)$ ограничено в X тогда и только тогда, когда $f_\alpha(A)$ ограничено в X_α для любого $\alpha \in I$. (Здесь f_α – каноническое отображение X в X_α .)

§ 5. Теорема Хана–Банаха

Пусть L_0 – некоторое подпространство линейного пространства L и пусть на L_0 задан линейный функционал f_0 . Линейный функционал f , определенный на всем пространстве L , называется *продолжением* функционала f_0 , если $f(x) = f_0(x)$ для любого $x \in L_0$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть p – полунорма на действительном линейном пространстве L и L_0 – его подпространство. Если f_0 – линейный функционал на L_0 , подчиненный функционалу p , то есть

$$f_0(x) \leq p(x) \quad \forall x \in L_0, \quad (5.1)$$

то f_0 может быть продолжен до линейного функционала f на L , подчиненного p на всем L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейное пространство L_1 , порожденное L_0 и элементом $z \notin L_0$. Тогда каждый элемент из L_1 представим в виде $\alpha z + x$, где $x \in L_0$. Покажем, что f_0 можно продолжить на L_1 с сохранением неравенства (5.1) на L_1 . Если это продолжение существует, скажем пусть f_1 , то должно быть

$$f_1(\alpha z + x) = \alpha f_1(z) + f_0(x) = \alpha c + f_0(x) \leq p(\alpha z + x).$$

Здесь положено $f_1(z) = c$ (число c будет выбрано далее), при этом последнее неравенство при $\alpha > 0$ равносильно условию

$$f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{\alpha} + z\right) \quad \text{или} \quad c \leq p\left(\frac{x}{\alpha} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

а при $\alpha < 0$ – условиею

$$f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right) + c \geq -p\left(-\frac{x}{\alpha} - z\right) \quad \text{или} \quad c \geq -p\left(-\frac{x}{\alpha} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Покажем, что всегда существует число c , удовлетворяющее этим условиям. Пусть y' и y'' – произвольные элементы из L_0 . Из неравенства

$$f_0(y'') - f_0(y') \leq p((y'' + z) - (y' + z)) \leq p(y'' + z) + p(-y' - z)$$

имеем

$$-f_0(y'') + p(y'' + z) \geq -f_0(y') - p(-y' - z). \quad (5.2)$$

Учитывая, что

$$-p(-z) \leq -f_0(y'') + p(y'' + z),$$

ибо

$$0 \leq p(y'') - f_0(y'') \leq p(y'' + z) + p(-z) - f_0(y''),$$

и

$$p(z) \geq -f_0(y') - p(-y' - z),$$

ибо

$$0 \leq p(-y') - f_0(-y') \leq p(-y' - z) + p(z) - f_0(-y'),$$

и произвольность y'' , y' из L_0 , имеем из (5.2)

$$c'' = \inf_{y''} (-f_0(y'') + p(y'' + z)) \geq c' = \sup_{y'} (-f_0(y') - p(-y' - z)).$$

При этом $-p(-z) \leq c''$ и $p(z) \geq c'$. Выбирая теперь c так, чтобы $c' \leq c \leq c''$, получим требуемое продолжение с L_0 на $L_1 \supset L_0$. Рассмотрим совокупность $\mathcal{F}$ всевозможных продолжений функционала f_0 , удовлетворяющих условию подчинения (5.1). Она частично упорядочена и каждое ее (линейно) упорядоченное подмножество $\mathcal{F}_0$ обладает верхней гранью (этой верхней гранью служит функционал, определенный на объединении областей определения функционалов $f' \in \mathcal{F}_0$ и совпадающий с каждым таким f' на его области определения. В силу леммы Цорна во всем $\mathcal{F}$ существует максимальный элемент, который представляет искомым функционал. Действительно, он является продолжением исходного функционала f_0 , удовлетворяет условию (5.1) на своей области определения и задан на всем L . Иначе мы продолжили бы его (как и выше) с его собственной области определения на большее подпространство, что противоречит его максимальной.

Приведем комплексный вариант теоремы Хана–Банаха.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть p – полунорма на комплексном линейном пространстве L и L_0 – его подпространство. Если f_0 – линейный функционал на L_0 , удовлетворяющий условию

$$|f_0(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in L_0, \quad (5.3)$$

то существует линейный функционал f , определенный на всем L и удовлетворяющий условиям

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in L, \quad \text{причем} \quad f(x) = f_0(x) \quad \text{при} \quad x \in L_0. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\ell(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$. Его можно рассматривать как вещественный линейный функционал на L_0 . Так как $\ell(ix) = \operatorname{Re} f_0(ix) = \operatorname{Re} i f_0(x) = -\operatorname{Im} f_0(x)$, то $f_0(x) = \ell(x) - i\ell(ix)$, причем

$$\ell(x) = |\operatorname{Re} f_0(x)| \leq |f_0(x)| \leq p(x), \quad x \in L_0.$$

По предыдущей теореме существует вещественный линейный функционал $f_1(x)$ на L такой, что

$$f_1(x) \leq p(x) \quad \forall x \in L \quad \text{и} \quad f_1(x) = \ell(x) \quad \text{при} \quad x \in L_0. \quad (5.5)$$

Положим $f(x) = f_1(x) - i f_1(ix)$, так что $\operatorname{Re} f(x) = f_1(x)$. Ясно, что $f(x) = \ell(x) - i\ell(ix) = f_0(x)$ при $x \in L_0$. Так как

$$f(ix) = f_1(ix) - i f_1(-x) = i(f_1(x) - i f_1(ix)) = i f(x),$$

то $f(x)$ – комплексный функционал на L , причем $|f(x)| \leq p(x)$. Действительно, пусть это не так, то есть для некоторого x_0 имеем $|f(x_0)| > p(x_0)$. Представим комплексное число $f(x_0) = r e^{i\varphi}$, где $r > 0$. Тогда для $y_0 = e^{-i\varphi} x_0$ имеем

$$f_1(y_0) = \operatorname{Re} f(y_0) = \operatorname{Re} e^{-i\varphi} f(x_0) = r > p(x_0) = p(e^{-i\varphi} x_0) = p(y_0).$$

Но это противоречит (5.5). Теорема доказана.

Следующие упражнения можно рассматривать как следствия к теореме Хана–Банаха.

УПРАЖНЕНИЯ. Докажите:

1) Пусть M – подпространство отделимого ЛВП X и $x_0 \neq \overline{M}$; тогда существует такой линейный непрерывный функционал f , что $f(x_0) = 1$, а $f(x) = 0$ для всех $x \in M$.

УКАЗАНИЕ. Положим $L = \{x: \alpha x_0 + x, x \in M\}$ и рассмотрим функционал $f(x) = \alpha$ на L . Ядро f на L есть $\overline{M}$. Оно замкнуто, следовательно, f непрерывен, см. теорему 3.3. Далее пользуемся теоремой Хана–Банаха.

2) Пусть f – линейный непрерывный функционал на подпространстве M отделимого ЛВП X ; тогда существует линейный непрерывный функционал g такой, что $g = f$ на M .

УКАЗАНИЕ. Не теряя общности, можно считать, что f не тождественный ноль на M и что найдется $x_0 \in M$, так что $f(x_0) = 1$. Положим $M_0 = \{x \in M: f(x) = 0\}$. Ясно, что $x_0 \notin \overline{M_0}$. Пользуясь предыдущей задачей, найдем такой функционал g , что $g(x_0) = 1$, а $g(x) = 0$ при $x \in M_0$. Теперь если $x \in M$, то $x - f(x)x_0 \in M_0$, и поэтому

$$g(x) - f(x) = g(x) - f(x)g(x_0) = g(x - f(x)x_0) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть X – отделимое ТВП и $x_i \in X$, $i = 1, \dots, N$, линейно независимы. Пусть также заданы числа $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, N$. Тогда существует непрерывный функционал f на X такой, что

$$f(x_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M линейная оболочка векторов $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$. Тогда такой линейный функционал f существует на M (M изоморфно $\mathbb{C}^N$). Так как f непрерывен на M (см. утверждение 4.5 и следствие к нему), то из результата задачи 2 следует существование требуемого функционала.

3) Для произвольной точки a векторного пространства X и полунормы $p(x)$ на X существует линейный непрерывный функционал f такой, что $|f(x)| \leq p(x)$ и $f(a) = p(a)$.

УКАЗАНИЕ. Действительно, на одномерном подпространстве $\{\lambda a\}$ положите $f(\lambda a) = \lambda p(a)$ и продолжите f на X .

§ 6. Бочечные и борнологические пространства

Теорема Бэра Напомним, что множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным* в топологическом пространстве $(X, \mathfrak{T})$, если его замыкание не имеет внутренних точек. Пространство X называют пространством *первой категории* (*тощим*), если оно

представимо в виде объединения последовательности нигде не плотных множеств. Иначе оно называется пространством второй категории в X .

Можно дать альтернативное определение нигде не плотности множества в топологическом пространстве $(X, \mathfrak{T})$. Множество $A \subset X$ называется нигде не плотным в X , если для любой точки $x \in A$ и любой ее окрестности $U_x \subset \mathfrak{T}_x$ существуют точка $y \in U_x$ и ее окрестность $U_y \subset \mathfrak{T}_y$ такие, что $U_y \cup A = \emptyset$. (Докажите.)

ТЕОРЕМА 6.1 (БЭРА). *Полное метрическое пространство X не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств, то есть является пространством второй категории.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n – нигде не плотные множества. Пусть S_0 – некоторый замкнутый шар радиуса 1. Так как M_1 нигде не плотно, то найдется замкнутый шар S_1 радиуса меньше $\frac{1}{2}$ такой, что $S_1 \subset S_0$ и $S_1 \cap M_1 = \emptyset$. Поскольку M_2 нигде не плотно, то в шаре S_1 содержится шар S_2 радиуса меньше $\frac{1}{3}$, для которого $S_2 \cap M_2 = \emptyset$ и т.д. Получилась последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров S_n , радиусы которых стремятся к нулю, причем $S_n \cap M_n = \emptyset$. В силу леммы 2.1 множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ содержит точку x . Эта точка не принадлежит ни одному из множеств M_n , следовательно, $x \notin \bigcup_n M_n$, то есть $X \neq \bigcup_n M_n$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Бочечные пространства *Бочкой* в локально выпуклом пространстве X называется всякое его абсолютно выпуклое, поглощающее и замкнутое подмножество. Локально выпуклое пространство X называется *бочечным*, если каждая бочка в нем является окрестностью.

Можно дать другое (альтернативное) определение бочечного пространства. Ранее мы видели, что в ЛВП всякая полунорма, непрерывная сверху, непрерывна (см. замечание к утверждению 4.3). Пусть полунорма $p(x)$ полунепрерывна снизу; тогда множество $B = \{x: p(x) \leq 1\}$ замкнуто и потому является бочкой. Если X – бочечно, то B – окрестность нуля. Стало быть, полунорма $p(x)$ непрерывна. Итак, в бочечном пространстве всякая полунорма, полунепрерывная снизу, непрерывна. Очевидна и справедливость обратного утверждения.

Тем самым пространство X бочечно тогда и только тогда, когда всякая полунорма в X , полунепрерывная снизу, непрерывна.

Полезно заметить, что если задано семейство вещественно значных непрерывных (даже полунепрерывных снизу) функций $\{f_\alpha, \alpha \in I\}$ на топологическом пространстве X , то функция $f(x) = \sup_{\alpha \in I} f_\alpha(x)$ полунепрерывна снизу.

Действительно, это следует из формулы

$$\{x: f(x) > c\} = \bigcup_{\alpha \in I} \{x: f_\alpha(x) > c\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. *Всякое ЛВП X , являющееся пространством второй категории, бочечно.*

Действительно, пусть B бочка и $p_B(x)$ – ее функция Минковского. Тогда $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: p_B(x) \leq n\}$, ибо B – поглощающее множество. Так как X – второй категории, то при некотором n множество $\{x: p_B(x) \leq n\}$ содержит окрестность, а потому $p_B(x)$ непрерывна. (См. замечание к утверждению 4.3.)

Отсюда и из теоремы Бэра следует следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.2. *Каждое пространство Фреше (полное метризуемое локально выпуклое пространство) бочечно. В частности, каждое банахово пространство бочечно.*

Для бочечных пространств справедлива теорема о равномерной ограниченности, широко применяемая в анализе.

ТЕОРЕМА 6.3. *Пусть X – бочечное ЛВП и $\{f_\alpha, \alpha \in I\}$ – семейство линейных непрерывных функционалов на X таких, что*

$$\sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)| < \infty \quad \text{для любого } x \in X.$$

Тогда существует непрерывная полунорма $p(x)$ на X такая, что

$$|f_\alpha(x)| \leq p(x), \quad \alpha \in I \quad \forall x \in X. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $p(x) = \sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)|$. Это полунорма. Докажем ее непрерывность. Так как $|f_\alpha(x)|$ непрерывна, то $\sup_{\alpha} |f_\alpha(x)|$ – полунепрерывная снизу функция. Но полунепрерывная снизу полунорма на бочечном пространстве непрерывна. Теперь (6.1) непосредственно следует из (4.9).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – бочечное ЛВП и задана последовательность линейных непрерывных функционалов $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ таких, что

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x), \quad x \in X. \quad (6.2)$$

Тогда $f(x)$ – непрерывный линейный функционал на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\sup_n f_n(x) < \infty \quad \forall x \in X.$$

Следовательно, по теореме 6.3 существует непрерывная полунорма $p(x)$ такая, что $|f_n(x)| \leq p(x)$ для $x \in X$. Переходя в этом неравенстве к пределу (при $n \rightarrow \infty$) и пользуясь утверждением 4.4, завершаем доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – пространство Фреше, I – направленное множество и $\{f_k(x), k \in I\}$ – направленность в пространстве линейных непрерывных функционалов на X . Пусть

$$\sup_{k>0} |f_k(x)| < \infty \quad \forall x \in X, \quad (6.3)$$

и существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(y) = C_y$ на множестве $\{y \in B\}$ плотном в X , то есть

$$f_k(y) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} C_y, \quad y \in B, \quad \overline{B} = X. \quad (6.4)$$

Тогда

$$f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in X, \quad (6.5)$$

где f – линейный непрерывный функционал на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (6.3) согласно теореме 6.3 следует, что существует непрерывная полунорма $p(x)$ такая, что $|f_k(x)| \leq p(x)$ для любого $x \in X$ и любого $k \in I$. Теперь для любого $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдется $y \in B$ такое, что $p(x - y) \leq \varepsilon$ (в силу плотности множества B в X). Имеем

$$\begin{aligned} |f_{k_1}(x) - f_{k_2}(x)| &\leq |f_{k_1}(x - y)| + |f_{k_1}(y) - f_{k_2}(y)| + |f_{k_2}(y - x)| \leq \\ &\leq \varepsilon + |f_{k_1}(y) - f_{k_2}(y)| + \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.6)$$

В силу условия (6.4) существует k_0 такое, что $|f_{k_1}(y) - f_{k_2}(y)| < \varepsilon$ при $k_1, k_2 > k_0$. Из (6.6) при этих k получим $|f_{k_1}(x) - f_{k_2}(x)| \leq 3\varepsilon$. Таким образом, последовательность чисел $f_k(x)$ фундаментальна, а потому сходится (ибо поле чисел K – полное пространство). То есть существует $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$. По следствию 1 f – линейный непрерывный функционал на X .

Борнологические пространства Пусть X локально выпуклое пространство. Если в нем каждое абсолютно выпуклое поглощающее множество, поглощающее любое ограниченное множество, есть окрестность нуля, то X называется *борнологическим*.

Можно дать другое (альтернативное) определение. Если всякая полунорма $p(x)$, ограниченная на каждом ограниченном множестве, непрерывна в локально выпуклом топологическом пространстве X , то это пространство называют *борнологическим*.

ТЕОРЕМА 6.4. *Любое метризуемое ЛВП – борнологическое пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{V_n, n = 1, 2, \dots\}$ – база окрестностей нуля, причем $V_{n+1} \subset V_n$. Пусть U – абсолютно выпуклое поглощающее множество, которое поглощает любое ограниченное множество. Достаточно показать, что существует такое n_0 , что $V_{n_0} \subset U$ (или даже, что $\frac{1}{n_0}V_{n_0} \subset U$). Пусть это не так, то есть для любого n существуют такие x_n , что $x_n \in V_n$, но $\frac{1}{n}x_n \notin U$. Ясно, что множество $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничено (ибо $x_n \rightarrow 0$), но это множество не поглощается U , ибо для любого n соответствующее $x_n \notin nU$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Таким образом, любое счетно нормированное, в частности, нормированное, пространство является борнологическим.

Оказывается в борнологическом пространстве непрерывность линейного функционала эквивалентна его “секвенциальной непрерывности” (непрерывности на последовательностях).

ТЕОРЕМА 6.5. *Пусть X – борнологическое локально выпуклое пространство и f – линейный функционал на нем. Функционал f непрерывен тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ такой, что $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, выполняется соотношение $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из утверждения 4.5. Докажем достаточность. Пусть $f(x)$ – заданный функционал. Положим $p(x) = |f(x)|$. Это полунорма. Покажем, что она непрерывна. Пусть это не так. Тогда существует ограниченное множество B такое, что f на нем не ограничено (ибо непрерывное отображение ограничено на каждом ограниченном множестве), то есть существует последовательность $\{x_n \in B\}$ такая, что $p(x_n) = |f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Положим $\alpha_n = |f(x_n)|^{-\frac{1}{2}}$; тогда $\alpha_n \rightarrow 0$, но $\alpha_n |f(x_n)| \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Пришли к противоречию, ибо

$$\alpha_n x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{но} \quad |f(\alpha_n x_n)| = \alpha_n |f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Теорема доказана.

§ 7. Индуктивные пределы

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$, $\alpha \in I$, – семейство локально выпуклых пространств, а g_α – линейное отображение X_α в векторное пространство X , причем $\bigcup_{\alpha \in I} g_\alpha(X_\alpha)$ порождает все X . Тогда в X существует сильнейшая локально выпуклая топология, при которой все g_α непрерывны. Базисом окрестностей нуля в этой топологии служит множество $\mathfrak{B}$ всех абсолютно выпуклых множеств $U \subset X$ таких, что $g_\alpha^{-1}(U)$ есть окрестность нуля в X_α для каждого $\alpha \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если U – абсолютно выпуклая окрестность для какой-то топологии в X , при которой все g_α непрерывны, то каждое $g_\alpha^{-1}(U)$ есть окрестность в X_α , а следовательно, $U \in \mathfrak{B}$. Обратно, если $U \in \mathfrak{B}$, то $g_\alpha^{-1}(U)$ – поглощающее множество в X_α , а потому U поглощает все точки из $g_\alpha(X_\alpha)$ для каждого α . Поскольку $\bigcup_{\alpha \in I} g_\alpha(X_\alpha)$ порождает все X , то U – поглощающее множество в X . Итак, $\mathfrak{B}$ удовлетворяет всем условиям, которым должен удовлетворять базис окрестностей. Ясно, что это сильнейшая локально выпуклая топология, в которой все g_α непрерывны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathfrak{B}_\alpha$ для каждого $\alpha \in I$ есть базис абсолютно выпуклых окрестностей в X_α , то множество $\mathfrak{B}$, абсолютно выпуклых оболочек всевозможных множеств вида $\bigcup_{\alpha \in I} g_\alpha(V_\alpha)$, где $V_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$, образуют базис в X .

Действительно, множества из $\mathfrak{B}$ окрестности в X . Если же U – произвольная абсолютно выпуклая окрестность в X , то $g_\alpha^{-1}(U)$ содержит окрестность V_α из $\mathfrak{B}_\alpha$ для каждого α . Тогда абсолютно выпуклая оболочка множества $\bigcup_{\alpha \in I} g_\alpha(V_\alpha)$ есть множество из $\mathfrak{B}$. Таким образом, $\mathfrak{B}$ – базис окрестностей в X .

Так определенная топология в X называется *индуктивной топологией*, порождаемой отображениями g_α , $\alpha \in I$.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть выполнены все условия теоремы 7.1, причем все $\{X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha\}$ бочечны; тогда X – бочечное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – бочка в X . Тогда $g_\alpha^{-1}(B)$ для каждого α замкнуто и потому есть бочка в X_α . Следовательно, $g_\alpha^{-1}(B)$ – окрестность в X_α . Поэтому в силу теоремы 7.1 B есть окрестность в X .

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть выполнены все условия теоремы 7.1, причем все $\{X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha\}$ – борнологические пространства; тогда X – борнологическое пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – любое абсолютно выпуклое подмножество в X , поглощающее все ограниченные множества в X . Теперь если B_α ограничено в X_α , то $g_\alpha(B_\alpha)$ ограничено в X , ибо g_α – непрерывное отображение ЛВП в ЛВП. Следовательно, A поглощает $g_\alpha(B_\alpha)$ и $g_\alpha^{-1}(A)$ поглощает B_α , так что $g_\alpha^{-1}(A)$, в силу борнологичности X_α , будет окрестностью нуля в X_α . Так как это верно для всех $\alpha \in I$, то A – окрестность нуля в X .

Строгий индуктивный предел последовательности пространств Далее мы ограничиваемся случаем, когда все $\{X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha\}$ образуют некоторую монотонно возрастающую последовательность подпространств некоторого пространства X .

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть $\{(X_n, \mathfrak{T}_n), n = 1, 2, \dots\}$ – возрастающая ($X_n \subset X_{n+1}$ для всех n) последовательность ЛВП такая, что топология $\mathfrak{T}_{n+1}$ индуцирует топологию $\mathfrak{T}_n$ в своем подпространстве X_n . Пусть векторное пространство $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$. Тогда индуктивная топология на X относительно канонических вложений $X_n \hookrightarrow X$ отделима и индуцирует $\mathfrak{T}_n$ на X_n .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если выполнены условия теоремы 7.4, то пространство X с такой топологией называем *строгим индуктивным пределом* пространств $\{X_n, \mathfrak{T}_n\}$.

Доказательство теоремы 7.4 основывается на следующей лемме.

ЛЕММА 7.1. Пусть E – ЛВП, M – подпространство E и U – абсолютно выпуклая окрестность нуля в M ; тогда в E найдется абсолютно выпуклая окрестность нуля V такая, что $U = V \cap M$. Если $x_0 \in E \setminus \overline{M}$, то V можно выбрать так, что к тому же $x_0 \notin V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W – абсолютно выпуклая окрестность нуля в E такая, что $W \cap M \subset U$, тогда V – абсолютно выпуклая оболочка множества $W \cup U$ удовлетворяет условию $V \cap M = U$. Действительно, очевидно, что $U \subset V \cap M$. Обратно, если $z \in V \cap M$, то $z = \lambda w + \mu u$, где $w \in W$, $u \in U$, $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Из соотношения $\lambda w = z - \mu u \in M$ следует, что либо $\lambda = 0$, либо $w \in M$. В обоих случаях $z \in U$, а потому $V \cap M \subset U$. Теперь если $x_0 \notin \overline{M}$, то в предыдущей конструкции W можно выбрать так, чтобы $(x_0 + W) \cap M$ было пусто. Отсюда следует $x_0 \notin V$, ибо, если бы $x_0 = \lambda w + \mu u$, то $x_0 - \lambda w \in M$ и $x_0 - \lambda w \in x_0 + W$, а это противоречит выбору W .

Теперь докажем теорему. Фиксируем n и пусть V_n – абсолютно выпуклая окрестность нуля в X_n . Пользуясь леммой, можно по индукции построить последовательность $\{V_{n+k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, подмножеств X таких, что V_{n+k} – абсолютно выпуклая окрестность нуля в X_{n+k} и $V_{n+k+1} \cap X_{n+k} = V_{n+k}$ для всех $k \geq 1$. Ясно, что $V = \bigcup_{k \geq 0} V_{n+k}$ – окрестность нуля в индуктивной топологии $\mathfrak{T}$ на X , при этом $V \cap X_n = V_n$. Отсюда следует, что топология на X_n , индуцированная $\mathfrak{T}$ будет, с одной стороны, сильнее, а с другой стороны, слабее, чем $\mathfrak{T}_n$, и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{T}_n$. Так как $X = \bigcup_n X_n$, ясно также, что $\mathfrak{T}$ отделима.

Отметим, что если все X_n полны, то X_n замкнуто в X_{n+1} .

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях теоремы X_n для каждого n есть замкнутое подпространство в X_{n+1} , то множество в X ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится и ограничено в одном из X_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из построения топологии $\mathfrak{T}$ в X (см. теорему 7.1) очевидно, что если множество B ограничено хотя бы в одном X_n , то оно ограничено в X . Обратно. Допустим, что B ограничено в X и не содержится ни в каком X_n . Тогда найдется

возрастающая последовательность чисел $\{k_1, k_2, \dots\}$ и последовательность $\{x_n\} \subset B$ такие, что $x_n \in X_{k_{n+1}}$, но $x_n \notin X_{k_n}$. Пользуясь леммой, построим по индукции последовательность $\{V_{k_n}\}$ абсолютно выпуклых окрестностей нуля в X_{k_n} (соответственно) так, чтобы $x_n \notin V_{k_{n+1}}$ и $V_{k_{n+1}} \cap X_{k_n} = V_{k_n}$ для всех n . Снова $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{k_n}$ есть окрестность нуля в X , но $\frac{1}{n}x_n \notin V$, что невозможно (ибо $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, так как она лежит в B ; и $\frac{1}{n}x_n$ должна сходиться к нулю). Следовательно, наше допущение неверно.

Отметим, что отсюда следует, что последовательность $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ в X тогда и только тогда, когда она содержится в одном и том же X_n и сходится там.

ТЕОРЕМА 7.5. *Строгий индуктивный предел последовательности полных отделимых локально выпуклых пространств полон.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – строгий индуктивный предел полных пространств X_n и X не полон, так что в его пополнении $\bar{X}$ имеется точка z не содержащаяся ни в каком X_n . Поскольку каждое X_n замкнуто в $\bar{X}$, существуют абсолютно выпуклые окрестности нуля W_n в $\bar{X}$, для которых $(z + W_n) \cap X_n = \emptyset$, и их можно выбрать так, чтобы $W_{n+1} \subset W_n$ для каждого n . Пусть U – абсолютно выпуклая оболочка множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2}W_n \cap X_n)$. Тогда U – окрестность в X и, следовательно, ее замыкание $\bar{U}$ есть окрестность в $\bar{X}$. Так как X плотно в $\bar{X}$, то $z + \bar{U}$ имеет общие точки с X и, значит, пересекается с некоторым X_n . Мы покажем, что $\bar{U} \subset W_n + X_n$; отсюда будет следовать, что $z + W_n$ пересекается с X_n , что противоречит предыдущему и тем самым доказывает утверждение теоремы.

Итак, покажем, что $\bar{U} \subset W_n + X_n$. Но $\bar{U} \subset U + \frac{1}{2}W_n$, а любой элемент из U имеет вид

$$\sum_{1 \leq r \leq s} \lambda_r x_r, \quad \text{где } x_r \in \frac{1}{2}W_r \cap X_r \quad \text{и} \quad \sum_{1 \leq r \leq s} |\lambda_r| = 1.$$

Так как

$$\sum_{r \leq n} \lambda_r x_r \in \sum_{r \leq n} X_r \subset X_n \quad \text{и} \quad \sum_{r > n} \lambda_r x_r \in \sum_{r > n} \lambda_r \cdot \frac{1}{2}W_r \subset \frac{1}{2}W_n,$$

то $U \subset \frac{1}{2}W_n + X_n$ и, следовательно, $\bar{U} \subset \frac{1}{2}W_n + X_n + \frac{1}{2}W_n = W_n + X_n$. Теорема доказана.

Отметим, что построенный нами индуктивный предел обладает свойством “универсальности”.

Обозначим через $g_{mn}: X_n \mapsto X_m$ естественные вложения пространства $X_n \subset X_m$, если $m > n$, а через f_n естественное вложение $X_n \mapsto X$. Тогда для любого ЛВП Y вместе с линейными непрерывными отображениями $\ell_n: X_n \mapsto Y$ такими, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{\ell_m} & X_m \\ & \swarrow \ell_n & \nearrow g_{mn} \\ & X_n & \end{array}$$

коммутативна для любых $m > n$, существует единственное линейное непрерывное отображение $h: X \mapsto Y$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{h} & X \\ & \swarrow \ell_n & \nearrow f_n \\ & X_n & \end{array}$$

коммутативна для любого n . Отсюда нетрудно получить следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. Пусть X – строгий индуктивный предел ЛВП $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ и f – линейное отображение X в некоторое ЛВП Y . Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда его ограничение на каждое X_n непрерывно.

Отметим, что свойство универсальности могло бы послужить основой для определения общего индуктивного предела (не обязательно строгого) направленного семейства ЛВП.

§ 8. Пространства основных функций. Примеры

Далее будут применяться стандартные обозначения. Через $j = (j_1, \dots, j_n)$, где $j_k = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, n$, будет обозначаться мультииндекс, $|j| = j_1 + \dots + j_n$, при этом для функции $x(t)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x^{(j)}(t) \equiv D^j x(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^{j_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_n} \right)^{j_n} x(t).$$

Через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначаем линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Примером таких функций является “шапочка” (см. (3.3))

$$\omega(t) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|t|^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

где число c подобрано так, чтобы $\int \omega(t) dt = 1$. Напомним, что носителем функции $\varphi(t)$ называется замыкание множества точек, где $\varphi(t) \neq 0$, то есть $\text{supp } \varphi(t) = \overline{\{t: \varphi(t) \neq 0\}}$. Так что $\text{supp } \omega(t) = \{t: |t| \leq 1\}$. Обозначаем также $\omega_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^n} \omega\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$.

ЛЕММА 8.1. Пусть также $\mathcal{O}$ – открытое множество и K – компакт в $\mathcal{O}$. Пусть $d(K, \mathcal{CO}) \geq \varepsilon$ и $K_1 = \{t: d(t, K) \leq \frac{\varepsilon}{4}\}$. (Здесь и далее $d(A, B)$ – расстояние между множествами A и B .) Тогда существует функция $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi(t) \leq 1$, равная 1 на K и нулю вне K_1 .

Действительно, как нетрудно проверить, такая функция дается формулой

$$\varphi(t) = \int \omega_{\frac{\varepsilon}{4}}(t - \tau) \Xi_{K_1}(\tau) d\tau,$$

где $\Xi_{K_1}(t)$ – характеристическая функция множества K_1 , то есть $\Xi_{K_1}(t) = 1$ при $t \in K_1$ и нулю в противном случае.

Таким образом, в $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ содержится много функций. Будем снабжать $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ различными топологиями и, если получающиеся пространства окажутся не полными, выясним, что из себя представляют их пополнения.

Положим $p(\varphi) = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |\varphi(t)|$. Эта норма превращает $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в нормированное пространство. Оно не полно. Докажем, что пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по этой норме является пространством C_{null} , состоящим из непрерывных функций, стремящихся к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. Для этого достаточно доказать, что C_{null} полно и что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в нем плотно.

Докажем первое. Так как C_{null} нормированное (а следовательно, метрическое пространство) с нормой $p(\varphi)$, то достаточно доказать, что всякая фундаментальная последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ функций из C_{null} сходится к такой же функции. Из анализа известно, что последовательность Коши в топологии равномерной сходимости (то есть по норме $\sup_{t \in \mathbb{R}^n} |\varphi(t)|$) сходится, причем равномерно, а следовательно, к непрерывной функции. (Вспомните

сами доказательство этого факта.) Итак, $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi_0(t)$; покажем, что $\varphi_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Найдем N такое, что $|\varphi_N(t) - \varphi_0(t)| \leq \varepsilon$, $t \in \mathbb{R}^n$. Теперь найдем R такое, что $|\varphi_N(t)| \leq \varepsilon$ при $|t| > R$. Ясно, что $|\varphi_0(t)| \leq 2\varepsilon$ при $|t| > R$.

Докажем плотность $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в C_{null} . Если $\varphi(t) \in C_{\text{null}}$, то ее можно приблизить непрерывными функциями с компактным носителем, например, функциями вида $\varphi(t)\eta\left(\frac{|t|}{n}\right)$, где $\eta(\tau) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, равна единице при $|\tau| < 1$ и нулю при $|\tau| > 2$. Теперь если $\varphi(t)$ непрерывна с компактным носителем, то она приближается функциями из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ вида

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int \omega_\varepsilon(t-y)\varphi(y) dy = \int \omega(y')\varphi(t+\varepsilon y') dy'.$$

(Проведите сами доказательство этого факта.)

Пусть C_{pred} – пространство непрерывных функций, стремящихся к некоторому пределу на бесконечности, то есть $\varphi(t) \rightarrow c_\varphi$ при $|t| \rightarrow \infty$. Ясно, что C_{null} – замкнутое подпространство линейного нормированного пространства C_{pred} . Покажите, что факторпространство $C_{\text{pred}}/C_{\text{null}} = \mathbb{C}$.

Пусть C – пространство непрерывных ограниченных функций с топологией определяемой той же нормой. Ясно, что $C_{\text{null}} \subset C_{\text{pred}} \subset C$.

Определим еще пространство $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Для этого напомним, что множество A называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной или счетной системой параллелепипедов, сумма объемов которых не превосходит ε (пишем $\text{mes } A = 0$).

Назовем измеримую функцию $\varphi(t)$ *существенно ограниченной*, если найдется множество E меры нуль, такое что $\varphi(t)$ ограничено на $\mathbb{R}^n \setminus E$. Линейное пространство всех таких функций обозначим через G . Положим

$$p(\varphi) = \inf_{\text{mes } E=0} \sup_{t \in \mathbb{R}^n \setminus E} |\varphi(t)|.$$

Это полунорма на G (из того что $p(\varphi) = 0$, следует, что найдется E , $\text{mes } E = 0$, такое, что $\varphi(t) = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus E$). Ясно, что $\{p^{-1}(0)\}$ – это подпространство всех измеримых функций, отличных от нуля только на множествах меры нуль.

Через $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначим факторпространство $G/p^{-1}(0)$. Это нормированное пространство. Более того, можно доказать, что

оно банахово. Очевидно, имеет место следующая цепочка вложений:

$$C_{\text{null}} \subset C_{\text{pred}} \subset C \subset L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

причем каждое предыдущее пространство есть замкнутое подпространство следующего пространства.

Пространство $C_{\text{null}}^N(\mathbb{R}^n)$ Фиксируем число N . Положим

$$p(\varphi) = \max_{|j| \leq N} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |\varphi^{(j)}(t)|.$$

Пополним $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по этой норме. Полученное пространство $C_{\text{null}}^N(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством всех N раз непрерывно дифференцируемых функций, стремящихся к нулю на бесконечности вместе с этими производными.

Доказательства этого факта, как и большинства последующих, проводится по вышеизложенной схеме с очевидными уточнениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что система компактов $\{K_m, m = 1, 2, \dots\}$ компактно исчерпывает пространство $\mathbb{R}^n$, если каждое K_m есть компакт с непустой внутренностью, то есть $K_m = \overline{\text{int } K_m}$,

$$K_1 \Subset K_2 \Subset \dots \Subset K_m \Subset K_{m+1} \Subset \dots, \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^n = \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m.$$

Отметим, что в этом случае для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется число m_0 такое, что $K \Subset K_m$ при $m \geq m_0$.

Пространство $C(\mathbb{R}^n)$ Пусть $\{K_m\}$ – компактное исчерпывание $\mathbb{R}^n$. Введем в $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ счетную систему полунорм (на самом деле норм) $p_m(\varphi) = \sup_{t \in K_m} |\varphi(t)|$. Пополнением $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в этой топологии является пространство $C(\mathbb{R}^n)$ всех непрерывных функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Это пространство Фреше.

Пространство $\mathcal{E}$ Пусть $\{K_m, m = 1, 2, \dots\}$ – компактное исчерпывание $\mathbb{R}^n$. Топологизируем пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ введением полунорм

$$p_{Nm}(\varphi) = \max_{|j| \leq N} \sup_{|t| \in K_m} |\varphi^{(j)}(t)|, \quad N = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

Получаемое локально выпуклое пространство – метризуемое, но не полное. Пополним его в этой топологии и обозначим пополнение через $\mathcal{E}$. Пространство $\mathcal{E}$ состоит из множества всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$ с топологией равномерной сходимости на компактах вместе со всеми производными. Пространство $\mathcal{E}$ есть строгий проективный предел (пересечение) цепочки непрерывно вложенных пространств Фреше

$$\mathcal{E} \subset \dots \subset C^{N+1}(\mathbb{R}^n) \subset C^N(\mathbb{R}^n) \subset \dots \subset C^0(\mathbb{R}^n),$$

где $C^N(\mathbb{R}^n)$ – пространство N раз непрерывно дифференцируемых функций, для которых нормы (8.1) (N фиксировано, $m = 1, 2, \dots$) конечны. (Здесь через $C^0(\mathbb{R}^n)$ мы обозначили пространство $C(\mathbb{R}^n)$.) Пространство $\mathcal{E}$ есть пространство Фреше.

Пространство быстро убывающих функций $\mathcal{S}$ Топологизируем пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ полунормами

$$p_N(\varphi) = \max_{|j| \leq N} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (1 + |t|^2)^{N/2} |\varphi^{(j)}(t)|, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

Пополнение его по этой топологии называется пространством *быстро убывающих функций* и обозначается как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. (Иногда просто $\mathcal{S}$.) Пространство $\mathcal{S}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, убывающих вместе со всеми производными быстрее любой отрицательной степени $|t|$. Оно является пространством Фреше, а стало быть, бочечно и борнологично. Нетрудно видеть, что имеет место естественное непрерывное вложение $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, причем $\mathcal{S}$ плотно вложено в $\mathcal{E}$ (в топологии $\mathcal{E}$).

Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ есть строгий проективный предел (пересечение) цепочки непрерывно вложенных банаховых пространств

$$\mathcal{S} \subset \dots \subset \mathcal{S}_{N+1} \subset \mathcal{S}_N \subset \dots \subset \mathcal{S}_0,$$

где $\mathcal{S}_N$ – банахово пространство N раз непрерывно дифференцируемых функций, для которых норма (8.2) конечна.

Мы докажем далее, что вложение $\mathcal{S}_{N+1} \subset \mathcal{S}_N$ не только непрерывно, но и компактно. То есть из любой последовательности, ограниченной в $\mathcal{S}_{N+1}$, можно выделить сходящуюся в $\mathcal{S}_N$ подпоследовательность. Другими словами, всякое ограниченное в $\mathcal{S}_{N+1}$ множество и замкнутое в $\mathcal{S}_N$, компактно в $\mathcal{S}_N$. Или любое ограниченное в $\mathcal{S}_{N+1}$ множество предкомпактно в $\mathcal{S}_N$ (см. утверждение 2.11 и замечание к нему). Для этого напомним некоторые факты анализа.

Рассмотрим банахово пространство $C[K]$ непрерывных на компакте $K \in \mathbb{R}^n$ функций с нормой $\|x(t)\| = \sup_{t \in K} |x(t)|$. Множество функций M из $C[K]$ называется *равномерно ограниченным*, если существует число C такое, что

$$\|x(t)\| \leq C \quad \forall x(t) \in M,$$

и *равностепенно непрерывным*, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall t_1, t_2 \in K, \quad |t_1 - t_2| < \delta \implies \\ \implies \|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon \quad \forall x(t) \in M. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 8.1 (АСКОЛИ–АРЦЕЛА). *Для того чтобы множество функций $M \subset C[K]$ было предкомпактным, достаточно, чтобы M было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1].

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть компакт $K = \{t: |t| \leq R\}$ и все функции из M непрерывно дифференцируемы. Тогда условие равностепенной непрерывности можно заменить условием равномерной ограниченности этих производных.

Отметим такое простое

СЛЕДСТВИЕ. *Если последовательность $\{\varphi_\ell(t) \in C^{N+1}(\mathbb{R}^n), \ell = 1, 2, \dots\}$ такова, что для любого R существует c_R такое, что*

$$|\varphi_\ell^{(j)}(t)| \leq c_R \quad \text{при} \quad |t| < R, \quad |j| \leq N+1,$$

то существует подпоследовательность $\{\varphi_{\ell_k}(t), k = 1, 2, \dots\}$ и функция $\varphi_0(t) \in C^N(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_{\ell_k}(t)$ сходится к $\varphi_0(t)$ вместе со всеми производными до порядка N включительно равномерно на компактах в $\mathbb{R}^n$, то есть для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_{\ell_k}^{(j)}(t) \implies \varphi_0^{(j)}(t), \quad k \rightarrow \infty, \quad |j| \leq N, \quad t \in K.$$

ЛЕММА 8.2. *Каждое вложение $\mathcal{S}_{N+1} \subset \mathcal{S}_N$ компактно.*

Действительно, пусть $\varphi_\ell(t)$ – ограниченная последовательность в $\mathcal{S}_{N+1}(\mathbb{R}^n)$, то есть

$$(1 + |t|^2)^{(N+1)/2} |\varphi_\ell^{(j)}(t)| \leq C, \quad |j| \leq N + 1;$$

тогда по предыдущему следствию существует подпоследовательность $\{\varphi_{\ell_k}(t), k = 1, 2, \dots\}$ и функция $\varphi_0(t) \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_{\ell_k}(t)$ сходится к $\varphi_0(t)$ вместе со всеми производными до порядка N включительно равномерно на компактах и, кроме того, выполнено неравенство

$$(1 + |t|)^{N+1} |\varphi_{\ell_k}^{(j)}(t)| \leq C, \quad |j| \leq N + 1. \quad (8.3)$$

Покажем, что $\varphi_{\ell_k}(t)$ сходится к $\varphi_0(t)$ в $\mathcal{S}_N$. То есть покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0 такой, что $(1 + |t|)^N |\varphi_{\ell_k}(t) - \varphi_0(t)| < \varepsilon$ при $k > k_0, t \in \mathbb{R}^n$.

Действительно, из (8.3) имеем

$$(1 + |t|)^N |\varphi_{\ell_k}^{(j)}(t)| \leq \frac{C}{1 + |t|}, \quad |j| \leq N.$$

Отсюда при $|t| > \frac{2C}{\varepsilon}$ получим

$$(1 + |t|)^N |\varphi_{\ell_k}^{(j)}(t) - \varphi_0^{(j)}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |j| \leq N.$$

В силу равномерной сходимости на компактах, найдется k_0 такое, что

$$(1 + |t|)^N |\varphi_{\ell_k}^{(j)}(t) - \varphi_0^{(j)}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |j| \leq N, k > k_0,$$

при $|t| \leq \frac{2C}{\varepsilon}$. Объединение этих двух неравенств завершает доказательство.

Пространство функций $\mathcal{D}$ Можно ли так топологизировать пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, чтобы оно само оставалось полным? Оказывается это можно сделать. Обозначим через $\mathcal{D}(K)$ векторное подпространство пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, образованное всеми функциями $\varphi(t)$, носитель которых сосредоточен на компакте K . Топологизируем каждое $\mathcal{D}(K)$ полунормами

$$p_N(\varphi) = \max_{|j| \leq N} \sup_{t \in K} |\varphi^{(j)}(t)| \quad N = 0, 1, \dots \quad (8.4)$$

Тогда каждое $\mathcal{D}(K)$ есть пространство Фреше. При этом если $K_1 \subset K_2$, то $\mathcal{D}(K_1) \subset \mathcal{D}(K_2)$ и вложение непрерывно. При этом (в силу полноты) $\mathcal{D}(K_1)$ замкнуто в $\mathcal{D}(K_2)$ и топология $\mathcal{D}(K_1)$ индуцируется топологией $\mathcal{D}(K_2)$.

Пусть $\{K_m, m = 1, 2, \dots\}$ – компактное исчерпывание $\mathbb{R}^n$. Через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (писать будем просто $\mathcal{D}$) обозначим строгий индуктивный предел пространств $\mathcal{D}(K_m)$. В силу доказанного ранее пространство $\mathcal{D}$ – полное, бочечное и борнологическое.

Множество $M \subset \mathcal{D}$ ограничено тогда и только тогда, когда оно принадлежит какому-то $\mathcal{D}(K_m)$ и ограничено там. Последовательность $\varphi_k(t) \in \mathcal{D}$ сходится при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, если она сходится в каком нибудь одном $\mathcal{D}(K_m)$, то есть если носители всех $\varphi_k(t)$ содержаться на компакте K_m при некотором m , и последовательность $\{\varphi_k(t)\}$ сходится по каждой полунорме (8.4).

Заметим, что для направленностей аналогичное утверждение несправедливо.

Топологию в $\mathcal{D}$ можно задать с помощью (несчетного) семейства норм. Пусть $\{N_k, k = 1, 2, \dots\}$ – последовательность натуральных чисел. Положим

$$p_{\{N_k\}}(\varphi) = \sup_{k=1,2,\dots} N_k \max_{|j| \leq N_k} \sup_{t \in K_k \setminus K_{k-1}} |\varphi^{(j)}(t)|. \quad (8.5)$$

(Здесь $K_0 = \emptyset$.) Пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по этой норме обозначим $\mathcal{D}_{\{N_k\}}$. Заметим, что если $M_k \geq N_k, k = 1, 2, \dots$, то $\mathcal{D}_{\{M_k\}} \subset \mathcal{D}_{\{N_k\}}$ и $\mathcal{D}$ есть строгий проективный предел пространств $\mathcal{D}_{\{N_k\}}$.

Для пространства $\mathcal{D}$ справедлива лемма, аналогичная лемме 8.2.

ЛЕММА 8.3. *Для любой последовательности $\{N_k\}$ существует последовательность $\{M_k\}$ такая, что вложение $\mathcal{D}_{\{M_k\}} \subset \mathcal{D}_{\{N_k\}}$ компактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем последовательность $\{M_k\}$ так, чтобы:

- 1) $M_k \geq N_k + 1$ при $k = 1, 2, \dots$;
- 2) $\frac{M_k}{N_k} \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Пусть последовательность $\{\varphi_\ell, \ell = 1, 2, \dots\}$ ограничена по норме $p_{\{M_k\}}$. Нам достаточно доказать, что из нее можно выделить подпоследовательность, фундаментальную по норме $p_{\{N_k\}}$. Итак, пусть

$$p_{\{M_k\}}(\varphi_\ell) = \sup_{k=1,2,\dots} M_k \max_{|j| \leq M_k} \sup_{t \in K_k \setminus K_{k-1}} |\varphi_\ell^{(j)}(t)| \leq C.$$

Это означает, что все производные до порядка M_k ограничены на $\overline{K_k \setminus K_{k-1}}$, а потому (пользуясь замечанием к теореме Асколи–Арцела и диагональным процессом) можно выделить подпоследовательность φ_{ℓ_m} такую, что на каждом компакте $\overline{K_k \setminus K_{k-1}}$ все производные φ_{ℓ_m} до порядка N_k равномерно сходятся. Здесь мы учли условие 1).

Докажем, что $\{\varphi_{\ell_m}, m = 1, 2, \dots\}$ фундаментальна по норме $p_{\{N_k\}}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер m_0 такой, что

$$\begin{aligned} p_{\{N_k\}}(\varphi_{\ell_{m_1}} - \varphi_{\ell_{m_2}}) &= \\ &= e \sup_{k=1,2,\dots} N_k \max_{|j| \leq N_k} \sup_{t \in K_k \setminus K_{k-1}} |\varphi_{\ell_{m_1}}^{(j)}(t) - \varphi_{\ell_{m_2}}^{(j)}(t)| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

при $m_1, m_2 > m_0$.

Действительно, по ее построению ясно, что она фундаментальна по той части нормы, которая содержит любое конечное число компактов K_k . Оценим хвосты. Пусть b – некоторое число (его выберем позже), имеем

$$p_{\{N_k, k > b\}}(\varphi_{\ell_{m_1}} - \varphi_{\ell_{m_2}}) \leq p_{\{N_k, k > b\}}(\varphi_{\ell_{m_1}}) + p_{\{N_k, k > b\}}(\varphi_{\ell_{m_2}}).$$

Оценим первое слагаемое справа в этом неравенстве (второе слагаемое оценивается аналогично). Пусть задано $\varepsilon > 0$. Согласно условию 2) найдется число b такое, что $\frac{N_k}{M_k} < \frac{\varepsilon}{C}$ при $k > b$. Имеем

$$\begin{aligned} p_{\{N_k, k > b\}}(\varphi_{\ell_{m_1}}) &= \sup_{k > b} N_k \max_{|j| \leq N_k} \sup_{t \in K_k \setminus K_{k-1}} |\varphi_{\ell_{m_1}}^{(j)}| \leq \\ &\leq \sup_{k > b} \frac{N_k}{M_k} M_k \max_{|j| \leq N_k} \sup_{t \in K_k \setminus K_{k-1}} |\varphi_{\ell_{m_1}}^{(j)}| \leq \frac{\varepsilon}{C} p_{\{M_k\}}(\varphi_{\ell_{m_1}}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пространство функций Z Сперва определим пространство $Z(a)$. Рассмотрим совокупность целых аналитических функций $\psi(z)$ от n комплексных переменных $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$ порядка роста ≤ 1 и типа $\leq a$, $a > 0$, то есть удовлетворяющих неравенствам

$$|z^k \psi(z)| \leq C_k(\psi) e^{a|y|} \quad (= C_{k_1, \dots, k_n}(\psi) e^{a(|y_1| + \dots + |y_n|)}),$$

где мультииндекс $k = (k_1, \dots, k_n)$; при этом каждое $k_j = 0, 1, 2, \dots$. Напомним, что $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ и $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Топологизируем это линейное пространство с помощью счетной системы (полу)норм

$$\|\psi(z)\|_{a,p} = \sup_{|k| \leq p} |z^k \psi(x + iy)| e^{-a|y|}, \quad p = 0, 1, \dots \quad (8.6)$$

Как и ранее, можно показать, что пространство $Z(a)$ есть пространство Фреше.

Зададим последовательность $a_1 < a_2 < \dots < a_s < \dots$, причем $a_s \rightarrow +\infty$. Заметим, что $Z(a_s) \subset Z(a_{s+1})$ и вложение непрерывно. Пространство $Z(a_s)$ есть замкнутое подпространство $Z(a_{s+1})$. Строгий индуктивный предел пространств $Z(a_s)$ назовем пространством Z . Это пространство состоит из всех целых функций, удовлетворяющих неравенству $|z^k \psi(z)| \leq C_k(\psi) e^{a(\psi)|y|}$, с какой либо постоянной $a(\psi)$, зависящей от ψ . Последовательность $\psi_\nu(z) \in Z$ сходится, когда все $\psi_\nu \in Z(a_s)$ при некотором s и сходятся там. Множество функций $E \subset Z$ ограничено, если оно ограничено в каком-то $Z(a_s)$.

УПРАЖНЕНИЯ. 1) Показать, что сходимость в $\mathcal{D}$ не может быть задана никакой метрикой.

УКАЗАНИЕ. Воспользуйтесь упражнением 1 после теоремы 4.1.

2) Пусть $C_0^0(\mathbb{R}^1)$ – линейное пространство всех финитных непрерывных функций на оси $(-\infty < t < +\infty)$. Топологизируем его следующим образом. Окрестность нуля есть совокупность всех основных функций $\{\varphi(t) \in C_0^0: |\varphi(t)| \leq \gamma(t)\}$, где $\gamma(t)$ – любая всюду положительная функция. Другими словами, любая всюду положительная функция $\gamma(t)$ задает окрестность нуля. Показать, что последовательность $\varphi_\nu(t) \in C_0^0$ сходится при $\nu \rightarrow \infty$ в C_0^0 к нулю тогда и только тогда, когда все $\varphi_\nu(t)$ обращаются в нуль вне одного и того же отрезка и при $\nu \rightarrow \infty$ равномерно стремятся к нулю.

3) (Смолянов О.Г.) Рассмотрите в $C_0^0(\mathbb{R}^1)$ счетное множество A элементов вида

$$\left\{ \frac{1}{m} \varphi_0(t) + \frac{1}{k} \varphi_0\left(\frac{t}{m}\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \right\}.$$

Здесь $\varphi_0(t) \in C_0^\infty$ – фиксированная функция такая, что $\varphi_0(0) \neq 0$. Показать, что $\varphi(t) \equiv 0$ принадлежит к замыканию множества A ,

и тем не менее не является пределом ни одной сходящейся к нулю последовательности элементов из A .

4) (Шиллов Г. Е.) Зададим в $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ топологию так. Пусть задано любое целое число m и взяты $m + 1$ положительных непрерывных функций $\gamma_0(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)$. Считаем, что окрестность нуля состоит из всех функций $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$|\varphi(t)| \leq \gamma_0(t), \quad |\varphi'(t)| \leq \gamma_1(t), \quad \dots, \quad |\varphi^{(m)}(t)| \leq \gamma_m(t).$$

Показать, что сходимость последовательностей в $\mathcal{D}$ отвечает этой топологии.

УКАЗАНИЕ. Следует воспользоваться задачей 2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Хотя секвенциальная сходимость этой топологии совпадает со сходимостью в пространстве $\mathcal{D}$, но так определяемая топология отлична от топологии пространства $\mathcal{D}$. В частности, так построенное пространство не является борнологическим. (Докажите).

Локализация Все рассмотренные выше “процедуры” можно проделать, заменив всюду (кроме пространства $\mathcal{S}$) пространства $\mathbb{R}^n$ на произвольное открытое множество $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Например, $C_0^\infty(\mathcal{O}) = \{\varphi \in C^\infty, \text{supp } \varphi \subset \mathcal{O}\}$, и если ввести там полунормы $p(\varphi) = \sup_{t \in \mathcal{O}} |\varphi(t)|$, то пополнением его будет пространство непрерывных в $\overline{\mathcal{O}}$ функций, обращающихся в ноль на границе.

Пусть $A_q, q = 1, 2, \dots$, компактные множества, $A_q = \text{int } \overline{A_q}$, и $\{A_q\}$ – компактное исчерпывание множества $\mathcal{O}$:

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_q \subset A_{q+1} \subset \dots, \quad \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q = \mathcal{O}.$$

Отметим, что для любого компакта K в $\mathcal{O}$ существует номер q_0 такой, что $K \subset A_q$ при $q \geq q_0$. Топологизируем пространство $C_0^\infty(\mathcal{O})$ полунормами (8.3), где K заменено на A_q , и пополняем полученное пространство. Тем самым определено пространства Фреше $\mathcal{D}(A_q)$. Их строгий индуктивный предел обозначаем как $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Топологизируя все бесконечно дифференцируемые функции в $\mathcal{O}$ полунормами

$$p_{qm}(x) = \sup_{t \in A_q} |x^{(m)}(t)|, \quad m = 0, 1, \dots, \quad q = 1, 2, \dots,$$

и пополняя полученное пространство, получим пространство $\mathcal{E}(\mathcal{O})$ – всех бесконечно дифференцируемых функций с топологией компактной сходимости (равномерной сходимости вместе со всеми производными на любом компактном подмножестве $\mathcal{O}$).

Аналогично, топологизируя $C_0^\infty(\mathcal{O})$ полунормами $p_q(\varphi) = \max_{t \in A_q} |\varphi(t)|$ получим пространство $C(\mathcal{O})$ непрерывных в $\mathcal{O}$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах в $\mathcal{O}$.

ПРИМЕР 8.1 ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{H}(\mathcal{O})$. Пусть $\mathcal{O}$ – область в комплексной плоскости и $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ – множество всех голоморфных функций $\{\varphi(t)\}$, $t \in \mathcal{O}$, наделенное топологией компактной сходимости. Эта топология определяется последовательностью полунорм

$$p_q(\varphi) = \sup_{t \in A_q} |\varphi(t)|, \quad \text{где} \quad A_q = \left\{ t: |t| \leq q, \quad d(t, \mathbf{CD}) \geq \frac{1}{q} \right\}.$$

(Здесь $d(t, \mathbf{CD})$ – расстояние от точки t до множества $\mathbf{CD}$ (дополнения к D).) Ясно, что каждое A_q компактно и, если A – любое компактное подмножество в D , то $d(A, \mathbf{CD}) > 0$, а потому найдется q такое, что $A \subset A_q$. Отметим, что эта топология, с одной стороны, слабее топологии компактной сходимости всех производных (она задается совокупностью полунорм

$$p_{qm}(\varphi) = \sup_{t \in A_q} |\varphi^{(m)}(t)|, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\varphi^{(m)}(t)$ есть m -я производная), а с другой стороны, так как

$$|\varphi^{(m)}(t)| = \left| \frac{m!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{m+1}} \right| \leq m!(2q)^m p_{2q}(\varphi),$$

где Γ – окружность $|\tau - t| = \frac{1}{2q}$, сильнее ее. Следовательно, эти топологии совпадают. Поэтому последовательность Коши из голоморфных функций будет сходится (равномерно на компактах вместе со всеми производными), а потому $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ – пространство Фреше.

Отметим, что $\mathcal{H}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{O}) \subset C(\mathcal{O})$, причем эти вложения непрерывны. Заметим, что хотя топология $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ (как топология подпространства) индуцируется топологией $\mathcal{E}(\mathcal{O})$ и топологией $C(\mathcal{O})$, однако топология в $\mathcal{E}(\mathcal{O})$ не совпадает с топологией $C(\mathcal{O})$

как топология подпространства. $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{E}(\mathcal{O})$ и замкнутое подпространство в $C(\mathcal{O})$, но $\mathcal{E}(\mathcal{O})$ плотно вложено в $C(\mathcal{O})$.

В заключении этого пункта отметим, что

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E} \quad (8.7)$$

Причем каждое вложение непрерывно и каждое пространство плотно в каждом последующем (по вложению).

Интегральные топологии В этом курсе мы считаем известными основные факты из теории интеграла Лебега. Напомним некоторые из них (подробнее см. [1] и [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной или счетной системой параллелепипедов, сумма объемов которых не превосходит ε .

Можно доказать, что объединение конечной или счетной совокупности множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Будем говорить, что какое-то свойство (или утверждение) выполняется *почти всюду*, если оно выполняется во всех точках, кроме, может быть, множества точек меры нуль. Нас далее будут интересовать *измеримые функции*. Это функции, которые определены и конечны почти всюду (далее пишем п.в.) и могут быть представлены как пределы почти всюду сходящихся последовательностей ступенчатых функций. *Ступенчатая функция* $h(t)$ – это функция, принимающая постоянные значения $b_1, b_2, \dots, b_k$ в каждом из конечного числа не пересекающихся параллелепипедов $\Delta_1, \Delta_1, \dots, \Delta_k$. Интегралом от ступенчатой $h(t)$ функции называется число, равное

$$Ih \equiv \int h(t) dt = \sum_{i=1}^k b_i |\Delta_i|,$$

где $|\Delta_i|$ – объем параллелепипеда Δ_i . Определим класс функций C^+ . Функция $f(t)$ принадлежит (по определению) классу C^+ , если она может быть представлена как предел почти всюду монотонно возрастающей последовательности ступенчатых функций

$h_n \nearrow f$, причем интегралы от этих функций ограничены в совокупности $Ih_n \leq C$. Теперь интеграл от функции $f \in C^+$ определяется формулой $I f = \lim_{n \rightarrow \infty} I h_n$, где h_n – последовательность ступенчатых функций, участвующая в определении f .

Будем называть *суммируемой* (или *интегрируемой по Лебегу*) функцией всякую функцию $\varphi(t)$, которая может быть представлена как разность $\varphi = f - g$ двух функций из класса C^+ . Совокупность всех суммируемых функций обозначают как L . Положим $I\varphi = I f - I g$ и назовем это число интегралом суммируемой функции φ . Можно доказать, что приведенные определения корректны, а введенный таким образом интеграл обладает всеми стандартными свойствами интеграла. Удобства этого определения иллюстрируют следующие важные утверждения.

ТЕОРЕМА 8.2 (Б. ЛЕВИ). *Если для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$, $\varphi_k \in L$, $\varphi_k \geq 0$, интегралы от частных сумм ограничены в совокупности, так что $I(\sum_{k=1}^n \varphi_k) \leq C$, то $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ есть суммируемая функция и $I\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} I\varphi_k$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если суммируемые функции ψ_n , монотонно возрастают, стремятся к пределу ψ и $I\psi_n \leq C$, то ψ – суммируемая функция и $I\psi = \lim I\psi_n$.*

ТЕОРЕМА 8.3 (ЛЕБЕГА). *Если последовательность суммируемых функций $\varphi_n(t)$ сходится почти всюду к функции φ и удовлетворяет условию*

$$|\varphi_n(t)| \leq \varphi_0(t), \quad \varphi_0(t) \in L,$$

то φ – суммируемая функция и $I\varphi = \lim I\varphi_n$.

ЛЕММА 8.4 ФАТУ. *Если $\varphi_n \geq 0$ – суммируемые функции, $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ почти всюду и $I\varphi_n \leq C$, то φ – суммируемая функция и $0 \leq I\varphi \leq C$.*

Неравенство Гельдера и Минковского Далее считаем $p \geq 1$ и $q = 1 + \frac{1}{p-1}$, так что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $\eta = \omega(\xi)$ возрастающая непрерывная функция, $\omega(0) = 0$, и $\xi = \mu(\eta)$ – обратная функция (также, очевидно, непрерывная и возрастающая); тогда при любых $a > 0$ и $b > 0$ имеем

$$ab < \int_0^a \omega(\xi) d\xi + \int_0^b \mu(\eta) d\eta. \quad (8.8)$$

Для доказательства нарисуйте рисунок и сравните сумму площадей под соответствующими кривыми с площадью прямоугольника (ограниченного прямыми $\xi = a$, $\eta = b$ и осями координат).

Подставляя в (8.8) $\omega(\xi) = \xi^{p-1}$ и $\mu(\eta) = \eta^{q-1}$, получим неравенство

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (8.9)$$

Считая далее, что $\int |f(t)|^p dt < \infty$ и $\int |g(t)|^q dt < \infty$, подставляя в (8.9)

$$a = \frac{|f(t)|}{\left(\int |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{|g(t)|}{\left(\int |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}}$$

и интегрируя, получим неравенство (называемое неравенством Гельдера)

$$\int |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (8.10)$$

Теперь имеем

$$|f + g|^p \leq |f|(|f| + |g|)^{p-1} + |g|(|f| + |g|)^{p-1}. \quad (8.11)$$

Учитывая, что $p - 1 = \frac{p}{q}$ и $(|f| + |g|)^{p-1} = (|f| + |g|)^{\frac{p}{q}}$, причем

$$\left(\int (|f| + |g|)^{(p-1)q} dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int (|f| + |g|)^p dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

интегрируя (8.11) и применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \int (|f| + |g|)^p dt &\leq \left(\int |f|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (|f| + |g|)^{(p-1)q} dt\right)^{\frac{1}{q}} + \\ &\quad + \left(\int |g|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (|f| + |g|)^{(p-1)q} dt\right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\left(\int |f|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int (|f| + |g|)^p dt\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Деля это соотношение на $\left(\int (|f| + |g|)^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$, учитывая, что $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, находим

$$\begin{aligned} \left(\int (|f| + |g|)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int (|f| + |g|)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\left(\int |f|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Это неравенство называется *неравенством Минковского*.

Пространства L_p Пусть $1 \leq p < \infty$. Рассмотрим множество всех измеримых функций $\varphi(t)$, для которых $|\varphi(t)|^p$ суммируема. В силу неравенства Минковского это множество – линейное пространство. Введем в нем полунорму

$$\|\varphi(t)\|_p \equiv (I(|\varphi|^p))^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\varphi(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (8.13)$$

Через L_p обозначим факторпространство этого пространства по подпространству, состоящему из функций, отличных от нуля только на множестве меры нуль. Другими словами, мы отождествляем две функции f и g , если $f(t) = g(t)$ п.в. Норму в L_p определяем формулой (8.13), где $\varphi(t)$ – один из представителей данного класса эквивалентности.

ТЕОРЕМА 8.4 (РИССА-ФИШЕРА). $L_p(\mathbb{R}^n)$ – полное пространство, а тем самым банахово.

Действительно, пусть $f_m(t) \in L_p$ – фундаментальная последовательность,

$$\|f_{m_1} - f_{m_2}\|_p \xrightarrow{m_1, m_2 \rightarrow \infty} 0.$$

Выберем подпоследовательность $f_{m_k}(t)$, так чтобы $\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$. Для любого компакта $K \in \mathbb{R}^n$, используя неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} \int_K |f_{m_{k+1}}(t) - f_{m_k}(t)| dt &\leq \\ &\leq \left(\int_K 1^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \|f_{m_{k+1}}(t) - f_{m_k}(t)\|_p \leq C_K \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Здесь C_K – объем K , а p -я норма по компакту K заведомо меньше, чем норма по всему $\mathbb{R}^n$. Отсюда $\int_K \sum_{k=1}^{\infty} |f_{m_{k+1}}(t) - f_{m_k}(t)| dt < \infty$, и по теореме Б. Леви $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{m_{k+1}}(t) - f_{m_k}(t)| < \infty$. Таким образом, на каждом компакте мы имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (f_{m_{k+1}}(t) - f_{m_k}(t)) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{m_{N+1}} = f_0(t)$$

и $f_0(t) < \infty$ п.в. Покажем, что $f_0 \in L_p$. Так как $|f(t)|^p = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{m_{N+1}}^p$, причем $\int |f_{m_{N+1}}^p|^p dt \leq M$ (ибо фундаментальная последовательность ограничена), то по лемме Фату $|f(t)|^p$ суммируема. Вспомним, что в метрическом (а следовательно, и в нормируемом) пространстве, если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, то сама эта последовательность сходится. Тем самым утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства теоремы нетрудно усмотреть, что если последовательность $f_m(t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(t)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $f(t)$ почти всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме (8.13) дает как раз пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Для этого достаточно показать, что C_0^∞ плотно в L_p . Действительно, так как каждая функция из L_p (как суммируемая с p -й степенью) может быть приближена ступенчатыми функциями по соответствующей интегральной норме, а каждая ступенчатая функция может быть приближена (по той же норме) функциями из C_0^∞ , то это и означает плотность C_0^∞ в L_p .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Сдвиги непрерывны в L_p , то есть $\|f(t+h) - f(t)\|_p \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Найдем $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\|f(t) - \varphi(t)\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$; тогда

$$\begin{aligned} \|f(t+h) - f(t)\|_p &\leq \|f(t+h) - \varphi(t+h)\|_p + \\ &\quad + \|\varphi(t) - f(t)\|_p + \|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|_p \end{aligned}$$

Каждое из первых двух слагаемых справа не превосходит $\frac{\varepsilon}{3}$, а последнее слагаемое (в силу того, что $\varphi \in C_0^\infty$) можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ при малых h .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\omega(t)$ – шапочка (см. (3.3)), $\int \omega(t) dt = 1$. Пусть также $f(t) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и $\omega_k(t) = k^n \omega(kt)$. Тогда

$$f_k(t) = f(t) * \omega_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(t) \quad \text{в } L_p(\mathbb{R}^n). \quad (8.14)$$

Здесь $f(t) * \omega_k(t) = \int f(\xi) \omega_k(t - \xi) d\xi$.

Действительно, учитывая, что $\int \omega_k(t - \xi) d\xi = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \|f(t) - f_k(t)\|_p &= \left\| \int (f(t) - f(\xi)) \omega_k(t - \xi) d\xi \right\|_p \leq \\ &\leq \left\| \int (f(t) - f(t - h)) \omega_k(h) dh \right\|_p \leq \\ &\leq \int \|f(t) - f(t - h)\|_p \omega_k(h) dh. \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь замечанием 4, завершаем доказательство следствия.

Локализация. В предыдущих рассмотрениях пространство $\mathbb{R}^n$ можно заменить на любое открытое множество $\mathcal{O}$. Построенное таким образом пространство будем обозначать $L_p(\mathcal{O})$. Пространство $L_p(\mathcal{O})$ – банахово пространство.

Гильбертово пространство H Это такое банахово пространство, в котором норма порождается скалярным произведением. Если x, y – элементы H , то $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, где (x, y) – скалярное произведение. Напомним, что скалярным произведением называется отображение $H \times H \mapsto \mathbb{C}$, со свойствами:

$$\begin{aligned} (x, y) &= \overline{(y, x)}; \\ (\lambda x, y) &= \lambda(x, y); \\ (x_1 + x_2, y) &= (x_1, y) + (x_2, y); \\ (x, x) &\geq 0, \quad \text{причем } (x, x) > 0, \text{ если } x \neq 0. \end{aligned}$$

Пусть $M \subset H$ – подпространство. Положим $M^\perp = \{x \in H : (x, y) = 0 \forall y \in M\}$. Ясно, что $M^\perp$ замкнуто.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть M – замкнутое подпространство в H ; тогда любой элемент $x \in H$ однозначно представляется в виде $x = m_1 + m_2$, где $m_1 \in M, m_2 \in M^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [1].

ТЕОРЕМА 8.5 (РИССА). Пусть $f(x)$ – непрерывный линейный функционал в гильбертовом пространстве H . Тогда существует элемент $a \in H$ такой, что $f(x) = (x, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $M = \{x: f(x) = 0\}$. Это гиперпространство в H , и следовательно, его коразмерность равна 1. Поэтому $M^\perp$ одномерно. Пусть $e \in M^\perp$, тогда $f(x) = \lambda f(e)$, где $x = \lambda e + m$, $m \in M$. Положим $a = \frac{\bar{f}(e)}{(e, e)}e$; тогда

$$(x, a) = \left(\lambda e + m, \frac{\bar{f}(e)}{(e, e)}e \right) = \lambda f(e) = f(x).$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f(\varphi)$ есть линейный непрерывный функционал над пространством $L_2(\mathcal{O})$. Тогда существует функция $f(t) \in L_2(\mathcal{O})$ такая, что

$$f(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} f(t)\varphi(t) dt, \quad \varphi(t) \in L_2(\mathcal{O}).$$

Действительно, $L_2(\mathbb{R}^n)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathcal{O}} \varphi(t)\overline{\psi(t)} dt.$$

Следовательно, по теореме Рисса существует функция $\psi(t) \in L_2(\mathcal{O})$ такая, что

$$f(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} \varphi(t)\overline{\psi(t)} dt.$$

Теперь достаточно положить $f(t) = \overline{\psi(t)}$.

В заключение докажем следующее утверждение, относящееся к пространству $\mathcal{S}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.1. Система полунорм (8.2) пространства $\mathcal{S}$ эквивалентна системе следующих интегральных полунорм:

$$p_N^1(\varphi) = \max_{|j| \leq N} \left(\int (1+t^2)^N |\varphi^{(j)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (8.15)$$

Для простоты рассмотрим случай $n = 1$ (общий случай разберите сами). Имеем

$$\begin{aligned}
 |(1+t^2)^{N/2}\varphi^{(j)}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt}(1+t^2)^{N/2}\varphi^{(j)}(t) dt \right| \leq \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |Nt(1+t^2)^{N/2-1}\varphi^{(j)}(t)| dt + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} |(1+t^2)^{N/2}N\varphi^{(j+1)}(t)| dt \leq \\
 &\leq \left(\int \frac{dt}{(1+t^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[N \left(\int |(1+t^2)^N |\varphi^{(j)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int |(1+t^2)^{N+1} |\varphi^{(j+1)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \\
 &\leq \sqrt{\pi} [Np_{N+1}^1(\varphi) + p_{N+2}^1(\varphi)].
 \end{aligned}$$

(Здесь мы воспользовались неравенством Коши.) Из этого неравенства следует, что $p_N(x) \leq Cp_{N+2}^1(x)$. Обратное.

$$\begin{aligned}
 p_N^1(\varphi) &\leq \max_{|j| \leq N} \sup_{t \in \mathbb{R}^1} |(1+|t|^2)^{N/2+1} \varphi^{(j)}(t)| \left(\int \frac{dt}{(1+t^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \sqrt{\pi} p_{N+2}^1(\varphi).
 \end{aligned}$$

§ 9. Пространство обобщенных функции $\mathcal{D}'$

Линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{D}$ называется *обобщенной функцией* (иногда о нем говорят как о *распределении на $\mathcal{D}$*). Пространство всех обобщенных функций (распределений) обозначают через $\mathcal{D}'$.

Аналогично для других пространств основных функций. Через $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$ и т.д. обозначаем пространства обобщенных функций над соответствующими пространствами основных функций.

Принято значение функционала f на основной функции $\varphi(t)$ обозначать через (f, φ) .

Пусть f – линейный функционал на $\mathcal{D}$. Когда он непрерывен?

Из общей теории, см. утверждения 4.4 и 4.5, следует, что он непрерывен, когда существует непрерывная полунорма $p(\varphi) \in \mathcal{D}$ такая, что $|(f, \varphi)| \leq p(\varphi)$. Но конструктивно этим не всегда удобно

пользоваться. Напомним, что $\mathcal{D}$ есть строгий индуктивный предел пространств $\mathcal{D}(K_m)$, где $\{K_m, m = 1, 2, \dots\}$ – компактное исчерпывание $\mathbb{R}^n$. Из свойства “универсальности” строгого индуктивного предела следует, что f непрерывен тогда и только тогда, когда его ограничение на каждое из $\mathcal{D}(K_m)$ непрерывно. Так что для любого компакта $K \in \mathbb{R}^n$ найдутся постоянная C и число m такие, что

$$|(f, \varphi)| \leq C \max_{|j| \leq m} \sup_{t \in K} |\varphi^{(j)}(t)| \quad \text{при} \quad \varphi \in \mathcal{D}(K). \quad (9.1)$$

С другой стороны, из борнологичности $\mathcal{D}$ следует, что f непрерывен тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\varphi_k(t) \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}$ следует, что $(f, \varphi_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Как мы уже отмечали, $\varphi_k(t) \rightarrow 0$, если $\varphi_k(t)$ принадлежат какому-то одному $\mathcal{D}(K)$ и там стремятся к нулю. То есть $\text{supp } \varphi_k \subset K$ при каком-то K и $\varphi_k(t)$ равномерно вместе со всеми своими производными сходятся к нулю.

Регулярные обобщенные функции Напомним, что функция $f(t) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, если для любого компакта $K \in \mathbb{R}^n$ функция $f(t) \in L_1(K)$. Такая функция $f(t)$ определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}$ по формуле

$$(f, \varphi) = \int f(t) \varphi(t) dt. \quad (9.2)$$

Эта обобщенная функция определена корректно, ибо для любой $\varphi(t) \in \mathcal{D}$ существует компакт K , так что

$$|(f, \varphi)| \leq \int_K |f(t)| |\varphi(t)| dt \leq \int_K |f(t)| dt \cdot \sup_{t \in K} |\varphi(t)|. \quad (9.3)$$

Это неравенство доказывает непрерывность функционала f в $\mathcal{D}$.

ЛЕММА 9.1 (ДЮБУА–РАЙМОНДА). Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из $L_{1,\text{loc}}$ равны как обобщенные функции, то есть $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$ для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f_1(t) = f_2(t)$ почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$. По условию

$$\int f(t) \varphi(t) dt = 0 \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (9.4)$$

Нам надо доказать, что $f(t) = 0$ п.в.

Фиксируем любое $R > 0$. Положим $f_R(t) = \xi_{2R}(t)f(t)$, где $\xi_{2R}(t)$ – характеристическая функция шара $|t| < 2R$. Отметим, что $f_R(t) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\omega_k(t) = k^n \omega(kt)$, где $\omega(t)$ – “шапочка” (см. (3.3)) и $f_{R,k}(t) = \int f_R(\tau) \omega_k(t - \tau) d\tau$. По следствию к теореме Рисса–Фишера $f_{R,k}(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f_R(t)$ в L_1 , см. (8.14). Замечая, что при $|t| < R$ и достаточно больших значениях k носитель $\omega_k(t - \tau)$ лежит в шаре радиуса $2R$, имеем при $|t| < R$

$$\begin{aligned} f_{R,k}(t) &= \int f_R(\tau) \omega_k(t - \tau) d\tau = \int f(\tau) \xi_{2R}(\tau) \omega_k(t - \tau) d\tau = \\ &= \int f(\tau) \omega_k(t - \tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Здесь в последнем равенстве мы воспользовались условием (9.4). Следовательно, при $|t| < R$, начиная с некоторого k , $f_{R,k}(t) \equiv 0$. Согласно замечанию 3 к теореме Рисса–Фишера можно выделить подпоследовательность $f_{R,k_m}(t)$, сходящуюся к $f_R(t)$ почти всюду. Таким образом $f_R(t) = 0$ п.в. в шаре $|t| < R$. Но $f_R(t) = f(t)$ в этом шаре. Замечая, что R – произвольное число, завершаем доказательство леммы.

СОГЛАШЕНИЕ . Условились у обобщенных функций (хотя это линейные непрерывные функционалы, а совсем не функции) писать аргумент, совпадающий с аргументом тех основных функций на которых он определен. Таким образом, вместо (f, φ) мы будем писать $(f(t), \varphi(t))$.

ПРИМЕРЫ.

1) $\Theta(t)$ – функция Хевисайда (равная 1 при $t > 0$ и 0 при $t < 0$) определяет регулярный функционал $(\Theta(t), \varphi(t)) = \int_0^\infty \varphi(t) dt$.

2) Дельта-функция $\delta(t)$ определяется формулой $(\delta(t), \varphi(t)) = \varphi(0)$.

3) Главное значение $P\frac{1}{t}$ определяется формулой

$$(P\frac{1}{t}, \varphi(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

3) Функционал $\frac{1}{t+i0}$ определяется формулой

$$\left(\frac{1}{t+i0}, \varphi(t) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(t)}{t+i\varepsilon} dt.$$

Докажите формулу Сохоцкого: $\frac{1}{t+i0} = P\frac{1}{t} - i\pi\delta(t)$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$; тогда найдется R такое, что $\varphi(t) = 0$ при $|t| > R$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{t+i0}, \varphi(t) \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{\varphi(t)(t-i\varepsilon)}{t^2 + \varepsilon^2} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{(\varphi(t) - \varphi(0))(t-i\varepsilon)}{t^2 + \varepsilon^2} dt + \\ &\quad + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{t-i\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2} dt = \\ &= \int_{-R}^R \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt + i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{-\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2} dt = \\ &= \left(P\frac{1}{t}, \varphi(t) \right) - i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 2 \arctan \frac{R}{\varepsilon} = \\ &= \left(P\frac{1}{t} - i\pi\delta(t), \varphi(t) \right). \end{aligned}$$

4) Аналогично, $\frac{1}{t-i0}$ определяется формулой

$$\left(\frac{1}{t-i0}, \varphi(t) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(t)}{t-i\varepsilon} dt.$$

Докажите, что $\frac{1}{t-i0} = P\frac{1}{t} + i\pi\delta(t)$.

5) Сдвинутую дельта-функцию $\delta(t-a)$ определим формулой $(\delta(t-a), \varphi(t)) = \varphi(a)$.

Вычислим плотность зарядов, соответствующих диполю с электрическим моментом $+1$ в точке $t = 0$. Пусть сначала заряды отстоят друг от друга на 2ε ; так как момент должен быть равен $+1$, то будем считать, что единичные заряды (разных знаков) находятся на прямой в точках $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\varepsilon} (\delta(t-\varepsilon) - \delta(t+\varepsilon)), \varphi(t) \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] = \\ &= \varphi'(0) = (\delta(t), \varphi'(t)). \end{aligned}$$

Некоторые операции над обобщенными функциями

Каждая линейная непрерывная операция над основными функциями (непрерывное линейное отображение $A: \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$) определяет некоторую линейную непрерывную операцию $A^*: \mathcal{D}' \mapsto \mathcal{D}'$

над обобщенными функциями по формуле

$$(A^*(f)(t), \varphi(t)) = (f(t), A(\varphi)(t)). \quad (9.5)$$

Напомним, что линейное отображение A на $\mathcal{D}$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на каждом $\mathcal{D}(K)$, где K – любой компакт в $\mathbb{R}^n$ (см. утверждение 7.1).

Рассмотрим некоторые примеры.

1) Умножение на $a(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Линейная операция $A: \varphi \in \mathcal{D} \mapsto a(t)\varphi(t) \in \mathcal{D}$ непрерывна в $\mathcal{D}$. (Докажите). Следовательно, формула

$$(a(t)f, \varphi) = (f(t), a(t)\varphi(t)), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

корректно определяет умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию.

2) Неособенная линейная замена переменных. Пусть A – невырожденная $(n \times n)$ -матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Если $f(t) \in L_{1,\text{loc}}$, то $f(At+b)$ также из $L_{1,\text{loc}}$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$\int f(At+b)\varphi(t) dt = \frac{1}{|\det A|} \int f(t)\varphi(A^{-1}(t-b)) dt.$$

Отображение $\varphi(t) \mapsto \frac{1}{|\det A|} \varphi(A^{-1}(t-b))$ непрерывно из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$. (Докажите). Поэтому если $f(t) \in \mathcal{D}'$, то естественно определить обобщенную функцию $f(At+b)$ формулой

$$(f(Bt+b), \varphi(t)) = \frac{1}{|\det A|} (f(t), \varphi(A^{-1}(t-b))), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

3) Операция дифференцирования. Пусть $f(t) \in C^N(\mathbb{R}^n)$, где N – целое положительное число. Пусть также $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ – мультииндекс, $|j| = j_1 + \dots + j_n$,

$$D^j \equiv \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^{j_1} \dots \partial t^{j_n}}.$$

Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем (при $|j| \leq N$)

$$\int D^j f(t) \cdot \varphi(t) dt = (-1)^{|j|} \int f(t) \varphi^{(j)}(t) dt.$$

(Напомним, что $D^j \varphi(t) \equiv \varphi^{(j)}(t)$.) Операция $\varphi(t) \mapsto (-1)^{|j|} D^j \varphi(t)$ непрерывна из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$. (Докажите). Поэтому если $f(t) \in \mathcal{D}'$, то естественно определить обобщенную функцию $D^j f(t)$ формулой

$$(D^j f, \varphi) = (-1)^{|j|} (f(t), \varphi^{(j)}(t)).$$

Другие операции над обобщенными функциями будут рассмотрены позднее.

УПРАЖНЕНИЯ. Случай $n = 1$.

- 1) Докажите, что $\frac{\partial}{\partial t} \ln |t| = P \frac{1}{t}$.
- 2) Докажите, что $\frac{\partial}{\partial t} \Theta(t) = \delta(t)$.
- 3) Докажите, что $\delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$, в частности, $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$.
- 4) Производные кусочно гладкой функции. Пусть $f(t) \in C^2(\mathbb{R}^1 - \{t_0\})$. Обычные (непрерывные) производные функции f будем обозначать $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(t) \right\}$, а скачок в точке t_0 обозначаем $[f]_{t_0} = f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0)$. Докажите формулы:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(t) \right\} + [f]_{t_0} \delta(t - t_0),$$

$$f''(t) = \{f''(t)\} + [f'(t)]_{t_0} \delta(t - t_0) + [f(t)]_{t_0} \delta'(t - t_0).$$

- 5) Случай $n = 3$. Докажите, что $\Delta \frac{1}{4\pi r} = -\delta(t)$.

УКАЗАНИЕ. Используйте вторую формулу Грина. Пусть Ω – область и $\partial\Omega$ – ее граница, $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к границе; тогда

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dt = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Учтите, что при $t \neq 0$ функция $\frac{1}{4\pi r}$ гармоническая, то есть $\Delta \frac{1}{4\pi r} = 0$. В качестве Ω возьмите область $\{|t| > \varepsilon\}$.

- 6) Случай $n = 3$. Проверьте, что функция $u = -\frac{1}{4\pi r} e^{ikr}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u + k^2 u = \delta(t)$. Аналогично и для функции $v = -\frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}$. Здесь $r = |t|$, $t \in \mathbb{R}^3$.

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся формулой

$$\Delta(f(t)g(t)) = f \Delta g + 2(\nabla f, \nabla g) + g \Delta f, \quad \text{где } f = \frac{1}{r}, \quad g = e^{ikr}.$$

Учитывая равенства $\frac{\partial}{\partial t_j} \frac{1}{|t|} = -\frac{t_j}{|t|^3}$ и $\frac{\partial}{\partial t_j} e^{ik|t|} = \frac{ikt_j}{|t|} e^{ik|t|}$, имеем $(\nabla f, \nabla g) = -\frac{ik}{|t|^2} e^{ik|t|}$. Далее, пользуясь задачей 5) и тем, что $\Delta e^{ik|t|} = \left(\frac{2ik}{|t|} - k^2 \right) e^{ik|t|}$, получим

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)u &= \frac{-1}{4\pi} \left[-4\pi \delta(t) - 2 \frac{ik}{|t|^2} + \frac{2ik}{|t|^2} - \frac{k^2}{|t|} + \frac{k^2}{|t|} \right] e^{ik|t|} = \\ &= \delta(t) \cdot e^{ik|t|} = \delta(t). \end{aligned}$$

7) Случай $n = 2$. Докажите, что $\Delta \ln |t| = 2\pi\delta(t)$.

УКАЗАНИЕ. Действуйте аналогично задаче 5), учитывая, что $\Delta \ln |t| = 0$ при $t \neq 0$.

8) Случай $n \geq 3$. Докажите, что $\Delta \frac{1}{|t|^{n-2}} = -(n-2)\sigma_n\delta(t)$, где σ_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

9) Функция Кантора. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$. Отметим отрезок $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ и положим $C(t) = \frac{1}{2}$ на этом отмеченном отрезке. Этот отрезок назовем отрезком 1-го ранга. В оставшемся множестве отрезка отметим отрезки 2-го ранга $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ и $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ и положим на них $C(t) = \frac{1}{4}$ и $C(t) = \frac{3}{4}$ соответственно, и так далее. Мы будем полагать $C(t) = \frac{2k-1}{2^n}$, $k = 1, 2, 3, \dots, 2^n$, на k -м отмеченном отрезке n -го ранга. Продолжаем процесс неограниченно ($n = 1, 2, \dots$). Множество точек отмеченных отрезков образуют всюду плотное множество отрезка $[0, 1]$. Теперь доопределим функцию $C(t)$ по непрерывности на весь отрезок $[0, 1]$. Получаем непрерывную монотонную функцию, определенную на отрезке $[0, 1]$. Эта функция $C(t)$ называется *функцией Кантора*. Заметим, что оставшиеся неотмеченными точки имеют мощность континуум, хотя их мера равна нулю. (Действительно, длина отмеченных отрезков равна 1.) Производная функции Кантора существует и равна нулю в каждой точке любого отмеченного интервала, то есть почти всюду. Таким образом “классическая” производная ее равна нулю почти всюду.

Что представляет собой обобщенная производная этой канторовой функции $C(t)$?

Ответ:

$$(C'(t), \varphi(t)) = \sum_j C_j [\varphi(\alpha_j) - \varphi(\beta_j)],$$

где C_j – значение $C(t)$ на отмеченном отрезке $[\alpha_j, \beta_j]$, а суммирование производится по всем отмеченным отрезкам.

10) Случай $n = 2$. Доказать, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Theta(t - |x|) = \delta(t, x).$$

РЕШЕНИЕ. Положим $\Theta(t_1, t_2) = \Theta(t_1)\Theta(t_2)$. Вычислим $\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Theta(t_1, t_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Theta(t_1, t_2), \varphi(t_1, t_2) \right) &= (-1)^2 \left(\Theta(t_1, t_2), \frac{\partial^2 \varphi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} dt_1 dt_2 = \int_0^\infty dt_1 \left[-\frac{\partial \varphi(t_1, 0)}{\partial t_1} \right] dt_1 = \\ &= \varphi(0, 0) = (\delta(t_1, t_2), \varphi(t_1, t_2)). \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $t = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1 + t_2)$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1 - t_2)$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \Theta(t_1, t_2) &= \Theta(t - |x|), \quad \delta(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \delta(t, x), \\ \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Theta(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

завершаем доказательство.

11) Обычная функция $f(t)$ называется *однородной степени α* , если для любого $\lambda > 0$ выполнено равенство

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t), \quad \lambda > 0. \quad (9.6)$$

Дайте определение обобщенной однородной (степени α) функции.

Ответ: $(f, \varphi(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda^{\alpha+n}} (f, \varphi)$.

Локальная структура обобщенной функции из $\mathcal{D}'$ Мы говорим, что обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$ равна $D^j g$ в некоторой окрестности множества $\mathcal{O}$, если

$$(f, \varphi) = (-1)^{|j|} (g, \varphi^{(j)}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } \varphi \subset \mathcal{O}.$$

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого открытого множества $\mathcal{O} \Subset \mathbb{R}^n$ существуют $g(t) \in L_1(\mathcal{O})$ и мультииндекс $j = (j_1, \dots, j_n)$ такие, что $f = D^j g(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K = \overline{\mathcal{O}}$. Согласно (9.1) для некоторого m имеем

$$|(f, \varphi)| \leq C \max_{|j| \leq m} \sup_K |\varphi^{(j)}(t)| \quad \text{при} \quad \text{supp } \varphi \subset K. \quad (9.7)$$

Оценим часть нормы с младшими производными через старшие. Пусть

$$K \subset K_1 = \{(t_1, \dots, t_n): a_i \leq t_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\},$$

$$\max_i \{b_i - a_i\} = d.$$

Фиксируем $j = (j_1, \dots, j_n)$; имеем

$$|\varphi^{(j)}(t)| = \left| \int_{a_1}^{t_1} \varphi^{(j_1+1, j_2, \dots, j_n)}(t) dt \right| \leq d \sup_K |\varphi^{(j_1+1, j_2, \dots, j_n)}(t)|.$$

Увеличивая каждый раз в оценке (9.7) младшие производные на 1, получим

$$|(f, \varphi)| \leq C_1 \sup_{t \in K} |\varphi^{(m, m, \dots, m)}(t)| \leq C_2 \int_{K_1} |\varphi^{(m+1, \dots, m+1)}(t)| dt.$$

Заметим, что здесь в интегралах можно заменить K_1 на K , даже на $\mathcal{O}$. Применяя теперь неравенство Гельдера, имеем

$$|(f, \varphi)| \leq C_2 \int_{K_1} |\varphi^{(m+1, \dots, m+1)}(t)| dt \leq C_3 \|\varphi^{(m+1, \dots, m+1)}(t)\|_2. \quad (9.8)$$

Введем отображение $h: \mathcal{D}_K \mapsto L_2(\mathcal{O})$ по правилу $h: \varphi(t) \mapsto \varphi^{(m+1, \dots, m+1)}(t)$. Ясно, что это отображение непрерывно и инъективно. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_K & \xrightarrow{h} & M \subset L_2(\mathcal{O}) \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Неравенство (9.8) показывает, что отображение g линейно, непрерывно и задано на подпространстве M . По теореме Хана–Банаха оно продолжается на все $L_2(\mathcal{O})$, то есть существует функция $g(t) \in L_2(\mathcal{O})$ такая, что

$$(g, \psi) = (-1)^{m+1} \int_{\mathcal{O}} g(t) \psi(t) dt, \quad \forall \psi \in L_2(\mathcal{O}).$$

Но $f = gh$, другими словами,

$$(f, \varphi) = (-1)^{(m+1)n} \int_{\mathcal{O}} g(t) \varphi^{(m+1, \dots, m+1)}(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

Нетрудно видеть (применяя, например, неравенство Гельдера и учитывая ограниченность $\mathcal{O}$), что $g(t) \in L_1(\mathcal{O})$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. $g(t)$ можно считать сколь угодно гладкой ($g(t) \in C^N(\mathcal{O})$) только при этом придется, может быть, увеличить m .

Первообразная обобщенной функции из $\mathcal{D}'$ *Первообразной* обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$ называется любая функция $g(t) \in \mathcal{D}'$ такая, что $g'(t) = f(t)$, то есть

$$(g'(t), \varphi(t)) = -(g(t), \varphi'(t)) = (f(t), \varphi(t)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (9.9)$$

Покажем, что первообразная всегда существует и единственна с точностью до произвольной постоянной. Из (9.9) видно, что функционал g единственным образом определяется на основных функциях $\psi(t) = \varphi'(t)$, то есть на подпространстве $M = \{\psi(t) : \psi(t) = \varphi'(t), \varphi \in \mathcal{D}\}$. Нетрудно видеть, что $M = \{\psi(t) \in \mathcal{D} : \int \psi(t) dt = 0\}$. Ибо

$$\int \psi(t) dt = \int \varphi'(t) dt = \varphi(t)|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

а с другой стороны, если $\int \psi(t) dt = 0$, то $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \psi(\tau) d\tau$. Заметим, что M – гиперплоскость (ее коразмерность равна 1). Действительно, возьмем любую $\omega(t) \in \mathcal{D}$, $\int \omega(t) dt = 1$ и пусть $\phi(t) \in \mathcal{D}$. Имеем

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left(\phi(t) - \omega(t) \int \phi(t) dt \right) + \omega(t) \int \phi(t) dt = \\ &= (\varphi_\phi(t))' + \omega(t) \int \phi(t) dt, \end{aligned}$$

здесь $(\varphi_\phi(t))' = \phi(t) - \omega(t) \int \phi(t) dt \in M$. Теперь, чтобы продолжить g с гиперплоскости M на все $\mathcal{D}$, достаточно задать его (произвольным числом C) на основной функции $\omega(t)$, то есть положить $(g, \omega) = C$. И мы получили

$$(g, \phi) = (g, \varphi'_\phi(t)) + (g, \omega) \int \phi(t) dt = -(f, \varphi_\phi) + C \int \phi(t) dt.$$

Обратное утверждение проверьте сами.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что каждая обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$ обладает единственной первообразной $u \in \mathcal{D}'$ порядка m (с точностью до многочлена степени $m - 1$). Другими словами, что общее решение в $\mathcal{D}'$ уравнения $y^{(m)} = f$ имеет вид $y(t) = u(t) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k t^k$, с произвольными постоянными c_k , $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

УКАЗАНИЕ. Примените индукцию по m .

Носитель обобщенной функции Пусть $\mathcal{O}$ – открытое множество, тогда система открытых множеств $\{U_m, m = 1, 2, \dots\}$ называется *локально конечным покрытием* $\mathcal{O}$, если

1. $U_m \subseteq \mathcal{O}$;
2. $\bigcup_m U_m = \mathcal{O}$;
3. любой компакт K из $\mathcal{O}$ имеет непустое пересечение лишь с конечным числом множеств из системы $\{U_m, m = 1, \dots\}$.

ТЕОРЕМА 9.2 (О РАЗБИЕНИИ ЕДИНИЦЫ). Пусть $\mathcal{O}$ открытое множество в $\mathbb{R}^n$ (это может быть и само $\mathbb{R}^n$) и открытые ограниченные области $U_1, \dots, U_m, \dots$ образуют локально конечное покрытие $\mathcal{O}$. Тогда существует семейство функций $\{e_m(t) \in \mathcal{D}, m = 1, 2, \dots\}$ такое, что

1. $0 \leq e_m(t) \leq 1$ при любом $m = 1, 2, \dots$;
2. $e_m(t) = 0$ вне области U_m , ($m = 1, 2, \dots$);
3. $e_1(t) + e_2(t) + \dots + e_m(t) + \dots \equiv 1, t \in \mathcal{O}$.

Число слагаемых, отличных от нуля, в последнем равенстве при каждом t , в силу (2), конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим сначала систему областей $\{V_m\}$, тоже образующую локально конечное покрытие $\mathcal{O}$ и такую, что $\bar{V}_m \subset U_m$. Заметим, что дополнение к области $\bigcup_{m=2}^{\infty} U_m$ есть замкнутое множество $F_1 \subset U_1$. В качестве V_1 возьмем область, содержащую F_1 и содержащуюся вместе со своим замыканием в U_1 , ($F_1 \subseteq \bar{V}_1 \subset U_1$).

Пусть области $V_1, \dots, V_{m-1}$ уже построены, так что $\bar{V}_k \subset U_k$, $k = 1, \dots, m - 1$, и $V_1, \dots, V_{m-1}, U_m, U_{m+1}, \dots$ есть локально конечное покрытие $\mathcal{O}$. Дополнение к области $(\bigcup_{k=1}^{m-1} V_k) \cup (\bigcup_{k=m+1}^{\infty} U_k)$ есть замкнутое множество F_m , которое целиком покрывается областью U_m . В качестве V_m возьмем область, содержащую F_m и содержащуюся вместе со своим замыканием в U_m , и т.д.

Согласно лемме 8.1 существует функция $\varphi_m(t) \in \mathcal{D}$, всюду заключенная между 0 и 1, равная 1 в $\bar{V}_m$ и 0 вне U_m . Положим $h(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t)$. Эта функция существует при всех $t \in \mathcal{O}$ и не меньше 1 там. Теперь функции

$$e_m(t) = \frac{\varphi_m(t)}{h(t)}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (9.10)$$

удовлетворяют всем условиям. Теорема доказана.

ЛЕММА 9.2. *Во всякое покрытие открытого множества $\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha$ можно вписать локально конечное (счетное) покрытие $\mathcal{O} = \bigcup_m \mathcal{O}'_m$ (то есть каждое $\mathcal{O}'_m$ вложено в некоторое $\mathcal{O}_\alpha$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество открытых множеств $\{Q_k\}$ – компактно исчерпывающее покрытие $\mathcal{O}$, то есть $\mathcal{O} = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$, причем

$$\dots \subseteq Q_k \subseteq Q_{k+1} \subseteq \dots, \quad k = 0, 1, \dots$$

Положим $K_k = \bar{Q}_k \setminus Q_{k-1}$, $k = 1, \dots$, $K_0 = \bar{Q}_0$. Для каждого $t \in K_k \setminus K_{k-1}$ выберем U_t – окрестность точки t такую, чтобы

$$U_t \subset \mathcal{O}_\alpha; \quad U_t \subseteq \mathcal{O}; \quad U_t \cap K_{k-1} = \emptyset.$$

Теперь из покрытия компакта K_0 окрестностями U_t выбираем конечное подпокрытие, далее делаем тоже самое с каждым K_k . Полученное покрытие и будет искомым. (Проверьте это сами.)

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Говорят, что f обращается в нуль в окрестности точки $t \in \mathbb{R}^n$, если существует ее окрестность U_t такая, что $(f, \varphi) = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}$, $\text{supp } \varphi \subset U_t$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.1. *Если $f \in \mathcal{D}'$ обращается в нуль в окрестности каждой точки открытого множества $\mathcal{O}$, то*

$$(f, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } \varphi \subset \mathcal{O}.$$

Действительно, в каждой точке $t \in \mathcal{O}$ существует окрестность U_t такая, что $(f, \xi) = 0$, $\xi \in \mathcal{D}$, $\text{supp } \xi \subset U_t$. Множества U_t покрывают $\mathcal{O}$. Пусть $\{\mathcal{O}_m\}$ – вписанное локально конечное покрытие и $\{e_m(t)\}$ – соответствующее разбиение единицы. Если $\text{supp } \varphi \subset \mathcal{O}$, то

$$(f, \varphi) = \left(f(t), \varphi(t) \sum_{m=1}^{\infty} e_m(t) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} (f(t), e_m(t) \varphi(t)) = 0.$$

Поскольку носитель φ – компакт в $\mathcal{O}$, а покрытие локально конечно, то в сумме присутствуют (для каждой конкретной φ) лишь конечное число слагаемых. Поэтому знак суммы вынесен за знак функционала. Утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Носителем обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (пишем $\text{supp } f$) называется множество $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – открытое множество, на котором f обращается в нуль. Отметим, что носитель – всегда замкнутое множество.

Обобщенные функции с компактным носителем

ТЕОРЕМА 9.3. *Обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда она продолжается до непрерывного функционала на $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (то есть когда $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $\text{supp } f = K$, где K – компакт и функция $\eta(t) \in \mathcal{D}$ такая, что $\eta(t) = 1$ при $t \in K$. Тогда продолжим линейно функционал f с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{E}$ по формуле: для любой $\varphi(t) \in \mathcal{E}$ имеем $(f(t), \eta(t)\varphi(t)) = (f, \varphi)$. Покажем, что он непрерывен в $\mathcal{E}$. Так как $\eta(t)\varphi(t)$ для любой $\varphi(t) \in \mathcal{E}$ принадлежит $\mathcal{D}(K_1)$, где $K_1 = \text{supp } \eta$, то согласно (9.1) существуют постоянные C, m такие, что

$$\begin{aligned} |(f, \varphi)| &= |(f(t), \varphi(t)\eta(t))| \leq C \max_{|j| \leq m} \sup_{t \in K_1} |(\eta\varphi)^{(j)}| \leq \\ &\leq C_1 \max_{|j| \leq m} \sup_{t \in K_1} |\varphi^{(j)}(t)|, \end{aligned}$$

(в последнем неравенстве мы воспользовались формулой Лейбница и стандартными оценками производных функции $\eta(t)$). Таким образом, продолженный на $\mathcal{E}$ функционал f ограничен там некоторой полунормой (см. (8.1)), следовательно, он непрерывен на $\mathcal{E}$. Его совпадение с f на $\mathcal{D}$ очевидно.

Достаточность. Пусть $f \in \mathcal{E}'$; тогда существует компакт K (например $\{|t| \leq N\}$) такой, что

$$|(f, \varphi)| \leq C \max_{|j| \leq m} \sup_{t \in K} |\varphi^{(j)}(t)|$$

для некоторых C и m . Отсюда следует, что если $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus K$, то $(f, \varphi) = 0$. То есть f сосредоточен на компакте.

ТЕОРЕМА 9.4. Пусть обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$. Если $\text{supp } f = \{0\}$, то $f(t) = \sum_{|j| \leq N} c_j \delta^{(j)}(t)$ для некоторых N и c_j , $|j| \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва заметим, что так как f имеет компактный носитель, то $f \in \mathcal{E}'$ и ограничен по некоторой норме $\mathcal{E}$, то есть

$$|(f, \psi)| \leq C \max_{|j| \leq M} \sup_{t \in K} |\psi^{(j)}(t)| \quad \forall \psi \in \mathcal{E}. \quad (9.11)$$

Пусть $\eta(t) \in \mathcal{D}$ и $\eta(t) = 1$ при $|t| \leq \frac{1}{2}$ и $\eta(t) = 0$ при $|t| \geq 1$. Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ и любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} (f(t), \varphi(t)) &= \left(f(t), \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \varphi(t) \right) = \\ &= \left(f(t), \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) (\varphi(t) - T_\varphi^N(t)) \right) + \left(f(t), \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) T_\varphi^N(t) \right), \end{aligned} \quad (9.12)$$

где многочлен Тейлора $T_\varphi^N(t) = \sum_{|j| \leq N} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} t^j$. Первое слагаемое справа в (9.12) оценим по формуле (9.11), считая N достаточно большим (скажем $N > 2M + 1$). Полагая $\varepsilon < 1$, имеем (пользуясь формулой Лейбница)

$$\begin{aligned} \left| \left(f(t), \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) (\varphi(t) - T_\varphi^N(t)) \right) \right| &\leq \\ &\leq C \max_{|j| \leq M} \sup_{|t| < 1} \left| \left(\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) (\varphi(t) - T_\varphi^N(t)) \right)^{(j)} \right| \leq \\ &\leq \frac{C_1}{\varepsilon^M} \max_{|j| \leq M} \sup_{|t| < \varepsilon} |(\varphi(t) - T_\varphi^N(t))^{(j)}| \leq C_2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Мы воспользовались еще тем, что $\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = 0$ при $|t| > \varepsilon$. Второе слагаемое справа в (9.12) не зависит от $\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$. И мы имеем

$$(f, \varphi) = \sum_{|j| \leq N} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} (f(t), t^j \eta(t))$$

Так как ε любое сколь угодно малое, то мы имеем

$$(f, \varphi) = \sum_{|j| \leq N} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} C_j = \left(\sum_{|j| \leq N} c_j \delta^{(j)}(t), \varphi(t) \right).$$

Теорема доказана.

Примером обобщенной функции, носитель которой расположен на поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ является *простой слой*. Эта обобщенная функция $\mu\delta_S$ задается формулой

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(t)\varphi(t) ds, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

где $\mu(t) \in L_{1,\text{loc}}(S)$ (то есть $\mu(t)$ задана только на поверхности S и локально интегрируема на ней).

Обобщением производной дельта функции является *двойной слой* на поверхности. Пусть S – кусочно гладкая (ориентированная) поверхность, $\bar{n}$ – нормаль к ней и $\mu(t)$ – локально интегрируемая функция на поверхности S . Введем обобщенную функцию

$$\left(-\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_S), \varphi\right) = \int_S \mu(t) \frac{\partial \varphi(t)}{\partial n} ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Нетрудно видеть, что носитель двойного (и простого) слоя сосредоточен на поверхности S .

УПРАЖНЕНИЯ. Пусть S гладкая ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пусть S_+ – область в $\mathbb{R}^n$, расположенная по ту сторону от поверхности S , в которую “смотрит” нормаль, а S_- – область по другую сторону нормали. Если функция $f(t) \in C^1(\bar{S}_+) \cap C^1(\bar{S}_-)$, то через

$$[f]_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0, t \in S_+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0, t \in S_-} f(t), \quad t_0 \in S,$$

обозначаем скачок ее в точке t_0 . Докажите, что

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\} + [f]_S \cos(\bar{n}, t_i) \delta_S, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\bar{n}$ – нормаль к S . Здесь $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\}$ – классическая (обычная) производная, $[f]_S(t)$ – скачок f в точке t на поверхности S , а $\cos(\bar{n}, t_i)$ – направляющие косинусы нормали.

(ШПАРГАЛКА). Рассмотрим частный случай. Пусть $n = 2$ и поверхность S задана формулой $t_1 = y(t_2)$; тогда для $\varphi(t) \in \mathcal{D}$

имеем

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}, \varphi \right) &= \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \right) \\
 &= \int dt_2 \left\{ \int_{-\infty}^{y(t_2)} + \int_{y(t_2)}^{\infty} \right\} (-\varphi'_{t_1}) f(t_1, t_2) dt_1 = \\
 &= \int dt_2 \left[-\varphi f|_{-\infty}^{y(t_2)-0} + \int_{-\infty}^{y(t_2)} \{f'_{t_1}\} \varphi dt_1 - \right. \\
 &\quad \left. - \varphi f|_{y(t_2)+0}^{\infty} + \int_{y(t_2)}^{\infty} \{f'_{t_1}\} \varphi dt_1 \right] = \\
 &= \iint \{f'_{t_1}\} \varphi dt + \int [f]_{(y(t_2), t_2)} \varphi(y(t_2), t_2) dt_2 \\
 &= (\{f'_{t_1}\}, \varphi) + \int_S [f]_{(y(t_2), t_2)} \varphi(y(t_2), t_2) \cos(\bar{n}, t_1) ds.
 \end{aligned}$$

Мы учли, что на поверхности $dt_2 = \cos(\bar{n}, t_1) ds$.

Пусть теперь $f(t) \in C^2(\bar{S}_+) \cap C^2(\bar{S}_-)$. Докажите, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} \right\} + \left[\frac{\partial f}{\partial t_i} \right]_S \cos(\bar{n}, t_j) \delta_S + \frac{\partial}{\partial t_j} ([f]_S \cos(\bar{n}, t_i) \delta_S).$$

Пользуясь формулой $\frac{\partial}{\partial \bar{n}} = \sum_{i=1}^n \cos(\bar{n}, t_i) \frac{\partial}{\partial t_i}$, выведите отсюда формулу Грина

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial \bar{n}} ([f]_S \delta_S). \quad (9.13)$$

Последовательности обобщенных функции Пусть $f_k \in \mathcal{D}'$, $k = 1, 2, \dots$. Будем говорить, что эта последовательность сходится в $\mathcal{D}'$, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ существует предел $(f_k, \varphi) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} C_\varphi$.

ТЕОРЕМА 9.5 (О полноте $\mathcal{D}'$). Пусть $f_k(\varphi) \in \mathcal{D}'$ сходится к функционалу C_φ , тогда $C_\varphi = (f_0, \varphi)$, где $f_0 \in \mathcal{D}'$.

Действительно, f_0 – линейный функционал, и так как $\mathcal{D}$ бочечно, то по следствию 1 к теореме 6.3 функционал f_0 непрерывен, так что $f_0 \in \mathcal{D}'$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f_0$ в $\mathcal{D}'$, тогда $D^j f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} D^j f_0$ в $\mathcal{D}'$.

Действительно,

$$\begin{aligned}(D^j f_0, \varphi) &= (-1)^{|j|} (f_0, D^j \varphi) = (-1)^{|j|} \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, D^j \varphi) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (D^j f_k, \varphi).\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 9.6. Пусть $f_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$, то есть

$$(f_n, \varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и норма $p_{\{N_k\}}$ в $\mathcal{D}$ такие, что

$$|(f_n, \varphi)| \leq \varepsilon_n p_{\{N_k\}}(\varphi), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (9.14)$$

(см. (8.5)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6.3 найдем норму $p_{\{N_k^1\}}$ такая, что

$$|(f_n, \varphi)| \leq p_{\{N_k^1\}}(\varphi), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (9.15)$$

Следовательно, все f_n продолжаются как линейные непрерывные функционалы на $\overline{\mathcal{D}}_{p_1}$ (пополнение $\mathcal{D}$ по норме p_1), где через p_1 обозначена норма $P_{\{N_k^1\}}$. Причем неравенство (9.15) сохраняется для всех φ из этого пополнения. Согласно лемме 8.3 находим норму $p_2 \equiv p_{\{N_k^2\}}$ такую, что вложение $\mathcal{D}_{p_2} \hookrightarrow \mathcal{D}_{p_1}$ вполне непрерывно. Положим $U = \{\varphi \in \mathcal{D} : p_{\{N_k^2\}}(\varphi) \leq 1\}$. Достаточно доказать, что f_n равномерно (при $n \rightarrow \infty$) сходятся к нулю на U . Пусть A замыкание U в $\overline{\mathcal{D}}_{p_1}$ (оно компактно) и задано $\varepsilon > 0$. Ясно, что система открытых множеств $U_\varphi = \{\psi \in \overline{\mathcal{D}}_{p_1} : p_{\{N_k^1\}}(\psi - \varphi) < \varepsilon\}$, $\varphi \in \mathcal{D}$, покрывает A . Пусть $U_{\varphi_1}, \dots, U_{\varphi_Q}$ — его конечное покрытие. Выберем N таким, чтобы $|(f_n, \varphi_i)| \leq \varepsilon$ при $n > N$, $i = 1, 2, \dots, Q$. Тогда если $\varphi \in U \subset A$, то

$$|(f_n, \varphi)| \leq |(f_n, (\varphi - \varphi_{i_0}))| + |(f_n, \varphi_{i_0})| \leq 2\varepsilon,$$

что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема останется справедливой, если последовательность f_n заменить на произвольную направленность f_α , $\alpha \in I$. Только нужно потребовать, чтобы для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ имела

место оценка $|(f_\alpha, \varphi)| < C_\varphi$ при $\alpha \in I$. (В этом случае мы также можем воспользоваться теоремой 6.3.)

Отметим, что если $I = [1, +\infty)$ и для $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ функция (f_α, φ) непрерывна по $\alpha \in I$, то при условии существования предела $(f_\alpha, \varphi) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} C_\varphi$ указанное выше условие выполняется автоматически.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f_k \rightarrow f_0$ в $\mathcal{D}'$, а $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ в $\mathcal{D}$ при $k \rightarrow \infty$; тогда

$$(f_k, \varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (f_0, \varphi_0). \quad (9.16)$$

Действительно, в силу соотношения

$$(f_k - f_0, \varphi_k - \varphi_0) = (f_k, \varphi_k) - (f_0, \varphi_k) + (f_k - f_0, \varphi_0)$$

достаточно доказать (9.16) при $f_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$. Теперь, так как $f_k \rightarrow 0$, то существует норма $p_{\{N_k\}}$ в $\mathcal{D}$ так, что выполнено (9.14), а так как последовательность $\varphi_k \rightarrow 0$, то начиная с некоторого номера, она попадает в окрестность нуля, определяемую этой нормой, то есть $p_{\{N_k\}}(\varphi_k) < C$ для некоторой постоянной C . Теперь из (9.14) следует, что для любого ε существует M так, что $|(f_k, \varphi_k)| \leq C\varepsilon$ при $k > M$.

ЛЕММА 9.3. Если $f_k \rightarrow f_0$ в $\mathcal{D}'$ и $g_k(t) \rightarrow g_0(t)$ в $\mathcal{E}$, то $g_k f_k \rightarrow g_0 f_0$ в $\mathcal{D}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого $\varphi \in \mathcal{D}$ при $k \rightarrow \infty$ выполнено соотношение $g_k \varphi \rightarrow g_0 \varphi$ в $\mathcal{D}$. Тогда по предыдущему следствию

$$(g_k f_k, \varphi) = (f_k, g_k \varphi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (f_0, g_0 \varphi) = (g_0 f_0, \varphi).$$

УПРАЖНЕНИЯ. 1) Пусть $\eta(t) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $\int \eta(t) dt = 1$; тогда

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (9.17)$$

Действительно, для любой $\varphi(t) \in \mathcal{D}$ имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \varphi(t) dt &= \int \eta(t) \varphi(\varepsilon t) dt = \int \eta(t) [\varphi(\varepsilon t) - \varphi(0)] dt + \\ &+ \varphi(0) \int \eta(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(0) = (\delta(t), \varphi(t)). \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что функция $[\varphi(\varepsilon t) - \varphi(0)]$ ограничена в $\mathbb{R}^n$ а на любом компакте стремится к нулю, поэтому $\int \eta(t)[\varphi(\varepsilon t) - \varphi(0)] dt \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого t .

2) Пользуясь полученным результатом, докажите, что при $\varepsilon \rightarrow +0$ функции

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{t^2}{4\varepsilon}}, \quad \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2}, \quad \frac{\varepsilon}{\pi t^2} \sin^2 \frac{t}{\varepsilon}$$

стремятся к $\delta(t)$.

Докажите, что $\frac{1}{\pi t} \sin \frac{t}{\varepsilon}$ стремится к $\delta(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите $\int \frac{\varphi(t)}{\pi t} \sin \frac{t}{\varepsilon} dt$ и разбейте область интегрирования на части $(-\infty, -A)$, $(-A, A)$ и (A, ∞) . Далее, воспользуйтесь известными фактами анализа:

$$\int \frac{\sin(Nt)dt}{t} = \pi,$$

$$\int_{-A}^{+A} \eta(t) \sin(Nt) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{для} \quad \eta(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$$

(см., например, [1]).

3) Докажите, что $\frac{1}{t+i\varepsilon} \rightarrow P\frac{1}{t} - i\pi\delta(t)$.

Решение приведено выше (формула Сохоцкого).

4) Пусть $s_k(t) \in L_{1,\text{loc}}$, $k = 1, 2, \dots$, так что на любом компакте $K \in \mathbb{R}^n$ эта последовательность сходится равномерно к функции $s(t)$. Докажите, что для любого мультииндекса j при $k \rightarrow \infty$ имеем $D^j s_k(t) \rightarrow D^j s(t)$ в $\mathcal{D}'$.

УКАЗАНИЕ. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$(s_k, \varphi) = \int_{\text{supp } \varphi} s_k(t) \varphi(t) dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int s(t) \varphi(t) dt = (s, \varphi).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)$ локально интегрируемых функций сходится равномерно на каждом компакте. Тогда его можно почленно дифференцировать (в $\mathcal{D}'$) любое число раз и соответствующие ряды будут сходиться в $\mathcal{D}'$.

5) Докажите, что $\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{imt} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi m)$.

УКАЗАНИЕ. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi}$ с периодом 2π и продифференцируйте ее (в $\mathcal{D}'$) два раза.

(ШПАРГАЛКА: $f(t) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2} e^{imt}$.)

6) Докажите формулу $t^p \delta^{(q)}(t) = \frac{(-1)^q q!}{(q-p)!} \delta^{(q-p)}(t)$, если $q \geq p$, и 0 в противном случае. В частности, $t\delta(t) = 0$, $t\delta'(t) = -\delta(t)$.

7) Решите уравнения $tu(t) = 0$, $t^2 u(t) = 0$, $t^p u(t) = 0$.

Прямое произведение обобщенных функций Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Определим билинейный функционал $h: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathbb{C}$ по формуле $\{\varphi, \psi\} \mapsto (f, \varphi)(g, \psi)$. Зададимся вопросом, существует ли линейное отображение $\gamma: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \mapsto \mathbb{C}$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) & \xrightarrow{\text{билин.}} & \mathbb{C} \\ & \searrow \text{билин.} \quad \nearrow \gamma & \\ & \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}) & \end{array}$$

коммутативна? Введем отображение $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле $\varphi(x, y) \mapsto \psi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$. Оно непрерывно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.2. Функция $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, при этом для любого мультииндекса j имеем

$$D^j \psi(x) = (g(y), D_x^j \varphi(x, y)). \quad (9.18)$$

Отображение $\varphi(x, y) \mapsto \psi(x)$ непрерывно из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Действительно, так как при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ функция $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, то $\psi(x)$ определена в $\mathbb{R}^n$ и финитна. Теперь фиксируем точку x , и пусть $x_k \rightarrow x$; тогда $\varphi(x_k, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Так как функционал $g(y)$ непрерывен, то отсюда следует, что

$$\psi(x_k) = (g(y), \varphi(x_k, y)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g(y), \varphi(x, y)) = \psi(x),$$

то есть $\psi(x)$ – непрерывная функция. Покажем, что у нее существует производная по x_1 . Действительно, пусть $h = (h_1, 0, \dots, 0)$. Легко видеть, что

$$\frac{1}{h_1} (\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y)) \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_1} \quad \text{в } \mathcal{D}(\mathbb{R}^m).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h_1} &= \frac{1}{h_1} [(g(y), \varphi(x+h, y)) - (g(y), \varphi(x, y))] \xrightarrow{h \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \left(g(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Поэтому $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1} = (g(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_1})$. Далее по индукции доказываем (9.18). Из (9.18) непосредственно следует непрерывность отображения $\varphi(x, y) \mapsto \psi(x)$.

Введем теперь обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ формулами:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) & \xrightarrow{fg} (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \\ \varphi(x, y) & \xrightarrow{gf} (g(y), (f(x), \varphi(x, y))). \end{cases}$$

Они совпадают на всех основных функциях вида $\varphi(x)\psi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Далее мы покажем (лемма 9.4), что линейная оболочка таких функций плотна во всем пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Поэтому мы определили одну и ту же обобщенную функцию, называемую *прямым произведением* и обозначаемую как $f(x) \times g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Она действует по формуле

$$\begin{aligned} (f(x) \times g(y), \varphi(x, y)) &= (f(x), (g(y), \varphi(x, y))) = \\ &= (g(y), (f(x), \varphi(x, y))). \end{aligned} \quad (9.19)$$

ЛЕММА 9.4. *Для любой $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ существует последовательность основных функций вида*

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{\ell=1}^N u_\ell(x) v_\ell(y), \quad u_\ell \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad v_\ell(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m),$$

сходящихся к φ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Действительно, пусть $\text{supp } \varphi \subset \{|x|^2 + |y|^2 < R^2\}$. По теореме Вейерштрасса существуют полиномы $P_k(x, y)$, $k = 1, \dots$, такие, что $|D^\alpha \varphi - D^\alpha P_k| < \frac{1}{k}$ при всех $|\alpha| \leq k$ и $|x|^2 + |y|^2 \leq 8R^2$. Пусть теперь $\eta(x)$ и $\tau(y)$ – основные функции, равные 1 в шаре радиуса R и нулю вне шара радиуса $2R$. Тогда последовательность основных функций $\varphi_k(x, y) = \eta(x)\tau(y)P_k(x, y)$ будет искомой.

Основные свойства прямого произведения Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ и $h(z) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$.

1) Операция прямого произведения $f(x) \times g(y)$ линейна и непрерывна относительно каждого своего аргумента. Например, если $f_k \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то $f_k(x) \times g(y) \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Докажите.

2) Ассоциативность: $f(x) \times [g(y) \times h(z)] = [f(x) \times g(y)] \times h(z)$. Докажите.

3) Дифференцирование: $D_x^\alpha [f(x) \times g(y)] = D^\alpha f(x) \times g(y)$. Проверьте.

4) Умножение на функцию: $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Имеем $a(x)[f(x) \times g(y)] = a(x)f(x) \times g(y)$. Покажите.

5) Сдвиг: $(f \times g)(x + h, y) = f(x + h) \times g(y)$. Докажите.

6) Если $\text{supp } f(x) = A$, $\text{supp } g(y) = B$, то $\text{supp}(f(x) \times g(y)) = A \times B$. Покажите.

7) Будем говорить, что обобщенная функция $g(x, y)$ не зависит от y , если она представляется в виде $f(x) \times 1(y)$. В этом случае из (9.19) получаем равенство

$$\left(f(x), \int \varphi(x, y) dy \right) = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}). \quad (9.20)$$

Докажите, что $\delta(t) = \delta(t_1) \times \delta(t_2) \times \cdots \times \delta(t_n)$ (здесь $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$).

Свертка обобщенных функции Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – локально суммируемые функции в $\mathbb{R}^n$. Если интеграл $\int f(\xi)g(x - \xi) d\xi$ существует для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$, то он называется *сверткой функций* f и g и обозначается так:

$$(f * g)(x) = \int f(\xi)g(x - \xi) d\xi = \int g(\tau)f(x - \tau) d\tau = (g * f)(x).$$

Отметим, что если $f, g \in L_{1,\text{loc}}$ и $\text{supp } f \subset A$, $\text{supp } g \subset B$, причем множества A и B таковы, что для любого $R > 0$ множество

$$T_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in A, y \in B, |x + y| \leq R\} \quad (9.21)$$

ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$, то свертка существует и $f * g \in L_{1,\text{loc}}$. Действительно, пользуясь теоремой Фубини, при всех $R > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{|x| < R} |f * g| dx &\leq \iint_{|x| < R} |f(\xi)| |g(x - \xi)| d\xi dx \leq \\ &\leq \int_{T_R} |f(\xi)| |g(\eta)| d\xi d\eta < \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что если f (или g) финитна, то T_R ограничено.

Другой пример. Пусть $f \in L_p$, $g \in L_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$; тогда неравенство Юнга $\|f * g\|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$ показывает существование свертки и в этом случае.

Наша задача – дать подходящее определение свертки для обобщенных функций.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и свертка (“обычная”) $f * g$ существует и представляет собой локально интегрируемую функцию; тогда она определяет регулярный функционал

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \int \varphi(x) \int f(\xi) g(x - \xi) d\xi dx = \\ &= \int f(\xi) \int g(x - \xi) \varphi(x) dx d\xi = \\ &= \int f(\xi) \int g(\eta) \varphi(\xi + \eta) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались теоремой Фубини. Таким образом, формально

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (9.22)$$

Эта формула является ключевой для определения свертки обобщенных функций. При этом очевидной трудностью является тот факт, что функция $\varphi(x + y)$, вообще говоря, не принадлежит $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ и правой части (9.22) нужно еще придать определенный смысл. Ясно, что это можно сделать не для любой пары обобщенных функций f и g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что последовательность функций $\{\eta_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), k = 1, \dots\}$ сходится к 1 в $\mathbb{R}^n$, если

1. для любого компакта $K \Subset \mathbb{R}^n$ найдется номер $N = N(K)$ такой, что $\eta_k(x) = 1$ при $k \geq N$ и $x \in K$;

2. функции $\{\eta_k(x)\}$ равномерно ограничены вместе со всеми своими производными,

$$|D^j \eta_k(x)| < c_j, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots$$

Такие последовательности всегда существуют, например, $\eta_k(x) = \eta(\frac{x}{k})$, где $\eta(x) \in \mathcal{D}$, $\eta(x) = 1$ при $|x| < 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВЕРТКИ. Пусть $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Если для любой $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y))$, не зависящий от выбора последовательности функций $\{\eta_k(x, y)\}$, сходящихся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$, то этот предел определяет линейный и непрерывный функционал над $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то есть обобщенную функцию из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, называемую *сверткой* обобщенных функций f и g и обозначаемую $f * g$.

То, что этот предел действительно определяет обобщенную функцию следует из “полноты” $\mathcal{D}'$ (см. теорему 9.5).

Аналогично определяется свертка любого числа обобщенных функций. Например, пусть f, g, h из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\{\eta_k\}$ – последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{3n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{3n}$. Тогда сверткой $f * g * h$ называется функционал

$$(f * g * h, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \times g(y) \times h(z), \eta_k(x; y; z)\varphi(x + y + z)),$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, если этот предел существует.

Свойства свертки 1) Коммутативность свертки. Если свертка $f * g$ существует, то существует и $g * f$ и они равны, $f * g = g * f$. Это прямо вытекает из определения свертки и коммутативности прямого произведения.

2) Носитель свертки. Пусть f и g из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и пусть $\text{supp } f \subset A$, $\text{supp } g \subset B$. Если свертка $f * g$ существует, то $\text{supp}(f * g) \subset \overline{A + B}$. Действительно, пусть $\text{supp } \varphi \cap \overline{A + B} = \emptyset$. Имеем

$$(f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = (f(x) \times g(y), \psi_k(x, y)),$$

где $\psi_k = \eta_k(x, y)\varphi(x + y)$. Заметим, что $\text{supp } \psi_k \subset \{(x, y): x + y \in \text{supp } \varphi\}$, и это замкнутое множество в силу компактности носителя φ . Ясно, что $(A \times B) \cap \text{supp } \psi_k = \emptyset$, ибо если бы это было не так, то некоторую точку носителя φ можно было бы представить как сумму точек из A и B , что противоречит условию $\text{supp } \varphi \cap \overline{A + B} = \emptyset$.

3) Свертка с δ : $f * \delta = \delta * f = f$? Докажите.

4) Ассоциативность свертки. Вообще говоря операция свертки не ассоциативна. Например,

$$(1 * \delta') * \Theta = 1' * \Theta = 0 * \Theta, \quad \text{но} \quad 1 * (\delta' * \Theta) = 1 * \delta = 1.$$

(Как вы думаете, в чем тут дело?) Однако если существует $f * g * h$ и существует $f * g$, то существует $(f * g) * h = f * g * h$. Доказательство основано на том факте, что если для (двойной) последовательности $d_{i,j}$ существует кратный (двойной) предел $\lim_{i,j \rightarrow \infty} d_{i,j}$ и при каждом j существует $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{i,j}$, то существует и повторный предел, и они равны. То есть $\lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} d_{i,j} = \lim_{i,j \rightarrow \infty} d_{i,j}$. Пусть $\eta_i(x; t)$ и $\chi_j(x; y)$ сходятся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$; тогда $\eta_i(x; y)\chi_j(x + y; z)$ сходятся к 1 в $\mathbb{R}^{3n}$ при $i, j \rightarrow \infty$. Положим

$$d_{i,j} = (f(x) \times g(y) \times h(z), \eta_i(x; y)\chi_j(x + y; z)\varphi(x + y + z)),$$

тогда по условию (из существования свертки $f * g * h$)

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} d_{i,j} = (f * g * h, \varphi).$$

Так как при каждом j определена функция

$$\psi_j(t) = (h(z), \chi_j(t; z)\varphi(t + z)) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

то из существования свертки $f * g$ следует (при каждом j) существование следующего предела:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} d_{i,j} &= \lim_{i \rightarrow \infty} (f(x) \times g(y) \times h(z), \eta_i(x; y)\chi_j(x + y; z)\varphi(x + y + z)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (f(x) \times g(y), \eta_i(x; y)(h(z), \chi_j(x + y; z)\varphi(x + y + z))) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (f(x) \times g(y), \eta_i(x; y)\psi_j(x + y)) = (f * g, \psi_j). \end{aligned}$$

А потому существует и предел

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} d_{i,j} &= \lim_{j \rightarrow \infty} ((f * g)(t), \psi_j(t)) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} ((f * g)(t), (h(z), \chi_j(t; z)\varphi(t + z))) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} ((f * g)(t) \times h(z), \chi_j(t; z)\varphi(t + z)) = \\ &= ((f * g) * h, \varphi). \end{aligned}$$

Что и требовалось.

5) Дифференцирование свертки. Если свертка $f * g$ существует, то для любого мультииндекса $j = (j_1, \dots, j_n)$ существуют свертки $(D^j f) * g$ и $f * (D^j g)$, причем

$$D^j(f * g) = (D^j f) * g = f * (D^j g). \quad (9.23)$$

Это достаточно доказать для первых производных, скажем для $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$. Сперва заметим, что если $\eta_k(x) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathbb{R}^n$, то $\eta'_k(x) + \eta_k(x) \rightarrow 1$ в $\mathbb{R}^n$. Здесь штрих означает производную первого порядка по одному из аргументов.

ЛЕММА 9.5. Если $f * g$ существует и $\eta_k(x, y) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathbb{R}^{2n}$, то

$$(f(x) \times g(y), \eta'_k(x, y)\varphi(x + y)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & (f(x) \times g(y), \eta'_k(x, y)\varphi(x + y)) = \\ & = (f(x) \times g(y), (\eta_k(x, y) + \eta'_k(x, y))\varphi(x + y)) - \\ & \quad - (f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (f * g, \varphi) - (f * g, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь имеем

$$\begin{aligned} & (f'(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = \\ & = -(f(x) \times g(y), \eta'_k(x, y)\varphi(x + y) + \eta_k(x, y)\varphi'(x + y)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -(f * g, \varphi'(x)) = ([f * g]', \varphi). \end{aligned}$$

Действуя далее по индукции, получаем соотношение (9.23).

6) Линейность свертки. Операция $f \mapsto f * g$ линейна на множестве тех обобщенных функций f , для которых свертка с g существует. Это непосредственно следует из определения свертки и из линейности операции $f \mapsto f \times g$. Заметим, что операция $f \mapsto f * g$, вообще говоря, не является непрерывной из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$. (Рассмотрите отображение $\delta(x - k) \mapsto \delta(x - k) * 1$.)

7) Сдвиг свертки. Если свертка $f * g$ существует, то существует и свертка $f(x+h) * g(x)$ при всех $h \in \mathbb{R}^n$, причем $f(x+h) * g(x) = (f * g)(x+h)$.

Другими словами, операции сдвига и свертки коммутируют. Такие операторы называют *трансляционно-инвариантными*.

Некоторые достаточные условия существования свертки Пусть A и B – некоторые множества в $\mathbb{R}^n$ и $f(x), g(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, причем $\text{supp } f \subset A$ и $\text{supp } g \subset B$. Положим

$$T_{A,B}^R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in A, y \in B, |x + y| < R\}. \quad (9.24)$$

Напомним, что через A^ε обозначается ε -окрестность множества A .

ТЕОРЕМА 9.7. *Если для любого $R > 0$ множество $T_{A,B}^R$ ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$, то свертка $f * g$ существует и представляется в виде*

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \alpha(x)\beta(y)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (9.25)$$

где $\alpha(x), \beta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\begin{cases} \alpha(x) = 1 & \text{при } x \in A^\varepsilon, \alpha(x) = 0 \text{ при } x \notin A^{2\varepsilon}; \\ \beta(y) = 1 & \text{при } y \in B^\varepsilon, \beta(y) = 0 \text{ при } y \notin B^{2\varepsilon}. \end{cases} \quad (9.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ множество $T_{A^\varepsilon, B^\varepsilon}^R$ также ограничено. Поэтому для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ функция $\alpha(x)\beta(y)\varphi(x+y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Далее отметим, что какая бы ни была последовательность $\eta_k(x, y)$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$, найдется номер N такой, что

$$\eta_k(x, y) = 1 \quad \text{при } (x, y) \in \text{supp } \alpha(x)\beta(y)\varphi(x+y) \quad \text{и } k \geq N.$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\alpha(x)\beta(y)\varphi(x+y)) = \\ &= (f(x) \times g(y), \alpha(x)\beta(y)\varphi(x+y)). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\text{supp } f_m \subset A$, $\text{supp } g_m \subset B$ и $T_{A,B}^R$ ограничено при любом $R > 0$. Пусть еще $f_m \rightarrow f_0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $g_m \rightarrow g_0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f_m * g_m \rightarrow f_0 * g_0$ при $m \rightarrow \infty$.

Это непосредственно следует из (9.25) и свойства 1) прямого произведения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{E}'$, то свертка $f * g$ существует и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x + y))). \quad (9.27)$$

Действительно, прежде всего заметим, что носитель g лежит в некотором компакте, скажем K , и, кроме того, $(f(x), \varphi(x + y)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Пользуясь формулой (9.25), имеем

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= (f(x) \times g(y), \alpha(x)\beta(y)\varphi(x + y)) = \\ &= (g(y), (f(x), \alpha(x)b(y)\varphi(x + y))) = \\ &= (g(y), b(y)(f(x), \alpha(x)\varphi(x + y))) = \\ &= (b(y)g(y), (f(x), \varphi(x + y))) = (g(y), (f(x), \varphi(x + y))). \end{aligned}$$

Здесь мы положили, что $\beta(y) = 1$ на носителе $g(y)$ (нарисуйте чертеж и убедитесь, что это возможно).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, то свертка $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и формула (9.27) принимает вид $(f * eg)(x) = (g(y), f(x - y))$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Всякая $f \in \mathcal{D}'$ есть предел (в $\mathcal{D}'$) последовательности бесконечно дифференцируемых функций $f_m(x)$.

Действительно, пусть $\omega_m(x) = m\omega(mx)$, где $\omega(x)$ – “шапочка” ($\omega \in \mathcal{D}$, $\int \omega(\tau) d\tau = 1$). Положим $f_m = f * \omega_m$. Так как $\omega_m(x) \rightarrow \delta(x)$ в $\mathcal{D}'$, то по следствию 1 к теореме 9.7 $f_m = f * \omega_m \rightarrow f * \delta = f$ при $m \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 9.8. Всякая обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$ есть предел последовательности основных функций из $\mathcal{D}$, то есть $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}'$.

Действительно, пусть $f_m \in C^\infty$ сходится к f в $\mathcal{D}'$ и последовательность $\eta_N(x) \in \mathcal{D}_N$, причем $\eta_N(x) = 1$ при $|x| \leq N - 1$. Тогда последовательность $\{\eta_N(x)f_{m_N}(x)\}$ основных функций из $\mathcal{D}$, где $m_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, сходится к f в $\mathcal{D}'$, так как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\eta_N f_{m_N}, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} (f_{m_N}, \eta_N(x)\varphi(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} (f_{m_N}, \varphi) = (f, \varphi).$$

Конусы Конусом в $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в нуле) называется множество Γ такое, что если $x \in \Gamma$, то и $\lambda x \in \Gamma$ при всех $\lambda > 0$. Конус Γ называется *острым*, если существует гиперплоскость, имеющая с $\text{ch } \Gamma$ единственную общую точку ноль, причем этот конус лежит по одну сторону от нее (здесь $\overline{\text{ch } \Gamma}$ – замыкание выпуклой оболочки конуса Γ). Конус

$$\Gamma^* = \{x: (x, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \Gamma\} \quad (9.28)$$

является замкнутым выпуклым конусом с вершиной в нуле. Он называется *сопряженным конусом* к конусу Γ . Типичными примерами острых выпуклых конусов, часто встречающихся в моделях математической физики, являются:

а) положительный координатный угол

$$\mathbb{R}_+^n = \{x: x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}, \quad \text{причем} \quad (\mathbb{R}_+^n)^* = \overline{\mathbb{R}_+^n};$$

б) световой конус будущего в $\mathbb{R}^{m+1}$

$$V^+ = \{x: x = (x_0, \bar{x}): x_0 > |\bar{x}|\}, \quad \text{причем} \quad (V^+)^* = \overline{V^+}.$$

Через $\text{pr } \Gamma$ будем обозначать пересечение конуса Γ с единичной сферой и называть проекцией Γ на единичную сферу. Конус Γ' называется *компактным* в конусе Γ , если $\overline{\text{pr } \Gamma'} \subset \text{pr } \Gamma$, при этом пишем $\Gamma' \Subset \Gamma$.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что если Γ – выпуклый конус, то $\Gamma = \Gamma + \Gamma$.

ЛЕММА 9.6. Следующие условия эквивалентны:

- 1) конус Γ острый;
- 2) конус $\overline{\text{ch } \Gamma}$ не содержит целой прямой;
- 3) $\text{int } \Gamma^* \neq \emptyset$ (внутренность сопряженного конуса не пуста);
- 4) для любого конуса $C' \Subset \text{int } \Gamma^*$ существует число $\sigma = \sigma(C') > 0$ такое, что

$$(\xi, x) \geq \sigma |\xi| |x|, \quad \xi \in C', \quad x \in \overline{\text{ch } \Gamma}.$$

Попробуйте доказать это. (Доказательство см. в [2, гл. I, § 4].)

ЛЕММА 9.7. Пусть Γ – замкнутый выпуклый острый конус. Тогда для любого $R > 0$ существует такое число R' , что множество

$$T^R = \{(x, y): x \in \Gamma, y \in \Gamma, |x + y| \leq R\}$$

лежит в шаре $U_{R'} \subset \mathbb{R}^{2n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так. Тогда существуют последовательности x_m и y_m из Γ такие, что $|x_m| + |y_m| \rightarrow \infty$. Не нарушая общности, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $|x_m| \rightarrow \infty$. Но тогда обязательно и $|y_m| \rightarrow \infty$ (ибо $|x_m + y_m|$ ограничена). Не нарушая общности, можно также считать, что $\frac{|x_m|}{|y_m|} \rightarrow \ell$, $0 \leq \ell < \infty$ (если $\ell = \infty$, то поменяем местами x_m и y_m). Рассмотрим последовательности $\tilde{x}_m = \frac{x_m}{|x_m|}$ и $\tilde{y}_m = \frac{y_m}{|y_m|}$. Они принадлежат $\text{pr } \Gamma$. Переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $\tilde{x}_m \rightarrow \tilde{x}_0 \in \text{pr } \Gamma$ и $\tilde{y}_m \rightarrow \tilde{y}_0 \in \text{pr } \Gamma$. Так как

$$x_m + y_m = |x_m| \left(\frac{x_m}{|x_m|} + \frac{y_m}{|y_m|} \cdot \frac{|y_m|}{|x_m|} \right) < \infty,$$

то

$$\left(\frac{x_m}{|x_m|} + \frac{y_m}{|y_m|} \cdot \frac{|y_m|}{|x_m|} \right) \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$. Отсюда, переходя к пределу, имеем $\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0 \ell = 0$, откуда вытекает, что $\ell = 1$, $\tilde{x}_0 = -\tilde{y}_0$. Отсюда следует, что прямая $\{\alpha \tilde{x}_0, -\infty < \alpha < +\infty\}$ целиком лежит в Γ , что противоречит остроте конуса.

Сверточная алгебра $\mathcal{D}'(\Gamma)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Γ – замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$. Совокупность обобщенных функций из $\mathcal{D}'$, носители которых лежат в самом конусе Γ , обозначим через $\mathcal{D}'(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 9.9. Пусть Γ – замкнутый выпуклый острый конус. Если $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ и $g \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, то свертка $f * g$ существует, принадлежит $\mathcal{D}'(\Gamma)$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \alpha(x)\beta(y)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (9.29)$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ – любые бесконечно дифференцируемые функции, равные 1 в $(\text{supp } f)^\varepsilon$ и $(\text{supp } g)^\varepsilon$ и равные нулю вне $(\text{supp } f)^{2\varepsilon}$ и $(\text{supp } g)^{2\varepsilon}$ соответственно. При этом если $f_m, g \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ и $f_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то $f_m * g \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из теоремы 9.7 и следствия 1 к ней, если учесть, что $\text{supp } f * g \subset \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma} = \Gamma$.

Нетрудно видеть, что эти свертки ассоциативны и коммутативны. Таким образом, множество обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\Gamma)$ образуют алгебру (в которой роль умножения играет свертка, а роль единицы – δ -функция). Такие алгебры называют *сверточными алгебрами*. В одномерном случае для $\Gamma = \mathbb{R}_+$ принято алгебру $\mathcal{D}'(\Gamma)$ обозначать $\mathcal{D}'_+$.

Рассмотрим в алгебре $\mathcal{D}'_+$ совокупность обобщенных функций, зависящих от параметра α , $-\infty < \alpha < +\infty$, определяемых формулами

$$f_\alpha = \begin{cases} \frac{\Theta(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{при } \alpha > 0, \\ f_{\alpha+N}^{(N)} & \text{при } \alpha \leq 0, \alpha + N > 0, N \text{ целое.} \end{cases} \quad (9.30)$$

В частности, $f_1 = \Theta(t)$, $f_0 = f'_1 = \Theta'(t) = \delta(t)$, и далее рекуррентно для любого $N > 0$ имеем $f_{-N} = \delta^{(N)}(t)$. Проверим справедливость формулы $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$. Действительно, пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$; имеем

$$\begin{aligned} f_\alpha * f_\beta &= \frac{\Theta(t)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t y^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} dy = \\ &= \frac{\Theta(t)t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \xi^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1} d\xi = \frac{\Theta(t)t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = f_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известной формулой анализа

$$\int_0^1 \xi^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1} d\xi = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Если теперь $\alpha \leq 0$ или $\beta \leq 0$, то, подбирая целые числа $m > -\alpha$ и $n > -\beta$, получим

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+m}^{(m)} * f_{\beta+n}^{(n)} = (f_{\alpha+m} * f_{\beta+n})^{(m+n)} = f_{\alpha+\beta+m+n}^{(m+n)} = f_{\alpha+\beta}.$$

Отсюда $f_\alpha * f_{-\alpha} = f_0 = \delta(t)$; таким образом, в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ для оператора $f_\alpha *$ существует обратный оператор $f_{-\alpha}$. Для любого $u \in \mathcal{D}'_+$ и любого $N > 0$ имеем $f_{-N} * u = \delta^{(N)}(t) * u = u^{(N)}$. То есть при целом N оператор $f_{-N} *$ есть оператор N -кратного дифференцирования. Так как

$$(f_N * u)^{(N)} = f_{-N} * (f_N * u) = (f_{-N} * f_N) * u = \delta * u = u,$$

то есть $f_N * u$ – первообразная порядка N обобщенной функции u . Поэтому оператор $f_\alpha *$ называют *оператором дробного дифференцирования порядка $-\alpha$ при $\alpha < 0$ и оператором дробного интегрирования порядка α при $\alpha > 0$* .

УПРАЖНЕНИЯ. 1) Пусть $f \in \mathcal{D}'_+$. Найдите $D^{\frac{1}{2}}f$, если еще $f \in L_{1,\text{loc}}$.

Ответ:

$$D^{\frac{1}{2}}f = f_{-\frac{1}{2}} * f = f_{-1} * f_{\frac{1}{2}} * f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{f(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} d\xi.$$

2) Найдите решение уравнения Абеля с известной гладкой функцией $g(t)$

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\xi) d\xi}{(t-\xi)^\alpha}.$$

УКАЗАНИЕ. Уравнение можно записать так $g = f_{1-\alpha} * f$.

3) Пусть $f(t) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$. Как проще записать ее последовательное n -кратное интегрирование

$$F_N(t) = \int_0^t \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 \dots dt_n.$$

Ответ. $F_N(t) = f_n * f$.

4) Пусть $f(t) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$ и $g(t) \in \mathcal{D}'_+$. Запишите в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ интегро-дифференциально-разностное уравнение

$$a_0 u''(t) + a_1 u'(t) + a_2 u(t) + a_3 \int_0^t u(\xi) d\xi + a_4 u(t-h) = g(t).$$

Ответ. $\mathcal{K}(t) * u(t) = g(t)$, где $\mathcal{K} = a_0 \delta''(t) + a_1 \delta'(t) + a_2 \delta(t) + a_3 \Theta(t) + a_4 \delta(t-h)$.

5) Пусть f и g из $\mathcal{D}'_+$. Проверьте, что $(e^{at}f(t)) * (e^{at}g(t)) = e^{at}(f * g)(t)$.

6) Пусть $f(t)$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, причем с интегрируемой особенностью в нуле, а $\mu(t)\delta_S$ – простой слой на ограниченной кусочно гладкой поверхности S с непрерывной плотностью $\mu(t)$. Покажите, что их свертка – локально интегрируемая функция в $\mathbb{R}^n$ и выражается формулой

$$f(t) * \mu(t)\delta_S = \int_S \mu(\xi) f(t-\xi) dS_\xi.$$

7) Пусть $\rho(t) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Свертка

$$V_n(t) = \frac{1}{|t|^{n-2}} * \rho(t), \quad n \geq 3 \quad \left(V_2(t) = \ln \frac{1}{|t|} * \rho(t) \quad \text{при } n = 2 \right)$$

называется *ньютоновым* (при $n = 2$ *логарифмическим потенциалом* с плотностью $\rho(t)$). Покажите, что потенциал существует в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V(t) = -(n-2) \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \rho(t), \quad n \geq 3 \quad (\Delta V(t) = -2\pi \rho(t) \quad \text{при } n = 2).$$

Кроме того, если $\rho(t)$ не только финитна, но и локально суммируема, то V_n называется *объемным потенциалом*. В этом случае $V_n \in L_{1,\text{loc}}$ и выражается формулой

$$V_n(t) = \int \frac{\rho(\xi) d\xi}{|t - \xi|^{n-2}}.$$

§ 10. Обобщенные функции медленного роста. Пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех обобщенных функций медленного роста. Из включения (8.7) ($\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$), непрерывности и плотности каждого из этих вложений следует, что

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'. \quad (10.1)$$

Напомним, что топология в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ задается системой полунорм (на самом деле норм)

$$p_N(\varphi) = \max_{|j| \leq N} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (1 + |t|^2)^{\frac{N}{2}} |\varphi^{(j)}(t)|, \quad N = 0, 1, \dots \quad (10.2)$$

Тем самым $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ есть строгий проективный предел банаховых пространств $\mathcal{S}_N$ (пополнение $\mathcal{S}$ по норме p_N)

$$\mathcal{S} \subset \dots \subset \mathcal{S}_{N+1} \subset \mathcal{S}_N \subset \dots \subset \mathcal{S}_0, \quad (10.3)$$

Линейный функционал f на $\mathcal{S}$ непрерывен тогда и только тогда, когда существуют числа C и N такие, что

$$|(f, \varphi)| \leq C p_N(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (10.4)$$

Тем самым всякий линейный непрерывный на $\mathcal{S}$ функционал продолжается до линейного непрерывного функционала на некотором банаховом пространстве $\mathcal{S}_N$. Другими словами, каждый линейный непрерывный функционал в $\mathcal{S}$ имеет конечный порядок.

Непрерывная функция $f(t)$ называется *функцией медленного роста*, если $(1 + |t|)^{-m}|f(t)| < c$ для некоторых m и c . Если $f(t)$ – функция медленного роста, то она задает регулярный функционал $f \in \mathcal{S}'$ по формуле $(f, \varphi) = \int f(t)\varphi(t) dt$.

Мера μ , заданная на $\mathbb{R}^n$, называется *мерой медленного роста*, если для некоторого $m \geq 0$ выполняется неравенство $\int (1 + |t|)^{-m} \mu(dt) < \infty$. (Здесь мера μ предполагается борелевской мерой, см. [1].) Такая мера определяет обобщенную функцию медленного роста по формуле $(\mu, \varphi) = \int \varphi(t) \mu(dt)$.

Если $f \in \mathcal{E}'$, то $f \in \mathcal{S}'$. При этом для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем $(f, \varphi) = (f, \eta\varphi)$, где $\eta \in \mathcal{D}$ и $\eta = 1$ в окрестности носителя f .

Некоторые операции в пространстве $\mathcal{S}'$ Каждая линейная непрерывная операция над основными функциями (непрерывное линейное отображение $A: \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$) определяет некоторую линейную непрерывную операцию $A^*: \mathcal{S}' \mapsto \mathcal{S}'$ над обобщенными функциями по формуле

$$(A^*(f)(t), \varphi(t)) = (f(t), A(\varphi)(t)), \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (10.5)$$

Напомним, что линейное отображение A из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно по каждой полунорме p_N , то есть для любого N найдутся Q и C_N такие, что $p_N(A(\varphi)) \leq C_N p_Q(\varphi)$, (см. утверждение 4.5).

1) Умножение на функцию. Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию может вывести из $\mathcal{S}$ (например, $e^{-t^2} \in \mathcal{S}$, но $e^{t^2} \cdot e^{-t^2} = 1 \notin \mathcal{S}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция $a(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ растет на бесконечности вместе со всеми своими производными не быстрее полинома (своего для каждой производной):

$$|D^j a(t)| \leq C_j (1 + |t|)^{m_j}, \quad |j| = 0, 1, \dots$$

Множество таких функций есть линейное пространство и называется *пространством мультипликаторов* для $\mathcal{S}$. Это пространство обозначается через Θ_M .

Пусть $a(t) \in \Theta_M$; тогда линейная операция $A: \varphi \in \mathcal{S} \mapsto a(t)\varphi(t) \in \mathcal{S}$ непрерывна в $\mathcal{S}$. (Докажите). Следовательно, формула

$$(a(t)f, \varphi) = (f(t), a(t)\varphi(t)), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

корректно определяет умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию из Θ_M .

2) Неособенная линейная замена переменных. Пусть A – невырожденная $(n \times n)$ -матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Отображение $\varphi(t) \mapsto \frac{1}{|\det A|} \varphi(A^{-1}(t - b))$ непрерывно из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. (Докажите). Поэтому если $f(t) \in \mathcal{S}'$, то естественно определить обобщенную функцию $f(At + b)$ формулой

$$(f(Bt + b), \varphi(t)) = \frac{1}{|\det A|} (f(t), \varphi(A^{-1}(t - b))), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

3) Операция дифференцирования. Операция $\varphi(t) \mapsto (-1)^{|j|} \times D^j \varphi(t)$ непрерывна из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. (Докажите). Поэтому если $f \in \mathcal{S}'$, то формула

$$(D^j f, \varphi) = (-1)^{|j|} (f, D^j \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

корректно определяет обобщенную функцию из $\mathcal{S}'$, которую естественно назвать производной D^j обобщенной функции f .

Отметим, что пространство $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$, то есть для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ существует последовательность $\{\varphi_k \in \mathcal{D}\}$ такая, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{S}$ при $k \rightarrow \infty$. (Эта последовательность может быть задана, например, формулой $\varphi_k(t) = \varphi(t) \eta(\frac{t}{k})$, где $\eta \in \mathcal{D}$, причем $\eta(t) = 1$, при $|t| < 1$. Проверьте сами, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{S}$.)

Последовательности обобщенных функций в пространстве $\mathcal{S}'$ Пространство $\mathcal{S}$ есть пространство Фреше, поэтому оно бочечно и борнологично. Тем самым справедлива следующая теорема (см. следствие 1 к теореме 6.3).

ТЕОРЕМА 10.1 (О ПОЛНОТЕ $\mathcal{S}'$). *Если последовательность $f_k \in \mathcal{S}'$ сходится в $\mathcal{S}'$, то есть*

$$(f_k, \varphi) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

то $C_\varphi = (f, \varphi)$, где $f \in \mathcal{S}'$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f_0$ в $\mathcal{S}'$; тогда $D^j f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} D^j f_0$ в $\mathcal{D}'$. (С. со следствием к теореме 9.5).

Из теоремы 6.3 непосредственно вытекает следующая

ТЕОРЕМА 10.2 (Л. ШВАРЦА). Пусть $\{f_\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \alpha \in J\}$ – ограниченное множество функционалов медленного роста, то есть

$$|(f_\alpha, \varphi)| \leq C_\varphi \quad \forall f_\alpha, \quad \alpha \in J, \quad \varphi \in \mathcal{S}; \quad (10.6)$$

тогда существуют постоянные C и N такие, что

$$|(f_\alpha, \varphi)| \leq C p_N(\varphi), \quad \alpha \in J, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (10.7)$$

Оказывается, что всякая сходящаяся в $\mathcal{S}'$ последовательность обобщенных функций сходится также и в некотором $\mathcal{S}_N$.

ТЕОРЕМА 10.3. Пусть $f_k \in \mathcal{S}'$, $k = 1, 2, \dots$, и для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ последовательность $(f_k, \varphi) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; тогда существуют число N и последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такие, что

$$|(f_k, \varphi)| \leq \varepsilon_k p_N(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (10.8)$$

Доказательство почти дословно повторяет доказательство соответствующей теоремы для пространства $\mathcal{D}'$ (см. теорему 9.6). При этом вместо теоремы о полноте $\mathcal{D}'$ следует пользоваться теоремой о полноте $\mathcal{S}'$, а вместо леммы 8.3 пользоваться леммой 8.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема останется справедливой, если последовательность f_k заменить на произвольную направленность f_α , $\alpha \in I$. Только нужно потребовать, чтобы для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ имела место оценка $|(f_\alpha, \varphi)| < C_\varphi$ при $\alpha \in I$.

Отметим, что если $I = [1, +\infty)$ и для $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ функция (f_α, φ) непрерывна по $\alpha \in I$, то при условии существования предела $(f_\alpha, \varphi) \xrightarrow[\alpha \rightarrow \infty]{} C_\varphi$ указанное выше условие выполняется автоматически.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f_k \rightarrow f_0$ в $\mathcal{S}'$, а $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ в $\mathcal{S}$ при $k \rightarrow \infty$; тогда

$$(f_k, \varphi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (f_0, \varphi_0).$$

Для обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ имеет место следующая структурная теорема.

ТЕОРЕМА 10.4. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то существуют непрерывная функция $g(t)$ медленного роста и мультииндекс j такие, что $f(t) = D^j g(t)$.

Доказательство этой теоремы почти полностью повторяет доказательство теоремы 9.1, вместо оценки (9.7) надо пользоваться аналогичной оценкой с нормой, определяемой (8.15).

Пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'(F)$ Множество $\mathcal{G}$ называется *регулярным*, если существуют положительные числа d, ω, q такие, что любые две точки $t_1, t_2 \in \mathcal{G}$, расстояние между которыми $|t_1 - t_2| \leq d$, могут быть соединены в $\mathcal{G}$ спрямляемой кривой длины $\ell \leq \omega |t_1 - t_2|^q$.

В частности, всякое выпуклое множество $\mathcal{G}$ регулярно (для него d можно считать равным диаметру $\mathcal{G}$ и $\omega = q = 1$). Множество, состоящее из конечного числа точек, регулярно.

Пусть F – замыкание регулярной области $\mathcal{G}$: $F = \overline{\mathcal{G}}$. Определим пространство основных функций $\mathcal{S}_F$ (быстро убывающих на F) как совокупность бесконечно дифференцируемых на F функций (то есть бесконечно дифференцируемых на $\mathcal{G}$ и непрерывных вместе со всеми производными на F), для которых конечны все нормы

$$\|\varphi\|_{N,F} = \sup_{\substack{t \in F \\ |j| \leq N}} (1+t^2)^{N/2} |D^j \varphi(t)|, \quad N = 0, 1, \dots \quad (10.9)$$

В $\mathcal{S}_F$ введем топологию проективного предела убывающей последовательности банаховых пространств

$$\dots \subset \mathcal{S}_{F,N+1} \subset \mathcal{S}_{N,F} \subset \dots \subset \mathcal{S}_{1,F} \subset \mathcal{S}_{0,F},$$

где $\mathcal{S}_{N,F}$ – пополнение $\mathcal{S}_F$ по N -й норме. Каждое вложение $\mathcal{S}_{N+1,F} \subset \mathcal{S}_{N,F}$, $N = 0, 1, \dots$, непрерывно. Для любого N существует $N' > N$ такое, что вложение $\mathcal{S}_{N',F} \subset \mathcal{S}_{N,F}$ вполне непрерывно (компактно). Пространство $\mathcal{S}_F = \bigcap_{N \geq 0} \mathcal{S}_{N,F}$ – пространство Фреше, следовательно, бочечное и борнотопологическое. Пространство $\mathcal{S}'_F$ определим как сопряженное пространство (пространство обобщенных функций медленного роста на F) к пространству $\mathcal{S}_F$. Каждая обобщенная функция f из $\mathcal{S}'_F$ имеет конечный порядок, то есть для некоторых m и C

$$|(f, \varphi)| \leq C \|\varphi\|_{m,F}, \quad \varphi \in \mathcal{S}_F. \quad (10.10)$$

Пусть F – замкнутое регулярное множество. Обозначим через $\mathcal{S}'(F)$ совокупность обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ с носителем в F .

УТВЕРЖДЕНИЕ 10.1. *Пространства $\mathcal{S}'(F)$ и $\mathcal{S}'_F$ изоморфны.*

Доказательство см. в [5, гл. I, п. 1.3]. Это утверждение позволяет трактовать обобщенные функции с носителем на замкнутом регулярном множестве как обобщенные функции из $\mathcal{S}'_F$.

Для обобщенных функций из пространства $\mathcal{S}'(F)$, если F – регулярное множество, структурная теорема уточняется следующим образом.

ТЕОРЕМА 10.5 (Владимиров В. С.). *Пусть $f \in \mathcal{S}'(F)$, где F – регулярное множество. Тогда*

$$f = \sum_{|j| \leq N} D^j \mu_j(dt), \quad (10.11)$$

где $\mu_j(dt)$ – меры степенного роста с носителями в F .

Доказательство см. В. С. Владимирова [20].

Свертка обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ Пусть $f(x) \in \mathcal{S}'$ и $g(x) \in \mathcal{S}'$, и свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'$. Вопрос: Когда она принадлежит $\mathcal{S}'$? Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $f \in \mathcal{S}'$ и $g \in \mathcal{E}'$. Тогда, как мы видели (см. (9.27)), $f * g$ существует, принадлежит $\mathcal{D}'$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x + y))). \quad (10.12)$$

Так как $f \in \mathcal{S}'$, то отображение $\varphi(x) \mapsto (f(x), \varphi(x + y))$ непрерывно из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{E}$. Докажите. Поэтому формула (10.12) корректно определяет $f * g$ как обобщенную функцию из $\mathcal{S}'$. Тем самым свертка существует в $\mathcal{S}'$.

Отметим, что если $f_m \rightarrow f_0$ в $\mathcal{S}'$ и $g_m \rightarrow g_0$ в $\mathcal{E}'$, причем существует компакт K такой, что $\text{supp } g_m \subset K$ для всех m , то $f_m * g_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f_0 * g_0$.

2) Пусть Γ – замкнутый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле. Если f и g из $\mathcal{S}'$ с носителями в Γ (то есть $f, g \in \mathcal{S}'(\Gamma)$), то свертка $f * g$, как мы видели, существует в $\mathcal{D}'$ и представляется формулой

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \xi(x) \eta(y) \varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad (10.13)$$

где ξ и η – любые C^∞ -функции, $|D^j \xi(x)| \leq c_j$, $|D^j \eta(y)| \leq c_j$, равные 1 в $(\text{supp } f)^\varepsilon$ и $(\text{supp } g)^\varepsilon$ и равные нулю вне $(\text{supp } f)^{2\varepsilon}$ и $(\text{supp } g)^{2\varepsilon}$ соответственно (см. (9.25)). Так как отображение $\varphi(x) \mapsto \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)$ непрерывно из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ (докажите), то эта формула определяет $f * g$ как обобщенную функцию из $\mathcal{S}'$ (даже из $\mathcal{S}'(\Gamma)$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как Γ – регулярное множество, то f и g есть линейные непрерывные функционалы на $\mathcal{S}_\Gamma$. Справедлива формула

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x+y))) = (g(y), (f(x), \varphi(x+y))). \quad (10.14)$$

Эта формула имеет смысл, так как отображение $\varphi \mapsto (f(x), \varphi(x+y))$ (как и аналогичное отображение $\varphi \mapsto (g(y), \varphi(x+y))$) непрерывно из $\mathcal{S}_\Gamma$ в $\mathcal{S}_\Gamma$. Докажите.

Пусть $f_m, g_m \in \mathcal{S}'(\Gamma)$, причем $f_m \rightarrow f_0$ и $g_m \rightarrow g_0$ при $m \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}'$; тогда $f_m * g_m \rightarrow f_0 * g_0$ в $\mathcal{S}'$.

3) Пусть $f \in \mathcal{S}'$ и $\varphi \in \mathcal{S}$; тогда свертка $f * \varphi$ существует в $\mathcal{S}'$, даже принадлежит Θ_M , и представляется формулой

$$f * \varphi = (f(\xi), \varphi(t - \xi)),$$

причем $|D^j(f * \varphi)(t)| \leq C(1 + t^2)^{N/2} p_{N+|j|}(\varphi) \quad (10.15)$

с некоторыми C и N .

Пусть ω – “шапочка” (см. (3.3)), $\omega_m = m\omega(mx)$ и пусть $f \in \mathcal{S}'$. Свертка $f * \omega_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ в $\mathcal{S}'$ (см. случай 1)). С другой стороны (см. случай 3)), $f * \omega_m \in \Theta_M$. Следовательно, Θ_M плотно в $\mathcal{S}'$. Но всякая функция из Θ_M есть предел в $\mathcal{S}'$ последовательности функций из $\mathcal{S}$ (даже из $\mathcal{D}$). Тем самым $\mathcal{S}$ (даже $\mathcal{D}$) плотно в $\mathcal{S}'$.

§ 11. Преобразование Фурье обобщенных функций

Преобразование Фурье основных функций из $\mathcal{S}$ Напомним некоторые сведения о преобразовании Фурье “обычных” функций. Рассмотрим пространство $L_1(\mathbb{R}^n)$. Преобразование Фурье функции $\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$F[\varphi(t)](\xi) = \psi(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int \varphi(t) e^{i(\xi, t)} dt, \quad (\xi, t) = \xi_1 t_1 + \dots + \xi_n t_n. \quad (11.1)$$

Функция $F[\varphi](\xi)$ представляет собой ограниченную непрерывную функцию, которая стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$. Отметим также, что если для $f \in L_1$ выполняется соотношение $\int f(t)e^{i(t,\xi)} dt \equiv 0$, то $f(t) = 0$ п.в.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ имеет место следующая

ТЕОРЕМА 11.1 (ПЛАНШЕРЕЛЯ). *Для любой функции $f(t) \in L_2(\mathbb{R}^1)$ интеграл*

$$g_R(\xi) = \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R f(t)e^{it\xi} dt_1 \dots dt_n$$

при любом R является функцией из L_2 . При этом $g_R \rightarrow g$ в метрике L_2 при $R \rightarrow \infty$ и выполнено соотношение

$$\int |g(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int |f(t)|^2 dt. \quad (11.2)$$

Так как основные функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ суммируемы, для них определена операция (классического) преобразования Фурье $F[\varphi]$:

$$F[\varphi(t)](\xi) = \int \varphi(t)e^{i(\xi,t)} dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (11.3)$$

При этом $F[\varphi](\xi)$ ограничена, непрерывна и стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$. Более того, так как $\varphi(t)$ – бесконечно дифференцируема и убывает быстрее любой степени вместе со всеми своими производными, то

$$\begin{aligned} D_\xi^j F[\varphi](\xi) &= \int (it)^j \varphi(t) e^{i(\xi,t)} dt = F[(it)^j \varphi(t)](\xi), \\ F[D^j \varphi(t)](\xi) &= \int (D^j \varphi(t)) e^{i(\xi,t)} dt = (-i\xi)^j F[\varphi](\xi). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Из оценки

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^N |D^j F[\varphi](\xi)| &\leq \left| \int (1 - \Delta)^N [(it)^j \varphi(t)] e^{i(\xi,t)} dt \right| \leq \\ &\leq C \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (1 + |t|^2)^{n+1} |(1 - \Delta)^N [t^j \varphi(t)]| \leq p_{2N+n+1}(\varphi), \end{aligned}$$

где C не зависит от φ , получаем $p_N(F[\varphi]) \leq p_{2N+n+1}(\varphi)$, откуда следует, что преобразование Фурье F есть непрерывное отображение $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Докажем, что оно взаимно однозначно и обратное преобразование F^{-1} непрерывно, то есть справедлива следующая

ЛЕММА 11.1. *Преобразование Фурье F осуществляет (линейный) изоморфизм пространства $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$.*

Сперва покажем, что формула обращения преобразования Фурье имеет вид

$$\varphi(t) = F^{-1}[\psi(\xi)](t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{-i(\xi, t)} d\xi, \quad \psi \in \mathcal{S}. \quad (11.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (для простоты выкладок) проведем для случая $n = 1$. Напомним, что $\frac{1}{\pi} \frac{\sin Ax}{x} \rightarrow \delta(x)$ в $\mathcal{S}'$ при $A \rightarrow \infty$. (Докажите, см. упражнение 2) после леммы 9.3.) Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int e^{-it\xi} \psi(\xi) d\xi &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{-it\xi} \psi(\xi) d\xi = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{-it\xi} d\xi \int e^{ix\xi} \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(A(t-x))}{t-x}, \varphi(x) \right) = \\ &= (\delta(t-x), \varphi(x)) = \varphi(t). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что

$$\varphi = F^{-1}[\psi(\xi)](t) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)](t). \quad (11.6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F^{-1}[\psi(\xi)](t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{-i(t, \xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(\xi)](-t) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(-\xi) e^{i(t, \xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)]. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{S}'$
Вернемся к обобщенным функциям. Определим преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ как операцию, сопряженную к операции преобразования Фурье для основных функций. В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ преобразование Фурье определим равенством

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad f \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (11.8)$$

Так как преобразование Фурье $\varphi \mapsto F[\varphi]$ – линейная, непрерывная операция из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$, то ясно, что $f \mapsto F[f]$ – линейная и непрерывная операция из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Ясно, что обратная операция $F^{-1}[f]$ определяется формулой

$$(F^{-1}[f], \varphi) = (f, F^{-1}[\varphi]). \quad (11.9)$$

Отметим, что при таком определении если f – регулярная обобщенная функция, скажем из $L_1(\mathbb{R}^n)$ или $L_2(\mathbb{R}^n)$, то так определенное преобразование Фурье совпадает с классическим. Отметим еще, что

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-t)], \quad f \in \mathcal{S}', \quad (11.10)$$

где $f(-t)$ – отражение, то есть $(f(-t), \varphi(t)) = (f(t), \varphi(-t))$. Таким образом, справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.1. *Преобразование Фурье $f \mapsto F[f]$ есть линейный изоморфизм $\mathcal{S}'$ на $\mathcal{S}'$.*

Отметим некоторые свойства преобразования Фурье (докажите сами).

1) Линейное преобразование аргумента:

$$F[f(At)](\xi) = \frac{1}{|\det A|} F[f](A^{-1T}\xi), \quad \det A \neq 0.$$

Здесь $A \mapsto A^T$ обозначает операцию транспонирования.

2) Сдвиг преобразования Фурье и преобразование Фурье сдвига:

$$F[f](\xi + h) = F[e^{i(h,t)} f(t)](\xi), \quad F[f(t + t_0)] = e^{i(\xi, t_0)} F[f](\xi).$$

3) Дифференцирование преобразования Фурье и преобразование Фурье производной:

$$D_\xi^j F[f](\xi) = F[(it)^j f(t)](\xi), \quad F[D_t^j f(t)](\xi) = (-i\xi)^j F[f](\xi).$$

ПРИМЕР 11.1. Так как

$$\begin{aligned} (F[\delta(t - t_0)], \varphi) &= (\delta(t - t_0), F[\varphi]) = F[\varphi](t_0) = \\ &= \int \varphi(t) e^{i(t_0, t)} dt = (e^{i(t_0, t)}, \varphi(t)), \end{aligned}$$

то при $t_0 = 0$ имеем $F[\delta] = 1$, $\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1]$. В частности, $F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi)$.

Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{E}'$

Сперва напомним, что каждая обобщенная функция f из $\mathcal{E}'$ принадлежит пространству $\mathcal{S}'$ и, более того, имеет компактный носитель. В частности, f – конечного порядка, то есть f – линейный непрерывный функционал над некоторым банаховым пространством $\mathcal{S}_N$, а потому (по формуле (10.4)) существуют C и N такие, что

$$|(f, \varphi)| \leq Cp_N(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}_N. \quad (11.11)$$

ТЕОРЕМА 11.2. *Если $f \in \mathcal{E}'$, то преобразование Фурье $F[f] \in \Theta_M$ и представляется в виде*

$$F[f](\xi) = (f(t), \eta(t)e^{i(t, \xi)}), \quad (11.12)$$

где $\eta(t)$ – любая функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности носителя f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta(t) \in \mathcal{D}$ и $\eta(t) = 1$ на носителе f . Имеем

$$\begin{aligned} (D^j F[f], \varphi) &= (-1)^{|j|} (F[f], D^j \varphi) = (-1)^{|j|} (f, F[D^j \varphi]) = \\ &= (-1)^{|j|} (f, \eta(t)(-it)^j F[\varphi]) = \\ &= \left(f(t), \int \eta(t)(it)^j \varphi(\tau) e^{i(\tau, t)} d\tau \right) = \\ &= \int (f(t), \eta(t)(it)^j e^{i(\tau, t)}) \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Откуда при $j = 0$ и следует (11.12). Докажем, что правая часть (11.12) принадлежит Θ_M . Из (11.11), пользуясь (10.2), имеем

$$\begin{aligned} |D^j F[f](\xi)| &= |(f(t), \eta(t)(it)^j e^{i(\xi, t)})| \leq Cp_N(\eta(t)(it)^j e^{i(\xi, t)}) = \\ &= C \max_{|j| \leq N} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (1 + t^2)^{N/2} |D_t^j [\eta(t)(t)^j e^{i(\xi, t)}]| \leq \\ &\leq C_j (1 + |\xi|^2)^{N/2} \end{aligned} \quad (11.13)$$

для некоторых $C_j \geq 0$. Что и доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из (11.12) следует, что $F[f](\xi)$ – целая функция. В частности,

$$|D^j F[f](\xi + i\sigma)| \leq C'_j (1 + |z|^2)^{N/2} e^{b|\sigma|}, \quad z = \xi + i\sigma. \quad (11.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что функцию $\eta(t)$ в формуле (11.12) можно опустить, понимая выражение $(f(t), e^{i(t, \xi)})$ как действие функционала $f \in \mathcal{E}'$ на основную функцию $e^{i(t, \xi)} \in \mathcal{E}$.

Преобразование Фурье свертки

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.2. Пусть $f \in \mathcal{S}'$ и $g \in \mathcal{E}'$. Тогда их свертка $f * g \in \mathcal{S}'$ и ее преобразование Фурье дается формулой

$$F[f * g] = F[f]F[g]. \quad (11.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь формулой (10.12), имеем

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x + y))), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда, применяя преобразование Фурье (11.8), получим

$$(F[f * g], \varphi) = (f * g, F[\varphi]) = \left(f(t), \left(g(y), \int \varphi(\xi) e^{i(x+y, \xi)} d\xi \right) \right).$$

Теперь, пользуясь формулой (9.20) для обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ и учитывая, что $F[g] \in \Theta_M$, имеем

$$\begin{aligned} (F[f * g], \varphi) &= \left(f(t), \int (g(y), e^{i(\xi, y)}) e^{i(t, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \right) = \\ &= \left(f(t), \int F[g](\xi) e^{i(t, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \right) \\ &= (f, F[F[g]\varphi]) = (F[f], F[g]\varphi) = (F[f]F[g], \varphi). \end{aligned}$$

Откуда и следует (11.15).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f \in \mathcal{S}'$ и $g \in \mathcal{S}$, то свертка $f * g \in \Theta_M$. Формула (11.15) остается справедливой и в этом случае.

Пусть $f, g \in \mathcal{S}'(\Gamma)$; тогда, как мы видели, существует $f * g \in \mathcal{S}'(\Gamma)$. Однако формула (11.15) требует дополнительного осмысления, ибо произведение обобщенных функций $F[f] \cdot F[g]$, вообще говоря, не определено. Эту формулу можно осмыслить в рамках теории преобразования Лапласа (см. далее § 12, формулу (12.9)).

УПРАЖНЕНИЯ. 1) Найти преобразования Фурье следующих функций:

$$\begin{aligned} 1) & e^{-a^2|t|}; \quad 2) \frac{1}{a^2 + t^2}; \quad 3) e^{-a^2 t^2}; \\ 4) & f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leq a, \\ 0 & \text{при } |t| > a; \end{cases} \quad (a > 0) \end{aligned}$$

Ответы:

$$\frac{2a}{\xi^2 + a^2}; \quad \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}; \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}; \quad \frac{2 \sin(a\xi)}{\xi}.$$

Докажите, что

$$2) F[\Theta(\pm t)] = \pi \delta(\xi) \pm iP \frac{1}{\xi}.$$

УКАЗАНИЕ.

$$F[\Theta(t)] = \lim_{\xi' \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{i(t, \xi + i\xi')} d\xi = \lim_{\xi' \rightarrow +0} \frac{i}{\xi + \xi'} \quad \text{в } \mathcal{S}'.$$

Далее воспользуйтесь формулой Сохоцкого.

$$3) F[\operatorname{sign} t] = 2iP \frac{1}{\xi}.$$

УКАЗАНИЕ. $F[\operatorname{sign} t] = F[\Theta(t) - \Theta(-t)]$.

$$4) F[P \frac{1}{t}] = -2\pi F^{-1}[P \frac{1}{t}] = i\pi \operatorname{sign} \xi.$$

Преобразование Фурье основных функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

В этом пункте (для простоты понимания) мы ограничимся одномерным случаем. Пусть $\varphi(t)$ – некоторая основная функция из $\mathcal{D}$. Поскольку она финитная, скажем, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, где компакт $K = [-a, +a]$, то ее преобразование Фурье

$$\psi(z) = F[\varphi] = \int \varphi(t) e^{itz} dt = \int_{-a}^a \varphi(t) e^{itz} dt, \quad z = x + iy,$$

имеет смысл при всех $z \in \mathbb{C}$. Более того, ясно, что функция $F[\varphi(t)](z)$ есть целая аналитическая функция, причем справедлива оценка

$$|z^j \psi(z)| = \left| \int_{-a}^a \varphi^{(j)}(t) e^{itz} dt \right| \leq C_j e^{a|y|}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (11.16)$$

При этом нетрудно видеть, что $\|\psi\|_{a,m} \leq C_a p_{am}(\varphi)$, где слева стоит норма пространства $Z(a)$, определяемая формулой (8.6), а справа – норма пространства $\mathcal{D}(K)$, определяемая формулой (8.4). Так что преобразование Фурье есть непрерывное отображение пространства Фреше $\mathcal{D}(K)$, где $K = [-a, +a]$, в пространство Фреше $Z(a)$. Верно и обратное утверждение.

Таким образом преобразование Фурье есть линейное непрерывное отображение из $\mathcal{D}$ в Z .

ЛЕММА 11.2. *Всякая целая аналитическая функция $\psi(z)$, удовлетворяющая при каждом $j = 0, 1, \dots$, оценке (11.16) (то есть $\psi \in Z(a)$), есть преобразование Фурье некоторой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}([-a, a])$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию $\varphi(t)$ определим формулой

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ixt} dx. \quad (11.17)$$

Так как $\psi(x)$ в силу оценки (11.16) убывает при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени, то интеграл в (11.17) сходится абсолютно и равномерно по x (вместе со всеми производными по параметру t). Таким образом $\varphi(t)$ – бесконечно дифференцируемая функция. Покажем, что она финитна. Сдвинем ось интегрирования параллельно в комплексную плоскость

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x + i\tau) e^{-i(x+i\tau)t} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{t\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x + i\tau) e^{-ix\tau} dx. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Это законно в силу теоремы Коши, если учесть, что интегралы по вертикальным отрезкам $[-N, -N + i\tau]$ и $[N, N + i\tau]$ стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Пусть теперь $|t| > a$, зададим некоторое число $q > 0$ и найдем τ из условия $t\tau = -q|t|$. Так что $|\tau| = q$. Используя неравенство (11.16), при $j = 0$ и $j = 2$ находим из (11.18)

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &\leq e^{a|y|} \min \left\{ C_0, \frac{C_2}{|z|^2} \right\} \leq C \frac{e^{a|y|}}{1 + |z|^2} \leq C \frac{e^{a|y|}}{1 + |x|^2}; \\ |\varphi(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} e^{t\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} C \frac{e^{a|\tau|}}{1 + |x|^2} dx = C' e^{-q|t| + a|\tau|} = C' e^{q(a - |t|)}. \end{aligned}$$

Так как C' не зависит от q , то при $q \rightarrow \infty$ находим, что $\varphi(t) = 0$. Следовательно, при $|t| > a$ функция $\varphi(t) = 0$.

Таким образом, преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{D}$ и Z . При этом обратное преобразование F^{-1} определяется формулой (11.17).

Некоторые операции на пространстве основных функций из Z В этом пункте, опираясь на установленный изоморфизм пространств $\mathcal{D}$ и Z ($\varphi(t) \mapsto F[\varphi] = \psi(z)$), рассмотрим некоторые непрерывные операции, которые допускаются в Z . Нетрудно видеть, что операции умножения (дифференцирования) в пространстве $\mathcal{D}$ в Z соответствуют непрерывные операции дифференцирования (умножения на степени z). Сдвигу $\varphi(t+h)$ соответствует операция умножения на e^{izh} и наоборот. Поскольку в $\mathcal{D}$ имеет место сходимость ряда $\sum_{q=0}^{\infty} (it)^q \frac{h^q}{q!} \varphi(t) = e^{ith} \varphi(t)$, то в Z это определяет разложение в ряд Тейлора $\sum_{q=0}^{\infty} \psi^{(q)}(z) \frac{h^q}{q!} = \psi(z+h)$ с любым фиксированным комплексным h . В $\mathcal{D}$ определена операции свертки $\varphi(t) * \eta(t) \in \mathcal{D}$, если φ из $\mathcal{D}$ и $\eta(t) \in \mathcal{E}'$ (более того, операция свертки определена, даже если $\varphi \in \mathcal{D}'$, см. следствие 2 к теореме 9.7), а потому в Z определена и непрерывна операция умножения на целые аналитические функции $\zeta(z)$, удовлетворяющие оценке $|\zeta(z)| \leq C(1+|z|)^m e^{b|y|}$. Это следует из того, что свертка при преобразовании Фурье переходит в произведение преобразований Фурье. А преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{E}'$ как раз и есть функции типа ζ , см. (11.14).

Теперь можно определить преобразование Фурье для функций из $\mathcal{D}'$ по формуле

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in Z. \quad (11.19)$$

Таким образом $F[f]$ является линейным непрерывным функционалом над пространством Z . Поскольку пространство Z состоит из аналитических функций, то $F[f]$ называют аналитическим функционалом.

Аналитические функционалы не вполне заслуживают называться “обобщенными функциями”. В частности, для аналитических функционалов не определено понятие носителя и “регулярного” аналитического функционала.

§ 12. Преобразование Лапласа обобщенных функций

Пусть $g(t)$ – обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Если $g(t)$ имеет компактный носитель, то есть $g(t) \in \mathcal{E}'$, то, как мы видели, выражение $(g(t), e^{i(t,z)})$ имеет смысл для любого $z \in \mathbb{C}^n$ и представляет

собой целую аналитическую функцию. Она называется преобразованием Лапласа обобщенной функции $g(t)$ и обозначается $L[g]$. Условие $g \in \mathcal{E}'$ весьма ограничительно. Существуют случаи, когда выражение $(g(t), e^{i(t,z)})$ может быть осмыслено, если и не для всех $z \in \mathbb{C}^n$, а для z из некоторой области $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n$. В этом случае получившаяся функция $L[g](z)$, $z \in \mathcal{O}$, также называется преобразованием Лапласа обобщенной функции g . Мы рассмотрим один из важных таких случаев, а именно, когда $\text{supp } g \subset \Gamma$, где Γ – замкнутый острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Γ – замкнутый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле и $C = \text{int } \Gamma^*$. Отметим, что $(t, y) > 0$ при $t \in \Gamma$ и $y \in C$. Трубочатое множество в $\mathbb{C}^n$ вида

$$\mathbb{R}^n + iC = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}^n, y \in C\} \quad (12.1)$$

обозначаем через T^C .

В частности, для $n = 1$ острых конусов всего два (отрицательная или положительная полуось). Если $\Gamma = [0, +\infty)$, то $C = (0, +\infty)$, и $T^C = \mathbb{R} + iC = \{z = x + iy : y > 0\}$ – верхняя полуплоскость.

Преобразование Лапласа рассмотрим для обобщенных функций $\mathcal{S}'(\Gamma)$. При этом мы будем пользоваться тем фактом, что пространства $\mathcal{S}'(\Gamma)$ и $\mathcal{S}'_\Gamma$ изоморфны (смотри утверждение 10.1). Пусть $g \in \mathcal{S}'_\Gamma$. Преобразованием Лапласа $L[g](z)$ будем называть функцию переменного $z \in T^C$, задаваемую формулой

$$L[g](z) = (g(t), e^{i(z,t)}), \quad z = x + iy, \quad z \in T^C. \quad (12.2)$$

Эта формула имеет смысл, ибо функция $e^{i(t,z)} \in \mathcal{S}_\Gamma$ при $z \in T^C$. При этом обобщенную функцию $g(t)$ называем *спектральной функцией* $L[g](z)$.

Заметим, что в операционном исчислении ($n = 1$) преобразование Лапласа определяется несколько иначе, а именно, формулой $(g(t), e^{-zt})$, $z = x + iy$, $x > 0$, что соответствует замене z на iz .

Пространство $H(T^C)$ Обозначим через $H^{(\alpha, \beta)}(T^C)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, (α, β – целые числа) совокупность функций, голоморфных в T^C и удовлетворяющих оценке

$$|f(z)| \leq M_f(1 + |z|^2)^{\alpha/2} [1 + \frac{1}{\Delta^\beta(y)}], \quad z = x + iy \in T^C, \quad (12.3)$$

где $\Delta(y)$ – расстояние от $y \in C$ до границы конуса C . Это расстояние определяется формулой $\Delta(y) = \inf_{\sigma \in \text{pr } \Gamma} \Gamma(y, \sigma)$. Топологизируем это пространство с помощью нормы

$$\|f(z)\|^{(\alpha, \beta)} = \sup_{z \in T^C} \frac{|f(z)|}{(1 + |z|^2)^{\alpha/2} [1 + \Delta^{-\beta}(y)]}. \quad (12.4)$$

Пространства $H^{(\alpha, \beta)}(T^C)$ банаховы. Кроме того, если $\alpha' \geq \alpha$, $\beta' \geq \beta$, то $\|f(z)\|^{(\alpha', \beta')} \leq 2\|f(z)\|^{(\alpha, \beta)}$. А потому

$$H^{(\alpha, \beta)}(T^C) \subset H^{(\alpha', \beta')}(T^C), \quad (12.5)$$

причем вложение непрерывно. Объединение всех $H^{(\alpha, \beta)}(T^C)$ обозначим $H(T^C)$. Это пространство является ассоциативной, коммутативной алгеброй относительно операции обычного умножения (функций) с единицей и без делителей нуля.

Покажем, что $\mathcal{S}'_\Gamma \sim H(T^C)$, то есть пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'_\Gamma$ изоморфно пространству голоморфных в T^C функций (не выше степенного роста вблизи границы) $H(T^C)$. Этот изоморфизм осуществляется преобразованием Лапласа $L[\cdot]$. Доказательство проведем в три шага.

ЛЕММА 12.1. Пусть $g(t) \in \mathcal{S}'_\Gamma$, где Γ – замкнутый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле и $C = \text{int } \Gamma^*$. Тогда $f(z) = L[g](z) \in H(T^C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва заметим, что так как обобщенная функция $g(t) \in \mathcal{S}'_\Gamma$, то она имеет конечный порядок. Учитывая, что при $z \in T^C$, $t \in \Gamma$, функция $e^{i(z, t)} \in \mathcal{S}_\Gamma$, и пользуясь (12.2) и (10.9), для некоторого N имеем

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |(g(t), e^{i(z, t)})| \leq \\ &\leq C \|e^{i(z, t)}\|_{N, \Gamma} = C \sup_{\substack{t \in \Gamma \\ |j| \leq N}} (1 + t^2)^{N/2} |D_t^j e^{i(z, t)}| \leq \\ &\leq C \sup_{\substack{t \in \Gamma \\ |j| \leq N}} (1 + t^2)^{N/2} |(iz)^j| e^{-(y, t)} \leq C' (1 + |z|^2)^{N/2} + \\ &\quad + C'' (1 + |z|^2)^{N/2} \sup_{\substack{t \in \Gamma \\ |t| > 1}} |t|^N e^{-\Delta(y)|t|} \leq \\ &\leq C_3 (1 + |z|^2)^{N/2} \left[1 + \frac{1}{\Delta^N(y)} \right]. \end{aligned}$$

Осюда и следует, что $f \in H(T^C)$.

ЛЕММА 12.2. Пусть Γ – замкнутый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле и $C = \text{int } \Gamma^*$. Если $f(z) \in H(T^C)$, то существует предел

$$f(x + iy) \xrightarrow[y \in C', y \rightarrow 0]{} f(x) \quad \text{в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (12.6)$$

Здесь C' – любой компактный подконус конуса C (то есть $\overline{\text{pr } C'} \subset \text{pr } C$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва мы проведем доказательство для случая $n = 1$. В этом случае T^C – верхняя полуплоскость $\{z = x + iy, y > 0\}$ и оценка (12.3) имеет вид $|f(z)| \leq M_f \frac{(1+|z|)^a}{y^b}$ (для некоторых a и b), ибо $\Delta(y) = y$. Оценим первообразную функции $f(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} |f^{(-1)}(x + iy)| &= \left| \int_{\gamma} f(x + iy) d\ell \right| \leq M_f \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \\ &\leq M_f \int_{\gamma} \frac{(1+|z|)^a}{y^b} d\ell \leq \\ &\leq M_1(1+|z|)^{a_1} + M_2(1+|z|)^{a_2} \int_1^y \frac{d\tau}{\tau^b} \leq \\ &\leq M_3(1+|z|)^{a_3} \left[1 + \frac{1}{y^{b-1}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали следующие факты. Первообразная в фиксированной точке $x + iy$ определена с точностью до постоянной, которая в оценке не существенна. Кроме того, кривую интегрирования γ можно брать любой (в силу голоморфности $f(z)$). Мы выбрали ее следующим образом: от точки i до $x + i$ параллельно оси x , далее по прямой от точки $x + i$ до $x + iy$. Оценка N -й ($N > b + 1$) первообразной вообще не будет содержать слагаемого типа $\frac{1}{y^b}$, растущего при приближении к оси x . Тем самым очевидно, что достаточно большая первообразная непрерывна вплоть до границы верхней полуплоскости $y = 0$. Теперь имеем (для доста-

точно большого N)

$$\begin{aligned} (f(x+iy)\varphi(x)) &= (-1)^N (f^{(-N)}(x+iy), \varphi^{(N)}(x)) = \\ &= (-1)^N \int f^{(-N)}(x+iy) \varphi^{(N)}(x) dx \xrightarrow{y \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{y \rightarrow 0} (-1)^N \int f^{(-N)}(x) \varphi^{(N)}(x) dx. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $f^{(-N)}(z)$ растет не быстрее некоторой степени z , а $\varphi^{(N)}(x)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени. Таким образом у $f(z) \in H(T^C)$ существует в $\mathcal{S}'$ граничное значение, которое мы будем обозначать $f(x)$.

Для случая $n > 1$ доказательство можно провести, пользуясь аналогичными рассуждениями. Надо показать, что существует предел

$$\int f(x+i\beta y)\varphi(x) dx \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

равномерный при $y \in \text{pr } C'$, где $C' \in C$. Пусть $\eta(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ и $\int \eta(\xi) d\xi = 1$. Для любой $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \int f(x+i\beta y)\varphi(x) dx &= \int \eta(\xi) d\xi \int f(x+y\xi - y\xi + i\beta y)\varphi(x) dx = \\ &= \iint f(x + (\xi + i\beta)y)\eta(\xi)\varphi(x - y\xi) dx d\xi. \end{aligned}$$

Как и выше, взяв N -ю первообразную от $f(x+y\sigma)$ по $\sigma = \xi + i\beta$ (пользуясь голоморфностью по σ), можно показать, что при достаточно большом N она будет непрерывной функцией по σ вплоть до $\beta = 0$. И далее, переходя к пределу, убедимся, что у f существует граничное значение в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

ЛЕММА 12.3. Пусть $f(z) \in H(T^C)$; тогда существует обобщенная функция $g(t) \in \mathcal{S}'_1$ такая, что $L[g(t)](z) = f(z)$, причем преобразование Фурье $F[g(t)](x) = f(x)$, где $f(x)$ есть граничное значение $f(z)$, вычисляемое по формуле (12.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу оценки (12.3) при каждом $y \in \text{int } C$ функция $f(x+iy) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и существует мультииндекс j , так что $\int \left| \frac{f(x+iy)}{(-iz)^j} \right| dx < \infty$. Рассмотрим обобщенную функцию $g_y(t) = e^{(y,t)} F_x^{-1}[f(x+iy)](t, y)$. Покажем,

что она не зависит от y . Действительно, для любого $\ell = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_y(t)}{\partial y_\ell} &= t_\ell e^{(y,t)} F_x^{-1}[f(x+iy)] + e^{(y,t)} F_x^{-1} \left[\frac{\partial f(x+iy)}{\partial y_\ell} \right] = \\ &= e^{(y,t)} \left\{ t_\ell F_x^{-1}[f(x+iy)] + F_x^{-1} \left[\frac{i \partial f(x+iy)}{\partial x_\ell} \right] \right\} = \\ &= e^{(y,t)} [t_\ell - i(it_\ell)] F_x^{-1}[f(x+ty)] = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались условиями Коши–Римана для голоморфных функций. Отсюда следует, что $g_y(t) \equiv g(t)$ не зависит от y и

$$F_x^{-1}[f(x+iy)](t) = e^{-(y,t)} g(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (12.7)$$

Переходя здесь к пределу при $y \rightarrow 0$, $y \in C' \Subset C$, учитывая, что преобразование Фурье непрерывно в $\mathcal{S}'$ и формулу (12.6), получим, что $F^{-1}[f(x)](t) = g(t)$.

Покажем теперь, что $\text{supp } g(t) \subset \Gamma$. Действительно, пусть $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } \varphi(t) \cap \Gamma = \emptyset$. Отметим, что

$$(y, t) \leq -\sigma|y||t| \leq \sigma_1|y| \quad \text{при } y \in C, t \in \text{supp } g(t). \quad (12.8)$$

(См. лемму 9.6, свойство 4, нарисуйте рисунок. Учтите, что $\text{int } \Gamma^* = C$ и носитель g отделен от замкнутого конуса Γ , а следовательно, и от нуля.) Теперь имеем

$$\begin{aligned} (g(t), \varphi(t)) &= (F_x^{-1}[f(x+iy)](t), e^{(y,t)} \varphi(t)) = \\ &= (f(x+iy), F^{-1}[e^{(y,t)} \varphi(t)](x)) = \\ &= \int f(x+iy) \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i(x,t)+(y,t)} \varphi(t) dt dx = \\ &= \int \frac{f(z)}{(-iz)^j} \int e^{-i(z,t)} \varphi^{(j)}(t) dt dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|(g(t), \varphi(t))| \leq M e^{-|y|} \int \left| \frac{f(x+iy)}{(-iz)^j} \right| dx \int |\varphi^{(j)}(t)| dt \leq M_1 e^{-|y|}.$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от y , то, устремляя y к бесконечности, получаем, что $(g(t), \varphi(t)) = 0$. Что и завершает доказательство леммы.

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 12.1 (ПЭЛИ–ВИНЕРА–ВЛАДИМИРОВА). *Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала пространству $H(T^C)$, необходимо и достаточно, чтобы ее спектральная функция $g(t)$ принадлежала S'_Γ . Алгебры $H(T^C)$ и S'_Γ изоморфны и этот изоморфизм осуществляется преобразованием Лапласа. Функция $f(x + iy)$ имеет в S' граничное значение при $y \rightarrow 0, y \in C$ равное $F[g] = f(x)$.*

Заметим, что в работе В. С. Владимирова [2] утверждение теоремы доказано для более широкого круга пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть f и g из S'_Γ . Тогда их свертка $f * g \in S'_\Gamma$ и ее преобразование Лапласа дается формулой

$$L[f * g] = L[f] \cdot L[g]. \quad (12.9)$$

УПРАЖНЕНИЯ. Рассмотрим случай $n = 1$, $\Gamma = [0, +\infty)$, T^C – верхняя полуплоскость в $\mathbb{C}$.

1) Обобщенная функция f_α , определяемая формулой (9.30), принадлежит пространству $S'_\Gamma \equiv S'_+$. Покажите, что

$$L[f_\alpha] = \frac{1}{(-iz)^\alpha}, \quad y > 0.$$

В частности, если $g \in S'_+$, то ее для ее дробной производной порядка α справедлива формула

$$L[g^{(\alpha)}(t)](z) = (-iz)^\alpha L[g(t)](z). \quad (12.10)$$

РЕШЕНИЕ. Пусть $\alpha > 0$, тогда f_α – регулярная функция и

$$L[f_\alpha](iy) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-ty} dt = \frac{1}{y^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{y^\alpha}.$$

В верхней полуплоскости голоморфные функции $L[f_\alpha](z)$ и $(-iz)^{-\alpha}$ совпадают на линии $z = iy$, $y > 0$, а следовательно, всюду в верхней полуплоскости. Если $\alpha \leq 0$, то $\alpha + m > 0$ при некотором m . Поэтому

$$L[f_\alpha] = L[f_{m+\alpha}^{(m)}] = (-iz)^m (-iz)^{-\alpha-m} = (-iz)^{-\alpha}.$$

Отсюда (при $\alpha = 1$) и из (12.7), имеем

$$L[e^{ita}\Theta(t)] = \frac{i}{z+a}, \quad L[e^{-ita}\Theta(t)] = \frac{i}{z-a},$$

откуда

$$L[\Theta(t) \sin(at)] = \frac{a}{a^2 - z^2}, \quad L[\Theta(t) \cos(at)] = \frac{-iz}{a^2 - z^2}.$$

2) Функция Бесселя $J_0(t)$ определяется как решение уравнения $tu'' + u' + tu = 0$ при условиях $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Вычислите ее преобразование Лапласа.

УКАЗАНИЕ. Запишем уравнение Бесселя в виде $(itu')' + itu = 0$ и перейдем к преобразованию Лапласа, имеем $-iz[D(-iz\tilde{u})] + D\tilde{u} = 0$. Откуда $(-z^2 + 1)\tilde{u}' = z\tilde{u}$, или $\frac{\tilde{u}'}{\tilde{u}} = \frac{z}{-z^2 + 1}$. Решая, получим $\ln \tilde{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{dz^2}{-z^2 + 1}$, или $\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{-z^2 + 1}}$.

3) Докажите, что $\sin t = \int_0^t J_0(\tau) J_0(t - \tau) d\tau$.

УКАЗАНИЕ. Вспомните, что $L[\sin t] = \frac{1}{1 - z^2}$ и тот факт, что свертка переходит при преобразовании Лапласа в произведение.

4) Покажите, что семейство экспонент $\{e^{-kt}, k > 0\}$ плотно в $\mathcal{S}_\Gamma$, где $\Gamma = [0, +\infty)$, то есть в $\mathcal{S}_+$.

РЕШЕНИЕ. Пусть это не так. Тогда найдется в $\mathcal{S}_+$ элемент $\varphi_0(t)$, не принадлежащий подпространству, являющемуся замыканием линейной оболочки экспонент $\{e^{-yt}, y > 0\}$. А потому из теоремы Хана–Банаха (см. упражнение 1 в конце § 5) заключаем, что существует функционал $g(t) \in \mathcal{S}'_+$ такой, что $(g(t), e^{-yt}) = 0$ при всех $y > 0$, но $(g, \varphi_0) \neq 0$. Переходя к преобразованию Лапласа, видим, что $f(z) = L[g] = (g(t), e^{izt}) = 0$ при $y > 0$ (на чисто мнимой полуоси верхней полуплоскости $\mathbb{C}$). По теореме единственности для голоморфных функций следует, что $f(z) \equiv 0$, а следовательно, и $g \equiv 0$. Пришли к противоречию.

5) Напомним, что $g(t) \in \mathcal{S}'$ называется однородной степени α , если $g(\lambda t) = \lambda^\alpha g(t)$. Докажите, что однородная функция $g(t) \in \mathcal{S}'_+$ степени α равна $cf_{\alpha+1}$, где c – некоторая постоянная.

РЕШЕНИЕ. Пусть $f(z) = L[g(t)](z) = (g(t), e^{izt})$ – преобразование Лапласа однородной функции g . Имеем

$$\begin{aligned} f(i) &= (g(t), e^{-\lambda \frac{t}{\lambda}}) = \lambda (g(\lambda t'), e^{-\lambda t'}) = \\ &= \lambda^{\alpha+1} (g(t), e^{-\lambda t}) = \lambda^{\alpha+1} f(i\lambda). \end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену переменной $(\lambda t' = t)$ и воспользовались однородностью обобщенной функции $g(t)$. Отсюда имеем

$f(iy) = \frac{f(i)}{y^{\alpha+1}}$. Таким образом, голоморфная в верхней полуплоскости функция $f(z)$ на мнимой полуоси ($y > 0$) совпадает с функцией $\frac{c}{(-iz)^{\alpha+1}}$. По теореме единственности для голоморфных функций $f(z) = \frac{c}{(-iz)^{\alpha+1}}$, где $c = f(i) = (g(t), e^{-t})$. Следовательно, $g(t) = cf_{\alpha+1}$.

§ 13. Асимптотически однородные обобщенные функции

В этом параграфе мы ограничиваемся случаем $n = 1$ и пространством обобщенных функций $\mathcal{S}'_+$ (случай $n > 1$ рассмотрен в [5]).

Напомним, что пространство $\mathcal{S}'_+$ – это пространство обобщенных функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ с носителями на положительной полуоси. Его можно трактовать как пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{S}_+$, то есть на пространстве бесконечно дифференцируемых на замкнутой полуоси $[0, +\infty)$ функций, быстро убывающих при $t \rightarrow +\infty$ вместе со всеми производными. Топология на $\mathcal{S}_+$ задается системой полунорм

$$\|\varphi\|_{N, \mathbb{R}^1_+} = \sup_{\substack{j \leq N \\ t \in \mathbb{R}^1_+}} (1+t^2)^{N/2} |\varphi^{(j)}(t)|. \quad (13.1)$$

Тем самым $\mathcal{S}_+$ есть проективный предел банаховых пространств $\mathcal{S}_{+N}$.

Пусть $f \in \mathcal{S}'$, тогда по теореме 10.4 существует N такое, что $f(t) = D^N g(t)$, где $g(t)$ – непрерывная функция степенного роста. Если $f \in \mathcal{S}'_+$, то можно считать, что $g(t) = [f * f_N](t)$, где f_N – ядро дробного интегрирования и дифференцирования, см. формулу (9.30).

Поскольку f имеет конечный порядок, то есть существует M такое, что $f \in \mathcal{S}'_{+M}$, то справедлива формула

$$g(t) = (f(\xi), f_N(t - \xi)), \quad (13.2)$$

ибо при достаточно больших N функция $f_N(t - \xi) \in \mathcal{S}_{+M}$ и непрерывно зависит от t . (Докажите).

Преобразованием Лапласа функции $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ является функция

$$\tilde{f}(z) = L[f](z) = (f(t), e^{itz}), \quad z = x + iy, \quad y > 0. \quad (13.3)$$

(Следует заметить, что $e^{itz} \in \mathcal{S}_+$ при $y > 0$.) Функция $\tilde{f}(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости и удовлетворяет там оценке

$$|\tilde{f}(x + iy)| \leq C \frac{(1 + |z|)^a}{y^b}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad y > 0, \quad (13.4)$$

с некоторыми a , b и C .

Автомодельные (правильно меняющиеся) функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\rho(k)$ – положительная и непрерывная при больших k функция. Говорят, что ρ – *автомодельная (правильно меняющаяся)* функция, если для любого $a > 0$ существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho(ak)}{\rho(k)} = C(a), \quad (13.5)$$

причем сходимость равномерная по a на каждом компакте $K \subset (0, +\infty)$.

Нетрудно видеть (покажите), что $C(a)$ непрерывная функция и удовлетворяет функциональному уравнению $C(ab) = C(a)C(b)$, из которого следует, что $C(a) = a^\alpha$ при некотором $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Число $-\infty < \alpha < +\infty$ называется *порядком* автомодельности ρ . В частности, функция $\rho(k) = k^\alpha$ автомодельна порядка α . Если $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , то $k^\beta \rho(k)$ автомодельна порядка $\alpha + \beta$.

Для автомодельных (правильно меняющихся) функции имеет место следующая

ТЕОРЕМА 13.1 (О ПРЕДСТАВЛЕНИИ). Пусть $\rho(t)$ – автомодельная функция порядка α ; тогда найдется число $A > 0$ такое, что при $t \geq A$

$$\rho(t) = t^\alpha \exp \left\{ \eta(t) + \int_A^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} d\tau \right\}, \quad (13.6)$$

где $\eta(t)$ и $\varepsilon(t)$ – ограниченные непрерывные функции на $[A, +\infty)$, причем $\eta(t) \rightarrow c$, а $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [14].

Пользуясь (13.6), докажите следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 13.1. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Для любого $\varepsilon > 0$ существует k_0 такое, что

$$\begin{cases} a^{\alpha-\varepsilon} \leq \frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \leq a^{\alpha+\varepsilon} & \text{для } a > 1 + \varepsilon \text{ и } k > k_0, \\ a^{\alpha+\varepsilon} \leq \frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \leq a^{\alpha-\varepsilon} & \text{для } \frac{k_0}{k} < a < 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Докажите, что

1) для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} k^{-\alpha+\varepsilon} \rho(k) \rightarrow +\infty, \\ k^{-\alpha-\varepsilon} \rho(k) \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{при } k \rightarrow +\infty;$$

2) для любого a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho(t+a)}{\rho(t)} \rightarrow 1. \quad (13.7)$$

УКАЗАНИЕ. Воспользуйтесь представлением (13.6).

Имеется следующее удобное достаточное условие автомодельности:

Если $\rho(k)$ дифференцируема и существует предел $\frac{k\rho'(k)}{\rho(k)} \rightarrow \alpha$, при $k \rightarrow \infty$, то $\rho(k)$ автомодельна порядка α .

Примерами автомодельных функций порядка α могут служить функции вида

$$\begin{aligned} & k^\alpha; \quad k^\alpha \ln k; \quad k^\alpha \ln \ln k; \quad k^\alpha \left(1 + \frac{1}{2} \sin \ln \ln k\right); \\ & k^\alpha e^{\sqrt{\ln k}}; \quad k^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln k}}\right) \sin \sqrt{\ln k}\right) \end{aligned}$$

и др. Эти функции образуют естественную шкалу при рассмотрении асимптотического поведения функций.

Асимптотически однородные функции в $\mathcal{S}'_+$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ и $\rho(k)$ – положительная непрерывная функция при достаточно больших k . Мы говорим, что $f(t)$ асимптотически однородна на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$, если

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \longrightarrow g(t), \quad \left(\frac{1}{\rho(k)} f\left(\frac{t}{k}\right) \longrightarrow g(t), \right) \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1), \quad (13.8)$$

где $g(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.

Если $g(t) \equiv 0$, то мы говорим, что $f(t)$ *тривиально асимптотически однородна* на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$.

Заметим, что если $\frac{1}{\rho(k)}f(kt) \rightarrow g(t)$, то преобразование Фурье $\frac{1}{k\rho(k)}F[f]\left(\frac{x}{k}\right) \rightarrow F[g](x)$. Поэтому если f асимптотически однородна на бесконечности относительно $\rho(k)$, то ее преобразование Фурье асимптотически однородно в нуле относительно $k\rho(k)$.

Как показывает следующая лемма, если выполнено соотношение (13.8) и $g(t) \not\equiv 0$, то функция $\rho(k)$ обязательно является *автомодельной* (правильно меняющейся) функцией некоторого порядка α и $g(t) = Cf_{\alpha+1}(t)$.

ЛЕММА 13.1. Пусть $f \in \mathcal{S}'$ асимптотически однородна относительно некоторой положительной и непрерывной функции ρ , то есть

$$\frac{1}{\rho(k)}f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} g(t) \not\equiv 0 \quad \text{в } \mathcal{S}'. \quad (13.9)$$

Тогда ρ – автомодельная функция. При этом если порядок автомодельности ρ равен α , то обобщенная функция g в (13.9) равна $cf_{\alpha+1}$, где c – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (13.9) и φ такова, что $(g, \varphi) \neq 0$. Для любого компакта K на полуоси имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}\left(f(kt), \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \left(g(t), \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\right)$$

равномерно по $a \in K$. Поэтому

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)}\left(\frac{1}{\rho(ak)}f(akt), \varphi(t)\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \left(g(t), \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\right)$$

равномерно по $a \in K$. Из (13.9) имеем

$$\frac{1}{\rho(ak)}(f(akt), \varphi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g(t), \varphi(t)).$$

Сравнивая, получаем

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{a \in K} \frac{(g(t), \frac{1}{a}\varphi(\frac{t}{a}))}{(g, \varphi)} = C(a).$$

Что доказывает автомодельность ρ . Если порядок автомодельности ρ равен α , то $C(a) = a^\alpha$ и

$$\left(g(t), \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\right) = (g(at), \varphi(t)) = a^\alpha(g(t), \varphi(t)).$$

Поэтому $g(t)$ однородна степени α , а следовательно, $g(t) = cf_{\alpha+1}$, см. задачу 5) в конце § 12.

Таким образом асимптотически однородные функции имеет смысл рассматривать только относительно автомодельных функций.

Порядок α автомодельной функции $\rho(k)$, участвующей в (13.9), называется порядком асимптотически однородной обобщенной функции.

ПРИМЕР 13.1. Функция $f(t) = \Theta(t)e^{it}$ асимптотически однородна относительно $\rho(k) = \frac{1}{k}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi(t)) &= k \int_0^\infty e^{ikt} \varphi(t) dt = \\ &= \frac{\varphi(0)}{i} - \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{ikt} \varphi'(t) dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(0)}{i}. \end{aligned}$$

Таким образом, $kf(kt) \rightarrow -i\delta(t)$, однако обычной асимптотикой относительно $\rho(k)$ эта функция не обладает.

Наша задача выяснить, насколько богат класс асимптотически однородных обобщенных функций. Для этого предварительно докажем два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13.2. Для того чтобы $f \in \mathcal{S}'_+$ была асимптотически однородной относительно автомодельной функции $\rho(k)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого β , $-\infty < \beta < +\infty$, ее β -я первообразная $f^{(-\beta)}(t)$ была асимптотически однородна относительно $k^\beta \rho(k)$.

Это утверждение следует из однородности ядра дробного интегрирования и дифференцирования, $f_\beta(kt) = k^{\beta-1}f_\beta(t)$, и соотношения

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k^\beta \rho(k)}(f^{(-\beta)}(kt), \varphi(t)) &= \frac{1}{k^{\beta+1} \rho(k)}\left(f^{(-\beta)}(t), \varphi\left(\frac{t}{k}\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{k^{\beta+1} \rho(k)}\left((f_\beta * f)(t), \varphi\left(\frac{t}{k}\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{k^{\beta+1} \rho(k)}\left(f(t), \left(f_\beta(\tau), \varphi\left(\frac{t+\tau}{k}\right)\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{k^\beta \rho(k)}\left(f(t), \left(f_\beta(k\tau), \varphi\left(\frac{t}{k} + \tau\right)\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{k \rho(k)}\left(f(t), \left(f_\beta(\tau), \varphi\left(\frac{t}{k} + \tau\right)\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{\rho(k)}(f(kt), (f_\beta(\tau), \varphi(t+\tau))) = \frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \psi(t)).
 \end{aligned}$$

Следует только учесть, что отображение $\varphi(t) \mapsto \psi(t) = (f_\beta(\tau), \varphi(t+\tau))$ осуществляет автоморфизм пространства $\mathcal{S}_+$. (Докажите).

УТВЕРЖДЕНИЕ 13.3. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\alpha > -1$ и $f(t)$ – непрерывная функция при $t \geq 0$. Если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{\rho(t)} = A, \quad (13.10)$$

то $f(t)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно $\rho(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо доказать, что

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi(t)) = \frac{1}{\rho(k)} \int_0^\infty f(kt) \varphi(t) dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_+.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $\alpha - \varepsilon > -1$, и фиксируем k_0 как в утверждении 13.1. При $k > k_0$ и любой $\varphi \in \mathcal{S}_+$ имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho(k)} \int_0^\infty f(kt) \varphi(t) dt &= \int_0^{k_0/k} \frac{f(kt)}{\rho(k)} \varphi(t) dt + \\
 &+ \left\{ \int_{k_0/k}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \right\} \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \frac{f(kt)}{\rho(kt)} \varphi(t) dt. \quad (13.11)
 \end{aligned}$$

Покажем, что каждое слагаемое справа в этом равенстве сходится при $k \rightarrow \infty$.

1. Так как $k\rho(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ (ибо $\alpha > -1$), то

$$\int_0^{k_0/k} \frac{f(kt)}{\rho(k)} \varphi(t) dt = \frac{1}{k\rho(k)} \int_0^{k_0} f(t') \varphi\left(\frac{t'}{k}\right) dt' \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

(Здесь мы сделали замену переменных $kt = t'$, и учли, что $|\varphi(\frac{t}{k})| < \text{const}$).

2. Учитывая, что при $\frac{k_0}{k} < t < 1 - \varepsilon$ (согласно утверждению 13.1) $\frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq t^{\alpha-\varepsilon}$ и что $|\frac{f(kt)}{\rho(kt)}| < \text{const}$ (см. (13.10)), имеем

$$\left| \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \frac{f(kt)}{\rho(kt)} \varphi(t) \right| \leq Ct^{\alpha-\varepsilon} |\varphi(t)|,$$

причем

$$\int_{k_0/k}^{1-\varepsilon} Ct^{\alpha-\varepsilon} |\varphi(t)| dt \leq \int_0^1 Ct^{\alpha-\varepsilon} |\varphi(t)| dt < \infty.$$

Теперь по теореме Лебега

$$\begin{aligned} \int_{k_0/k}^{1-\varepsilon} \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \frac{f(kt)}{\rho(kt)} \varphi(t) dt &= \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \Theta\left(t - \frac{k_0}{k}\right) \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \frac{f(kt)}{\rho(kt)} \varphi(t) dt \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \\ &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_0^{1-\varepsilon} At^{\alpha-\varepsilon} \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (13.12)$$

3. При $1 - \varepsilon < t < 1 + \varepsilon$ в силу равномерной сходимости

$$\frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} t^\alpha$$

получим оценку $\frac{\rho(kt)}{\rho(k)} < \text{const}$. И, аналогично предыдущему, убеждаемся в существовании предела при $k \rightarrow \infty$ третьего интеграла справа в (13.11).

4. Учитывая, что при $1 + \varepsilon < t$ (согласно утверждению 13.1) $\frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq t^{\alpha+\varepsilon}$, как и в случае 2, получим оценку

$$\left| \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \frac{f(kt)}{\rho(kt)} \varphi(t) \right| \leq Ct^{\alpha+\varepsilon} |\varphi(t)|,$$

которая позволяет по теореме Лебега перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$ в последнем интеграле в (13.11) справа. Утверждение доказано.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 13.2. *Для того чтобы обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'_+$ была асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , необходимо и достаточно, чтобы существовало число $N, N + \alpha > -1$, такое, что ее N -я первообразная $f^{(-N)}(t)$ была непрерывной и имела обычную асимптотику относительно $t^N \rho(t)$, то есть*

$$\frac{1}{t^N \rho(t)} f^{(-N)}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} C. \quad (13.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (13.13). Тогда согласно утверждению 13.3, N -я первообразная f асимптотически однородна относительно $k^N \rho(k)$, а потому согласно утверждению 13.2 сама $f(t)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно $\rho(k)$.

Обратно. Пусть f асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , то есть

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_+. \quad (13.14)$$

По теореме 10.3 (см. также замечание к ней) следует, что соотношение (13.14) имеет место и для всех $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{+N}$ при достаточно больших N . Теперь при достаточно большом N имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^N \rho(t)} f^{(-N)}(t) &= \frac{1}{t^N \rho(t)} (f * f_N)(t) = \frac{1}{\rho(t)} (f(\xi), f_N(t - \xi)) = \\ &= \frac{1}{\rho(t)} (f(t\xi), f_N(1 - \xi)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_N. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались однородностью ядра дробного дифференцирования и интегрирования и учли, что если N велико, то $f_N(t - \xi) \in \mathcal{S}_{+M}$. Откуда и следует (13.13).

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $N + \alpha > -1$ существенно. Например, функция $f(t) = \frac{\Theta(t)}{1+t^2}$ обладает асимптотикой на бесконечности относительно $\rho_1(k) = k^{-2}$,

$$\frac{1}{\rho_1(t)} f(t) = t^2 \frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1,$$

однако f асимптотически однородна относительно $\rho(k) = \frac{1}{k}$. (Проверьте.)

Иногда важно знать, какая именно первообразная асимптотически однородной обобщенной функции уже имеет обычную асимптотику. Вообще говоря, “универсального” критерия не существует. Однако, в некоторых случаях это удается. Рассмотрим неотрицательные меры медленного роста с носителями в $\mathbb{R}_+^1$. Пусть $[d\mu](t) \in \mathcal{S}'_+$ – такая мера. В качестве ее первообразной $[d\mu]^{(-1)}(t) = \Theta(t) * d\mu(t) = \mu(t)$ возьмем функцию, удовлетворяющую условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\varepsilon}^{t-\varepsilon} d\mu(\tau) \leq \mu(t) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\varepsilon}^{t+\varepsilon} d\mu(\tau).$$

Такую первообразную называют *производящей функцией* меры $d\mu$. Производящая функция меры определяется однозначно почти всюду. Отметим также, что $\mu(t)$ не убывающая функция (монотонная функция локально ограниченной вариации).

ЛЕММА 13.2. Пусть $f = [d\mu](t)$ – неотрицательная мера медленного роста с носителем в $\mathbb{R}_+^1$. Если f асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , то есть

$$\frac{1}{\rho(k)} [d\mu](kt) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(t) = cf_{\alpha+1}(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'_+, \quad (13.15)$$

то

$$\frac{1}{t\rho(t)} \mu(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} g^{(-1)}(1) = cf_{\alpha+2}(1) = \frac{c}{\Gamma(\alpha+2)}. \quad (13.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что так как $\mu(t)$ не убывающая функция, то $\alpha+1 \geq 0$, то есть обязательно $\alpha \geq -1$. А потому первая первообразная g – функция $g^{(-1)}(t)$ – непрерывна по t при $t > 0$. Положим $\varphi_\delta(t) = \Theta(t) * \omega_\delta(t)$, где ω_δ – “шапочка”, см. (3.3). Имеет место неравенство

$$\varphi_\delta(1-t-\delta) \leq \Theta(1-t) \leq \varphi_\delta(1-t+\delta).$$

(Нарисуйте графики этих функций и убедитесь в правильности неравенства.) Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)}(f(k\tau), \varphi_\delta(1 - \tau - \delta)) &\leq \\ &\leq \frac{1}{k\rho(k)} \int_0^{k-0} [d\mu](\tau) \leq \frac{\mu(k)}{k\rho(k)} \leq \frac{1}{k\rho(k)} \int_0^{k+0} [d\mu](\tau) \leq \\ &\leq \frac{1}{\rho(k)}(f(k\tau), \varphi_\delta(1 - \tau + \delta)). \end{aligned} \quad (13.17)$$

По условию для любого $\delta > 0$

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(k\tau), \varphi_\delta(1 - \tau \pm \delta)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g(\tau), \varphi_\delta(1 - \tau \pm \delta)). \quad (13.18)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} g^{(-1)}(1 - 2\delta) &\leq (g(\tau), \varphi_\delta(1 - \tau - \delta)) \leq \\ &\leq (g(\tau), \varphi_\delta(1 - \tau + \delta)) \leq g^{(-1)}(1 + 2\delta). \end{aligned} \quad (13.19)$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. Так как $g^{(-1)}(t)$ непрерывна в окрестности 1, то найдется δ_ε такое, что при $\delta < \delta_\varepsilon$ имеем

$$|g^{(-1)}(1) - g^{(-1)}(1 \pm 2\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13.20)$$

В силу (13.18) при достаточно большом k ($k > k_\varepsilon$) имеем

$$\left| \frac{1}{\rho(k)}(f(k\tau), \varphi_\delta(1 - \tau \pm \delta)) - (g(\tau), \varphi_\delta(1 - \tau \pm \delta)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (13.17), (13.20) и (13.19) имеем

$$\left| \frac{\mu(k)}{k\rho(k)} - g^{(-1)}(1) \right| < \varepsilon, \quad k > k_\varepsilon.$$

Что и доказывает (13.16).

УПРАЖНЕНИЯ. 1) Будут ли асимптотически однородными следующие функции (и если будут, то относительно каких автомодельных функций):

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \Theta(t) \sin(t); & f_2(t) &= \Theta(t) \cos(t); \\ f_3(t) &= \Theta(t)t \sin(t); & f_4(t) &= \Theta(t)t \cos(t)? \end{aligned}$$

УКАЗАНИЕ. Проверьте, что

$$\begin{aligned} kf_1(kt) &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \delta(t), & k^2 f_2(kt) &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \delta'(t), \\ k^2 f_3(kt) &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 2\delta'(t), & kf_4(kt) &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -\delta(t) \end{aligned}$$

в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.

2) Покажите, что для функции $f(t) = \Theta(t-2) \cos \ln t$ не существует автомодельной функции, относительно которой $f(t)$ являлась бы нетривиально асимптотически однородной.

УКАЗАНИЕ. Покажите, что какими бы большими ни были числа N и t_0 , функция $f^{(-N)}(t)$ обязательно меняет знак при $t > t_0$,

$$f^{(-N)}(t) = t^N r_N \cos[\ln t + \varphi_N] + P_{N-1}(t), \quad (13.21)$$

где $r_N > 0$, а $P_{N-1}(t)$ — многочлен степени не выше N .

Общая тауберова теорема для $f \in \mathcal{S}'_+$

ТЕОРЕМА 13.3. Для того чтобы обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'_+$ была асимптотически однородной относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α ,

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} cf_{\alpha+1}(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'_+, \quad (13.22)$$

необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Лапласа удовлетворяло условиям

А)

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{y}{\rho(\frac{1}{y})} \tilde{f}(iy) = c; \quad (13.23)$$

В) существуют числа M , N и r_0 такие, что

$$\left| \frac{r}{\rho(\frac{1}{r})} \tilde{f}(re^{i\varphi}) \right| \leq \frac{M}{\sin^N \varphi} \quad \text{при } 0 < r \leq r_0, \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (13.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть выполнено (13.22). Последовательность обобщенных функций $\{\frac{1}{\rho(k)} f(kt), k \rightarrow \infty\}$

сходится в $\mathcal{S}'_+$, поэтому она сходится по некоторой норме в некотором $\mathcal{S}_{N, \mathbb{R}^1_+}$ (см. теорему 10.3 и замечание к ней), и выполнено неравенство

$$\left| \left(\frac{1}{\rho(k)} f(kt), e^{izt} \right) \right| \leq C \|e^{izt}\|_{N, \mathbb{R}^1_+}, \quad y > 0, \quad (13.25)$$

(см. (10.10)). Для $y > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|e^{izt}\|_{N, \mathbb{R}^1_+} &= \sup_{\substack{t > 0 \\ j \leq N}} (1+t^2)^{N/2} |D^j e^{izt}| \leq \sup_{\substack{t > 0 \\ j \leq N}} (1+t^2)^{N/2} |(iz)^j| e^{-yt} \leq \\ &\leq c_1 (1+|z|^2)^{N/2} \sup_{t > 0} t^N e^{-yt} \leq c \frac{(1+|z|^2)^{N/2}}{y^N}. \end{aligned}$$

Полагая теперь в этой оценке $y = |z| \sin \varphi$, из (13.25) получим (13.24). Переходя в (13.22) к преобразованию Лапласа, имеем

$$\frac{1}{k\rho(k)} \tilde{f}\left(\frac{z}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c \frac{1}{(-iz)^{\alpha+1}}.$$

Отсюда при $z = i$, обозначая $k = y^{-1}$, получаем (13.23).

Достаточность. Пусть выполнены (13.23) и (13.24). Обращая преобразование Лапласа, при достаточно большом m (в частности, можно считать, что $m > N + 3 + 2\alpha$) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^m \rho(k)} f^{(-m)}(kt) &= \frac{1}{k^m \rho(k)} (f_m * f)(kt) = \\ &= \frac{1}{2\pi k^{m+1} \rho(k)} \int_{\gamma} e^{-izt} \tilde{f}\left(\frac{z}{k}\right) \frac{dz}{(-i\frac{z}{k})^m}, \end{aligned}$$

где контур интегрирования $\gamma = x + i\frac{1}{t}$, $-\infty < x < +\infty$. Покажем, что

$$\left| \frac{1}{k^m \rho(k)} f^{(-m)}(kt) \right| \leq P(t),$$

где $P(t)$ – полином, не зависящий от k . Оценивая, имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k^m \rho(k)} f^{(-m)}(kt) \right| &\leq \frac{c_1 t^m}{k \rho(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|(-ixt + 1)|^m} \left| \tilde{f}\left(\frac{xt+i}{kt}\right) \right| \leq \\ &\leq c_2 \frac{t^{m-1}}{k \rho(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(\eta^2 + 1)^{m/2}} \left| \tilde{f}\left(\frac{\eta+i}{kt}\right) \right|. \end{aligned} \quad (13.26)$$

Далее, фиксируя $\varepsilon > 0$ и считая $k > k_0 > 1$, где k_0 выбрано как в утверждении 13.1, рассмотрим следующие два случая.

1. $kt \leq k_0$. В этом случае $t \leq 1$ и из оценки (13.4) имеем

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}\left(\frac{\eta + i}{kt}\right) \right| &\leq M \frac{1 + \left(\frac{1+\eta^2}{(kt)^2}\right)^{a/2}}{\left(\frac{1}{kt}\right)^b} = \\ &= M_1(1 + \eta^2)^{a/2}(kt)^{b-a} \leq \\ &\leq \begin{cases} M_2(1 + \eta^2)^{a/2} & \text{при } b - a \geq 0, \\ M_3(1 + \eta^2)^{a/2}t^{b-a} & \text{при } b - a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая также, что $\rho(k) \geq Ck^{\alpha-\varepsilon}$ при достаточно больших k (увеличим, если нужно k_0), имеем

$$\frac{1}{k\rho(k)} \leq \frac{c_1}{k^{1+\alpha-\varepsilon}} \leq \begin{cases} \frac{c_1}{k_0^{1+\alpha-\varepsilon}} & \text{при } 1 + \alpha - \varepsilon \geq 0, \\ c_2 t^{1+\alpha-\varepsilon} & \text{при } 1 + \alpha - \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Учитывая все эти оценки, из (13.26) получим (при достаточно большом m)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k^m \rho(k)} f^{(-m)}(kt) \right| &\leq \\ &\leq C t^{m-1-|b-a|-|1+\alpha-\varepsilon|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + \eta^2)^{a/2}}{(1 + \eta^2)^{m/2}} d\eta \leq P(t). \end{aligned}$$

2. $kt > k_0 > 1$. В этом случае, продолжая оценку (13.26), имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k^m \rho(k)} f^{(-m)}(kt) \right| &\leq \\ &\leq c_2 \frac{t^m \rho(tk)}{\rho(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(\eta^2 + 1)^{m/2}} \left| \frac{1}{(kt)\rho(kt)} \tilde{f}\left(\frac{\eta + i}{kt}\right) \right| \leq \\ &\leq c_2 t^m \frac{\rho(tk)}{\rho(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(\eta^2 + 1)^{m/2}} \left| \frac{1}{(kt)\rho(kt)} \tilde{f}(re^{i\varphi}) \right|, \quad (13.27) \end{aligned}$$

где положено $r = \frac{\sqrt{\eta^2+1}}{kt}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{\eta^2+1}}$. Пользуясь условием (13.24), получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(kt)\rho(kt)} \tilde{f}\left(re^{i\varphi}\right) \right| &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2+1} \frac{\rho\left(\frac{1}{r}\sqrt{\eta^2+1}\right)}{\rho\left(\frac{1}{r}\right)}} \frac{r}{\rho\left(\frac{1}{r}\right)} |\tilde{f}(re^{i\varphi})| \\ &\leq c_3 \frac{(\sqrt{\eta^2+1})^N}{(\sqrt{\eta^2+1})^{\frac{1}{2}-|\alpha-\varepsilon|}}. \end{aligned}$$

Далее согласно утверждению 13.1 имеем следующие оценки:

$$\frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq \begin{cases} t^{\alpha-\varepsilon} & \text{при } \frac{k_0}{k} < t < 1-\varepsilon, \\ C & \text{при } 1-\varepsilon < t < 1+\varepsilon, \\ t^{\alpha+\varepsilon} & \text{при } t > 1+\varepsilon. \end{cases} \quad (13.28)$$

Наконец, из (13.27), используя полученные оценки, выводим при достаточно большом k

$$\left| \frac{1}{k^m \rho(k)} f^{(-m)}(kt) \right| \leq M_1 t^{m+\alpha \pm \varepsilon} \int \frac{(\eta^2+1)^{N/2} d\eta}{(\eta^2+1)^{\frac{1}{2}-|\alpha-\varepsilon|+m/2}} \leq ct^{m+\alpha \pm \varepsilon}.$$

Здесь знаки $\pm$ выбраны соответственно неравенствам (13.28).

Учитывая, что $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$ убывает при $t \rightarrow +\infty$ быстрее любой степени, получаем

$$\frac{1}{k^m \rho(k)} |(f^{(-m)}(kt), \varphi(t))| < \text{const.}$$

Таким образом, последовательность функционалов

$$\left\{ \frac{1}{k^m \rho(k)} f^{(-m)}(kt), \quad k > k_0 \right\}$$

ограничена на каждом элементе из $\mathcal{S}_+$. Кроме того, эта последовательность сходится на основных функциях вида e^{-yt} , $0 < y < \frac{1}{k_0}$, $k_0 > 0$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k^m \rho(k)} (f^{(-m)}(kt), e^{-yt}) &= \frac{1}{k^m \rho(k)} ((f_m * f)(kt), e^{-yt}) \\
 &= \frac{1}{k^{m+1} \rho(k)} ((f_m * f)(t), e^{-\frac{1}{k}t}) = \frac{1}{k^{m+1} \rho(k)} \frac{1}{(-i\frac{z}{k})^m} \tilde{f}\left(\frac{z}{k}\right) \Big|_{z=iy} \\
 &= \frac{\rho(\frac{1}{y}k)}{\rho(k)} \frac{\frac{y}{k}}{\rho(\frac{1}{y}k)} \tilde{f}\left(i\frac{y}{k}\right) = \frac{\rho(\frac{1}{r})}{\rho(\frac{y}{r})} \frac{r}{\rho(\frac{1}{r})} \tilde{f}(ir) \xrightarrow{r \rightarrow +0} \frac{c}{y^\alpha},
 \end{aligned}$$

где $r = \frac{y}{k}$ и мы учли (13.23). Эти основные функции всюду плотны в $\mathcal{S}_+$, см. задачу 4) в конце предыдущего параграфа. Итак, последовательность функционалов ограничена и сходится на всюду плотном множестве; следовательно, по следствию 2 к теореме 6.3 она сходится. А потому первообразная порядка m асимптотически однородна относительно $k^m \rho(k)$ и по теореме 13.2 сама $f(t)$ асимптотически однородна относительно ρ , что и доказывает (13.22). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если граничное значение $\tilde{f}(x)$ функции $\tilde{f}(z) \in H(T^{\mathbb{R}_+})$ асимптотически однородно в нуле относительно автомодельной функции $k\rho(k)$, то для $\tilde{f}(z)$ выполнены условия А) и В) теоремы.

Действительно, преобразование Фурье $F[\tilde{f}(x)](t) = f(t)$ будет асимптотически однородной обобщенной функцией на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$.

ЛЕММА 13.3. Пусть $f = [d\mu](t)$ – неотрицательная мера из $\mathcal{S}'_+$. Тогда из условия (13.23) вытекает условие (13.24).

Действительно, учитывая, что $re^{i\varphi} = x + iy$, $y = r \sin \varphi$, имеем

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{r}{\rho(\frac{1}{r})} \tilde{f}(re^{i\varphi}) \right| &= \frac{r}{\rho(\frac{1}{r})} \left| \int_0^\infty e^{i(x+iy)t} d\mu(t) \right| \leq \\
 &\leq \frac{r}{\rho(\frac{1}{r})} \int_0^\infty e^{-tr \sin \varphi} d\mu(t) = \\
 &= \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\rho(\frac{1}{r} \frac{1}{\sin \varphi})}{\rho(\frac{1}{r})} \frac{y}{\rho(\frac{1}{y})} \int_0^\infty e^{-yt} d\mu(t) \leq \frac{c_1}{\sin^{\alpha+1} \varphi}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соответствующим неравенством из утверждения 13.1 и учли предельное соотношение (13.21). В качестве следствия приведем известную, имеющую широкое применение, тауберову теорему Харди–Литтлвуда–Караматы.

ТЕОРЕМА 13.4. Пусть $f = [d\mu](t) \in \mathcal{S}'_+$ – неотрицательная мера. Для того чтобы ее производящая функция (первая первообразная $[d\mu]^{(-1)}(t) = \mu(t)$) имела асимптотику на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho_1(k)$ порядка β , то есть

$$\frac{\mu(t)}{\rho_1(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c, \quad (13.29)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\rho_1(\frac{1}{y})} \int_0^{+\infty} e^{-yt} d\mu(t) \xrightarrow{y \rightarrow +0} c_1. \quad (13.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Из (13.29) следует, что сама мера $[d\mu](t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k) = \frac{1}{k}\rho(k)$ (теорема 13.2), а тогда по общей тауберовой теореме (условие А) получим соотношение (13.30).

Достаточность. Пусть выполнено (13.30). Полагая $\rho(k) = \frac{1}{k}\rho_1(k)$, учитывая лемму 13.3, из общей тауберовой теоремы выводим требуемое утверждение.

Заметим, что $c_1 = c\Gamma(\beta+1)$. Это непосредственно проверяется с помощью соотношений (13.15), (13.16) и (13.30).

Список литературы

- [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976.
- [2] Владимиров В. С., *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.
- [3] Гельфанд И. М., Шилев Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*, Обобщенные функции, вып. 1, Физматлит, М., 1959.
- [4] Гельфанд И. М., Шилев Г. Е., *Пространства основных и обобщенных функций*, Обобщенные функции, вып. 2, Физматлит, М., 1959.
- [5] Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И., *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986.
- [6] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., *Некоторые применения гармонического анализа*, Обобщенные функции, вып. 4, Физматлит, М., 1961.
- [7] Антосик А., Микусинский Я., Сикорский Р., *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход*, Мир, М., 1976.

- [8] Шилов Г. Е., *Математический анализ. Специальный курс*, Физматлит, М., 1960.
- [9] Шилов Г. Е., *Математический анализ. Второй специальный курс*, Физматлит, М., 1965.
- [10] Келли Дж. Л., *Общая топология*, Наука, М., 1968.
- [11] Владимиров В. С., Михайлов В. П. и др., *Сборник задач по уравнениям математической физики*, Физматлит, М., 2003.
- [12] Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И., “Асимптотически однородные обобщённые функции и граничные свойства функций голоморфных в трубчатых конусах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006).
- [13] Люстерник Л. А., Соболев В. И., *Элементы функционального анализа*, Наука, М., 1965.
- [14] Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
- [15] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [16] Рудин У., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
- [17] Робертсон А., Робертсон В., *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967.
- [18] Шефер Х., *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.
- [19] Иосида К., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [20] Владимиров В. С., *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.