Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Случайные блуждания и ветвящиеся процессы, *Лекц. курсы НОЦ*, 2007, выпуск 6, 3–187

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn6>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:00:07

Оглавление

Предисловие	4
Лекция 1. Сходимость случайных элементов по распределению	6
Лекции 2–3. Условия сходимости по распределению случайных процессов с траекториями из $D[0, 1]$	15
Лекция 4. Определение броуновского движения и его существование	27
Лекция 5. Принцип инвариантности Прохорова–Донскера	35
Лекция 6. Приложения принципа инвариантности Прохорова–Донскера	41
Лекция 7. Распределение минимума, максимума и положения в последний момент броуновского движения. Броуновский мост	48
Лекция 8. Локальные предельные теоремы Гнеденко и Стоуна	56
Лекция 9. Принцип инвариантности Лиггетта	66
Лекция 10. Предельная теорема для статистики Колмогорова	73
Лекция 11. Броуновская извилина и броуновская экскурсия: определение и конечномерные распределения	79
Лекция 12. Броуновская извилина и броуновская экскурсия как условное броуновское движение	87
Лекция 13. Принцип инвариантности Иглхарта	94
Лекция 14. Тождества Спарре–Андерсена и Спицера	105
Лекция 15. Приложения тождеств Спарре–Андерсена и Спицера	112
Лекция 16. Условная локальная предельная теорема и ее применение	121
Лекция 17. Локальная версия принципа инвариантности Иглхарта и ее применение для случайных блужданий с отрицательным сносом	134
Лекция 18. Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона	146
Лекции 19–20. Ветвящиеся процессы в случайной среде	159

Предисловие

Вниманию читателей предлагается годовой спецкурс, прочитанный для студентов и аспирантов различных московских вузов в рамках Научно-образовательного центра при Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН в течение 2005/2006-го учебного года.

В спецкурсе излагаются различные аспекты теории случайных блужданий и теории ветвящихся процессов. При этом ядро курса составляют *условные принципы инвариантности* для случайных процессов, построенных на основе случайных последовательностей, коими являются и случайные блуждания, и рассматриваемые в курсе ветвящиеся процессы.

В связи с этим представляется необходимым познакомить читателя с теоремами об *условиях сходимости по распределению случайных процессов* с непрерывными траекториями или с траекториями без разрывов второго рода. Общие вопросы сходимости по распределению и указанные теоремы излагаются в первых трех лекциях.

Большое внимание в рассматриваемом курсе уделено *принципу инвариантности Прохорова–Донскера* и его приложениям (см. лекции 4–7). В частности, рассматриваются закон арксинуса и предельная теорема для совместного распределения минимума, максимума и положения в последний момент для случайного блуждания с нулевым сносом.

Наряду с принципом инвариантности Прохорова–Донскера в курсе рассматриваются так называемые условные принципы инвариантности для случайных блужданий. Этот раздел теории вероятностей зародился в семидесятые годы двадцатого столетия и активно развивается в настоящее время.

В лекциях 9–10 рассматривается *условный принцип инвариантности Лиггетта*, в котором накладывается ограничение на положение случайного блуждания в последний момент. В качестве приложения этого принципа инвариантности получается знаменитая предельная теорема Колмогорова для выборочной функции распределения.

В лекциях 11–13 и 17 излагается *условный принцип инвариантности Иглхарта*, в котором накладывается ограничение на

всю траекторию случайного блуждания. При этом рассматриваются случайные блуждания как с нулевым сносом, так и с отрицательным. В качестве предельных процессов здесь фигурируют *броуновская экскурсия* и *броуновская извилина*.

Важное место в доказательстве упомянутых принципов инвариантности занимают локальные предельные теоремы: *теорема Стоуна*, изложенная в лекции 8, и *условная локальная предельная теорема*, изложенная в лекции 16.

В курсе излагаются и применяются *тождества Спарре–Андерсена* и *Спицера* (см. лекции 14–15), играющие значительную роль в теории случайных блужданий. Приведены прямые, вероятностные доказательства этих тождеств (без факторизационных теорем).

Ветвящимся процессам посвящены последние при лекции. Сначала рассматривается классический *ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона* и излагаются предельные теоремы Яглома, Феллера–Линдвалла, Ламперти–Нея–Дарретта. Затем рассматривается популярная в настоящее время модель *ветвящегося процесса в случайной среде* и излагаются предельные теоремы для этого процесса, часть которых получена в результате плодотворной совместной работы сотрудников отдела дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова и немецких математиков Г. Керстинга и Й. Гейгера. Важно подчеркнуть *взаимосвязь* ветвящихся процессов в случайной среде и условных случайных блужданий, благодаря которой различные части курса становятся единым целым.

Для понимания спецкурса необходимо знакомство с основами теории вероятностей, а также с элементами теорий восстановления, мартингалов, марковских процессов, например по книгам А. Н. Ширяева [9] (см. главы 2, 3, 7) и А. А. Боровкова [2] (см. главы 9, 12, 20). Изучение спецкурса позволит читателю перейти от классических разделов теории вероятностей к современным задачам этой науки.

Работа над спецкурсом была частично поддержана грантом РФФИ (проект № 05-01-00035) и грантом президента РФ для ведущих научных школ (проект № НШ-4129.2006.1). Автор выражает глубокую благодарность своей дочери А. В. Афанасьевой за большую помощь в компьютерном наборе текста и посвящает книгу своей жене Л. В. Афанасьевой.

Лекция 1

Сходимость случайных элементов по распределению

Сходимость по распределению является одним из важнейших понятий теории вероятностей и рассматривается, как правило, во всех стандартных учебных курсах по этой дисциплине (вспомните закон больших чисел в форме Хинчина, центральную предельную теорему). В начале данной лекции приводятся необходимые для дальнейшего сведения об этой сходимости.

Пусть S – метрическое пространство, а $\mathfrak{B}(S)$ – его борелевская σ -алгебра, т.е. минимальная σ -алгебра, содержащая все открытые подмножества S . Рассмотрим вероятностные меры $P, P_1, P_2, \dots$, заданные на измеримом пространстве $(S, \mathfrak{B}(S))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Говорят, что последовательность вероятностных мер $\{P_n\}$ *слабо сходится* к вероятностной мере P при $n \rightarrow \infty$, если для любой непрерывной ограниченной числовой функции f , заданной на S ,

$$\int_S f dP_n \rightarrow \int_S f dP \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В следующей теореме А. Д. Александрова приводятся *условия слабой сходимости* (с доказательством можно ознакомиться по книгам [1], [3]).

ТЕОРЕМА 1.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) последовательность $\{P_n\}$ слабо сходится к P при $n \rightarrow \infty$;
- 2) для любого множества $A \in \mathfrak{B}(S)$ такого, что $P(\partial A) = 0$ (∂A – граница множества A),

$$P_n(A) \rightarrow P(A) \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

- 3) для любого замкнутого множества $F \in \mathfrak{B}(S)$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq P(F);$$

- 4) для любого открытого множества $G \in \mathfrak{B}(S)$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Пусть X – случайный элемент, отображающий некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в измеримое пространство $(S, \mathfrak{B}(S))$ (это означает, что для любого множества $A \in \mathfrak{B}(S)$ множество $\{\omega: X(\omega) \in A\}$ принадлежит $\mathcal{F}$). Случайный элемент индуцирует меру P_X на $(S, \mathfrak{B}(S))$:

$$P_X(A) := P(\{\omega: X(\omega) \in A\}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Говорят, что последовательность случайных элементов $X_1, X_2, \dots$ (определенных, вообще говоря, на разных вероятностных пространствах) со значениями в пространстве S *сходится по распределению* при $n \rightarrow \infty$ к случайному элементу X со значениями в пространстве S , если $\{P_{X_n}\}$ слабо сходится к P_X при $n \rightarrow \infty$. Эта сходимост обозначается так: $X_n \xrightarrow{D} X$.

Теорема 1.1 может быть переформулирована.

ТЕОРЕМА 1.1'. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) для любой непрерывной ограниченной числовой функции f , заданной на S ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E f(X_n) = E f(X)$$

(здесь символ E означает математическое ожидание, соответствующее мере P);

- 3) для любого множества $A \in \mathfrak{B}(S)$ такого, что $P(\partial A) = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in A) = P(X \in A);$$

- 4) для любого замкнутого множества $F \in \mathfrak{B}(S)$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in F) \leq P(X \in F);$$

- 5) для любого открытого множества $G \in \mathfrak{B}(S)$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in G) \geq P(X \in G).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Строго говоря, следует писать $P_n(X_n \in A)$ и $E_n f(X_n)$ вместо $P(X_n \in A)$ и $E f(X_n)$ соответственно, указывая на вероятностную меру и соответствующее ей математическое ожидание того вероятностного пространства, на котором определен случайный элемент X_n , но устранение избыточности в употреблении символа n не вызовет путаницы.

Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность случайных величин, т.е. случайных элементов со значениями в $\mathbb{R}$ (со стандартной метрикой). Тогда утверждение $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ при $n \rightarrow \infty$ равносильно *сходимости функций распределения в основном*: $F_n(x) \rightarrow F(x)$ при $n \rightarrow \infty$ во всех точках непрерывности $F(x)$, где $F_n(x) = P(\xi_n \leq x)$, $F(x) = P(\xi \leq x)$; причем, если функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то эта сходимость равномерна на отрезке $[a, b]$.

Пусть $\varphi_n(t) = E \exp(it\xi_n)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_n , $\varphi(t) = E \exp(it\xi)$ – характеристическая функция случайной величины ξ . Тогда утверждение $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ при $n \rightarrow \infty$ равносильно сходимости $\varphi_n(t)$ к $\varphi(t)$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Аналогичные утверждения справедливы для последовательности случайных векторов, т.е. случайных элементов со значениями в $\mathbb{R}^m$ (со стандартной метрикой), $m \in \mathbb{N}$.

Напомним также центральную предельную теорему: если $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$, то случайная последовательность $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет соотношению

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где N означает случайную величину со стандартным нормальным распределением.

Доказательство указанных фактов можно найти в книгах [1], [2] и [9].

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть g – непрерывное отображение метрического пространства S в другое метрическое пространство S' . Если $X, X_1, X_2, \dots$ – случайные элементы со значениями в пространстве S и $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$, то $g(X), g(X_1), g(X_2), \dots$ – случайные элементы со значениями в пространстве S' и $g(X_n) \xrightarrow{D} g(X)$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на S' . Тогда $f \circ g$ – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на S , и поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$Ef(g(X_n)) = Ef \circ g(X_n) \rightarrow Ef \circ g(X) = Ef(g(X)).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – случайные элементы со значениями в пространстве S . Для сходимости $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$ необходимо и достаточно, чтобы для любой непрерывной ограниченной числовой функции f , заданной на S ,

$$f(X_n) \xrightarrow{D} f(X) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия (1.1) следует из теоремы 1.2. Докажем достаточность этого условия. Если соотношение (1.1) справедливо, то для любой непрерывной ограниченной числовой функции g одного числового переменного получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$Eg(f(X_n)) \rightarrow Eg(f(X)). \quad (1.2)$$

Поскольку f – ограниченная функция, то существует постоянная M такая, что $|f(x)| \leq M$ при всех $x \in S$. Положим

$$g(u) = \begin{cases} u, & \text{если } u \in [-M, M]; \\ M, & \text{если } u > M; \\ -M, & \text{если } u < -M. \end{cases}$$

Ясно, что g – непрерывная ограниченная функция и

$$g(f(X_n)) = f(X_n).$$

Поэтому из (1.2) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$Ef(X_n) \rightarrow Ef(X).$$

Теорема доказана.

Центральную роль в дальнейшем играет теорема о двупараметрической случайной последовательности.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть метрическое пространство S (с метрикой ρ) сепарабельно и случайные элементы $Y_n, X_{1,n}, X_{2,n}, \dots$ со значениями в пространстве S имеют одинаковую область определения при каждом $n \in \mathbb{N}$. Пусть

- 1) $X_{m,n} \xrightarrow{D} X_m$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $X_m \xrightarrow{D} X$ при $m \rightarrow \infty$;
- 3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\rho(X_{m,n}; Y_n) \geq \varepsilon) = 0$ для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$Y_n \xrightarrow{D} X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – замкнутое множество. Заметим, что и множество $F_\varepsilon := \{x: \rho(x, F) \leq \varepsilon\}$, где $\rho(x, F)$ – расстояние от точки x до множества F , является замкнутым. Очевидно, что

$$\{Y_n \in F\} = \{Y_n \in F, \rho(Y_n, X_{m,n}) < \varepsilon\} \cup \{Y_n \in F, \rho(Y_n, X_{m,n}) \geq \varepsilon\}.$$

Но первое событие в правой части влечет событие $\{X_{m,n} \in F_\varepsilon\}$, а второе влечет событие $\{\rho(Y_n, X_{m,n}) \geq \varepsilon\}$. Поэтому

$$P(Y_n \in F) \leq P(X_{m,n} \in F_\varepsilon) + P(\rho(Y_n, X_{m,n}) \geq \varepsilon).$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, учитывая теорему Александра:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \in F) \leq P(X_m \in F_\varepsilon) + \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\rho(Y_n, X_{m,n}) \geq \varepsilon).$$

В этом соотношении перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \in F) \leq P(X \in F_\varepsilon) + \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\rho(Y_n, X_{m,n}) \geq \varepsilon).$$

Но второе слагаемое в правой части равно нулю, поэтому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \in F) \leq P(X \in F_\varepsilon).$$

А теперь в этом соотношении перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая аксиому непрерывности и то, что множества F_ε убывают с уменьшением ε и $\bigcap_\varepsilon F_\varepsilon = F$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \in F) \leq P(X \in F).$$

Откуда, вспоминая теорему 1.1', получаем требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В доказанной теореме сепарабельность пространства S обеспечивает измеримость числовой функции $\rho(X_{m,n}; Y_n)$.

В качестве применения рассмотренных теорем установим условия сходимости по распределению случайных процессов с непрерывными траекториями.

Рассмотрим пространство $C[0, 1]$ числовых функций, заданных и непрерывных на отрезке $[0, 1]$, с метрикой равномерной сходимости: для $x, y \in C[0, 1]$

$$\rho_{\text{равн}}(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|.$$

Это – сепарабельное пространство. Введем *модуль непрерывности* для $x \in C[0, 1]$:

$$w_x(\delta) = \sup_{t, s: |t-s| \leq \delta} |x(t) - x(s)|,$$

где δ – положительное число ($t, s \in [0, 1]$).

Доказательство следующих двух лемм предоставляется читателю.

ЛЕММА 1.1. *Числовая функция x , заданная на отрезке $[0, 1]$, принадлежит пространству $C[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\lim_{\delta \rightarrow 0} w_x(\delta) = 0$.*

Для произвольной функции $x \in C[0, 1]$ построим ее *кусочно-линейное приближение* $x^{(\delta)}$ при $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$:

$$x^{(\delta)}(t) = x(\delta k) + \frac{t - \delta k}{\delta} [x(\delta(k+1)) - x(\delta k)],$$

если $t \in [\delta k, \delta(k+1)]$, $k = 0, \dots, m-1$.

ЛЕММА 1.2. *Если $x \in C[0, 1]$, то при $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho_{\text{равн}}(x, x^{(\delta)}) \leq 2w_x(\delta),$$

поэтому $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho_{\text{равн}}(x, x^{(\delta)}) = 0$.

Если X – случайный элемент со значениями в $C[0, 1]$, то любому $\omega \in \Omega$ соответствует непрерывная функция $X(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$. Можно показать, что $X(t, \omega)$ является случайным процессом (т.е. при фиксированном t числовая функция $X(t, \omega)$ является случайной величиной) с непрерывными траекториями. Наоборот, если $X(t, \omega)$ является случайным процессом с непрерывными траекториями, то его можно рассматривать как случайный элемент со значениями в $C[0, 1]$.

Для случайного процесса X будем использовать и другие обозначения: $\{X(t)\}$ или $\{X(t), t \in [0, 1]\}$.

Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – произвольные случайные процессы ($t \in [0, 1]$). Говорят, что конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X , если для произвольного натурального числа m и произвольных чисел $t_1, t_2, \dots, t_m$ из отрезка $[0, 1]$ при $n \rightarrow \infty$

$$\{X_n(t_1), X_n(t_2), \dots, X_n(t_m)\} \xrightarrow{D} \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)\}.$$

Следующая теорема принадлежит Ю. В. Прохорову, внесшему определяющий вклад в теорию сходимости случайных процессов.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – случайные процессы с непрерывными траекториями. Если конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0, \quad (1.3)$$

то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$. Наоборот, из сходимости по распределению в $C[0, 1]$ процессов с непрерывными траекториями следуют сходимость конечномерных распределений и условие (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с первого утверждения. Пусть $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$X_{m,n} = X_n^{(\delta)}, \quad \tilde{X}_m = X^{(\delta)}.$$

По лемме 1.2

$$\rho_{\text{равн}}(X_{m,n}, X_n) \leq 2w_{X_n}(\delta).$$

Поэтому в силу (1.3)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\rho_{\text{равн}}(X_{m,n}, X_n) \geq \varepsilon) = 0. \quad (1.4)$$

Далее, пусть f – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на $C[0, 1]$. Тогда $f(X_{m,n})$ есть непрерывная ограниченная числовая функция g от случайного вектора $\{X_n(0), X_n(1/m), \dots, X_n(1)\}$, который сходится по распределению в $\mathbb{R}^{m+1}$

при $n \rightarrow \infty$ к случайному вектору $\{X(0), X(1/m), \dots, X(1)\}$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f(X_{m,n}) &= g(X_n(0), X_n(1/m), \dots, X_n(1)) \xrightarrow{D} \\ &\xrightarrow{D} g(X(0), X(1/m), \dots, X(1)) = f(\tilde{X}_m). \end{aligned}$$

По теореме 1.3 отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$X_{m,n} \xrightarrow{D} \tilde{X}_m. \quad (1.5)$$

По лемме 1.2

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{\text{равн}}(\tilde{X}_m, X) = 0,$$

но из сходимости почти наверное (п.н.) следует сходимость по распределению, поэтому при $m \rightarrow \infty$

$$\tilde{X}_m \xrightarrow{D} X. \quad (1.6)$$

Из соотношений (1.4)–(1.6) по теореме 1.4 получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Докажем второе утверждение. Отображения

$$\begin{aligned} x &\rightarrow w_x(\delta), \\ x &\rightarrow \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)\} \end{aligned}$$

являются непрерывными на $C[0, 1]$ (здесь m – произвольное натуральное число, а $t_1, t_2, \dots, t_m$ – произвольные числа из отрезка $[0, 1]$). Отсюда по теореме 1.2 находим, во-первых, что для всех $\varepsilon > 0$ (за исключением, быть может, некоторого счетного множества)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(w_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = P(w_X(\delta) \geq \varepsilon),$$

но

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} P(w_X(\delta) \geq \varepsilon) = 0,$$

следовательно, условие (1.3) выполнено. Во-вторых, при $n \rightarrow \infty$

$$\{x_n(t_1), x_n(t_2), \dots, x_n(t_m)\} \xrightarrow{D} \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)\}.$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим случайные процессы (не зависящие от ω) с непрерывными траекториями: $X(t) \equiv 0$ и при $n \in \mathbb{N}$

$$X_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leq t \leq 1/n; \\ 2 - nt, & 1/n \leq t \leq 2/n; \\ 0, & 2/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ясно, что конечномерные распределения процесса X_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X , но условие (1.3) не выполняется. Таким образом, сходимости конечномерных распределений недостаточно для сходимости по распределению в пространстве $C[0, 1]$.

Лекции 2–3

Условия сходимости по распределению случайных процессов с траекториями из $D[0, 1]$

Рассмотрим пространство $D[0, 1]$ числовых функций, имеющих пределы слева и непрерывных справа на отрезке $[0, 1]$ (выбор отрезка $[0, 1]$ вместо произвольного отрезка $[a, b]$ вызван лишь соображениями удобства). Такие функции измеримы, ограничены и имеют не более чем счетное число точек разрыва, причем число точек, разрыв в которых превосходит заданное положительное число, конечно.

Введем метрику Скорохода: для $x, y \in D[0, 1]$

$$\rho_{\text{ск}}(x, y) = \inf_{\lambda} \max \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0, 1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| \right\}.$$

Инфинум здесь берется по всем строго возрастающим и непрерывным отображениям λ отрезка $[0, 1]$ на $[0, 1]$. Две функции в этой метрике близки друг к другу, если график одной из них получается из графика другой с помощью небольших деформаций как вдоль оси ординат, так и вдоль оси абсцисс. Очевидно, что $\rho_{\text{равн}}(x, y) \geq \rho_{\text{ск}}(x, y)$.

ПРИМЕР 2.1. Пусть (см. рис. 1)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 1/2), \\ 1/2, & t \in [1/2; 1], \end{cases} \quad \text{и} \quad y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 2/3), \\ 1/2, & t \in [2/3; 1]. \end{cases}$$

Ясно, что $\rho_{\text{равн}}(x, y) = 1/2$. Пусть

$$\lambda(t) = \begin{cases} 3t/4, & t \in [0; 2/3); \\ 1/2 + (3/2)(t - 2/3), & t \in [2/3; 1]. \end{cases}$$

Тогда $x(\lambda(t)) \equiv y(t)$ и $\sup_{t \in [0, 1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| = 0$, а $\sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t| = 1/6$. Нетрудно показать, что $\rho_{\text{ск}}(x, y) = 1/6$.

Пространство $D[0, 1]$ сепарабельно. В нем всюду плотно множество ступенчатых функций, принимающих рациональные значения в точке 1 и на промежутках $[i/k, (i+1)/k)$, где $k \in \mathbb{N}$, а $i = 0, \dots, k-1$.

Рис. 1.

Положим для $x \in D[0, 1]$ и a, b таких, что $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$w_x[a, b] = \sup_{s, t \in [a, b]} |x(s) - x(t)|.$$

Напомним, что разбиением отрезка $[0, 1]$ называется совокупность точек $t_0, t_1, \dots, t_r$ (при $r = 2, 3, \dots$) таких, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$. Введем *модуль непрерывности* для $x \in D[0, 1]$:

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_i \omega_x[t_i, t_{i+1}],$$

где δ – положительное число, а инфимум берется по всем разбиениям $\{t_i\}$ отрезка $[0, 1]$, для которых $\min_i (t_{i+1} - t_i) \geq \delta$. Заметим, что в лекции 1 можно было определить аналогичный модуль непрерывности для непрерывных функций (достаточный для наших целей):

$$\tilde{w}_x(\delta) = \max \{w_x[0, \delta], w_x[\delta, 2\delta], \dots\}.$$

Если x – ступенчатая функция и δ не больше наименьшей длины ступенек, то $w'_x(\delta) = 0$. Можно показать, что если функция $x \in D[0, 1]$ имеет конечное число точек разрыва, то $w'_x(\delta)$ при малых δ совпадает с модулем непрерывности непрерывной функции, получающейся из x путем устранения разрывов.

ЛЕММА 2.1. Числовая функция x , заданная на отрезке $[0, 1]$, принадлежит пространству $D[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\lim_{\delta \rightarrow 0} w'_x(\delta) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in D[0, 1]$. Покажем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w'_x(\delta) = 0.$$

Поскольку $w'_x(\delta)$ не возрастает по δ , достаточно для любого $\varepsilon > 0$ установить существование такого разбиения $\{t_i\}$ отрезка $[0, 1]$, что $\max_i w_x[t_i, t_{i+1}] < \varepsilon$. Рассмотрим все $t \in [0, 1]$, для которых существует такое разбиение промежутка $[0, t)$. Пусть τ – точная верхняя грань таких t . Поскольку функция x непрерывна в точке 0 справа, то $\tau > 0$. Далее, в силу существования предела слева $x(\tau-)$ число τ само является таким t . Ясно, что τ не может быть меньше 1, т.к. из-за непрерывности функции x справа вместо τ можно взять большее число в качестве t . Итак, $\tau = 1$. Требуемое утверждение доказано. Доказательство обратного утверждения предоставляется читателю.

ЛЕММА 2.2. *Если $x \in D[0, 1]$, то при $\delta > 0$ справедливо неравенство $w'_x(\delta) \leq w_x(2\delta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем отрезок $[0, 1]$ так, чтобы $\delta \leq t_{i+1} - t_i \leq 2\delta$. Тогда для любого i выполняется неравенство $w_x(2\delta) \geq w_x[t_i, t_{i+1}]$ и, следовательно,

$$w_x(2\delta) \geq \max_i w_x[t_i, t_{i+1}] \geq w'_x(\delta).$$

Лемма доказана.

Для произвольной функции $x \in D[0, 1]$ построим ее ступенчатое приближение $x^{(\delta)}$ при $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$:

$$x^{(\delta)}(t) = \begin{cases} x(\delta k), & t \in [\delta k, \delta(k+1)), \quad k = 0, 1, \dots, 1/\delta - 1; \\ x(1), & t = 1. \end{cases}$$

ЛЕММА 2.3. *Если $x \in D[0, 1]$, то при $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho_{c\kappa}(x, x^{(\delta)}) \leq w'_x(\delta) + \delta,$$

поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho_{c\kappa}(x, x^{(\delta)}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует такое разбиение $\{s_i\}$ отрезка $[0, 1]$, что $\min_i (s_{i+1} - s_i) \geq \delta$ и $\max_i w[s_i, s_{i+1}] \leq w'_x(\delta) + \delta$. Пусть $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим разбиение $t_i = i\delta$, $i = 0, 1, \dots, m$. Для каждой точки s_i существует единственный промежуток $[t_{j_i}, t_{j_i+1})$, ее содержащий. Очевидно, t_{j_i+1} строго возрастает по i .

Возьмем в качестве λ кусочно-линейную функцию, отображающую t_{j_i+1} в s_i для каждого i . Ясно, что

$$\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t| \leq \delta. \quad (2.1)$$

Пусть $t \in [t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1})$, тогда $\lambda(t) \in [s_i, s_{i+1})$ и $x(\lambda(t))$ изменяется так, как $x(s)$ изменяется при $s \in [s_i, s_{i+1})$, т.е. изменение $x(\lambda(t))$ не превосходит $w_x[s_i, s_{i+1})$. Множество значений функции $x^{(\delta)}(t)$ при $t \in [t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1})$ состоит из $x(t_{j_i+1}), \dots, x(t_{j_{i+1}})$, но $t_{j_i+1}, \dots, t_{j_{i+1}} \in [s_i, s_{i+1})$, поэтому для каждого i

$$\sup_{t \in [t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1})} |x^{(\delta)}(t) - x(\lambda(t))| \leq w_x[s_i, s_{i+1}).$$

Следовательно,

$$\sup_{t \in [0,1]} |x^{(\delta)}(t) - x(\lambda(t))| \leq \max_i w_x[s_i, s_{i+1}) \leq w'_x(\delta) + \delta. \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует утверждение леммы.

Если X – случайный элемент со значениями в $D[0, 1]$, то любому $\omega \in \Omega$ соответствует функция $X(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, принадлежащая $D[0, 1]$. Можно показать, что $X(t, \omega)$ является случайным процессом (т.е. при фиксированном t числовая функция $X(t, \omega)$ является случайной величиной) с траекториями из $D[0, 1]$. Наоборот, если $X(t, \omega)$ является случайным процессом с траекториями из $D[0, 1]$, то его можно рассматривать как случайный элемент со значениями в $D[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – случайные процессы с траекториями из $D[0, 1]$. Если конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w'_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0, \quad (2.3)$$

то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, и по X_n построим ступенчатое приближение $X_{m,n} = X_n^{(\delta)}$, а по X построим $\tilde{X}_m = X^{(\delta)}$.

Покажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$X_{n,m} \xrightarrow{D} \tilde{X}_m. \quad (2.4)$$

В силу теоремы 1.3 достаточно показать, что для произвольной непрерывной ограниченной числовой функции f , заданной на $D[0, 1]$, при $n \rightarrow \infty$

$$f(X_{n,m}) \xrightarrow{D} f(\tilde{X}_m). \quad (2.5)$$

Ясно, что $f(X_{n,m})$ является непрерывной ограниченной числовой функцией g случайного вектора $\{X_n(0), X_n(1/m), \dots, X_n(1)\}$, который по условию теоремы сходится по распределению в $\mathbb{R}^{m+1}$ к $\{X(0), X(1/m), \dots, X(1)\}$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$g(X_n(0), X_n(1/m), \dots, X_n(1)) \xrightarrow{D} g(X(0), X(1/m), \dots, X(1))$$

при $n \rightarrow \infty$. Осталось заметить, что

$$g(X(0), X(1/m), \dots, X(1)) = f(\tilde{X}_m).$$

Соотношение (2.5) и, следовательно, (2.4) доказаны.

Покажем, что при $m \rightarrow \infty$

$$\tilde{X}_m \xrightarrow{D} X. \quad (2.6)$$

Действительно, по леммам 2.1 и 2.3

$$\rho_{\text{ск}}(X, \tilde{X}_m) = \rho_{\text{ск}}(X, X^{(\delta)}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0,$$

т.е. имеет место сходимостъ п.н. Из сходимости п.н. следует сходимость по распределению, т.е. соотношение (2.6).

Наконец, ввиду леммы 2.3

$$\rho_{\text{ск}}(X_n, X_{m,n}) = \rho_{\text{ск}}(X_n, X_n^{(\delta)}) \leq w'_{X_n}(\delta) + \delta.$$

Поэтому по условию (2.3) при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\rho_{\text{ск}}(X_n, X_{m,n}) - \delta \geq \varepsilon) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\rho_{\text{ск}}(X_n, X_{m,n}) \geq \varepsilon) = 0. \quad (2.7)$$

Из соотношений (2.4), (2.6), (2.7), ввиду теоремы 1.4, получаем утверждение теоремы 2.1.

Иногда вместо модуля непрерывности $w'_x(\delta)$ удобнее рассматривать другой *модуль непрерывности* для $x \in D[0, 1]$:

$$w''_x(\delta) = \sup_{\substack{t, t_1, t_2: \\ |t_1 - t_2| \leq \delta, t \in [t_1, t_2]}} \min \{|x(t) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)|\},$$

где δ – положительное число ($t_1, t_2 \in [0, 1]$, $t_1 \leq t_2$).

ЛЕММА 2.4. Для любой функции $x \in D[0, 1]$

$$w''_x(\delta) \leq w'_x(\delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое разбиение $\{s_i\}$ отрезка $[0, 1]$, что $\min_i (s_{i+1} - s_i) \geq \delta$ и $\max_i w[s_i, s_{i+1}] \leq w'_x(\delta) + \varepsilon$. Пусть t_1 и t_2 таковы, что $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, $|t_1 - t_2| \leq \delta$. Тогда либо оба t_1 и $t_2 \in [s_i, s_{i+1})$ для некоторого i и, следовательно, при $t \in [t_1, t_2]$

$$|x(t) - x(t_1)| \leq w'_x(\delta) + \varepsilon, |x(t) - x(t_2)| \leq w'_x(\delta) + \varepsilon;$$

либо t_1 и t_2 лежат в соседних промежутках $[s_{i-1}, s_i)$ и $[s_i, s_{i+1})$, поэтому при $t \in [t_1, s_i)$

$$|x(t) - x(t_1)| \leq w'_x(\delta) + \varepsilon,$$

а при $t \in [s_i, t_2]$

$$|x(t) - x(t_2)| \leq w'_x(\delta) + \varepsilon.$$

Итак,

$$w''_x(\delta) \leq w'_x(\delta) + \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, то получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2.5. Для любого $x \in D[0, 1]$

$$w'_x(\delta/2) \leq 6a, \tag{2.8}$$

$$w_x[0, \delta] \leq 2b, \tag{2.9}$$

где $a = \max(w''_x(\delta), w_x[0, \delta], w_x[1 - \delta, 1])$, $b = |x(\delta) - x(0)| + w''_x(\delta)$, $\delta \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что при $s \in [0, \delta)$

$$|x(s) - x(0)| \leq |x(\delta) - x(0)| + \min\{|x(s) - x(0)|, |x(\delta) - x(s)|\}.$$

Поэтому

$$\sup_{s \in [0, \delta]} |x(s) - x(0)| \leq |x(\delta) - x(0)| + w_x''(\delta)$$

и, следовательно,

$$w_x[0, \delta] \leq 2|x(\delta) - x(0)| + 2w_x''(\delta).$$

Итак, соотношение (2.9) установлено.

Доказательство соотношения (2.1) разобьем на части.

1) Сначала покажем, что для любых t, t_1, t_2, s таких, что $|t_1 - t_2| \leq \delta$, $0 \leq t_1 \leq s \leq t \leq t_2 \leq 1$, справедливо неравенство

$$\min(|x(s) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)|) \leq 2w_x''(\delta). \quad (2.10)$$

Пусть $|x(s) - x(t_1)| > w_x''(\delta)$, тогда $|x(s) - x(t_2)| \leq w_x''(\delta)$, $|x(s) - x(t)| \leq w_x''(\delta)$. Следовательно, $|x(t_2) - x(t)| \leq 2w_x''(\delta)$. Если же $|x(s) - x(t_1)| \leq w_x''(\delta)$, то (2.10) выполняется.

2) Докажем, что если расстояние между двумя точками интервала $(0, 1)$ меньше δ , то не более чем в одной из них скачок функции x больше $2a$. Доказательство проведем от противного. Пусть τ_1 и τ_2 ($\tau_1 \leq \tau_2$) — две точки из интервала $(0, 1)$, в которых скачок функции x больше $2a$, и пусть $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$. Взяв t_1 и t достаточно близко (с левой стороны) к τ_1 и τ_2 соответственно и положив $t_2 = \tau_2$, $s = \tau_1$, получим, что $|t_1 - t_2| < \delta$ и $|x(s) - x(t_1)| > 2w_x''(\delta)$, $|x(t) - x(t_2)| > 2w_x''(\delta)$, что противоречит (2.10).

Заметим также, что по определению a промежутки $[0, \delta]$ и $[1 - \delta, 1]$ не содержат точек, в которых скачок функции x больше $2a$.

3) Разобьем отрезок $[0, 1]$ точками $\{s_i\}$ так, что $s_{i+1} - s_i \geq \delta$ для любого i и скачки функции x , превышающие $2a$, могут быть лишь в точках s_i . Полученное разбиение требуется измельчить: если $s_{i+1} - s_i > \delta$ для некоторого i , то включим середину отрезка $[s_i, s_{i+1}]$ в разбиение $\{s_i\}$; будем поступать аналогично до тех пор, пока для любого i не будет выполняться соотношение

$$\frac{\delta}{2} \leq s_{i+1} - s_i \leq \delta.$$

4) Покажем, что для итогового разбиения $\{s_i\}$ при любом i

$$w_x[s_i, s_{i+1}] \leq 6a. \quad (2.11)$$

Возьмем две точки t_1 и t_2 ($t_1 \leq t_2$) из $[s_i, s_{i+1}]$. Пусть

$$\sigma_1 = \sup \left\{ \sigma \in [t_1, t_2] : \sup_{t_1 \leq u \leq \sigma} |x(u) - x(t_1)| \leq 2a \right\},$$

$$\sigma_2 = \inf \left\{ \sigma \in [t_1, t_2] : \sup_{\sigma \leq u \leq t_2} |x(t_2) - x(u)| \leq 2a \right\}.$$

Покажем, что $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Доказательство проведем от противного. Пусть $\sigma_2 > \sigma_1$. В любой правой окрестности σ_1 существует такая точка s , что $|x(s) - x(t_1)| > 2a$, а в любой левой окрестности σ_2 существует такая точка t , что $|x(t) - x(t_2)| > 2a$. Но это противоречит (2.10).

Итак, $\sigma_2 \leq \sigma_1$ и, следовательно,

$$|x(\sigma_1) - x(t_1)| \leq 2a, |x(\sigma_1) - x(t_2)| \leq 2a, |x(\sigma_1) - x(\sigma_1)| \leq 2a \quad (2.12)$$

(последнее неравенство объясняется тем, что $\sigma_1 \in (t_1, t_2)$ и, следовательно, σ_1 является внутренней точкой отрезка $[s_i, s_{i+1}]$, поэтому скачок функции x в ней не превосходит $2a$). Из (2.12) следует, что $|x(t_2) - x(t_1)| \leq 6a$. Итак, соотношение (2.11) и, следовательно, (2.8) установлены. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – случайные процессы с траекториями из $D[0, 1]$, причем $X(1-) = X(1)$ п.н. Если конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w''_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0, \quad (2.13)$$

то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w'_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0, \quad (2.14)$$

откуда, ввиду теоремы 2.1, будет следовать утверждение теоремы 2.2.

Из сходимости конечномерных распределений X_n получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{X_n(0), X_n(\delta)\} \xrightarrow{D} \{X(0), X(\delta)\}.$$

Следовательно, по теореме 1.2 при $n \rightarrow \infty$

$$|X_n(\delta) - X_n(0)| \xrightarrow{D} |X(\delta) - X(0)|. \quad (2.15)$$

Далее, в силу непрерывности X в точке 0 справа $\lim_{\delta \rightarrow 0} X(\delta) = X(0)$, но из сходимости п.н. следует сходимость по вероятности: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{P}(|X(\delta) - X(0)| \geq \varepsilon) = 0. \quad (2.16)$$

Из соотношения (2.15) следует, что для всех $\varepsilon > 0$ (за исключением, быть может, некоторого счетного множества)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n(\delta) - X_n(0)| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(|X(\delta) - X(0)| \geq \varepsilon),$$

откуда, учитывая (2.16), находим, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n(\delta) - X_n(0)| \geq \varepsilon) = 0. \quad (2.17)$$

Ввиду леммы 2.5

$$w_{X_n}[0, \delta] \leq 2|X_n(\delta) - X_n(0)| + 2w''_{X_n}(\delta).$$

Откуда с учетом (2.13) и (2.17) получаем, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{X_n}[0, \delta] \geq \varepsilon) = 0. \quad (2.18)$$

Аналогично показывается, что если $X(1-) = X(1)$ п.н., то при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{X_n}[1 - \delta, 1] \geq \varepsilon) = 0. \quad (2.19)$$

В силу леммы 2.5

$$w'_{X_n}\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq 6 \max(w''_{X_n}(\delta), w_{X_n}[0, \delta], w_{X_n}[1 - \delta, 1]),$$

поэтому, учитывая (2.13), (2.18) и (2.19), приходим к (2.14). Теорема доказана.

Чтобы установить справедливость условия (2.13), иногда полезно использовать следующее утверждение.

ЛЕММА 2.6. Пусть X – случайный процесс с траекториями из $D[0, 1]$. Пусть $\gamma > 0$, $\alpha > 1/2$, F – неубывающая непрерывная числовая функция на $[0, 1]$. Если при любых t, t_1, t_2 , таких, что $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq 1$, справедливо неравенство

$$E(|X(t) - X(t_1)|^\gamma |X(t_2) - X(t)|^\gamma) \leq [F(t_2) - F(t_1)]^{2\alpha}, \quad (2.20)$$

то при всех $\varepsilon > 0$

$$P(w_X''(\delta) \geq \varepsilon) \leq \frac{K}{\varepsilon^{2\gamma}} [F(1) - F(0)] [w_F(2\delta)]^{2\alpha-1},$$

где K – положительная постоянная, не зависящая от ε, δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (2.20), дважды применяя неравенство Чебышева, получаем, что

$$P(\min\{|X(t) - X(t_1)|, |X(t_2) - X(t)|\} \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2\gamma}} [F(t_2) - F(t_1)]^{2\alpha}. \quad (2.21)$$

Положим при $x \in D[0, 1]$ и a, b таких, что $0 \leq a < b \leq 1$,

$$M_x''(a, b) = \sup_{t, t_1, t_2: a \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq b} \min\{|x(t) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)|\}.$$

Можно показать (см. [2, теорема 12.5]), что соотношение (2.21) влечет неравенство

$$P(M_X''(a, b) \geq \varepsilon) \leq \frac{K_1}{\varepsilon^{2\gamma}} [F(b) - F(a)]^{2\alpha},$$

где K_1 – положительная постоянная, не зависящая от ε, a, b .

Пусть $\delta = 1/(2m)$, где $m \in \mathbb{N}$. Если

$$M_X''(2i\delta, (2i+2)\delta) < \varepsilon \quad \text{при} \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

и

$$M_X''((2i+1)\delta, (2i+3)\delta) < \varepsilon \quad \text{при} \quad i = 0, 1, \dots, m-2,$$

то при t_1, t_2 таких, что $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ и $t_2 - t_1 \leq \delta$, обе точки t_1, t_2 лежат в одном из $2m-1$ отрезков $[2i\delta, (2i+2)\delta]$ или $[(2i+1)\delta, (2i+3)\delta]$, поэтому при $t \in [t_1, t_2]$

$$\min\{|X(t) - X(t_1)|, |X(t_2) - X(t)|\} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(w_X''(\delta) \geq \varepsilon) &\leq \frac{K_1}{\varepsilon^{2\gamma}} \left[\sum_{i=0}^{m-1} [F((2i+2)\delta) - F(2i\delta)]^{2\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{m-2} [F((2i+3)\delta) - F((2i+1)\delta)]^{2\alpha} \right] \leq \\ &\leq \frac{2K_1}{\varepsilon^{2\gamma}} [w_F(2\delta)]^{2\alpha-1} [F(1) - F(0)]. \end{aligned}$$

Осталось положить $K = 2K_1$. Лемма доказана.

Частое применение находит следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – случайные процессы с траекториями из $D[0, 1]$. Пусть конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0. \quad (2.22)$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X, \quad (2.23)$$

причем траектории X п.н. непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (2.22), ввиду леммы 2.2, следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w'_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0.$$

Откуда, вспоминая теорему 2.1, получаем (2.23). Доказательство непрерывности траекторий X предоставляется читателю.

В заключение обсудим требование о сходимости конечномерных распределений. Рассмотрим отображение $D[0, 1]$ в $\mathbb{R}$: $x \rightarrow x(t)$, где t – фиксированное число из отрезка $[0, 1]$. Это отображение измеримо. При $t \in (0, 1)$ оно является непрерывным тогда и только тогда, когда функция x непрерывна в точке t . Пусть P – вероятностная мера, заданная на $D[0, 1]$. Нетрудно показать, что множество T_P таких t , при которых указанное отображение

непрерывно P -п.н., содержит точки 0 и 1 и его дополнение в $[0, 1]$ не более, чем счетно.

В силу этих свойств множества T_P для любого $\delta > 0$ существует такое разбиение $\{t_i\}$ отрезка $[0, 1]$, что $t_i \in T_P$ и $t_{i+1} - t_i \leq \delta$ для любого i . По функции $x \in D[0, 1]$ будем строить ее ступенчатое приближение $x^{(\delta)}$, исходя из этого разбиения. Тогда (см. лемму 2.3) $\rho_{\text{ск}}(x, x^{(\delta)}) \leq w'_x(\delta) + \delta$.

Из сказанного следует, что если $X, X_1, X_2, \dots$ – случайные процессы с траекториями из $D[0, 1]$, то из сходимости $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$ следует сходимость конечномерных распределений, соответствующих точкам $t_1, t_2, \dots, t_m$ из T_{P_X} , где P_X – мера, индуцированная случайным процессом X в $D[0, 1]$. Наоборот, если в условиях теорем 2.1–2.3 вместо сходимости произвольных конечномерных распределений потребовать сходимости конечномерных распределений, соответствующих точкам $t_1, t_2, \dots, t_m$ из T_{P_X} , то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$.

Лекция 4

Определение броуновского движения и его существование

Одним из важнейших случайных процессов является *винеровский процесс*, называемый также *броуновским движением*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Случайный процесс $\{W(t), t \geq 0\}$ называется *стандартным броуновским движением*, если

- 1) $W(0) = 0$ п.н.;
- 2) приращения процесса $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ при любых $m \in \mathbb{N}$ и $t_1, t_2, \dots, t_m$ таких, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$, являются независимыми случайными величинами;
- 3) случайная величина $W(t) - W(s)$ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и $t - s$ при любых t, s таких, что $0 \leq s < t$;
- 4) траектории процесса $\{W(t)\}$ п.н. непрерывны.

Можно дать и другое определение броуновского движения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Случайный процесс $\{W(t), t \geq 0\}$ называется *стандартным броуновским движением*, если

- 1) $W(0) = 0$ п.н.;
- 2) случайный вектор $\{W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m)\}$ имеет многомерное нормальное распределение при любых $m \in \mathbb{N}$ и $t_1, t_2, \dots, t_m$ таких, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$;
- 3) $EW(t) = 0$ при любом $t \in [0, \infty)$, $\text{cov}(W(t_1), W(t_2)) = \min(t_1, t_2)$ при любых $t_1, t_2 \in [0, \infty)$;
- 4) траектории процесса $\{W(t)\}$ п.н. непрерывны.

Прежде, чем доказывать эквивалентность этих определений, напомним некоторые сведения о нормальных распределениях. Говорят, что случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 \in (0, \infty)$ (обозначение: $\xi \sim N(a, \sigma^2)$), если ξ является непрерывной случайной величиной с плотностью вероятностей

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Нормальное распределение называется стандартным, если $a = 0$, $\sigma^2 = 1$. Функция распределения в этом случае обозначается $\Phi(x)$ и называется функцией Лапласа.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые случайные величины и $\xi_i \sim N(0, 1)$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим случайный вектор $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Пусть A и b – произвольные числовые матрицы размеров $n \times n$ и $n \times 1$. Распределения случайных векторов $A\xi + b$ (здесь случайные векторы представлены в виде столбцов) и только они называются n -мерными нормальными распределениями. Случайные векторы с такими распределениями называются нормальными.

Если $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ – нормальный вектор и $\text{cov}(\eta_i, \eta_j) = 0$ при всех i, j таких, что $i \neq j$, то случайные величины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ являются независимыми. Если же $\text{cov}(\eta_i, \eta_j) = 0$ при всех i, j таких, что $i \leq k, j > k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, то случайные векторы $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\}$ и $\{\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \dots, \eta_n\}$ являются независимыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО эквивалентности. Очевидно,

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \dots \\ W(t_m) - W(t_{m-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \dots \\ W(t_m) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \dots \\ W(t_m) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \dots \\ W(t_m) - W(t_{m-1}) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где A – матрица, обратная к первой матрице в правой части (4.1).

Если W удовлетворяет условиям определения 1, то случайный вектор $\{W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})\}$ является нормальным, откуда, ввиду (4.2), случайный вектор $\{W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m)\}$ также является нормальным. Далее, при $t_2 > t_1$

$$\begin{aligned} \text{cov}(W(t_1), W(t_2)) &= \mathbf{E}W(t_1)W(t_2) = \\ &= \mathbf{E}W(t_1)(W(t_2) - W(t_1)) + \mathbf{E}W^2(t_1) = t_1 \end{aligned}$$

(здесь учтено, что $W(t_1)$ и $(W(t_2) - W(t_1))$ – независимые случайные величины и поэтому $\mathbf{E}W(t_1)(W(t_2) - W(t_1)) = 0$).

Если же W удовлетворяет условиям определения 4.2, то ввиду (4.1) из того, что вектор $\{W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m)\}$ является нормальным, следует, что и вектор $\{W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})\}$ нормальный. Его компоненты некоррелированы, т.к. при $j > i$

$$\begin{aligned} E(W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j)) &= \\ &= EW(t_{i+1})W(t_{j+1}) - EW(t_{i+1})W(t_j) - \\ &\quad - EW(t_i)W(t_{j+1}) + EW(t_i)W(t_j) = \\ &= t_{i+1} - t_{i+1} - t_i + t_i = 0, \end{aligned}$$

поэтому случайные величины $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ являются независимыми. Наконец,

$$\begin{aligned} E(W(t) - W(s))^2 &= EW^2(t) - 2EW(t)W(s) + EW^2(s) = \\ &= t - 2s + s = t - s. \end{aligned}$$

Эквивалентность доказана.

Докажем существование броуновского движения. Зададим его явную конструкцию, исходя из последовательности независимых случайных величин с одинаковым распределением $N(0, 1)$ и функций Шаудера.

Дадим их определение, но сначала напомним определение функций Хаара. Эти функции обозначаются $H_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, и задаются на отрезке $[0, 1]$. Функция H_1 тождественно равна 1. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$) введем 2^n функций Хаара H_{2^n+k} , где $k = 1, 2, \dots, 2^n$. Для этой цели разобьем отрезок $[0, 1]$ на 2^n равных отрезков и пронумеруем их слева направо. Возьмем k -й такой отрезок. Вне его положим $H_{2^n+k}(t) = 0$. Разделим указанный отрезок пополам. На левой его половине положим $H_{2^n+k}(t) = 2^{-n/2}$, а на правой – положим $H_{2^n+k}(t) = -2^{-n/2}$ (см. рис. 2).

Рассмотрим пространство $L^2[0, 1]$ измеримых числовых функций x , заданных на отрезке $[0, 1]$ и интегрируемых в квадрате: $\int_0^1 x^2(t) dt < +\infty$. Известно, что функции Хаара образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2[0, 1]$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t) dt \quad \text{для } x, y \in L^2[0, 1].$$

Рис. 2.

Поэтому любую функцию $x \in L^2[0, 1]$ можно разложить в ряд по этой системе функций:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i H_i, \quad \text{где } a_i = (x, H_i);$$

и выполнено равенство Парсеваля:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x, H_i) (y, H_i).$$

Построим непрерывные неотрицательные функции $S_i(t)$, называемые функциями Шаудера, на основе $H_i(t)$:

$$S_i(t) = \int_0^t H_i(s) ds, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что при $i \in \{2^n + 1, \dots, 2^{n+1}\}$

$$|S_i(t)| \leq \frac{2^{n/2}}{2^{n+1}} = 2^{-n/2-1} \quad (4.3)$$

и при разных $i_1, i_2 \in \{2^n + 1, \dots, 2^{n+1}\}$ функции $S_{i_1}(t), S_{i_2}(t)$ имеют непересекающиеся носители.

Установим два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 4.1. Пусть числовая последовательность $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ такова, что $a_i = O(i^\varepsilon)$ при $i \rightarrow \infty$ для некоторого $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i S_i(t)$ сходится равномерно по t на отрезке $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует такая положительная постоянная K , что при всех $i \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|a_i| \leq K i^\varepsilon$, поэтому при всех $n \in \mathbb{N}_0$ и $i \in \{2^n + 1, \dots, 2^{n+1}\}$ $|a_i| \leq K 2^{(n+1)\varepsilon}$. Откуда, учитывая (4.3) и то, что функции $S_i(t)$ при разных $i \in \{2^n + 1, \dots, 2^{n+1}\}$ имеют попарно непересекающиеся носители, получаем, что при всех $t \in [0, 1]$

$$\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} |a_i| S_i(t) \leq K 2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-n/2-1} = K 2^{\varepsilon-1} 2^{-n(1/2-\varepsilon)}.$$

Следовательно, при $m \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0, 1]$

$$\sum_{i=2^m+1}^{\infty} |a_i| S_i(t) \leq \sum_{n=m}^{\infty} K 2^{\varepsilon-1} 2^{-n(1/2-\varepsilon)},$$

но правая часть стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, причем $\xi_i \sim N(0, 1)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной постоянной $c \in (\sqrt{2}, \infty)$ и почти всех (п.в.) $\omega \in \Omega$ существует такое натуральное число $N_0(c, \omega)$, что при всех $i \geq N_0(c, \omega)$ будет $|\xi_i| < c\sqrt{\ln i}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуется лемма Бореля–Кантелли, утверждающая, что если случайные события $A_1, A_2, \dots$ таковы, что $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < +\infty$, то для п.в. ω произойдет лишь конечное число событий из $A_1, A_2, \dots$. Заметим, что если $\xi \sim N(0, 1)$, то при $x > 0$

$$1 - \Phi(x) = \mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}. \quad (4.4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \geq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{u} d e^{-u^2/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{u^2} e^{-u^2/2} du \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Поэтому при $i \geq 2$

$$\mathbb{P}(|\xi_i| \geq c\sqrt{\ln i}) \leq \frac{2}{c\sqrt{2\pi \ln i}} e^{-(c^2 \ln i)/2} = \frac{2i^{-c^2/2}}{c\sqrt{2\pi \ln i}}.$$

При $c > \sqrt{2}$ ряд $\sum_{i=2}^{+\infty} i^{-c^2/2}/\sqrt{\ln i}$ сходится. Следовательно, для п.в. ω лишь для i из конечного множества выполняется неравенство $|\xi_i(\omega)| \geq c\sqrt{\ln i}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые случайные величины, причем $\xi_i \sim N(0, 1)$, $i \in \mathbb{N}$; $S_1, S_2, \dots$ – функции Шаудера, тогда

$$W(t, \omega) := \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t) \xi_i(\omega) \quad (4.5)$$

является броуновским движением при $t \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 4.1 и 4.2 для п.в. ω ряд в правой части (4.5) сходится равномерно по t на отрезке $[0, 1]$. Функции $S_i(t)$ непрерывны по t при любом $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, для п.в. ω правая часть (4.5) является непрерывной по t функцией.

Покажем, что ряд в правой части (4.5) сходится в среднем квадратическом. Напомним, что если $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$ – случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве, то сходимость в среднем квадратическом случайной последовательности $\{\eta_n\}$ к η при $n \rightarrow \infty$ (обозначение: $\eta_n \xrightarrow{\text{ср. кв.}} \eta$) означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n - \eta)^2 = 0$; случайная последовательность $\{\eta_n\}$ сходится в среднем квадратическом при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}(\eta_m - \eta_l)^2 \rightarrow 0$ при $m, l \rightarrow \infty$. Аналогично вводится понятие сходимости в среднем квадратическом для последовательности случайных векторов. Имеем при $m \geq l$, что

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^m S_i(t) \xi_i - \sum_{i=1}^l S_i(t) \xi_i \right)^2 = \mathbb{E} \left(\sum_{i=l+1}^m S_i(t) \xi_i \right)^2 = \sum_{i=l+1}^m S_i^2(t).$$

Вспоминая свойства функций Шаудера, видим, что

$$\sum_{i=2}^{\infty} S_i^2(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{2^n < i \leq 2^{n+1}} S_i^2(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} < +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{m, l \rightarrow \infty} \sum_{i=l+1}^m S_i^2(t) = 0,$$

что означает требующую сходимость в среднем квадратическом. Поскольку и сходимость п.н., и сходимость в среднем квадратическом влекут сходимость по вероятности, то пределы правой части (4.5) в обоих случаях будут равны п.н.

Покажем справедливость свойств 1), 2), 3) определения 4.2 броуновского движения.

1) Поскольку $S_i(0) = 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то $W(0) = 0$ п.н.

2) Предел в среднем квадратическом последовательности нормальных случайных векторов является нормальным случайным вектором. Поскольку для $m \in \mathbb{N}$ и $t_1, \dots, t_m \in (0, 1]$ при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n S_i(t_1) \xi_i, \dots, \sum_{i=1}^n S_i(t_m) \xi_i \right\} \xrightarrow{\text{ср. кв.}} \{W(t_1), \dots, W(t_m)\} \quad (4.6)$$

и вектор слева является нормальным, то и вектор справа является нормальным.

3) Из соотношения (4.6) следует сходимость математических ожиданий и ковариаций компонент случайного вектора в левой части, поэтому при $n \rightarrow \infty$

а) $E \sum_{i=1}^n S_i(t) \xi_i \rightarrow EW(t)$, но левая часть равна нулю, следовательно, $EW(t) = 0$ при любом $t \in [0, 1]$;

б) $E \left(\sum_{i=1}^n S_i(t_1) \xi_i \right) \left(\sum_{i=1}^n S_i(t_2) \xi_i \right) \rightarrow EW(t_1)W(t_2)$, но левая часть равна $\sum_{i=1}^n S_i(t_1)S_i(t_2)$ и ее предел равен (вспомним равенство Парсеваля)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t_1)S_i(t_2) &= \sum_{i=1}^{\infty} (H_i, I_{[0, t_1]}) (H_i, I_{[0, t_2]}) = \\ &= (I_{[0, t_1]}, I_{[0, t_2]}) = \min(t_1, t_2), \end{aligned}$$

следовательно, $EW(t_1)W(t_2) = \min(t_1, t_2)$ при $t_1, t_2 \in [0, 1]$ (здесь $I_{[a, b]}(\cdot)$ – индикатор отрезка $[a, b]$).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Используя процедуру пополнения вероятностного пространства, на котором заданы случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$, и полагая $W(t, \omega) = 0$ при $t \in [0, 1]$ и тех ω , для которых ряд в правой части (4.5) не сходится равномерно по t на отрезке $[0, 1]$, получаем броуновское движение, все траектории которого непрерывны. В дальнейшем будем рассматривать именно такое броуновское движение.

В заключение обсудим вопрос о построении броуновского движения при всех $t \in [0, \infty)$. Для этой цели рассмотрим последовательность независимых броуновских движений $W_1, W_2, \dots$, заданных при $t \in [0, 1]$, и положим $W(t) = W_1(t)$ при $t \in [0, 1]$, $W(t) = W_1(1) + W_2(t - 1)$ при $t \in [1, 2]$, $W(t) = W_1(1) + W_2(1) + W_3(t - 2)$ при $t \in [2, 3]$ и т.д. Полученный процесс W и является броуновским движением на полуоси $[0, \infty)$ (доказательство предоставляется читателю). В связи с указанным построением уместно упомянуть так называемое *марковское свойство* броуновского движения W : для каждого $t_0 \in (0, +\infty)$ случайный процесс $\{W(t_0 + t) - W(t_0), t \in [0, +\infty)\}$ является броуновским движением, причем не зависящим от прошлого, т.е. процесса $\{W(t), t \in [0, t_0]\}$.

Лекция 5

Принцип инвариантности Прохорова–Донскера

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. *Случайным блужданием* называется последовательность сумм

$$S_0 = 0, S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Случайная величина X_n называется n -м *шагом* случайного блуждания. Числовые характеристики EX_1, DX_1 называются соответственно *сносом* и *шаговой дисперсией* случайного блуждания.

Случайные блуждания являются одним из важных объектов исследований в теории вероятностей. Так основные результаты классической теории вероятностей посвящены случайному блужданию с нулевым сносом и конечной положительной шаговой дисперсией σ^2 :

1) усиленный закон больших чисел:

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{п.н.};$$

2) центральная предельная теорема:

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N,$$

где N означает случайную величину со стандартным нормальным распределением;

3) закон повторного логарифма:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Случайные блуждания так же, как и броуновское движение, обладают *марковским свойством*: для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ случайная последовательность $\{S_{n_0+n} - S_{n_0}, n \in \mathbb{N}_0\}$ имеет такое же распределение, как $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, и не зависит от случайного вектора $\{S_0, S_1, \dots, S_{n_0}\}$.

Рассмотрим отрезок случайного блуждания $S_0, S_1, \dots, S_n$ и на его основе определим ступенчатую функцию $S_{[t]}, t \in [0, n]$

($\lfloor t \rfloor$ и $\lceil t \rceil$ означают соответственно целое приближение t в сторону уменьшения или увеличения). Множество значений этой функции совпадает с указанным отрезком блуждания.

Сожмем график этой функции вдоль оси абсцисс в n раз и вдоль оси ординат в $\sigma\sqrt{n}$ раз. При таком преобразовании мы получим график функции

$$Y_n(t) := \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1].$$

Заметим, что Y_n является случайным процессом с траекториями из $D[0, 1]$, сохраняющим всю информацию об отрезке блуждания $S_0, S_1, \dots, S_n$.

При $t = 1$ получаем, что

$$Y_n(1) = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N.$$

Это наводит на мысль, что $Y_n \xrightarrow{D} Y$ для некоторого случайного процесса Y с траекториями из $D[0, 1]$. Следующий результат получил название *принципа инвариантности Прохорова–Донскера*.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, то при $n \rightarrow \infty$*

$$Y_n \xrightarrow{D} W,$$

где W – стандартное броуновское движение (при $t \in [0, 1]$), знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на ряд лемм (доказательство первой из них предоставляется читателю).

ЛЕММА 5.1. *Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ – последовательности случайных величин, причем ξ_n, η_n – независимые случайные величины при каждом $n \in \mathbb{N}$. Если $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{D} \eta$ при $n \rightarrow \infty$, то*

$$\{\xi_n, \eta_n\} \xrightarrow{D} \{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\},$$

где $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ – независимые случайные величины, причем $\tilde{\xi} \stackrel{d}{=} \xi$, $\tilde{\eta} \stackrel{d}{=} \eta$ (знак $\stackrel{d}{=}$ означает совпадение распределений).

ЛЕММА 5.2. *Конечномерные распределения X_n сходятся к конечномерным распределениям W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in (0, 1]$. Тогда по центральной предельной теореме при $n \rightarrow \infty$

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{[nt]}} \frac{\sqrt{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{t}N.$$

Но

$$\sqrt{t}N \sim N(0, t) \Rightarrow \sqrt{t}N \stackrel{d}{=} W(t).$$

Пусть $0 < t_1 < t_2 \leq 1$. Поскольку

$$Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = \frac{S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}}{\sigma\sqrt{n}},$$

случайная величина $Y_n(t_2) - Y_n(t_1)$ не зависит от $Y_n(t_1)$. Далее, при $n \rightarrow \infty$

$$Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = \frac{S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}}{\sigma\sqrt{[nt_2] - [nt_1]}} \frac{\sqrt{[nt_2] - [nt_1]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{t_2 - t_1}N.$$

Но

$$\sqrt{t_2 - t_1}N \sim N(0, t_2 - t_1) \Rightarrow \sqrt{t_2 - t_1}N \stackrel{d}{=} W(t_2) - W(t_1).$$

В силу леммы 5.1 при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t_1), Y_n(t_2) - Y_n(t_1)\} \xrightarrow{D} \{W(t_1), W(t_2) - W(t_1)\}.$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t_1), Y_n(t_2)\} \xrightarrow{D} \{W(t_1), W(t_2)\}.$$

Аналогично рассматривается случай распределений размерности 3 и больше. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. Пусть $\delta = 1/m$, где m – натуральное число, и $t_i = i\delta$, $i = 0, 1, \dots, m$; тогда для любого случайного процесса X с траекториями из $D[0, 1]$ справедливо неравенство

$$P(w_X(\delta) \geq 3\varepsilon) \leq \sum_{i=0}^{m-1} P\left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s) - X(t_i)| \geq \varepsilon\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s, t таковы, что $0 \leq s \leq t \leq 1$ и $|s - t| \leq \delta$. Тогда либо $s, t \in [t_i, t_{i+1}]$ для некоторого i и, следовательно,

$$\begin{aligned} |X(s) - X(t)| &\leq |X(s) - X(t_i)| + |X(t) - X(t_i)| \leq \\ &\leq 2 \max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s) - X(t_i)|; \end{aligned}$$

либо $s \in [t_i, t_{i+1}]$, $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$ для некоторого i и, следовательно,

$$\begin{aligned} |X(s) - X(t)| &\leq |X(s) - X(t_i)| + \\ &\quad + |X(t_i) - X(t_{i+1})| + |X(t_{i+1}) - X(t)| \leq \\ &\leq 3 \max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s) - X(t_i)|. \end{aligned}$$

Поэтому если $|s - t| \leq \delta$, то

$$|X(s) - X(t)| \leq 3 \max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s) - X(t_i)|.$$

Следовательно,

$$w_X(\delta) \leq 3 \max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s) - X(t_i)|.$$

Откуда вытекает, что

$$\begin{aligned} P(w_X(\delta) \geq 3\varepsilon) &\leq P\left(\max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s) - X(t_i)| \geq \varepsilon\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} P\left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s) - X(t_i)| \geq \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.4. Пусть выполнены условия теоремы 5.1, тогда справедливо неравенство Колмогорова: при любом $\lambda > 0$

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}\right) \leq 2P\left(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2}) \sigma \sqrt{n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – момент первого достижения случайной последовательностью $\{|S_i|, i = 0, 1, \dots, n\}$ полуоси $[\lambda \sigma \sqrt{n}, +\infty)$. Тогда

$$\left\{ \max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n} \right\} = \bigcup_{m=1}^n \{\tau = m\},$$

причем события справа являются попарно несовместными. Поэтому

$$\begin{aligned}
 P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}\right) &= \\
 &= P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}, |S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})\sigma \sqrt{n}\right) + \\
 &\quad + P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}, |S_n| < (\lambda - \sqrt{2})\sigma \sqrt{n}\right) \leq \\
 &\leq P(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})\sigma \sqrt{n}) + \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} P(|S_n| < (\lambda - \sqrt{2})\sigma \sqrt{n}, \tau = m).
 \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}
 P(|S_n| < (\lambda - \sqrt{2})\sigma \sqrt{n}, \tau = m) &\leq \\
 &\leq P(\tau = m, |S_n - S_m| > \sqrt{2}\sigma \sqrt{n}) = \\
 &= P(\tau = m) P(|S_n - S_m| > \sqrt{2}\sigma \sqrt{n})
 \end{aligned}$$

(здесь учтено, что случайные события $\{\tau = m\}$ и $\{|S_n - S_m| > \sqrt{2}\sigma \sqrt{n}\}$ являются независимыми). По неравенству Чебышева

$$P(|S_n - S_m| > \sqrt{2}\sigma \sqrt{n}) \leq \frac{E(S_n - S_m)^2}{2\sigma^2 n} = \frac{(n - m)\sigma^2}{2\sigma^2 n} = \frac{n - m}{2n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{n-1} P(|S_n| < (\lambda - \sqrt{2})\sigma \sqrt{n}, \tau = m) &\leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} P(\tau = m) \leq \frac{1}{2} P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}\right).
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}\right) &\leq \\
 &\leq P(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})\sigma \sqrt{n}) + \frac{1}{2} P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}\right),
 \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 5.5. В условиях теоремы 5.1 при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5.3 следует, что

$$P(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon) \leq \sum_{i=0}^{m-1} P\left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |Y_n(s) - Y_n(t_i)| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

В силу неравенства Колмогорова

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |Y_n(s) - Y_n(t_i)| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right) &= \\ &= P\left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |S_{[ns]} - S_{[nt_i]}| \geq \frac{\varepsilon}{3} \sigma \sqrt{n}\right) = \\ &= P\left(\frac{\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |S_{[ns]} - S_{[nt_i]}|}{\sigma \sqrt{[nt_{i+1}] - [nt_i]}} \geq \frac{\varepsilon}{3} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[nt_{i+1}] - [nt_i]}}\right) \leq \\ &\leq 2P\left(\frac{|S_{[ns]} - S_{[nt_i]}|}{\sigma \sqrt{[nt_{i+1}] - [nt_i]}} \geq \frac{\varepsilon}{3} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[nt_{i+1}] - [nt_i]}} - \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Последняя вероятность стремится при $n \rightarrow \infty$ к

$$P(|N| \geq x_\delta),$$

где $N \sim N(0, 1)$, $x_\delta = \varepsilon/(3\sqrt{\delta}) - \sqrt{2}$. А эта вероятность равна $2(1 - \Phi(x_\delta))$. В лекции 4 показано (см. соотношение (4.4)), что при $x > 0$

$$1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2},$$

поэтому при достаточно малом δ

$$1 - \Phi(x_\delta) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_\delta} e^{-x_\delta^2/2}.$$

Из сказанного следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon) \leq \frac{4}{\delta \sqrt{2\pi}x_\delta} e^{-x_\delta^2/2}.$$

Очевидно, предел правой части равен 0 при $\delta \rightarrow 0$, что доказывает лемму.

Из лемм 5.2 и 5.5 в силу теоремы 2.3 получаем утверждение теоремы 5.1.

Лекция 6

Приложения принципа инвариантности Прохорова–Донскера

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \quad \mathbb{E}X_1^2 = \sigma^2, \quad 0 < \sigma^2 < +\infty. \quad (6.1)$$

Введем случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Построим случайный процесс с траекториями из $D[0, 1]$

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1].$$

По принципу инвариантности Прохорова–Донскера при $n \rightarrow \infty$

$$Y_n \xrightarrow{D} W, \quad (6.2)$$

где W – броуновское движение, знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева на отрезке $[0, 1]$, с борелевской σ -алгеброй относительно топологии Скорохода. Если f – непрерывное отображение $D[0, 1]$ в $\mathbb{R}$, то по теореме 1.2 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$f(Y_n) \xrightarrow{D} f(W), \quad (6.3)$$

где $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в $\mathbb{R}$ с борелевской σ -алгеброй относительно стандартной топологии.

Именно соотношение (6.3) получило первоначально название *принципа инвариантности* (в термин *инвариантность* здесь вкладывается двойной смысл: неизменность относительно распределения шага случайного блуждания и неизменность относительно отображения f).

Важная проблема состоит в нахождении распределения $f(W)$. Разумеется, это можно сделать, исходя из свойств броуновского движения. Другой подход состоит в том, чтобы использовать само

соотношение (6.3) для нахождения распределения $f(W)$. Именно, рассматривается простое случайное блуждание с шагом

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2; \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$$

Используя простой вид этого блуждания, находят явный вид предельного распределения, которое в силу (6.3) совпадает с распределением $f(W)$. Прежде, чем рассматривать примеры, усилим соотношение (6.3), усилив теорему 1.2.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – случайные элементы со значениями в метрическом пространстве S и при $n \rightarrow \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X. \quad (6.4)$$

Пусть g – измеримое отображение S в метрическое пространство S' (это означает, что прообраз борелевского множества в S' является борелевским множеством в S) и C_g – множество тех элементов S , в которых отображение g непрерывно. Если $P(X \in C_g) = 1$, то при $n \rightarrow \infty$

$$g(X_n) \xrightarrow{D} g(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – замкнутое множество, принадлежащее S' . Покажем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(g(X_n) \in F) \leq P(g(X) \in F) = P(X \in g^{-1}(F)), \quad (6.5)$$

где $g^{-1}(F)$ – прообраз F .

Пусть $[A]$ означает замыкание множества A , т.е. объединение A и всех его предельных точек. Из условия (6.4) по теореме Александрова получаем, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(g(X_n) \in F) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in g^{-1}(F)) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in [g^{-1}(F)]) \leq P(X \in [g^{-1}(F)]). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Покажем, что

$$P(X \in [g^{-1}(F)]) = P(X \in g^{-1}(F)). \quad (6.7)$$

Пусть D_g – множество элементов S , в которых отображение g разрывно (множества C_g и D_g являются борелевскими). Тогда $S = C_g + D_g$ и

$$[g^{-1}(F)] = [g^{-1}(F)] D_g + [g^{-1}(F)] C_g \subset D_g + [g^{-1}(F)] C_g. \quad (6.8)$$

Установим, что

$$[g^{-1}(F)] C_g \subset g^{-1}(F). \quad (6.9)$$

Действительно, пусть x принадлежит $[g^{-1}(F)] C_g$. Из того, что $x \in [g^{-1}(F)]$, следует, что существует такая последовательность элементов $\{x_n\}$, что $x_n \in g^{-1}(F)$ и $x_n \rightarrow x$. Кроме того, $x \in C_g$ и, следовательно, отображение g непрерывно в x и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$. Но $g(x_n) \in F$ и поэтому $g(x) \in F$, т.к. F – замкнутое множество. Следовательно, $x \in g^{-1}(F)$. Итак, (6.9) доказано. Из (6.8) и (6.9) вытекает, что

$$[g^{-1}(F)] \subset D_g + g^{-1}(F).$$

Откуда получаем, что

$$P(X \in [g^{-1}(F)]) \leq P(X \in D_g) + P(X \in g^{-1}(F)) = P(X \in g^{-1}(F)),$$

поскольку $P(X \in D_g) = 0$. Противоположное неравенство

$$P(X \in [g^{-1}(F)]) \geq P(X \in g^{-1}(F))$$

очевидно. Таким образом, соотношение (6.7) доказано.

Из (6.6) и (6.7) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(g(X_n) \in F) \leq P(X \in g^{-1}(F)),$$

т.е. соотношение (6.5) справедливо. Теорема доказана.

ПРИМЕР 6.1. Пусть $S = D[0, 1]$. Рассмотрим отображение S в $\mathbb{R}$

$$g(x) = \sup_{t \in [0, 1]} x(t).$$

Это отображение является непрерывным при всех $x \in D[0, 1]$.

Действительно, если $\rho_{\text{ск}}(x, y) < \delta$, где $\delta > 0$, то существует такое непрерывное строго возрастающее отображение λ отрезка $[0, 1]$ на $[0, 1]$, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} |y(t) - x(\lambda(t))| < \delta, \quad \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t| < \delta.$$

Откуда, учитывая равенство $\sup_{t \in [0,1]} x(t) = \sup_{t \in [0,1]} x(\lambda(t))$, находим, что

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &= \left| \sup_{t \in [0,1]} y(t) - \sup_{t \in [0,1]} x(t) \right| = \\ &= \left| \sup_{t \in [0,1]} y(t) - \sup_{t \in [0,1]} x(\lambda(t)) \right| \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |y(t) - x(\lambda(t))| < \delta, \end{aligned}$$

т.е. отображение g непрерывно в точке x .

ПРИМЕР 6.2. Пусть $S = D[0, 1]$. Рассмотрим отображение S в $\mathbb{R}$

$$h(x) = \lambda(\{t: t \in [0, 1], x(t) > 0\}),$$

где $\lambda(A)$ – мера Лебега борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$. Можно показать, что это отображение является измеримым и п.н. непрерывным на траекториях броуновского движения, т.е.

$$P(W \in C_h) = 1.$$

Перейдем теперь к следствиям принципа инвариантности Прохорова–Донскера. Положим

$$M_n = \max_{0 \leq i \leq n} S_i.$$

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда при всех $x \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду принципа инвариантности Прохорова–Донскера и непрерывности функционала

$$g(x) = \sup_{t \in [0,1]} x(t), \quad x \in D[0, 1],$$

по теореме 6.1 получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t \in [0,1]} Y_n(t) \xrightarrow{D} \sup_{t \in [0,1]} W(t).$$

Заметим, что

$$\sup_{t \in [0,1]} Y_n(t) = \frac{\sup_{t \in [0,1]} S_{[nt]}}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{M_n}{\sigma \sqrt{n}}.$$

Итак, при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{M_n}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sup_{t \in [0,1]} W(t). \quad (6.10)$$

Осталось найти распределение правой части (6.10).

ЛЕММА 6.1. В случае простого случайного блуждания при всех $x \geq 0$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}(M_n \geq x) = 2\mathbf{P}(S_n > x) + \mathbf{P}(S_n = x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть натуральное x . Очевидно, что

$$\mathbf{P}(M_n \geq x) = \mathbf{P}(S_n = x) + \mathbf{P}(S_n > x, M_n \geq x) + \mathbf{P}(S_n < x, M_n \geq x).$$

Рис. 3.

Заметим, что число траекторий $S_0, S_1, \dots, S_n$, удовлетворяющих условию $\{S_n > x, M_n \geq x\}$ совпадает с числом траекторий, удовлетворяющих условию $\{S_n < x, M_n \geq x\}$. Действительно (см. рис. 3), если $M_n \geq x$, то существует момент τ первого достижения значения x отрезком случайного блуждания

$S_0, S_1, \dots, S_n$; число траекторий, ведущих за время $n - \tau$ из точки x в точки, лежащие не ниже x , совпадает с числом траекторий, ведущих в точки, лежащие не выше x .

Вероятность каждой траектории $S_0, S_1, \dots, S_n$ равна 2^{-n} , поэтому

$$P(S_n > x, M_n \geq x) = P(S_n < x, M_n \geq x).$$

Следовательно,

$$P(M_n \geq x) = 2P(S_n > x, M_n \geq x) + P(S_n = x).$$

Откуда, учитывая, что $\{S_n > x, M_n \geq x\} = \{S_n > x\}$, получаем утверждение леммы.

В случае простого случайного блуждания из леммы 6.1 и центральной предельной теоремы находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \geq x\right) = 2(1 - \Phi(x)),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Таким образом, функция распределения правой части (6.10) равна $1 - 2(1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$, что завершает доказательство теоремы.

Установим теперь закон арксинуса для случайных блужданий.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда при всех $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{|\{i: 0 \leq i \leq n, S_i > 0\}|}{n} \leq x\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

(здесь $|A|$ означает мощность множества A).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу принципа инвариантности Прохорова–Донскера и непрерывности функционала $h(x) = \lambda(\{t: t \in [0, 1], x(t) > 0\})$ на траекториях броуновского движения по теореме 6.1 получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\lambda(\{t: t \in [0, 1], X_n(t) > 0\}) \xrightarrow{D} \lambda(\{t: t \in [0, 1], W(t) > 0\}).$$

Заметим, что

$$\lambda(\{t: t \in [0, 1], X_n(t) > 0\}) = \frac{|\{i: 0 \leq i \leq n-1, S_i > 0\}|}{n}.$$

Итак, при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{|\{i: 0 \leq i \leq n, S_i > 0\}|}{n} \xrightarrow{D} \lambda(\{t: t \in [0, 1], W(t) > 0\}). \quad (6.11)$$

Осталось найти распределение правой части (6.11).

Рассмотрим непрерывную функцию, построенную на основе отрезка случайного блуждания $S_0, S_1, \dots, S_n$:

$$Y_n^*(t) = S_i + (t - i)(S_{i+1} - S_i), \quad t \in [i, i+1], \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Доказательство следующей леммы можно найти в [7, т. 1, гл. 3, § 4].

ЛЕММА 6.2. В случае простого случайного блуждания при $k = 0, 1, \dots, n$ справедливо равенство

$$P(\lambda(\{t: t \in [0, 2n], Y_{2n}^*(t) > 0\}) = 2k) = u_{2k}u_{2n-2k},$$

где $u_{2k} = C_{2k}^k 2^{-2k}$.

Используя формулу Стирлинга, нетрудно показать, что при $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq xn} u_{2k}u_{2n-2k} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

Рассмотрим простое случайное блуждание. Из леммы 6.2 и последнего соотношения получаем, что при $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\lambda(\{t: t \in [0, n], Y_n^*(t) > 0\}) \leq xn) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda(\{t: t \in [0, n], Y_n^*(t) > 0\})n - |\{i: 0 \leq i \leq n, S_i > 0\}| \leq \\ &\leq |\{i: 0 \leq i \leq n, S_i = 0\}|. \end{aligned}$$

Последнее выражение имеет порядок $\sqrt{n}$ при $n \rightarrow \infty$ (см. [7, т. 1, гл. 3, § 7, теорема 4]). Отсюда следует, что в случае простого случайного блуждания при $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\{i: 0 \leq i \leq n, S_i > 0\}| \leq xn) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

Итак, функция распределения правой части (6.11) равна $(2/\pi) \arcsin \sqrt{x}$. Теорема доказана.

Лекция 7

Распределение минимума, максимума и положения в последний момент броуновского движения. Броуновский мост

Положим

$$\begin{aligned} m_n &= \min_{0 \leq i \leq n} S_i, & M_n &= \max_{0 \leq i \leq n} S_i, \\ m &= \inf_{t \in [0,1]} W(t), & M &= \sup_{t \in [0,1]} W(t). \end{aligned}$$

Пусть N означает случайную величину со стандартным нормальным распределением.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \{m_n, M_n, S_n\} \xrightarrow{D} \{m, M, W(1)\}, \quad (7.1)$$

причем при любых a, b, u, v таких, что $a \leq 0 \leq b$, $a \leq u < v \leq b$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} P(a < m \leq M < b, u < W(1) < v) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(u + 2k(b-a) < N < v + 2k(b-a)) - \\ &\quad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(2b - v + 2k(b-a) < N < 2b - u + 2k(b-a)). \end{aligned} \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $x \rightarrow \sup_{t \in [0,1]} x(t)$, $x \in D[0,1]$, является непрерывным при всех $x \in D[0,1]$ (см. лекцию 6). Аналогичные утверждения справедливы для отображений $x \rightarrow \inf_{t \in [0,1]} x(t)$ и $x \rightarrow x(1)$, $x \in D[0,1]$. Поэтому непрерывно при всех $x \in D[0,1]$ следующее отображение $D[0,1]$ в $\mathbb{R}^3$:

$$x \rightarrow \left\{ \inf_{t \in [0,1]} x(t), \sup_{t \in [0,1]} x(t), x(1) \right\}.$$

Откуда в силу принципа инвариантности Прохорова–Донскера и по теореме 6.1 предыдущей лекции получаем утверждение (7.1) доказываемой теоремы.

Для доказательства (7.2) нам потребуется следующий результат. Положим

$$p_n(a, b, v) = P(a < m_n \leq M_n < b, S_n = v), p_n(j) = P(S_n = j).$$

ЛЕММА 7.1. *В случае простого случайного блуждания при любых целых a, b, v таких, что $a \leq 0 \leq b, a < b, a \leq v \leq b$, справедливо равенство*

$$p_n(a, b, v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n(v + 2k(b-a)) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n(2b - v + 2k(b-a)), \quad (7.3)$$

причем оба ряда в правой части сходятся при $a < b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся принципом математической индукции. Если $n = 0$, то $p_n(a, b, v) = 1$ при $v = 0$ и $p_n(a, b, v) = 0$ при $v \neq 0$. То же справедливо и для правой части (7.3). Обозначим равенство (7.3) через $[n, a, b, v]$. Предположим справедливость $[n-1, a, b, v]$ при любых a, b, v таких, что $a \leq 0 \leq b, a < b, a \leq v \leq b$, и покажем справедливость $[n, a, b, v]$. Пусть сначала $a = 0$, тогда и левая, и правая части (7.3) обращаются в 0 (правая – поскольку $p_n(j) = p_n(-j)$ при любых целых j). Аналогично рассматривается случай $b = 0$. Пусть теперь $a \leq -1, b \geq 1$. Тогда справедливы $[n-1, a-1, b-1, v-1]$ и $[n-1, a+1, b+1, v+1]$. Теперь заметим, что по формуле полной вероятности

$$p_n(a, b, v) = \frac{1}{2} p_{n-1}(a+1, b+1, v+1) + \frac{1}{2} p_{n-1}(a-1, b-1, v-1), \quad (7.4)$$

$$p_n(j) = \frac{1}{2} p_{n-1}(j-1) + \frac{1}{2} p_{n+1}(j+1). \quad (7.5)$$

Выписывая выражения для двух слагаемых в правой части (7.4) в соответствии с (7.3) и используя (7.5), получаем справедливость $[n, a, b, v]$. Лемма доказана.

Рассмотрим простое случайное блуждание. Из леммы 7.1 следует, что если $a \leq 0 \leq b$, $a \leq u < v \leq b$, то

$$\begin{aligned} P(a < m_n \leq M_n < b, u < S_n < v) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(u + 2k(b-a) < S_n < v + 2k(b-a)) - \\ - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(2b - v + 2k(b-a) < S_n < 2b - u + 2k(b-a)). \end{aligned}$$

Воспользовавшись центральной предельной теоремой для каждого члена этих двух рядов и оценками для хвостов этих рядов (например,

$$\begin{aligned} \sum_{k=L}^{+\infty} P(u + 2k(b-a) < S_n < v + 2k(b-a)) \leq \\ \leq P(S_n > u + 2L(b-a)), \end{aligned}$$

при $L \in \mathbb{N}$) получаем, что при $a \leq 0 \leq b$, $a \leq u < v \leq b$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{m_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} < b, u < \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < v\right) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(u + 2k(b-a) < N < v + 2k(b-a)) - \\ - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(2b - v + 2k(b-a) < N < 2b - u + 2k(b-a)). \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (7.2) и теорема доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. При $u < v \leq b$, $b \geq 0$

$$P(M < b, u < W(1) < v) = P(u < N < v) - P(2b - v < N < 2b - u).$$

При $a \leq 0$, $a \leq u < v$

$$P(a < m, u < W(1) < v) = P(u < N < v) - P(2a - v < N < 2a - u).$$

При $a \leq 0 \leq b$

$$P(a < m \leq M < b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k P(a + k(b-a) < N < b + k(b-a)).$$

Эти результаты, касающиеся броуновского движения, позволяют изучить свойства таких случайных процессов как *броуновский мост*, *броуновская извилина* и *броуновская экскурсия*. Названные процессы тесно связаны с броуновским движением и играют важную роль в дальнейшем. Начнем с первого из них.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Случайный процесс $\{W_0(t), t \in [0, 1]\}$ называется *броуновским мостом*, если

- 1) $W_0(0) = 0$ п.н.;
- 2) все конечномерные распределения нормальны;
- 3) $EW_0(t) = 0$, $EW_0(s)W_0(t) = s(1-t)$ при $0 \leq s \leq t \leq 1$;
- 4) траектории W_0 п.н. непрерывны.

Заметим, что $W_0(1) = 0$ п.н. В качестве примера броуновского моста можно рассмотреть процесс $W(t) - tW(1)$, $t \in [0, 1]$, где W – броуновское движение. Условия 1), 2) и 4) выполняются. Далее, при $0 \leq s \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} E(W(t) - tW(1)) &= 0, \\ E(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1)) &= \\ &= EW(s)W(t) - tEW(s)W(1) - sEW(1)W(t) + stEW^2(1) = \\ &= s(1-t). \end{aligned}$$

Как и в случае броуновского движения, будем считать, что все траектории броуновского моста являются непрерывными.

Пусть X – случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $P(A) > 0$. Обозначим $\{X | A\}$ случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(A, \mathcal{F} \cap A, P(\cdot | A))$, где $P(\cdot | A)$ – условная вероятностная мера ($P(B | A) = P(AB) / P(A)$ при $B \in \mathcal{F} \cap A$) и определяемый формулой

$$\{X | A\}(\omega) = X(\omega), \quad \omega \in A.$$

Положим при $\varepsilon > 0$

$$W_\varepsilon = \{W | 0 \leq W(1) \leq \varepsilon\}.$$

ТЕОРЕМА 7.2. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$W_\varepsilon \xrightarrow{D} W_0,$$

где знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в $C[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве W_0 процесс $\{W(t) - tW(1), t \in [0, 1]\}$. Пусть m – натуральное число и $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$. Случайный вектор $\{W_0(t_1), W_0(t_2), \dots, W_0(t_m)\}$ не зависит от $W(1)$. Действительно, рассмотрим случайный вектор $\{W_0(t_1), \dots, W_0(t_m), W(1)\}$. Он является нормальным. Поэтому независимость $W(1)$ от остальных компонент равносильна равенствам

$$\text{cov}(W(1), W_0(t_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Проверим их:

$$\begin{aligned} \text{cov}(W(1), W_0(t_i)) &= \text{cov}(W(1), W(t_i) - t_i W(1)) = \\ &= \mathbb{E}W(1)W(t_i) - t_i \mathbb{E}W^2(1) = 0. \end{aligned}$$

Из доказанного следует, что случайная величина $W(1)$ не зависит от случайного события $\{W_0 \in A\}$ для любого множества A из цилиндрической σ -алгебры в пространстве $C[0, 1]$. Можно показать, что эта σ -алгебра совпадает с борелевской σ -алгеброй в $C[0, 1]$ относительно равномерной топологии. Поэтому для любого борелевского множества A из $C[0, 1]$

$$\mathbb{P}(W_0 \in A \mid 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(W_0 \in A). \quad (7.6)$$

Рассмотрим теперь произвольное замкнутое множество F из $C[0, 1]$. Покажем, что

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(W \in F \mid 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(W_0 \in F). \quad (7.7)$$

Если $0 \leq W(1) \leq \varepsilon$ и $W \in F$, то $W_0 \in F_\varepsilon = \{x: \rho_{\text{равн}}(x, F) \leq \varepsilon\}$. Откуда с учетом (7.6) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W \in F \mid 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(W_0 \in F_\varepsilon \mid 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) = \\ &= \mathbb{P}(W_0 \in F_\varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(W \in F \mid 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(W_0 \in F_\varepsilon) = \\ &= \mathbb{P}(W_0 \in F). \end{aligned}$$

Последнее равенство объясняется тем, что множества F_ε убывают с уменьшением ε и $\bigcap_\varepsilon F_\varepsilon = F$. Итак, соотношение (7.7) и теорема доказаны.

ТЕОРЕМА 7.3. *Броуновский мост является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью*

$$p_0(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t(1-t)}\right), \\ \quad 0 = s < t < 1, \quad x = 0, \quad y \in \mathbb{R}; \\ \sqrt{\frac{1-s}{2\pi(t-s)(1-t)}} \exp\left(-\frac{((1-s)y - (1-t)x)^2}{2(1-s)(t-s)(1-t)}\right), \\ \quad 0 < s < t < 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется показать, что для произвольных чисел $m \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_m$ таких, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$, и $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} P(W_0(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m) &= \\ &= \int \dots \int_{G(a_1, \dots, a_m)} p_0(0, 0; t_1, x_1) \times \\ &\quad \times p_0(t_1, x_1; t_2, x_2) \dots p_0(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m) dx_1 \dots dx_m, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где $G(a_1, \dots, a_m) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \leq a_1, \dots, x_m \leq a_m\}$. Броуновское движение является марковским процессом с переходной плотностью

$$\begin{aligned} p(s, x; t, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}, \\ 0 \leq s < t < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Поэтому по теореме 7.2, учитывая, что случайный вектор $\{W_0(t_1), \dots, W_0(t_m)\}$ принадлежит границе множества $G(a_1, \dots, a_m)$ с нулевой вероятностью, получаем, что

$$\begin{aligned} P(W_0(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(W(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m \mid 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{P(0 \leq W(1) \leq \varepsilon)} \times \\ &\quad \times P(W(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m; 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mathbb{P}(0 \leq W(1) \leq \varepsilon)} \times \\
&\quad \times \int_0^\varepsilon dx_{m+1} \int \cdots \int_{G(a_1, \dots, a_m)} p(0, 0; t_1, x_1) \times \\
&\quad \times p(t_1, x_1; t_2, x_2) \dots p(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m) \times \\
&\quad \times p(t_m, x_m; 1, x_{m+1}) dx_1 \dots dx_m = \\
&= \int \cdots \int_{G(a_1, \dots, a_m)} p(0, 0; t_1, x_1) \dots p(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m) \times \\
&\quad \times \frac{p(t_m, x_m; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} dx_1 \dots dx_m.
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что в последнем интеграле подынтегральное выражение совпадает с подынтегральным выражением в правой части (7.8). Пусть, например, $m = 1$, тогда

$$\begin{aligned}
p(0, 0; t_1, x_1) \frac{p(t_1, x_1; 1, 0)}{p(0, 0; 1, 0)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} \frac{1}{\sqrt{1-t_1}} e^{-\frac{x_1^2}{2(1-t_1)}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1(1-t_1)}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1(1-t_1)}} = p_0(0, 0; t_1, x_1).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7.4. Для любого $x \geq 0$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |W_0(t)| \leq x\right) = K(x),$$

где $K(x)$ – функция распределения Колмогорова, т.е.

$$K(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}, \quad x > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, при $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |W_0(t)| \leq x\right) = \mathbb{P}\left(-x \leq \inf_{t \in [0,1]} W_0(t) \leq \sup_{t \in [0,1]} W_0(t) \leq x\right).$$

По теореме 7.2

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\left(-x \leq \inf_{t \in [0,1]} W_0(t) \leq \sup_{t \in [0,1]} W_0(t) \leq x\right) = \\
 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(-x \leq m \leq M \leq x \mid 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) = \\
 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(-x \leq m \leq M \leq x, 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) / \mathbf{P}(0 \leq W(1) \leq \varepsilon).
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

По теореме 7.1

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}(-x \leq m \leq M \leq x, 0 \leq W(1) \leq \varepsilon) = \\
 & = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(4kx < N < \varepsilon + 4kx) - \\
 & \quad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(2x - \varepsilon + 4kx < N < 2x + 4kx).
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Очевидно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P}(a < N < a + \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}},$$

поэтому, ввиду (7.10), правая часть (7.9) равна

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2(2kx)^2} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2((2k+1)x)^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}.$$

Теорема доказана.

Лекция 8

Локальные предельные теоремы Гнеденко и Стоуна

В этой лекции рассматриваются классические результаты теории вероятностей, играющие существенную роль в дальнейшем. Теорему Гнеденко изучают в стандартных университетских курсах, теореме Стоуна (см. [25]) повезло меньше, хотя она весьма востребована в современной теории вероятностей, особенно в теории больших отклонений для случайных блужданий. Приведем доказательства обеих теорем (первой – потому что элементы ее доказательства используются при доказательстве второй).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Распределение случайной величины X называется *решетчатым*, если существуют такие числа $a \in \mathbb{R}$ и $h > 0$, что возможные значения X есть $a + ht$, $t \in \mathbb{Z}$. Число h называется *шагом распределения*. Максимальное из возможных значений h (при всевозможных a) называется *максимальным шагом распределения*. Обозначим его h_0 . Если при этом возможные значения X_1 есть $h_0 t$, $t \in \mathbb{Z}$, то распределение называется *центрально решетчатым* (с максимальным шагом h_0). Все распределения, не являющиеся решетчатыми, называются *нерешетчатыми*.

Доказательство следующей леммы можно найти в [7, т. 2, гл. 15, § 1].

ЛЕММА 8.1. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины X . Распределение случайной величины X является нерешетчатым тогда и только тогда, когда $|\varphi(t)| < 1$ при любом $t \neq 0$. Если $|\varphi(\lambda)| = 1$ при некотором $\lambda > 0$ и $|\varphi(t)| < 1$ при $t \in (0, \lambda)$, то распределение случайной величины X является решетчатым с максимальным шагом $2\pi/\lambda$. Если $|\varphi(t)| = 1$ в правой окрестности точки 0 (и, следовательно, при всех $t \in \mathbb{R}$), то распределение случайной величины X является вырожденным, т.е. $X = C$ п.н., где C – некоторая постоянная.

ТЕОРЕМА 8.1 (ГНЕДЕНКО). Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные центрально решетчатые случайные величины с максимальным шагом h , причем $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$,

$0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}} \left| \sigma \sqrt{n} P(S_n = xh) - \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{xh}{\sigma \sqrt{n}} \right)^2} \right| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся рассмотрением случая $h = 1$. Положим при $x \in \mathbb{Z}$

$$z = \frac{x}{\sigma \sqrt{n}}, P_n(x) = P(S_n = x).$$

Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины X_1 . Тогда характеристическая функция случайной величины S_n равна $\varphi^n(t)$ и

$$\varphi^n(t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} P_n(x) e^{itx}.$$

По формуле Фурье

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^n(t) e^{-itx} dt.$$

Поскольку $x = \sigma \sqrt{n} z$, то

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^n(t) e^{-it\sigma \sqrt{n} z} dt.$$

Сделаем замену $y = t\sigma \sqrt{n}$, тогда

$$\sigma \sqrt{n} P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sigma \sqrt{n}}^{\pi\sigma \sqrt{n}} \varphi^n \left(\frac{y}{\sigma \sqrt{n}} \right) e^{-iyz} dy.$$

Известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyz} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Представим выражение

$$2\pi \left(\sigma \sqrt{n} P_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right)$$

в виде суммы четырех интегралов при $A > 0$, $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|y| \leq A} e^{-iyz} \left[\varphi^n \left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{y^2}{2}} \right] dy, \\ I_2 &= - \int_{A \leq |y|} e^{-iyz} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \\ I_3 &= \int_{A \leq |y| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{n}} e^{-iyz} \varphi^n \left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}} \right) dy, \\ I_4 &= \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n} \leq |y| \leq \pi\sigma\sqrt{n}} e^{-iyz} \varphi^n \left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}} \right) dy. \end{aligned}$$

1) Очевидно, что

$$|I_2| \leq \int_{A \leq |y|} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

а последний интеграл становится малым при больших A .

2) По условию теоремы

$$\varphi(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

Поэтому существует такое число $\varepsilon > 0$, что при $|t| < \varepsilon$

$$|\varphi(t)| < 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{4} \leq e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{4}}.$$

Следовательно,

$$|I_3| \leq \int_{A \leq |y| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{n}} \left| \varphi \left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right|^n dy \leq \int_{A \leq |y| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{y^2}{4}} dy.$$

Последний интеграл становится малым при больших A .

3) По центральной предельной теореме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n \left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{y^2}{2}},$$

причем эта сходимость равномерна по y , принадлежащим произвольному конечному отрезку. Отсюда следует, что интеграл I_1 становится малым при фиксированном A и больших n .

4) Наконец,

$$|I_4| \leq \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n} \leq |y| \leq \pi\sigma\sqrt{n}} \left| \varphi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^n dy = \sigma\sqrt{n} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} |\varphi(t)|^n dt.$$

По лемме 8.1 $|\varphi(t)| < 1$ при $0 < t < 2\pi$, поэтому

$$\max_{\varepsilon \leq t \leq \pi} |\varphi(t)| := q < 1.$$

Следовательно,

$$|I_4| \leq \sigma\sqrt{n} q^n 2\pi,$$

а правая часть мала при больших n .

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8.2 (СТОУН). Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Если распределение случайной величины X_1 является нерешетчатым, то при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma\sqrt{n} P(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta]) = \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1) \right)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и $\Delta \in (0, b)$, где b – произвольное положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плотность вероятностей

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \right)^2.$$

Ее преобразование Фурье равно

$$k(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1; \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Введем при $a > 0$ семейство плотностей вероятностей

$$K_a(x) = \frac{1}{a} K\left(\frac{x}{a}\right),$$

преобразование Фурье которых равно

$$k_a(t) = k(at).$$

ЛЕММА 8.2. Пусть X – произвольная случайная величина, $f(t)$ – ее характеристическая функция, $P(x; h) = P(X \in (x, x + h])$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x; h) e^{itx} dx = \frac{1 - e^{-ith}}{it} f(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины X , тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x; h) e^{itx} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x + h) - F(x)] e^{itx} dx = \\ &= \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x + h) - F(x)] d e^{itx} = \\ &= \frac{1}{it} [F(x + h) - F(x)] e^{itx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \\ &\quad - \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d[F(x + h) - F(x)] = \\ &= \frac{1}{it} f(t) - \frac{e^{-ith}}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x+h)} dF(x + h) = \\ &= \frac{1}{it} f(t) - \frac{e^{-ith}}{it} f(t) = \frac{1 - e^{-ith}}{it} f(t). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины X_1 , положим $P_n(x; h) = P(S_n / (\sigma\sqrt{n}) \in (x, x + h])$, тогда из леммы 8.2 следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x; h) e^{itx} dx = \frac{1 - e^{-ith}}{it} \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Рассмотрим свертку функций $K_a(x)$ и $P_n(x; h)$:

$$V_n(x; h, a) := \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(y) P_n(x - y; h) dy.$$

Ее преобразование Фурье равно произведению преобразований Фурье функций $K_a(x)$ и $P_n(x; h)$. Поэтому по формуле обращения для преобразований Фурье

$$V_n(x; h, a) = \frac{h}{2\pi} \int_{|t| \leq 1/a} e^{-itx} k_a(t) \frac{1 - e^{-ith}}{ith} \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt. \quad (8.1)$$

Еще раз запишем формулу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (8.2)$$

Положим

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 8.3. Если распределение случайной величины X_1 является нерешетчатым, то при $h = c_1/(\sigma\sqrt{n})$, $a = c_2/(\sigma\sqrt{n})$, где c_1, c_2 – положительные постоянные,

$$V_n(x; h, a) = h(p(x) + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Это соотношение выполняется равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул (8.1) и (8.2) выражение

$$(2\pi/h) V_n(x, h, a) - 2\pi p(x)$$

можно представить как сумму четырех интегралов при $A > 0$, $\varepsilon > 0$:

$$I_1 = \int_{|t| \leq A} e^{-itx} \left[k_a(t) \frac{1 - e^{-ith}}{ith} \varphi^n \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right] dt,$$

$$I_2 = - \int_{|t| \geq A} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$I_3 = \int_{A \leq |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} k_a(t) \frac{1 - e^{-ith}}{ith} \varphi^n \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) dt,$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n} \leq |t| \leq 1/a} e^{-itx} k_a(t) \frac{1 - e^{-ith}}{ith} \varphi^n \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) dt.$$

1) Оценка I_2 производится так же, как в теореме 8.1.

2) Поскольку

$$|k_a(t)| \leq 1, \quad \left| \frac{1 - e^{-ith}}{ith} \right| \leq 1,$$

то

$$|I_3| \leq \int_{A \leq |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{n}} \left| \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right|^n dt.$$

Оценка последнего интеграла производится так же, как в теореме 8.1.

3) Ясно, что

$$\begin{aligned} k_a(t) &= 1 + o(1), \quad a \rightarrow 0, \\ \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= e^{-\frac{t^2}{2}} + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \\ \left|\frac{1 - e^{-ith}}{ith} - 1\right| &\leq \frac{1}{2}|th| \implies \frac{1 - e^{-ith}}{ith} = 1 + o(1), \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

причем все эти соотношения выполняются равномерно по $t \in [-A, A]$. Поэтому

$$I_1 = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

4) Так как по лемме 8.1 $|\varphi(t)| < 1$ при $t \neq 0$, то

$$\max_{\varepsilon \leq t \leq 1/c_2} |\varphi(t)| := q < 1,$$

поэтому

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n} \leq |t| \leq 1/a} \left| \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^n dt = \\ &= \sigma\sqrt{n} \int_{\varepsilon \leq |u| \leq 1/c_2} |\varphi(u)|^n du \leq \sigma\sqrt{n} q^n \frac{2}{c_2} = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется показать, что существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geq n_0$, $x \in \mathbb{R}$, $\Delta \in (0, b)$ (b – произвольное фиксированное положительное число)

$$\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}} (p(x) - \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x + \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \leq \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}} (p(x) + \varepsilon). \quad (8.3)$$

Пусть $p_0 = \max_{x \in \mathbb{R}} p(x)$. Функция $p(x)$ равномерно непрерывна (поскольку $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = 0$), поэтому существует такое число h_1 из интервала $(0, 1)$, что $|p(x) - p(y)| \leq \varepsilon/4$ при $|x - y| \leq h_1$. Подберем число δ так, чтобы $0 < \delta < 1/6$ и при $\varepsilon_1 = 2\delta$, $\varepsilon_2 = \int_{|x| \geq 1/\delta} K(x) dx$ выполнялись неравенства

$$\frac{p_0 + p_0\varepsilon_1 + \varepsilon/2}{1 - \varepsilon_2} - p_0 \leq \varepsilon, \quad p_0\varepsilon_1 + (p_0 + \varepsilon)\varepsilon_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.4)$$

Пусть $h = \Delta / (\sigma\sqrt{n})$. По лемме 8.3 существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geq n_0$, во-первых,

$$\begin{aligned} V_n(x - \delta h; h(1 + 2\delta), \delta^2 h) &\leq h(1 + 2\delta)p(x - \delta h) + \frac{\varepsilon h}{6} \leq \\ &\leq h(1 + 2\delta)\left(p(x) + \frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{\varepsilon h}{6} \leq h\left(p(x) + \varepsilon_1 p_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Здесь учтено, что

$$(1 + 2\delta)\left(p(x) + \frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{\varepsilon}{6} = p(x) + 2\delta p(x) + \frac{\delta\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{6} \leq p(x) + \varepsilon_1 p_0 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

А во-вторых,

$$\begin{aligned} V_n(x + \delta h, h(1 - 2\delta), \delta^2 h) &\geq h(1 - 2\delta)p(x + \delta h) - \frac{\varepsilon h}{4} \geq \\ &\geq h(1 - 2\delta)\left(p(x) - \frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{\varepsilon h}{4} \geq h\left(p(x) - \varepsilon_1 p_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Здесь учтено, что

$$(1 - 2\delta)\left(p(x) - \frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{4} = p(x) - 2\delta p(x) + \frac{\delta\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \geq p(x) - 2\delta p_0 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что при $|y| \leq \delta h$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x - \delta h - y, x - \delta h - y + h(1 + 2\delta))\right) &\geq \\ &\geq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x + h]\right), \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x + \delta h - y, x + \delta h - y + h(1 - 2\delta))\right) &\leq \\ &\leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x + h]\right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Поэтому, вспоминая определение функций $V_n(x; h, a)$ и $P_n(x; h)$ и учитывая (8.7), находим, что

$$\begin{aligned} V_n(x - \delta h; h(1 + 2\delta), \delta^2 h) &\geq \\ &\geq \int_{|y| \leq \delta h} K_{\delta^2 h}(y) P_n(x - \delta h - y; h(1 + 2\delta)) dy \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h] \right) \int_{|y| \leq \delta h} K_{\delta^2 h}(y) dy \geq \\
&\geq \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h] \right) (1 - \varepsilon_2); \tag{8.9}
\end{aligned}$$

последнее неравенство объясняется тем, что

$$\begin{aligned}
\int_{|y| > \delta h} K_{\delta^2 h}(y) dy &= \int_{|y| > \delta h} K \left(\frac{y}{\delta^2 h} \right) \frac{1}{\delta^2 h} dy = \\
&= \int_{|u| > 1/\delta} K(u) du = \varepsilon_2. \tag{8.10}
\end{aligned}$$

Из (8.4), (8.5) и (8.9) следует, что

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h] \right) \leq \frac{h(p(x) + p_0\varepsilon_1 + \varepsilon/2)}{1 - \varepsilon_2} \leq h(p(x) + \varepsilon). \tag{8.11}$$

Аналогично, учитывая (8.8), (8.10) и (8.11), получаем, что

$$\begin{aligned}
V_n(x + \delta h; h(1 - 2\delta), \delta^2 h) &= \\
&= \int_{|y| \leq \delta h} K_{\delta^2 h}(y) P_n(x + \delta h - y; h(1 - 2\delta)) dy + \int_{|y| > \delta h} \dots \leq \\
&\leq \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h] \right) \int_{|y| \leq \delta h} K_{\delta^2 h}(y) dy + \\
&\quad + (p_0 + \varepsilon) h \int_{|y| > \delta h} K_{\delta^2 h}(y) dy \leq \\
&\leq \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h] \right) + \varepsilon_2(p_0 + \varepsilon)h. \tag{8.12}
\end{aligned}$$

Из (8.4), (8.6) и (8.12) получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h] \right) &\geq h \left(p(x) - \varepsilon_1 p_0 - \varepsilon_2(p_0 + \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \geq \\
&\geq h(p(x) - \varepsilon). \tag{8.13}
\end{aligned}$$

Из соотношений (8.11) и (8.13) следует (8.3). Теорема доказана.

Теоремы 8.1 и 8.2 можно объединить в одну, которую также называют *теоремой Стоуна*.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Если распределение случайной величины X_1 является центрально решетчатым или нерешетчатым, то при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma\sqrt{n} P(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta]) = \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1) \right)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и $\Delta \in (0, b)$, где b – произвольное положительное число (в решетчатом случае Δ кратно максимальному шагу распределения X_1).

Смысл этой теоремы очень прост: распределение случайной величины $S_n/(\sigma\sqrt{n})$ при больших n мало отличается от стандартного нормального, поэтому

$$P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x + \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \approx p(x) \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}},$$

где $p(x)$ – плотность вероятностей стандартного нормального закона.

Лекция 9

Принцип инвариантности Лиггетта

Наряду с принципом инвариантности Прохорова–Донскера существуют и другие принципы инвариантности для случайных блужданий, в которых последние рассматриваются при некоторых условиях, касающихся либо положения в определенный момент времени, либо всей траектории. Такие случайные блуждания и соответствующие им принципы инвариантности получили название *условных*. В ниже следующем *условном принципе инвариантности Лиггетта* (см. [22]) рассматривается условие на S_n .

Положим

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные центрально решетчатые или нерешетчатые случайные величины, $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда для произвольного фиксированного $a > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid S_n \in (-a, a]\} \xrightarrow{D} W_0,$$

где W_0 – броуновский мост, знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные центрально решетчатые случайные величины, $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid S_n = 0\} \xrightarrow{D} W_0,$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 9.1 разобьем на ряд лемм. Будем считать, что в решетчатом случае a кратно максимальному шагу распределения X_1 .

ЛЕММА 9.1. В условиях теоремы 9.1 для произвольного фиксированного $a > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$P(S_n \in (-a, a]) \sim \frac{2a}{\sqrt{2\pi n\sigma}}$$

и, следовательно, $P(S_n \in (-a, a]) \neq 0$ при достаточно больших n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Стоуна при $x \in \mathbb{R}$

$$\sigma\sqrt{n}P(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x - a, \sigma\sqrt{n}x + a]) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

При $x = 0$ получаем, что

$$P(S_n \in (-a, a]) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi n}\sigma} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.

Пусть $P^{(x)}$ означает, что случайное блуждание $\{S_n\}$ стартует из точки x , а не из точки 0.

ЛЕММА 9.2. В условиях теоремы 9.1 при $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} P^{(\sigma\sqrt{n}x)}(S_{n-[nt]} \in (-a, a]) &= \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(1-t)n\sigma} e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

равномерно по x , принадлежащим произвольному конечному отрезку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\begin{aligned} P^{(\sigma\sqrt{n}x)}(S_{n-[nt]} \in (-a, a]) &= \\ &= P(S_{n-[nt]} \in (-\sigma\sqrt{n}x - a, -\sigma\sqrt{n}x + a]). \end{aligned}$$

В силу теоремы Стоуна при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P(S_{n-[nt]} \in (-\sigma\sqrt{n}x - a, -\sigma\sqrt{n}x + a]) &= \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n-[nt]}} e^{-\frac{1}{2}\frac{n x^2}{n-[nt]}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n}(1-t)} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

равномерно по x , принадлежащим произвольному конечному отрезку. Лемма доказана.

ЛЕММА 9.3. Пусть $P, P_1, P_2, \dots$ – вероятностные меры на $\mathbb{R}$ с борелевской σ -алгеброй относительно стандартной топологии и последовательность $\{P_n\}$ слабо сходится к P при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность равномерно ограниченных измеримых функций на $\mathbb{R}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ равномерно по x , принадлежащим произвольному конечному отрезку, причем $f(x)$ – непрерывная функция. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) dP_n = \int_B f(x) dP$$

для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ такого, что $P(\partial B) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду равномерной ограниченности последовательности функций $\{f_n\}$ и слабой сходимости $\{P_n\}$ к P , достаточно остановиться на случае, когда B – ограниченное множество. Очевидно,

$$\begin{aligned} \left| \int_B f_n(x) dP_n - \int_B f(x) dP \right| &\leq \\ &\leq \int_B |f_n(x) - f(x)| dP_n + \left| \int_B f(x) dP_n - \int_B f(x) dP \right|. \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа мало в силу равномерной сходимости $\{f_n\}$ к f на произвольном конечном отрезке; второе слагаемое мало ввиду слабой сходимости $\{P_n\}$ к P (вспомните теорему 6.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 9.4. Конечномерные распределения процесса

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid S_n \in (-a, a]\}$$

сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям процесса W_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m – натуральное число, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$. Рассмотрим при фиксированных $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m \mid S_n \in (-a, a]) &= \\ = \frac{1}{P(S_n \in (-a, a])} P(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m; S_n \in (-a, a]). \end{aligned}$$

В силу марковского свойства случайного блуждания правая часть равна

$$\int_{-\infty}^{a_m} d_x \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m-1; Y_n(t_m) \leq x) \times \\ \times \frac{\mathbf{P}(\sigma\sqrt{n}x) (S_{n-\lfloor nt_m \rfloor} \in (-a, a])}{\mathbf{P}(S_n \in (-a, a])}.$$

По принципу инвариантности Прохорова–Донскера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m-1; Y_n(t_m) \leq x) = \\ = \mathbf{P}(W(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m-1; W(t_m) \leq x).$$

Ввиду лемм 9.1 и 9.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\sigma\sqrt{n}x) (S_{n-\lfloor nt_m \rfloor} \in (-a, a])}{\mathbf{P}(S_n \in (-a, a])} = \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}}$$

равномерно по x , принадлежащим произвольному конечному отрезку. Следовательно, по лемме 9.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m \mid S_n \in (-a, a]) = \\ = \int_{-\infty}^{a_m} d_x \mathbf{P}(W(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m-1; W(t_m) \leq x) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}}. \quad (9.1)$$

Вспомним, что броуновское движение W является марковским процессом с переходной плотностью

$$p(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}, \quad 0 \leq s < t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(W(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m-1; W(t_m) \leq x) = \\ = \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_{m-1}} \int_{-\infty}^x \prod_{i=1}^m p(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i) dx_1 \dots dx_m,$$

где $t_0 = 0, x_0 = 0$. Следовательно, правая часть (9.1) равна

$$\int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_m} \prod_{i=1}^m p(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i) \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x_m^2}{2(1-t_m)}} dx_1 \dots dx_m.$$

В лекции 7 при доказательстве теоремы 7.3 было показано, что последний интеграл совпадает с $P(W_0(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9.5. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon \mid S_n \in (-a, a]) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для $x \in D[a, b]$ при $-\infty < a \leq b < +\infty$

$$w_x(\delta; a, b) = \sup_{\substack{t, s: |t-s| \leq \delta, \\ t, s \in [a, b]}} |x(t) - x(s)|,$$

где δ – положительное число. Очевидно,

$$w_x(\delta) = w_x(\delta; 0, 1) \leq w_x(\delta; 0, 1/2) + w_x(\delta; 1/2, 1). \quad (9.2)$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w_{Y_n}(\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon \mid S_n \in (-a, a]) = 0. \quad (9.3)$$

Запишем представление при $A > 0$:

$$P(w_{Y_n}(\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon \mid S_n \in (-a, a]) = P_1(n, \delta, A) + P_2(n, \delta, A), \quad (9.4)$$

где

$$P_1(n, \delta, A) := P(w_{Y_n}(\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon, |Y_n(1/2)| \leq A \mid S_n \in (-a, a]),$$

$$P_2(n, \delta, A) := P(w_{Y_n}(\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon, |Y_n(1/2)| > A \mid S_n \in (-a, a]).$$

По лемме 9.4

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_2(n, \delta, A) &\leq \\ &\leq \lim_{A \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n(1/2)| > A \mid S_n \in (-a, a]) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} P(|W_0(1/2)| > A) = 0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Далее,

$$\begin{aligned} P_1(n, \delta, A) &= \int_{-A}^A d_x P(w_{Y_n}(\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon, Y_n(1/2) \leq x) \times \\ &\quad \times \frac{P^{(x\sigma\sqrt{n})}(S_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \in (-a, a])}{P(S_n \in (-a, a])}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

По лемме 9.2

$$\mathbf{P}^{(x\sigma\sqrt{n})}(S_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \in (-a, a]) = \frac{2a}{\sqrt{\pi n}\sigma} e^{-x^2} (1 + o(1))$$

равномерно по $x \in [-A, A]$, поэтому при достаточно больших n

$$\mathbf{P}^{(x\sigma\sqrt{n})}(S_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \in (-a, a]) \leq \frac{K}{\sqrt{n}}$$

при всех $x \in [-A, A]$, где K – положительная постоянная, не зависящая от n и x . Применяя это неравенство к (9.6), получаем, что при достаточно больших n

$$P_1(n, \delta, A) \leq \frac{K}{\sqrt{n} \mathbf{P}(S_n \in (-a, a])} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon).$$

По лемме 9.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(S_n \in (-a, a]) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

По принципу инвариантности Прохорова–Донскера

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon) = 0.$$

Поэтому при фиксированном $A > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_1(n, \delta, A) = 0. \quad (9.7)$$

Из соотношений (9.4), (9.5) и (9.7) следует (9.3).

Покажем теперь, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 1/2, 1) \geq \varepsilon \mid S_n \in (-a, a]) = 0. \quad (9.8)$$

Положим $\tilde{S}_0 = 0$, $\tilde{S}_1 = S_n - S_{n-1}$, $\tilde{S}_2 = S_n - S_{n-2}$, ..., $\tilde{S}_n = S_n - S_0 = S_n$. Заметим, что

$$(S_1, \dots, S_n) \stackrel{d}{=} (\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n).$$

Условие $\{S_n \in (-a, a]\}$ означает, что $\{\tilde{S}_n \in (-a, a]\}$. Положим $\tilde{Y}_n(t) = \tilde{S}_{\lfloor nt \rfloor} / (\sigma\sqrt{n})$. В силу (9.3)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{\tilde{Y}_n}(\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon \mid \tilde{S}_n \in (-a, a]) = 0. \quad (9.9)$$

Но при s, t таких, что $t, s \in [1/2, 1]$, $|t - s| \leq \delta$, и при четных и достаточно больших n

$$\begin{aligned} |Y_n(t) - Y_n(s)| &= \frac{|S_{[nt]} - S_{[ns]}|}{\sigma\sqrt{n}} = \\ &= \frac{|\tilde{S}_{n-[ns]} - \tilde{S}_{n-[nt]}|}{\sigma\sqrt{n}} \leq w_{\tilde{Y}_n}(2\delta; 0, 1/2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P(w_{Y_n}(\delta; 1/2, 1) \geq \varepsilon \mid S_n \in (-a, a]) &\leq \\ &\leq P(w_{\tilde{Y}_n}(2\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon \mid \tilde{S}_n \in (-a, a]). \end{aligned}$$

Откуда, ввиду соотношения (9.9), следует (9.8).

Из соотношений (9.2), (9.3) и (9.8) получаем утверждение леммы.

Из лемм 9.4 и 9.5 в силу теоремы 2.3 приходим к утверждению доказываемой теоремы.

Лекция 10

Предельная теорема для статистики Колмогорова

В качестве приложения принципа инвариантности Лиггетта получим один из фундаментальных результатов математической статистики, установленный А. Н. Колмогоровым.

Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(t)$. Введем для каждого $n \in \mathbb{N}$ эмпирическую функцию распределения

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{\eta_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $I\{\dots\}$ означает индикатор случайного события $\{\dots\}$. $F_n(t)$ – случайная величина, и по усиленному закону больших чисел п.н.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t).$$

По теореме Гливленко–Кантелли п.н.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| = 0.$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы узнать, с какой скоростью случайная величина $\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|$, получившая название *статистики Колмогорова*, стремится к нулю.

ТЕОРЕМА 10.1. *Для произвольного $x \geq 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \leq x\right) = K(x),$$

где $K(x)$ – функция распределения Колмогорова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на следующую лемму, сводящую все к случаю, когда случайные величины $\eta_1, \eta_2, \dots$ имеют равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, и на теорему 10.2, в которой в указанном случае доказывается более общий результат.

ЛЕММА 10.1. *Случайная величина $\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|$ имеет такое же распределение, как $\sup_{t \in [0, 1]} |\tilde{F}_n(t) - t|$, где $\tilde{F}_n(t)$ –*

эмпирическая функция распределения, построенная по $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots$ – независимым одинаково распределенным случайным величинам, имеющим равномерное распределение на интервале $(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты изложения будем считать, что функция распределения $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$, строго возрастает, тогда существует обратная функция $F^{-1}(y)$, $y \in (0, 1)$. Случайные величины $\tilde{\eta}_i = F(\eta_i)$, $i \in \mathbb{N}$, имеют равномерное распределение на интервале $(0, 1)$.

Действительно, при $y \in (0, 1)$

$$P(\tilde{\eta}_i \leq y) = P(F(\eta_i) \leq y) = P(\eta_i \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{\eta_i \leq t\} - F(t) \right| = \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{F(\eta_i) \leq F(t)\} - F(t) \right| = \\ &= \sup_{u \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{\tilde{\eta}_i \leq u\} - u \right|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 10.2. Если $\eta_1, \eta_2, \dots$ – независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\{\sqrt{n} (F_n(t) - t), t \in [0, 1]\} \xrightarrow{D} W_0,$$

где W_0 – броуновский мост, знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$.

В качестве следствия этой теоремы получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \sup_{t \in [0,1]} |F_n(t) - t| \xrightarrow{D} \sup_{t \in [0,1]} |W_0|.$$

Но правая часть, как показано в теореме 7.4, имеет распределение Колмогорова. Откуда, учитывая лемму 10.1, получаем утверждение теоремы 10.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 10.2 разобьем на ряд лемм. Положим

$$Y_n(t) = \sum_{i=1}^n I\{\eta_i \leq t\}.$$

ЛЕММА 10.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$. Тогда случайный вектор

$$\{Y_n(t_1), Y_n(t_2) - Y_n(t_1), \dots, Y_n(t_m) - Y_n(t_{m-1})\}$$

имеет полиномиальное распределение с вектором параметров

$$\{t_1, t_2 - t_1, \dots, t_m - t_{m-1}\},$$

т.е. при целых неотрицательных числах $k_1, \dots, k_m$ таких, что $\sum_{i=1}^m k_i \leq n$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} P(Y_n(t_1) = k_1, Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = k_2, \dots, Y_n(t_m) - Y_n(t_{m-1}) = k_m) = \\ = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m! (n - \sum_{i=1}^m k_i)!} \times \\ \times t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2} \dots (t_m - t_{m-1})^{k_m} (1 - t_m)^{n - \sum_{i=1}^m k_i}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случайную величину η , имеющую равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Положим $t_0 = 0$. Будем говорить, что 1) достигается успех i -го типа, если $t_{i-1} < \eta \leq t_i$, $i = 1, \dots, m$; 2) имеет место неудача, если $t_m < \eta < 1$. Тогда $(Y_n(t_i) - Y_n(t_{i-1}))$ – число успехов i -го типа в n независимых испытаниях, $i = 1, \dots, m$; $(Y_n(1) - Y_n(t_m))$ – число неудач. Отсюда следует утверждение леммы.

Положим

$$\tilde{Y}_n(t) = Y_n\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$. Тогда случайный вектор

$$\{\tilde{Y}_n(t_1), \tilde{Y}_n(t_2) - \tilde{Y}_n(t_1), \dots, \tilde{Y}_n(t_m) - \tilde{Y}_n(t_{m-1})\}$$

имеет полиномиальное распределение с вектором параметров

$$\left\{ \frac{\lfloor nt_1 \rfloor}{n}, \frac{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}{n}, \dots, \frac{\lfloor nt_m \rfloor - \lfloor nt_{m-1} \rfloor}{n} \right\}.$$

Положим

$$Z_n(t) = \sqrt{n} (F_n(t) - t).$$

Наша задача показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$Z_n \xrightarrow{D} W_0. \quad (10.1)$$

Очевидно, что $F_n(t) = Y_n(t)/n$. Откуда следует, что

$$Z_n(t) = \frac{Y_n(t) - nt}{\sqrt{n}}.$$

Положим

$$\tilde{Z}_n(t) = Z_n\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right).$$

Тогда

$$\tilde{Z}_n(t) = \frac{\tilde{Y}_n(t) - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}}.$$

Докажем сначала, что при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{Z}_n \xrightarrow{D} W_0. \quad (10.2)$$

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин X_i , $i \in \mathbb{N}$, имеющих распределение Пуассона с параметром $a > 0$, и положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 10.3. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$. Случайный вектор

$$\{S_{\lfloor nt_1 \rfloor}, S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}, \dots, S_{\lfloor nt_m \rfloor} - S_{\lfloor nt_{m-1} \rfloor} \mid S_n = n\}$$

имеет полиномиальное распределение с вектором параметров

$$\left\{ \frac{\lfloor nt_1 \rfloor}{n}, \frac{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}{n}, \dots, \frac{\lfloor nt_m \rfloor - \lfloor nt_{m-1} \rfloor}{n} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При целых неотрицательных числах $k_1, \dots, k_m$ таких, что $\sum_{i=1}^m k_i \leq n$, находим, что ($t_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{\lfloor nt_i \rfloor} - S_{\lfloor nt_{i-1} \rfloor} = k_i, i = 1, \dots, m \mid S_n = n) &= \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(S_n = n)} \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(S_{\lfloor nt_i \rfloor} - S_{\lfloor nt_{i-1} \rfloor} = k_i) \times \\ &\quad \times \mathbb{P}(S_n - S_{\lfloor nt_m \rfloor} = n - (k_1 + \dots + k_m)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{(an)^n e^{-an}} \prod_{i=1}^m \frac{(a(\lfloor nt_i \rfloor - \lfloor nt_{i-1} \rfloor))^{k_i} e^{-a(\lfloor nt_i \rfloor - \lfloor nt_{i-1} \rfloor)}}{k_i!} \times \\
&\quad \times \frac{(a(n - \lfloor nt_m \rfloor))^{n - \sum_{i=1}^m k_i} e^{-a(n - \lfloor nt_m \rfloor)}}{(n - \sum_{i=1}^m k_i)!} = \\
&= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m! (n - \sum_{i=1}^m k_i)!} \times \\
&\quad \times \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lfloor nt_i \rfloor - \lfloor nt_{i-1} \rfloor}{n} \right)^{k_i} \left(\frac{n - \lfloor nt_m \rfloor}{n} \right)^{n - \sum_{i=1}^m k_i}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим

$$a = 1; \quad \tilde{X}_i = X_i - 1, \quad i \in \mathbb{N}; \quad \tilde{S}_n = \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $E\tilde{X}_1 = 0$, $E(\tilde{X}_1)^2 = 1$ и $\tilde{S}_n = S_n - n$, $n \in \mathbb{N}$. Ввиду следствия 10.1 и леммы 10.3 совпадают конечномерные распределения процессов

$$\{\tilde{Y}_n(t), t \in [0, 1]\} \quad \text{и} \quad \{S_{\lfloor nt \rfloor}, t \in [0, 1] \mid S_n = n\}.$$

Следовательно, совпадают конечномерные распределения процессов

$$\{\tilde{Z}_n(t), t \in [0, 1]\} \quad \text{и} \quad \{\tilde{S}_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n}, t \in [0, 1] \mid \tilde{S}_n = 0\}.$$

По принципу инвариантности Лиггетта при $n \rightarrow \infty$

$$\{\tilde{S}_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n}, t \in [0, 1] \mid \tilde{S}_n = 0\} \xrightarrow{D} W_0,$$

поэтому соотношение (10.2) справедливо и (см. лемму 9.5) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w_{\tilde{Z}_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0. \quad (10.3)$$

Далее, ввиду монотонности по t функции $Y_n(t)$ выполняется неравенство

$$w_{Y_n}(1/n) \leq 2w_{\tilde{Y}_n}(1/n)$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\rho_{\text{равн}}(Z_n, \tilde{Z}_n) &\leq w_{Z_n}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{w_{Y_n}(1/n) + 1}{\sqrt{n}} \leq \\ &\leq \frac{2w_{\tilde{Y}_n}(1/n) + 1}{\sqrt{n}} \leq 2w_{\tilde{Z}_n}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{\sqrt{n}}.\end{aligned}\quad (10.4)$$

Из соотношений (10.3), (10.4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\rho_{\text{равн}}(Z_n, \tilde{Z}_n) \geq \varepsilon) = 0.$$

Но это вместе с соотношением (10.2) означает, как нетрудно понять, справедливость (10.1). Теорема доказана.

Лекция 11

Броуновская извилина и броуновская экскурсия: определение и конечномерные распределения

Пусть $\{W(t)\}$ – стандартное броуновское движение. Положим (см. рис. 4)

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \sup \{t \in [0, 1] : W(t) = 0\}, & \Delta_1 &= 1 - \tau_1, \\ \tau_2 &= \inf \{t > 1 : W(t) = 0\}, & \Delta_2 &= \tau_2 - \tau_1.\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. *Броуновской извилиной* называется случайный процесс

$$W^+(t) = \frac{|W(\tau_1 + t\Delta_1)|}{\sqrt{\Delta_1}}, \quad t \in [0, 1].$$

Броуновской экскурсией называется случайный процесс

$$W_0^+(t) = \frac{|W(\tau_1 + t\Delta_2)|}{\sqrt{\Delta_2}}, \quad t \in [0, 1].$$

Эти процессы играют важную роль в теории ветвящихся процессов. В данной лекции показывается, что броуновская извилина и броуновская экскурсия являются марковскими случайными процессами, и находятся их переходные плотности.

Введем следующие обозначения: N_s – случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами 0 и s , где $s > 0$; $n_s(x)$ – плотность вероятностей случайной величины N_s , т.е.

$$n_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$N_s(a, b)$ – распределение случайной величины N_s на интервалах, т.е.

$$N_s(a, b) = P(a < N_s < b), \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b$$

(при $s = 1$ значок s опускается). Положим также

$$g(t, x, y) = n_t(y - x) - n_t(y + x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Рис. 4.

ТЕОРЕМА 11.1. Броуновская извилина W^+ является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью

$$p^+(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{2y}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) N_{1-t}(0, y), & 0 = s < t \leq 1, \quad x = 0, \quad y > 0; \\ g(t-s, x, y) \frac{N_{1-t}(0, y)}{N_{1-s}(0, x)}, & 0 < s < t \leq 1; \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$. Пусть $f_1(x_1, \dots, x_m)$ — произвольная непрерывная числовая функция m числовых переменных, исчезающая на бесконечности (равная

нулю вне некоторого шара), $f_2(x)$ – произвольная непрерывная числовая функция одного числового переменного, исчезающая на бесконечности. Покажем, что $(t_0 = 0, x_0 = 0)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f_1 (W^+(t_1), \dots, W^+(t_m)) f_2 (\Delta_1)] &= \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f_1 (x_1, \dots, x_m) \times \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{m-1} p^+ (t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) dx_1 \dots dx_m \mathbb{E} f_2 (\Delta_1), \quad (11.1) \end{aligned}$$

где $\mathbb{R}_+^m = \{x_1, \dots, x_m : x_1 > 0, \dots, x_m > 0\}$. Это означает помимо утверждения теоремы, что процесс W^+ не зависит от случайной величины Δ_1 .

Для произвольного n разобьем отрезок $[0, 1]$ на n частей. Тогда существует единственное целое число i такое, что $i/n < \Delta_1 \leq (i+1)/n$.

Случайная величина $f_1 (W^+(t_1), \dots, W^+(t_m))$ близка, ввиду непрерывности траекторий броуновской извилины и непрерывности функции f_1 , к случайной величине

$$\zeta_{n,m} := f_1 \left(\frac{|W(1 - i/n + t_1(i/n))|}{\sqrt{i/n}}, \dots, \frac{|W(1 - i/n + t_m(i/n))|}{\sqrt{i/n}} \right),$$

а случайная величина $f_2 (\Delta_1)$ близка, ввиду непрерывности функции f_2 , к $f_2 (i/n)$. Поэтому

$$\mathbb{E} [f_1 (W^+(t_1), \dots, W^+(t_m)) f_2 (\Delta_1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{+\infty} A_i(n), \quad (11.2)$$

где

$$A_i(n) := \mathbb{E} [\zeta_{n,m} f_2 (i/n); i/n < \Delta_1 \leq (i+1)/n].$$

Учитывая, что вклад в последнее математическое ожидание траекторий процесса W , лежащих при $t \in [\tau_1, 1]$ выше нуля, равен вкладу траекторий, лежащих ниже нуля, получаем, что

$$\begin{aligned} A_i(n) &= \int_0^{+\infty} h(i/n, a) f_2 (i/n) \times \\ &\quad \times \mathbb{P}(\exists t \in [1 - (i+1)/n, 1 - i/n] : W(t) = 0; W(1 - i/n) \in da), \quad (11.3) \end{aligned}$$

где

$$h(i/n, a) = \mathbb{E} \left[\zeta_{n,m} I \left\{ \inf_{1-i/n \leq s \leq 1} W(s) > 0 \right\} \middle| W(1 - (i/n)) = a \right]. \quad (11.4)$$

Положим при $t \geq 0$ $m(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} W(s)$, $M(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} W(s)$ и $m(1) = m$, $M(1) = M$. Вспомним (см. лекцию 7), что при $a \leq 0$, $a \leq u < v$

$$\mathbb{P}(a < m, u < W(1) < v) = \mathbb{P}(u < N < v) - \mathbb{P}(2a - v < N < 2a - u).$$

Откуда легко получить, что при $t > 0$, $a \leq 0$, $a \leq u < v$

$$\mathbb{P}(a < m_t, u < W(t) < v) = \mathbb{P}(u < N_t < v) - \mathbb{P}(2a - v < N_t < 2a - u). \quad (11.5)$$

Пусть $\mathbb{P}^{(t,x)}$ означает, что броуновское движение начинается в момент t в точке x . При $0 \leq t_1 < t_2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$, $\Delta x > 0$ из (11.5) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(t_1, x_1)} \left(W(t_2) \in (x_2, x_2 + \Delta x); \inf_{t_1 \leq s \leq t_2} W(s) > 0 \right) &= \\ &= \mathbb{P}(x_2 - x_1 < W(t_2 - t_1) < x_2 - x_1 + \Delta x, m(t_2 - t_1) > -x_1) = \\ &= \mathbb{P}(x_2 - x_1 < N_{t_2 - t_1} < x_2 - x_1 + \Delta x) - \\ &\quad - \mathbb{P}(-x_1 - x_2 - \Delta x < N_{t_2 - t_1} < -x_1 - x_2) = \\ &= [n_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) - n_{t_2 - t_1}(x_1 + x_2)] \Delta x + o(\Delta x) = \\ &= g(t_2 - t_1, x_1, x_2) \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Применяя марковское свойство и автомодельность броуновского движения (при $c > 0$ $\{W(t), t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{(1/\sqrt{c})W(ct), t \geq 0\}$), находим, что правая часть соотношения (11.4) равна

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[f_1 \left(\frac{W(t_1(i/n))}{\sqrt{i/n}}, \dots, \frac{W(t_m(i/n))}{\sqrt{i/n}} \right) \times \right. \\ &\quad \times I \left\{ \inf_{0 \leq s \leq i/n} W(s) > 0 \right\} \middle| W(0) = a \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[f_1(W(t_1), \dots, W(t_m)) \times \right. \\ &\quad \times I \left\{ \inf_{0 \leq s \leq 1} W(s) > 0 \right\} \middle| W(0) = \frac{a}{\sqrt{i/n}} \right]. \end{aligned}$$

Снова учитывая марковское свойство броуновского движения и соотношение (11.6), получаем, что последнее математическое ожидание равно

$$\begin{aligned}
 & \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f(x_1, \dots, x_n) \mathbf{P}^{(0, \frac{a}{\sqrt{i/n}})} \left(W(t_1) \in dx_1, \inf_{0 \leq s \leq t_1} W(s) > 0 \right) \times \\
 & \quad \times \prod_{i=1}^{m-1} \mathbf{P}^{(t_i, x_i)} \left(W(t_{i+1}) \in dx_{i+1}, \inf_{t_i \leq s \leq t_{i+1}} W(s) > 0 \right) \times \\
 & \quad \times \mathbf{P}^{(t_m, x_m)} \left(\inf_{t_m \leq s \leq 1} W(s) > 0 \right) = \\
 & = \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f(x_1, \dots, x_n) g \left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1 \right) \times \\
 & \quad \times \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) dx_1 \dots dx_m \times \\
 & \quad \times \int_0^{+\infty} g(1 - t_m, x_m, b) db.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 h(i/n, a) &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f(x_1, \dots, x_n) g \left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1 \right) \times \\
 & \quad \times \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) dx_1 \dots dx_m \int_0^{+\infty} g(1 - t_m, x_m, b) db.
 \end{aligned} \tag{11.7}$$

Заметим, что при $t > 0, x > 0$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} g(t, x, y) dy &= \int_0^{+\infty} n_t(y - x) dy - \int_0^{+\infty} n_t(y + x) dy = \\
 &= \int_{-x}^{+\infty} n_t(u) du - \int_x^{+\infty} n_t(u) du = \\
 &= N_t(-x, x) = 2N_t(0, x).
 \end{aligned} \tag{11.8}$$

Следовательно,

$$g \left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1 \right) \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) \int_0^{+\infty} g(1 - t_m, x_m, b) db =$$

$$\begin{aligned}
&= g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right) \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) 2N_{1-t_m}(0, x_m) = \\
&= 2g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right) N_{1-t_1}(0, x_1) \times \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) \frac{N_{1-t_{i+1}}(0, x_{i+1})}{N_{1-t_i}(0, x_i)} = \\
&= 2g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right) N_{1-t_1}(0, x_1) \prod_{i=1}^{m-1} p^+(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}).
\end{aligned}$$

Исходя из этого, перепишем (11.7) ($t_0 = 0, x_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
h(i/n, a) &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f(x_1, \dots, x_m) \prod_{i=0}^{m-1} p^+(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) \times \\
&\quad \times H(i/n, a, x_1) dx_1 \dots dx_m,
\end{aligned} \tag{11.9}$$

где

$$H(i/n, a, x_1) = 2g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right) / \left(\frac{2x_1}{t_1^{3/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2t_1}\right)\right). \tag{11.10}$$

Теперь перепишем соотношение (11.3):

$$\begin{aligned}
A_i(n) &= \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\exists t \in [1 - (i+1)/n, 1 - i/n] : \\
&\quad W(t) = 0; W(1 - i/n) \in da) \times \\
&\quad \times f_2(i/n) \int_0^{+\infty} g\left(\frac{i}{n}, a, b\right) db \times \\
&\quad \times \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f(x_1, \dots, x_m) \prod_{i=0}^{m-1} p^+(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) \times \\
&\quad \times \tilde{H}(i/n, a, x_1) dx_1 \dots dx_m,
\end{aligned} \tag{11.11}$$

где

$$\tilde{H}(i/n, a, x_1) = H(i/n, a, x_1) \left(\int_0^{+\infty} g(i/n, a, b) db \right)^{-1}.$$

Ввиду (11.8) и (11.10)

$$\tilde{H}\left(\frac{i}{n}, a, x_1\right) = \frac{g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right)}{\left(\frac{2x_1}{t_1^{3/2}}\right) \exp\left(-\frac{x_1^2}{2t_1}\right) N_{\frac{i}{n}}(0, a)}.$$

Заметим, что при $x \rightarrow 0$ и фиксированных $t > 0$, $y \neq 0$

$$\begin{aligned} g(t, x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \left(e^{\frac{xy}{t} - \frac{x^2}{2t}} - e^{-\frac{xy}{t} - \frac{x^2}{2t}} \right) \sim \frac{2xy}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{y^2}{2t}}; \end{aligned} \quad (11.12)$$

при $x \downarrow 0$ и фиксированном $t > 0$

$$N_t(0, x) \sim \frac{x}{\sqrt{2\pi t}}, \quad (11.13)$$

поэтому

$$\lim_{a \downarrow 0} \tilde{H}(i/n, a, x_1) = 1, \quad (11.14)$$

причем это соотношение выполняется равномерно по i/n и x_1 таким, что $i/n > \varepsilon$ и $x_1 \leq K$, где ε, K – положительные постоянные.

При больших n с вероятностью, близкой к единице, величину a в (11.11) можно считать малой, поэтому, ввиду (11.14), $A_i(n)$ мало отличается от

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\exists t \in [1 - (i+1)/n, 1 - i/n] : W(t) = 0; W(1 - i/n) \in da) \times \\ &\quad \times f_2(i/n) \int_0^{+\infty} g(i/n, a, b) db \times \\ &\quad \times \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f(x_1, \dots, x_m) \prod_{i=0}^{m-1} p^+(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) dx_1 \dots dx_m, \end{aligned}$$

и в силу (11.2) получаем, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(f_1(W^+(t_1), \dots, W^+(t_m)) f_2(\Delta_1)) = \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f(x_1, \dots, x_m) \prod_{i=0}^{m-1} p^+(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) dx_1 \dots dx_m \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\exists t \in [1 - (i+1)/n, 1 - i/n] : \\
& \quad W(t) = 0; W(1 - i/n) \in da) \times \\
& \times f_2\left(\frac{i}{n}\right) \mathbf{P}\left(\inf_{1-i/n \leq s \leq 1} W(s) > 0 \mid W(1 - i/n) = a\right).
\end{aligned}$$

Но последний предел равен $\mathbf{E}f_2(\Delta)$. Соотношение (11.1) и теорема доказаны.

Следующий результат доказывается аналогично теореме 11.1 (см. [4, § 2.9]).

ТЕОРЕМА 11.2. *Броуновская экскурсия W_0^+ является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью*

$$\begin{aligned}
p_0^+(s, x; t, y) = \\
= \begin{cases} \frac{2y^2 \exp\left(\frac{-y^2}{2t(1-t)}\right)}{\sqrt{2\pi t^3(1-t)^3}}, & 0 = s < t < 1, \quad x = 0, \quad y > 0; \\ g(t-s, x, y) \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^{3/2} \frac{y \exp(-y^2/(2(1-t)))}{x \exp(-x^2/(2(1-s)))}, & 0 < s < t < 1, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Заметим также, что процесс W_0^+ и случайная величина Δ_2 независимы.

Лекция 12

Броуновская извилина и броуновская экскурсия как условное броуновское движение

В лекции 7 установлено, что броуновский мост W_0 может быть представлен как условное броуновское движение с условием на положение в момент времени $t = 1$. Оказывается, что броуновская извилина W^+ и броуновская экскурсия W_0^+ также могут быть представлены как условное броуновское движение, но с условием на всю траекторию.

Положим при $\varepsilon > 0$

$$W^\varepsilon = \{W \mid m > -\varepsilon\}.$$

ТЕОРЕМА 12.1. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$W^\varepsilon \xrightarrow{D} W^+,$$

где знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $C[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим (в соотношении (11.5) вместо a возьмем $(-a)$ и положим $u = -a$, $v = +\infty$), что при $t > 0$, $a > 0$

$$\mathbf{P}(m(t) > -a) = \mathbf{P}(N_t > -a) - \mathbf{P}(N_t < -a) = 2N_t(0, a), \quad (12.1)$$

поэтому (см. соотношение (11.13)) при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\mathbf{P}(m(t) > -\varepsilon) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \varepsilon. \quad (12.2)$$

Докажем сходимость конечномерных распределений. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$. Пользуясь марковским свойством броуновского движения, запишем для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_m$ представление ($t_0 = 0$, $x_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m; m > -\varepsilon) = \\ = \int \dots \int_{G_\varepsilon(a_1, \dots, a_m)} \prod_{i=0}^{m-1} \mathbf{P}^{(0, x_i)}(W(t_{i+1} - t_i) \in dx_{i+1}, \\ m(t_{i+1} - t_i) > -\varepsilon) \mathbf{P}^{(0, x_m)}(m(1 - t_m) > -\varepsilon), \end{aligned} \quad (12.3)$$

где $G_\varepsilon(a_1, \dots, a_m) = \{x_1, \dots, x_m: -\varepsilon < x_1 \leq a_1, \dots, -\varepsilon < x_m \leq a_m\}$. Ввиду формулы (11.6) при $t > 0$, $x_1 \geq -\varepsilon$, $x_2 > -\varepsilon$, $\Delta x > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{(0, x_1)}(W(t) \in (x_2, x_2 + \Delta x), m(t) > -\varepsilon) = \\ & = \mathbf{P}^{(0, x_1 + \varepsilon)}(W(t) \in (x_2 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon + \Delta x), m(t) > 0) = \\ & = g(t, x_1 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу соотношения (12.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(0, x_m)}(m(1 - t_m) > -\varepsilon) &= \mathbf{P}(m(1 - t_m) > -x_m - \varepsilon) = \\ &= 2N_{1-t_m}(0, x_m + \varepsilon). \end{aligned}$$

Поэтому, переписывая (12.3), получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(W(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m; m > -\varepsilon) = \\ & = \int \dots \int_{G_\varepsilon(a_1, \dots, a_m)} \prod_{i=0}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i + \varepsilon, x_{i+1} + \varepsilon) \times \\ & \quad \times 2N_{1-t_m}(0, x_m + \varepsilon) dx_1 \dots dx_m. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $g(t, x, y)$ непрерывна в своей области определения, причем $g(t, x, y) = 0$ при $x = 0$ или $y = 0$, и (см. соотношение (11.12)) при $t > 0$, $y \neq 0$

$$g(t, \varepsilon, y + \varepsilon) \sim \frac{2\varepsilon y}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2t}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(W(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m; m > -\varepsilon) \sim \\ & \sim \varepsilon \int \dots \int_{G_0(a_1, \dots, a_m)} \frac{4x_1}{\sqrt{2\pi}t_1^{3/2}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} \times \\ & \quad \times \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) N_{1-t_m}(0, x_m) dx_1 \dots dx_m, \end{aligned} \tag{12.4}$$

где $G_0(a_1, \dots, a_m) = \{x_1, \dots, x_m: 0 < x_1 \leq a_1, \dots, 0 < x_m \leq a_m\}$. Из (12.2) и (12.4) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(W(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m | m > -\varepsilon) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \cdots \int_{G_0(a_1, \dots, a_m)} \frac{2x_1}{t_1^{3/2}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} \times \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) N_{1-t_m}(0, x_m) dx_1 \dots dx_m = \\
&= \int \cdots \int_{G_0(a_1, \dots, a_m)} \prod_{i=0}^{m-1} p^+(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) dx_1 \dots dx_m.
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Сходимость конечномерных распределений доказана.

Покажем, что выполнено условие на модуль непрерывности: при любом $\gamma > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(w_{W^\varepsilon}(\delta) \geq \gamma) = 0 \tag{12.6}$$

(здесь используется тот же символ для обозначения вероятности, что и в (12.4), хотя вероятностное пространство изменилось). Очевидно, при любом $a \in (0, 1)$

$$w_{W^\varepsilon}(\delta; 0, 1) \leq w_{W^\varepsilon}(\delta; 0, a) + w_{W^\varepsilon}(\delta; a, 1). \tag{12.7}$$

Покажем, что при фиксированном $a \in (0, 1)$ для любого $\gamma > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(w_{W^\varepsilon}(\delta; a, 1) \geq \gamma) = 0. \tag{12.8}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(w_{W^\varepsilon}(\delta; a, 1) \geq \gamma) &= \mathbf{P}(w_W(\delta; a, 1) \geq \gamma \mid m > -\varepsilon) = \\
&= \frac{1}{\mathbf{P}(m > -\varepsilon)} \mathbf{P}(w_W(\delta; a, 1) \geq \gamma, m > -\varepsilon) \leq \\
&\geq \frac{1}{\mathbf{P}(m > -\varepsilon)} \mathbf{P}(w_W(\delta; a, 1) \geq \gamma, m(a) > -\varepsilon).
\end{aligned} \tag{12.9}$$

В силу марковского свойства броуновского движения

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(w_W(\delta; a, 1) \geq \gamma, m(a) > -\varepsilon) &= \\
&= \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \mathbf{P}(m(a) > -\varepsilon, W(a) \in dx) \mathbf{P}^{(0, x)}(w_W(\delta; 0, 1 - a) \geq \gamma) = \\
&= \mathbf{P}(w_W(\delta; 0, 1 - a) \geq \gamma) \mathbf{P}(m(a) > -\varepsilon)
\end{aligned} \tag{12.10}$$

(здесь использовано то, что вероятность $P^{(0,x)}(w_W(\delta; 0, 1-a) \geq \gamma)$ не зависит от x). Из (12.9) и (12.10) получаем, что

$$P(w_{W^\varepsilon}(\delta; a, 1) \geq \gamma) \leq \frac{P(m(a) > -\varepsilon)}{P(m > -\varepsilon)} P(w_W(\delta; 0, 1-a) \geq \gamma). \quad (12.11)$$

Ввиду (12.2)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(m(a) > -\varepsilon)}{P(m > -\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{a}}. \quad (12.12)$$

В силу непрерывности траекторий броуновского движения

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} P(w_W(\delta; 0, 1-a) \geq \gamma) = 0. \quad (12.13)$$

Из соотношений (12.11)-(12.13) следует (12.8).

Теперь покажем, что для любого $\gamma > 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} P(w_{W^\varepsilon}(\delta; 0, a) \geq \gamma) = 0 \quad (12.14)$$

или, что то же самое,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P(w_{W^\varepsilon}(\delta; 0, a) < \gamma) = 1. \quad (12.15)$$

Очевидно, что

$$w_{W^\varepsilon}(\delta; 0, a) \leq \sup_{t \in [0, a]} W^\varepsilon(t) + \varepsilon.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} P\left(\sup_{t \in [0, a]} W^\varepsilon(t) < \gamma\right) = 1. \quad (12.16)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} P(m > -\varepsilon) P\left(\sup_{t \in [0, a]} W^\varepsilon(t) < \gamma\right) &= P\left(\sup_{t \in [0, a]} W(t) < \gamma, m > -\varepsilon\right) = \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\gamma} P(-\varepsilon < m(a) \leq M(a) < \gamma, W(a) \in dx) \times \\ &\quad \times P^{(0,x)}(m(1-a) > -\varepsilon). \end{aligned} \quad (12.17)$$

Вспомним (см. соотношение (7.2)), что при $a \leq 0 \leq b$, $a \leq u < v \leq b$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} P(a < m \leq M < b, u < W(1) < v) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(u + 2k(b-a) < N < v + 2k(b-a)) - \\ - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(2b - v + 2k(b-a) < N < 2b - u + 2k(b-a)). \end{aligned}$$

Поэтому для любого $t > 0$ при $a \leq 0 \leq b$, $a \leq u < v \leq b$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} P(a < m(t) \leq M(t) < b, u < W(t) < v) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(u + 2k(b-a) < N_t < v + 2k(b-a)) - \\ - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(2b - v + 2k(b-a) < N_t < 2b - u + 2k(b-a)). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Откуда получаем, что при $-\varepsilon \leq x < x + \Delta x \leq \gamma$

$$\begin{aligned} P(-\varepsilon < m(a) \leq M(a) < \gamma, x < W(a) < x + \Delta x) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [P(x + 2k(\gamma + \varepsilon) < N_a < x + \Delta x + 2k(\gamma + \varepsilon)) - \\ - P(2\gamma - x - \Delta x + 2k(\gamma + \varepsilon) < N_a < 2\gamma - x + 2k(\gamma + \varepsilon))] = \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [n_a(x + 2k(\gamma + \varepsilon)) - \\ - n_a(2\gamma - x + 2k(\gamma + \varepsilon))] \Delta x + o(\Delta x) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [n_a(x + 2k(\gamma + \varepsilon)) - \\ - n_a(x + 2\varepsilon + 2k(\gamma + \varepsilon))] \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Из (12.17) и (12.19) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, a]} W^\varepsilon(t) < \gamma\right) &= \frac{1}{\mathbf{P}(m > -\varepsilon)} \int_{-\varepsilon}^{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [n_a(x + 2k(\gamma + \varepsilon)) - \\ &\quad - n_a(x + 2\varepsilon + 2k(\gamma + \varepsilon))] \mathbf{P}(m(1-a) > -x - \varepsilon) dx, \end{aligned}$$

откуда, учитывая (12.1) и (12.2) и применяя теорему о мажорируемой сходимости, получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, a]} W^\varepsilon(t) < \gamma\right) &= \\ &= 2 \int_0^{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{x + 2k\gamma}{a^{3/2}} e^{-\frac{(x+2k\gamma)^2}{2a}} N_{1-a}(0, x) dx. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Теперь перейдем к пределу при $a \rightarrow 0$. Найдем сначала предел члена, соответствующего $k = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} 2 \int_0^{\gamma} \frac{x}{a^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{2a}} N_{1-a}(0, x) dx &= \\ &= -2 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\gamma} N_{1-a}(0, x) d e^{-\frac{x^2}{2a}} = \\ &= -2 \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} N_{1-a}(0, x) e^{-\frac{x^2}{2a}} \Big|_0^{\gamma} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi a(1-a)}} \int_0^{\gamma} e^{-\frac{x^2}{2a}} e^{-\frac{x^2}{2(1-a)}} dx \right) = \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(1-a)}} e^{-\frac{x^2}{2a(1-a)}} dx = \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\gamma}{\sqrt{a(1-a)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1. \end{aligned}$$

Пределы при $a \rightarrow 0$ остальных членов в правой части соотношения (12.20) равны 0. Таким образом, соотношение (12.16) и, следовательно, (12.15), (12.14) доказаны. Из соотношений (12.7), (12.8) и (12.14) следует (12.6).

Утверждение теоремы следует из соотношений (12.5), (12.6) ввиду теоремы 1.5.

Аналогично доказываются следующие две теоремы (см. [17]). Положим при $\varepsilon > 0$

$$W_\varepsilon^+ = \{W^+ \mid W^+(1) \leq \varepsilon\}.$$

ТЕОРЕМА 12.2. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$W_\varepsilon^+ \xrightarrow{D} W_0^+.$$

Смысл этой теоремы состоит в том, что последовательное применение двух ограничений к броуновскому движению: 1) находится практически выше нуля при $t \in (0, 1]$, 2) при $t = 1$ быть недалеко от нуля, – приводит к броуновской экскурсии. Интересно отметить, что если поменять порядок применения этих двух ограничений, то снова получится броуновская экскурсия, т.е. справедлив следующий результат. Положим при $\varepsilon > 0$

$$W_0^\varepsilon = \{W_0 \mid m_0 > -\varepsilon\},$$

где W_0 – броуновский мост, $m_0 = \inf_{0 \leq t \leq 1} W_0(t)$.

ТЕОРЕМА 12.3. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$W_0^\varepsilon \xrightarrow{D} W_0^+.$$

Что будет, если оба указанных ограничения одновременно применить к броуновскому движению? В качестве задачи предлагается следующее утверждение: при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\{W \mid m > -\varepsilon, W(1) \leq \varepsilon\} \xrightarrow{D} W_0^+.$$

Лекция 13

Принцип инвариантности Иглхарта

Рассмотрим еще один условный принцип инвариантности, носящий имя американского математика Иглхарта, много сделавшего в данной области теории вероятностей. Будем рассматривать случайное блуждание $S_0, S_1, \dots$ при условии, что $S_1 > 0$, $S_2 > 0, \dots, S_n > 0$. Введем *момент первого достижения отрицательной полуоси* $(-\infty, 0]$:

$$T = \inf \{n > 0: S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n \leq 0\}.$$

Описанное выше условие равносильно тому, что $T > n$. Положим

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 13.1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid T > n\} \xrightarrow{D} W^+,$$

где W^+ – броуновская извилина, знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$.

Существует несколько доказательств этой теоремы. В первом, данном Иглхартом (см. [20]), предполагается, что $E|X_1|^3 < +\infty$. В доказательстве, данном Болтхаузенем (см. [15]), используется идея об одинаковом распределении случайных векторов

$$\{S_1, \dots, S_n \mid T > n\} \text{ и } \{S_{T_n+1} - S_{T_n}, S_{T_n+2} - S_{T_n}, \dots, S_{T_n+n} - S_{T_n}\},$$

где

$$T(n) = \inf \{k \geq 0: S_{k+i} > S_k \text{ для всех } i = 1, \dots, n\}.$$

Но в нем возникают сложности, связанные с идентификацией предельного процесса и W^+ . Здесь предлагается новое доказательство, в котором центральную роль играет следующий результат (для простоты записи значок целой части для δn опускается).

ЛЕММА 13.1. Пусть $\{S_i\}$ – произвольное случайное блуждание, выходящее из точки 0. Рассмотрим его минимальное значение при $i \in [0, \delta n]$, где $\delta \in (0, 1)$, и пусть $T(\delta, n)$ – момент последнего достижения этого минимального значения на $[0, \delta n]$. Положим $S_i^* = S_{T(\delta, n)+i} - S_{T(\delta, n)}$, $i \in \mathbb{N}_0$. Тогда случайные последовательности

$$\{S_0^*, S_1^*, \dots \mid S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n\}$$

и

$$\{S_0, S_1, \dots \mid T > n\}$$

имеют одинаковое распределение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для простоты изложения один момент времени $i_0 \in \mathbb{N}$. Имеем для произвольного $a_0 \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} P(S_{i_0}^* \leq a_0; S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\delta n} \int_{-\infty}^0 P(T(\delta, n) = k, S_k \in dx, S_{k+i_0} - S_k \leq a_0; \\ &\quad S_{k+i} > S_k, i = n\delta - k + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Вероятность под знаком интеграла равна

$$\begin{aligned} P(S_k \leq S_i, i = 1, \dots, k-1; S_k \in dx; S_i > S_k, i = k+1, \dots, n\delta; \\ S_{k+i_0} - S_k \leq a_0; S_i > S_k, i = n\delta + 1, \dots, n+k) = \\ = P(S_k \leq S_i, i = 1, \dots, k-1; S_k \in dx) \times \\ P(S_i > S_k, i = k+1, \dots, n+k; S_{k+i_0} - S_k \leq a_0). \end{aligned}$$

Последняя вероятность не зависит от k и равна $P(S_{i_0} \leq a_0, T > n)$. Итак,

$$\begin{aligned} P(S_{i_0}^* \leq a_0; S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n) &= \\ = P(S_{i_0} \leq a_0, T > n) \sum_{k=0}^{\delta n} \int_{-\infty}^0 P(S_k \leq S_i, i = 1, \dots, k-1; S_k \in dx). \end{aligned}$$

Если убрать в этом соотношении событие $\{S_{i_0}^* \leq a_0\}$, то получим, что

$$P(S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n) =$$

$$= P(T > n) \sum_{k=0}^{\delta n} \int_{-\infty}^0 P(S_k \leq S_i, i = 1, \dots, k-1; S_k \in dx).$$

Разделив одно равенство на другое, находим, что

$$\begin{aligned} P(S_{i_0}^* \leq a_0 | S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n) = \\ = P(S_{i_0} \leq a_0 | T > n). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 13.1. Сначала докажем сходимость конечномерных распределений. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$. Выберем произвольное число $\delta \in (0, t_1)$. В силу леммы 13.1 для произвольных положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_m$

$$\begin{aligned} P(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m | T > n) = \\ = P\left(\frac{S_{\lfloor nt_i \rfloor}^*}{\sigma\sqrt{n}} \leq a_i, i = 1, \dots, m \mid S_i^* > 0, \right. \\ \left. i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n\right) = \\ = \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G P\left(\min_{i \leq \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma\sqrt{n}} \in dy, T(\delta, n) = k\right) \times \\ \times P\left(\frac{S_{\lfloor nt_i \rfloor - \delta n + k}^{**}}{\sigma\sqrt{n}} \leq a_i + x - y, \right. \\ \left. i = 1, \dots, m \mid \min_{i \leq n - \delta n + k} \frac{S_i^{**}}{\sigma\sqrt{n}} > x - y\right), \quad (13.1) \end{aligned}$$

где $G = \{(x, y) : x \in (-\infty, 0], y \in \mathbb{R}\}$; $S_i^{**} = S_{\delta n - k + i}^* - S_{\delta n - k}^* = S_{\delta n + i} - S_{\delta n}$, $i \in \mathbb{N}_0$ (см. рис. 5). Очевидно, что последняя вероятность не изменится, если убрать звездочки.

Разобьем выражение в правой части (13.1) на два: в первом выражении подынтегральная функция умножается на $I\{(1/\sqrt{\delta})(y - x) \notin [a, 1/a]\}$ (индикаторная функция двух переменных x и y), а во втором — умножается на $I\{(1/\sqrt{\delta})(y - x) \in [a, 1/a]\}$, где a — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Очевидно, первое

Рис. 5.

выражение не превосходит

$$\begin{aligned} & \iint_G \mathbf{P} \left(\min_{i \leq \delta n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma \sqrt{n}} \in dy \right) I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}} (y - x) \notin \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} = \\ & = \mathbf{P} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\frac{S_{\delta n}}{\sigma \sqrt{n}} - \min_{i \leq \delta n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \right) \notin \left[a, \frac{1}{a} \right] \right). \end{aligned}$$

Но последняя вероятность по принципу инвариантности Прохорова–Донскера стремится при $n \rightarrow \infty$ к вероятности

$$\mathbf{P} \left(W(1) - \inf_{s \leq 1} W(s) \notin \left[a, \frac{1}{a} \right] \right),$$

предел которой при $a \rightarrow 0$ равен нулю. Таким образом, для справедливости доказываемого утверждения достаточно показать, что

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G \mathbf{P}(B_k) \mathbf{P} \left(A_k \mid \min_{i \leq n - \delta n + k} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y \right) \times \\ & \times I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}} (y - x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} = \mathbf{P} (W^+(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (13.2)$$

где

$$A_k = \{S_{[nt_i] - \delta n + k} / (\sigma \sqrt{n}) \leq a_i + x - y, i = 1, \dots, m\},$$

$$B_k = \left\{ \min_{i \leq \delta n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma \sqrt{n}} \in dy, T(\delta, n) = k \right\}$$

Сумму в левой части (13.2) можно разбить на два выражения: в первом из них под знаком второй вероятности событие A_k пересекается с событием $\{w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon\}$, а во втором – пересекается с событием $\{w_{Y_n}(\delta) < \varepsilon\}$, где $w_x(\delta)$ – модуль непрерывности функции $x \in D[0, 1]$, ε – положительное число. Тогда первое выражение не превосходит

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G \mathbf{P}(B_k) \mathbf{P} \left(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon \mid \min_{i \leq n - \delta n + k} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y \right) \times \\ & \quad \times I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} \leq \\ & \leq \iint_G \mathbf{P} \left(\min_{i \leq \delta n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma \sqrt{n}} \in dy \right) \times \\ & \quad \times \frac{\mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon, \min_{i \leq n - \delta n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y)}{\mathbf{P}(\min_{i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y)} \times \\ & \quad \times I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\}. \end{aligned}$$

По принципу инвариантности Прохорова–Донскера правая часть стремится при $n \rightarrow \infty$ к

$$\begin{aligned} & \iint_G \mathbf{P} \left(\inf_{s \leq \delta} W(s) \in dx, W(\delta) \in dy \right) \times \\ & \quad \times \frac{\mathbf{P}(w_W(\delta) \geq \varepsilon, \inf_{s \leq 1 - \delta} W(s) > x - y)}{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1} W(s) > x - y)} \times \\ & \quad \times I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} = \\ & = \iint_G \mathbf{P} \left(\inf_{s \leq 1} W(s) \in \frac{dx}{\sqrt{\delta}}, W(1) \in \frac{dy}{\sqrt{\delta}} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\mathbf{P}(w_W(\delta) \geq \varepsilon, \inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > x-y)}{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1} W(s) > x-y)} \times \\ & \times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x) \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\} \end{aligned}$$

(равенство объясняется автомодельностью броуновского движения). Последнее выражение после замены $x/\sqrt{\delta}$ на x и $y/\sqrt{\delta}$ на y запишем в виде

$$\begin{aligned} & \iint_G \mathbf{P}\left(\inf_{s \leq 1} W(s) \in dx, W(1) \in dy\right) \times \\ & \times \mathbf{P}\left(w_W(\delta) \geq \varepsilon \mid \inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\right) \times \\ & \times I\left\{y-x \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\} \frac{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta})}{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta})}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Теперь заметим, что при $\delta \leq \delta_0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(w_W(\delta) \geq \varepsilon \mid \inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\right) \leq \\ & \leq \mathbf{P}\left(w_W(\delta_0) \geq \varepsilon \mid \inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \\ & \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathbf{P}(\omega_{W^+}(\delta_0) \geq \varepsilon) \xrightarrow{\delta_0 \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Здесь использованы теорема 12.1 и непрерывность траекторий броуновской извилины. Далее (см. соотношения (12.1) и (12.2)), при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по $y-x$ таким, что $a \leq y-x \leq \frac{1}{a}$,

$$\frac{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta})}{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta})} \rightarrow 1. \quad (13.5)$$

Из соотношений (13.4) и (13.5) следует, что предел правой части (13.3) при $\delta \rightarrow 0$ равен нулю. Таким образом, для справедливости (13.2) достаточно показать, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G \mathbf{P}(B_k) \times \\ & \times \mathbf{P}\left(A_k, w_{Y_n}(\delta) < \varepsilon \mid \min_{i \leq n-\delta n+k} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\right) \times \end{aligned}$$

$$\times I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} = P(W^+(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m). \quad (13.6)$$

Заметим, между прочим, что нами практически доказано условие на модуль непрерывности:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon \mid T > n) = \\ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w_{Y_n^*}(\delta) \geq \varepsilon \mid \\ S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n) = 0, \end{aligned} \quad (13.7)$$

где $Y^*(t) = S_{[nt]}^* / (\sigma\sqrt{n})$. Действительно,

$$w_{Y_n^*}(\delta) \leq \frac{\max_{i \leq \delta n - T(\delta, n)} S_i^*}{\sigma\sqrt{n}} + w_{Y_n}(\delta; \delta, 1 + \delta)$$

(определение $w_x(\delta; a, b)$ дано в лекции 9). Поэтому

$$\begin{aligned} P(w_{Y_n^*}(\delta) \geq \varepsilon \mid S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n) \leq \\ \leq P_1(\delta, n) + P_2(\delta, n), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_1(\delta, n) = P \left(\frac{\max_{i \leq \delta n - T(\delta, n)} S_i^*}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{\varepsilon}{2} \mid \right. \\ \left. S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n \right), \\ P_2(\delta, n) = P \left(w_{Y_n}(\delta; \delta, 1 + \delta) \geq \frac{\varepsilon}{2} \mid \right. \\ \left. S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \dots, n \right). \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что

$$\begin{aligned} P_1(\delta, n) = \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G P \left(B_k, \max_{i \leq \delta n - k} \left(\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} - x \right) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G P \left(B_k, \max_{i \leq \delta n} \left(\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} - x \right) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(\max_{i \leq \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} - \min_{i \leq \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{s \leq \delta} W(s) - \inf_{s \leq \delta} W(s) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Далее,

$$P_2(\delta, n) = \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G P(B_k) P\left(w_{Y_n}(\delta) \geq \frac{\varepsilon}{2} \mid \min_{i \leq n - \delta n + k} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y\right).$$

Выражение в правой части уже исследовалось (правда, предварительно его следует разбить на два выражения так, как это сделано с правой частью (13.1)). Используя приведенные ранее выкладки, получаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_2(\delta, n) = 0.$$

Итак, соотношение (13.7) доказано.

Возвратимся к соотношению (13.6) и запишем оценку сверху для суммы в его левой части:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G P(B_k) \frac{P(\min_{i \leq n - \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y)}{P(\min_{i \leq n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y)} \times \\
&\quad \times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\} \times \\
&\quad \times P\left(\frac{S_{\lfloor nt_i \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \leq a_i + x - y + \varepsilon, \right. \\
&\quad \left. i = 1, \dots, m \mid \min_{i \leq n - \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y\right) = \\
&= \iint_G P\left(\min_{i \leq \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma\sqrt{n}} \in dy\right) \times \\
&\quad \times \frac{P(\min_{i \leq n - \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y)}{P(\min_{i \leq n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y)} I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\} \times \\
&\quad \times P\left(\frac{S_{\lfloor nt_i \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \leq a_i + x - y + \varepsilon, \right. \\
&\quad \left. i = 1, \dots, m \mid \min_{i \leq n - \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y\right).
\end{aligned}$$

Предел правой части при $n \rightarrow \infty$ равен

$$\begin{aligned} & \iint_G \mathbf{P} \left(\inf_{s \leq \delta} W(s) \in dx, W(\delta) \in dy \right) \times \\ & \quad \times \frac{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > x-y)}{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1} W(s) > x-y)} I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} \times \\ & \quad \times \mathbf{P} \left(W(t_i) \leq a_i + x - y + \varepsilon, \right. \\ & \quad \left. i = 1, \dots, m \mid \inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > x-y \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение не превосходит

$$\begin{aligned} & \iint_G \mathbf{P} \left(\inf_{s \leq 1} W(s) \in dx, W(1) \in dy \right) \frac{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > \sqrt{\delta}(x-y))}{\mathbf{P}(\inf_{s \leq 1} W(s) > \sqrt{\delta}(x-y))} \times \\ & \quad \times \mathbf{P} \left(W(t_i) \leq a_i + \sqrt{\delta}(x-y) + \varepsilon, \right. \\ & \quad \left. i = 1, \dots, m \mid \inf_{s \leq 1-\delta} W(s) > \sqrt{\delta}(x-y) \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \\ & \quad \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \iint_G \mathbf{P} \left(\inf_{s \leq 1} W(s) \in dx, W(1) \in dy \right) \times \\ & \quad \times \mathbf{P} \left(W^+(t_i) \leq a_i + \varepsilon, i = 1, \dots, m \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \\ & \quad \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(W^+(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m \right). \end{aligned}$$

Здесь снова (при $\delta \rightarrow 0$) использованы теорема 11.1 и соотношение (13.5). Итак,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G \mathbf{P}(B_k) \times \\ & \quad \times \mathbf{P} \left(A, w_{Y_n}(\delta) < \varepsilon \mid \min_{i \leq n-\delta n+k} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x-y \right) \times \\ & \quad \times I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} \leq \\ & \quad \leq \mathbf{P} \left(W^+(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m \right). \end{aligned} \tag{13.8}$$

Запишем оценку снизу для суммы в левой части (13.6):

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G P(B_k) \frac{P(\min_{i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y)}{P(\min_{i \leq n - n\delta} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y)} \times \\
& \quad \times I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} \times \\
& \quad \times P \left(\frac{S_{\lfloor nt_i \rfloor}}{\sigma \sqrt{n}} \leq a_i + x - y - \varepsilon, \ i = 1, \dots, m; \right. \\
& \quad \left. w_{Y_n}(\delta) < \varepsilon \mid \min_{i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y \right) = \\
& = \iint_G P \left(\min_{i \leq \delta n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma \sqrt{n}} \in dy \right) \times \\
& \quad \times \frac{P(\min_{i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y)}{P(\min_{i \leq n - n\delta} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y)} I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} \times \\
& \quad \times P \left(\frac{S_{\lfloor nt_i \rfloor}}{\sigma \sqrt{n}} \leq a_i + x - y - \varepsilon, \ i = 1, \dots, m; \right. \\
& \quad \left. w_{Y_n}(\delta) < \varepsilon \mid \min_{i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y \right).
\end{aligned}$$

Предел правой части при $n \rightarrow \infty$ равен

$$\begin{aligned}
& \iint_G P \left(\inf_{s \leq \delta} W(s) \in dx, W(\delta) \in dy \right) \times \\
& \quad \times \frac{P(\inf_{s \leq 1} W(s) > x - y)}{P(\inf_{s \leq 1 - \delta} W(s) > x - y)} I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} \times \\
& \quad \times P \left(W(t_i) \leq a_i + x - y - \varepsilon, \ i = 1, \dots, m; \right. \\
& \quad \left. w_W(\delta) < \varepsilon \mid \inf_{s \leq 1} W(s) > x - y \right).
\end{aligned}$$

Последнее выражение не меньше, чем

$$\begin{aligned}
& \iint_G P \left(\inf_{s \leq 1} W(s) \in dx, W(1) \in dy \right) \times \\
& \quad \times \frac{P(\inf_{s \leq 1} W(s) > \sqrt{\delta}(x - y))}{P(\inf_{s \leq 1 - \delta} W(s) > \sqrt{\delta}(x - y))} I \left\{ y - x \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{P} \left(W(t_i) \leq a_i + \sqrt{\delta}(x - y) - \varepsilon, \right. \\
& \quad \left. i = 1, \dots, m \mid \inf_{s \leq 1} W(s) > \sqrt{\delta}(x - y) \right) - \\
& - \mathbf{P} \left(w_W(\delta) \geq \varepsilon \mid \inf_{s \leq 1} W(s) > \sqrt{\delta}(x - y) \right).
\end{aligned}$$

Нижний предел последнего выражения при $\delta \rightarrow 0$ не меньше (см. (13.4) и (13.5)), чем

$$\begin{aligned}
& \iint_G \mathbf{P} \left(\inf_{s \leq 1} W(s) \in dx, W(1) \in dy \right) I \left\{ y - x \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} \times \\
& \times \mathbf{P} \left(W^+(t_i) \leq a_i - \varepsilon, i = 1, \dots, m \right) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \\
& \xrightarrow{a \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(W^+(t_i) \leq a_i - \varepsilon, i = 1, \dots, m \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \\
& \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(W^+(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m \right).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G \mathbf{P}(B_k) \times \\
& \times \mathbf{P} \left(A_k, w_{Y_n}(\delta) < \varepsilon \mid \min_{i \leq n - \delta n + k} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} > x - y \right) \times \\
& \times I \left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a} \right] \right\} \geq \mathbf{P} \left(W^+(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m \right).
\end{aligned} \tag{13.9}$$

Из соотношений (13.8) и (13.9) вытекают соотношение (13.6) и, следовательно, (13.2). Из (13.2) и (13.7), ввиду теоремы 2.3, получаем утверждение доказываемой теоремы.

Лекция 14

Тождества Спарре–Андерсена и Спицера

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – произвольная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Рассмотрим случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ранее был введен момент первого достижения полуоси $(-\infty, 0]$ этим случайным блужданием:

$$T = \min \{n > 0: S_n \leq 0\}.$$

T называют также *первым слабым нижним лестничным моментом* и обозначают T_1 . Положим

$$T_2 = \min \{n > T_1: S_n \leq S_{T_1}\}.$$

Это *второй слабый нижний лестничный момент*. Аналогично вводятся моменты $T_3, T_4, \dots$ (см. рис. 6).

Рис. 6.

Очевидно, пары случайных величин (T_1, S_{T_1}) , $(T_2 - T_1, S_{T_2} - S_{T_1})$, $\dots$ являются независимыми и одинаково распределенными.

Наряду со слабыми нижними лестничными моментами можно рассматривать *строгие нижние лестничные моменты*:

$$\begin{aligned} T'_1 &:= T'_1 = \min \{n > 0: S_n < 0\}, \\ T'_2 &= \min \{n > T'_1: S_n < S_{T'_1}\}, \quad \dots \end{aligned}$$

Кроме того, рассматривают *строгие и слабые верхние лестничные моменты* $\tau_1, \tau_2, \dots$ и $\tau'_1, \tau'_2, \dots$ соответственно. Например,

$$\tau := \tau_1 = \min \{n > 0: S_n > 0\}.$$

Моменты $\tau_1, \tau_2, \dots$ – это последовательные моменты времени, в которые случайное блуждание достигает строгих рекордных верхних значений (строго превосходящих все предыдущие значения), а $S_{T_1}, S_{T_2}, \dots$ – значения этих рекордов.

Установим два *тождества Спарре–Андерсена*, открытые в середине прошлого столетия и вызвавшие быстрый прогресс в теории случайных блужданий (называемой также *теорией флуктуаций*).

ТЕОРЕМА 14.1. При $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; \tau = n) = \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду со случайной последовательностью $X_1, \dots, X_n$ рассмотрим для каждого $i = 1, \dots, n$ ее циклическую перестановку

$$X_i, X_{i+1}, \dots, X_n, X_1, X_2, \dots, X_{i-1}.$$

Построим по этой перестановке обычным образом случайное блуждание $S_1^{(i)}, \dots, S_n^{(i)}$ ($S_0^{(i)} = 0$), которое называется *i -м перестановочным случайным блужданием* исходного блуждания $S_0, S_1, \dots, S_n$. Очевидно, что все перестановочные случайные блуждания распределены также, как исходное, и совокупность перестановочных блужданий каждого перестановочного блуждания совпадает с совокупностью перестановочных блужданий исходного блуждания. Пусть $\tau_r^{(i)}$ означает r -й строгий верхний лестничный момент блуждания $S_0^{(i)}, S_1^{(i)}, \dots, S_n^{(i)}$. Важно заметить, что если в момент времени n случайное блуждание достигает своего r -го рекордного значения, то еще $r - 1$ его перестановочных случайных блужданий обладают этим же свойством (доказательство предоставляется читателю). Поэтому либо существует ровно r натуральных чисел $i_1, \dots, i_r$ от 1 до n , для которых $\tau_r^{(i_1)} = n, \dots, \tau_r^{(i_r)} = n$, либо не существует ни одного такого числа.

Кроме того, очевидно, что $S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = \dots = S_n^{(n)}$.

Рассмотрим при положительном a вероятность $P(\tau_r = n, 0 < S_n \leq a)$. Введем случайные величины

$$\xi_i = I\{\tau_r^{(i)} = n, 0 < S_n^{(i)} \leq a\}, \quad i = 1, \dots, n$$

(как обычно, $I\{\dots\}$ – индикатор случайного события $\{\dots\}$). Очевидно, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ – одинаково распределенные случайные величины, поэтому

$$P(\tau_r = n, 0 < S_n \leq a) = E\xi_1 = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (14.1)$$

В силу сказанного случайная величина $\sum_{i=1}^n \xi_i$ принимает два значения: r и 0 , поэтому

$$E \sum_{i=1}^n \xi_i = rP(\xi_1 + \dots + \xi_n = r). \quad (14.2)$$

Пусть $S_n > 0$ и i_0 – момент первого достижения максимума для последовательности $S_0, S_1, \dots, S_n$. Тогда $S_n^{(i_0+1)} > S_i^{(i_0+1)}$ для любого $i = 1, \dots, n-1$ и, следовательно, n является r -м строгим верхним лестничным моментом для некоторого $r \in \mathbb{N}$, поэтому

$$\{0 < S_n \leq a\} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \{\xi_1 + \dots + \xi_n = r\}$$

и, значит,

$$P(0 < S_n \leq a) = \sum_{r=1}^{\infty} P(\xi_1 + \dots + \xi_n = r). \quad (14.3)$$

Из соотношений (14.1)–(14.3) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} P(\tau_r = n, 0 < S_n \leq a) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rn} E \sum_{i=1}^n \xi_i = \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rn} r P(\xi_1 + \dots + \xi_n = r) = \frac{1}{n} P(0 < S_n \leq a). \end{aligned}$$

Переходя к преобразованиям Лапласа, получаем, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} E(e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n) = \frac{1}{n} E(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0).$$

Умножим обе части на s^n и просуммируем по всем $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0). \quad (14.4)$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n) &= \mathbb{E}(s^{\tau_r} e^{-\lambda S_{\tau_r}}; \tau_r < +\infty) = \\ &= \mathbb{E}\left(s^{\tau_1} e^{-\lambda S_{\tau_1}} I\{\tau_1 < +\infty\} s^{\tau_2 - \tau_1} \times \right. \\ &\quad \times e^{-\lambda(S_{\tau_2} - S_{\tau_1})} I\{\tau_2 - \tau_1 < +\infty\} \dots s^{\tau_r - \tau_{r-1}} \times \\ &\quad \times \left. e^{-\lambda(S_{\tau_r} - S_{\tau_{r-1}})} I\{\tau_r - \tau_{r-1} < +\infty\}\right) = \\ &= \left(\mathbb{E}(s^{\tau} e^{-\lambda S_{\tau}}; \tau < +\infty)\right)^r. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Поэтому левая часть (14.4) равна

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\mathbb{E}(s^{\tau} e^{-\lambda S_{\tau}}; \tau < +\infty)\right)^r = -\ln(1 - \mathbb{E}(s^{\tau} e^{-\lambda S_{\tau}}; \tau < +\infty)).$$

Итак,

$$\ln(1 - \mathbb{E}(s^{\tau} e^{-\lambda S_{\tau}}; \tau < +\infty)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0),$$

откуда следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 14.1. Аналогичные утверждения справедливы для T , T' , τ' . Например, при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{E}(e^{\lambda S_n}; T = n) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n \leq 0)\right].$$

ТЕОРЕМА 14.2. При $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}; T > n) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0)\right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чуть раньше (см. соотношение (14.5)) было установлено, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n) = \left(\mathbf{E} (s^\tau e^{-\lambda S_\tau}; \tau < +\infty) \right)^r.$$

Поэтому в силу теоремы 14.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n) = \left(1 - \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) \right] \right)^r. \quad (14.6)$$

Поскольку

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} \{\tau_r = n\} = \{S_n > 0, S_n > S_1, \dots, S_n > S_{n-1}\},$$

то, складывая соотношения (14.6) при разных $r = 1, 2, \dots$, получаем, что

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n}; S_n > 0, S_n > S_1, \dots, S_n > S_{n-1}) = \\ = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) \right]. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Рассмотрим наряду с последовательностью случайных величин $X_1, \dots, X_n$ последовательность $X_n, X_{n-1}, \dots, X_1$ и построим по ней обычным образом (выходящее из нуля) случайное блуждание $\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n$ (см. рис. 7). Это блуждание называется *двойственным* к блужданию $S_0, S_1, \dots, S_n$, и оно имеет такое же распределение, как $S_0, S_1, \dots, S_n$.

Очевидно, что $S_n = \tilde{S}_n$ и

$$\{S_n > S_0, S_n > S_1, \dots, S_n > S_{n-1}\} = \{\tilde{S}_1 > 0, \tilde{S}_2 > 0, \dots, \tilde{S}_n > 0\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n}; S_n > 0, S_n > S_1, \dots, S_n > S_{n-1}) = \\ = \mathbf{E} (e^{-\lambda \tilde{S}_n}; \tilde{S}_1 > 0, \tilde{S}_2 > 0, \dots, \tilde{S}_n > 0) = \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n}; T > n). \end{aligned} \quad (14.8)$$

Из (14.7) и (14.8) следует утверждение теоремы.

Рис. 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 14.2. Аналогичные утверждения справедливы для T' , τ , τ' . Например, при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{E}(e^{\lambda S_n}; \tau > n) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{E}(e^{\lambda S_n}; S_n \leq 0) \right].$$

Приступим к доказательству тождества Спизера. Положим

$$M_n = \max_{0 \leq i \leq n} S_i.$$

ТЕОРЕМА 14.3. При $\lambda, \mu > 0$, $|s| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{E} e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)} &= \\ &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} (\mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) + \mathbb{E}(e^{\mu S_n}; S_n \leq 0)) \right]. \end{aligned}$$

В частности, при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{E} e^{-\lambda M_n} = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{E} e^{-\lambda S_n^+} \right],$$

где $S_n^+ = \max(S_n, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим момент первого достижения максимума для случайной последовательности $S_0, S_1, \dots, S_n$:

$$T_n = \min(k \geq 0: S_k = M_n).$$

Имеем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)} &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)}; T_n = k) = \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(e^{-\lambda S_k - \mu(S_k - S_n)}; T_n = k) = \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(e^{-\lambda S_k - \mu(S_k - S_n)}; S_k > S_0, S_k > S_1, \dots \\ &\quad \dots, S_k > S_{k-1}, S_k \geq S_{k+1}, \dots, S_k \geq S_n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(e^{-\lambda S_k}; S_k > S_0, S_k > S_1, \dots, S_k > S_{k-1}) \times \\ &\quad \times \mathbb{E}(e^{-\mu(S_k - S_n)}; S_k \geq S_{k+1}, \dots, S_k \geq S_n) \end{aligned}$$

(здесь использовано марковское свойство случайного блуждания). Ранее было показано (см. соотношение (14.8)), что первое математическое ожидание в последнем выражении равно $\mathbb{E}(\exp(-\lambda S_k); T > k)$. Аналогично устанавливается, что второе математическое ожидание в последнем выражении равно $\mathbb{E}(\exp(\mu S_{n-k}); \tau > n - k)$. Итак,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)} &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\exp(-\lambda S_k); T > k) \times \\ &\quad \times \mathbb{E}(\exp(\mu S_{n-k}); \tau > n - k). \end{aligned}$$

Умножим обе части на s^n и просуммируем по всем $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{E} e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)} &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{E}(\exp(-\lambda S_k); T > k) \times \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{\infty} s^l \mathbb{E}(\exp(\mu S_l); \tau > l). \end{aligned}$$

Осталось вспомнить теорему 14.2 и замечание 14.2. Теорема доказана.

Лекция 15

Приложения тождеств Спарре–Андерсена и Спицера

Напомним некоторые факты (теоремы [А](#), [В](#), [С](#)) из теории степенных рядов (см. [7, т. 2, гл. 13, § 5]), используемые в дальнейшем.

ТЕОРЕМА А (АБЕЛЬ). Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ сходится равномерно по $s \in [0, 1]$ и

$$\lim_{s \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Если $a_n \geq 0$ при $n \in \mathbb{N}_0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, то $\lim_{s \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = +\infty$.

ТЕОРЕМА В (ТАУБЕР). Если $a_n = o(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$ и существует $\lim_{s \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = S$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. Числовая функция $L(x)$, определенная при $x \in (0, +\infty)$, называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если при любом фиксированном $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L(tx)/L(t) = 1.$$

ТЕОРЕМА С. Пусть $a_n \geq 0$ при $n \in \mathbb{N}_0$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ сходится при $s \in [0, 1)$. Обозначим его сумму $Q(s)$. При $\rho \in [0, +\infty)$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $Q(s) \sim \frac{1}{(1-s)^\rho} L\left(\frac{1}{1-s}\right)$ при $s \uparrow 1$;
- 2) $S_n = a_0 + \dots + a_{n-1} \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^\rho L(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Если же последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\rho \in (0, +\infty)$, то эти утверждения эквивалентны следующему:

- 3) $a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Здесь $L(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Целью данной лекции является изучение асимптотических свойств распределений первых лестничных моментов и максимума случайного блуждания.

ТЕОРЕМА 15.1. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда

- 1) случайные величины τ и τ' , T и T' являются собственными;
- 2) сходятся числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(S_n = 0)}{n} := c_0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[P(S_n > 0) - \frac{1}{2} \right] := c;$$

- 3) справедливы равенства

$$\begin{aligned} ES_{\tau} &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-c}, & ES_{\tau'} &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-(c+c_0)}, \\ ES_T &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^c, & ES_{T'} &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{c+c_0}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождества Спарре-Андерсена: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}; \tau = n) = \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} E(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) \right], \quad (15.1)$$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}; \tau' = n) = \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} E(e^{-\lambda S_n}; S_n \geq 0) \right]. \quad (15.2)$$

Все ряды в этих соотношениях мажорируются по λ сходящимися числовыми рядами. Перейдем к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ в (15.2):

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n P(\tau' = n) = \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n \geq 0) \right].$$

А теперь перейдем к пределу при $s \uparrow 1$, используя теорему A:

$$1 - P(\tau' < +\infty) = 0 \implies P(\tau' < +\infty) = 1,$$

т.к. $P(S_n \geq 0) \sim 1/2$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что τ' – собственная случайная величина. Аналогично доказательство для τ , T , T' .

Перейдем в (15.2) к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n P(S_{\tau'} = 0, \tau' = n) = \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n = 0) \right].$$

А теперь перейдем к пределу при $s \rightarrow 1$, используя теорему [A](#):

$$1 - P(S_{\tau'} = 0) = \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n = 0) \right].$$

Левая часть положительна, поэтому сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \times P(S_n = 0)$.

Продифференцируем (15.1) по λ : при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s^n E(S_n e^{-\lambda S_n}; \tau = n) &= \\ &= \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} E(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} E(S_n e^{-\lambda S_n}; S_n > 0). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Все ряды в этом соотношении мажорируются по λ сходящимися числовыми рядами. Для обоснования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (s^n/n) E(S_n; S_n > 0)$ заметим, что

$$E(S_n; S_n > 0) = \sigma \sqrt{n} E\left(\frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}}; \frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}} > 0\right).$$

В силу центральной предельной теоремы (строгий вывод рекомендуется провести читателю)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}}; \frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}} > 0\right) &= E(N; N > 0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

поэтому

$$E(S_n; S_n > 0) \sim \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (15.4)$$

и, следовательно, рассматриваемый ряд сходится при $|s| < 1$. Перейдем в (15.3) к пределу при $\lambda \rightarrow 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n E(S_n; \tau = n) = \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n > 0) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} E(S_n; S_n > 0). \quad (15.5)$$

Учитывая, что при $|s| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-s}} = \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(1-s)\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{2n}\right),$$

перепишем (15.5):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(S_n; \tau = n) &= \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \left[\mathbf{P}(S_n > 0) - \frac{1}{2}\right]\right\} \times \\ &\times \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E}(S_n; S_n > 0)}{(1-s)^{-1/2}}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Перейдем в (15.6) к пределу при $s \uparrow 1$. Найдем предел левой части, используя теорему A:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(S_n; \tau = n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(S_n; \tau = n) = \\ &= \mathbf{E}(S_{\tau}; \tau < +\infty) = \mathbf{E}S_{\tau} > 0 \end{aligned} \quad (15.7)$$

(неравенство выполняется, т.к. $S_{\tau} > 0$ при $\tau < +\infty$). Далее, ввиду (15.4), при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{E}(S_k; S_k > 0)}{k} \sim \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{n}.$$

Поэтому ввиду теоремы C

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E}(S_n; S_n > 0) \sim \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{1-s}} \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2} \sqrt{1-s}}, \quad s \uparrow 1,$$

и

$$\lim_{s \uparrow 1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E}(S_n; S_n > 0)}{(1-s)^{-1/2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}. \quad (15.8)$$

Из (15.6)-(15.8) следует, что существует

$$\lim_{s \uparrow 1} \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \left[\mathbf{P}(S_n > 0) - \frac{1}{2}\right]\right\} = b > 0 \quad (15.9)$$

и

$$ES_\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}b. \quad (15.10)$$

Покажем, что $b \neq +\infty$. Доказательство проведем от противного. Пусть $b = +\infty$. Тогда

$$\lim_{s \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \left[-P(S_n > 0) + \frac{1}{2} \right] = +\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \left[-P(S_n < 0) + \frac{1}{2} \right] = -\infty. \quad (15.11)$$

Здесь учтено что сумма этих двух рядов имеет конечный предел, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) P(S_n = 0)$ сходится. Рассмотрим *обращенное* случайное блуждание $\{S_n^*\}$ с шагами $-X_1, -X_2, \dots$. Пусть τ^* – момент первого достижения этим блужданием полуоси $(0, +\infty)$. Тогда (15.11) означает, что

$$\lim_{s \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \left[-P(S_n^* > 0) + \frac{1}{2} \right] = -\infty,$$

что противоречит соотношению (15.9) для $\{S_n^*\}$.

Применим к (15.9) теорему В:

$$b = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[P(S_n > 0) - \frac{1}{2} \right] \right\} = e^{-c},$$

откуда, вспоминая (15.10), получаем, что

$$ES_\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-c}.$$

Оставшиеся соотношения устанавливаются аналогично. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 15.2. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P(T > n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^c \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad P(\tau > n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-c} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся первым утверждением. Запишем тождество Спарре–Андерсена: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n}; T > n) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) \right].$$

Все ряды в этом соотношении мажорируются по λ сходящимися числовыми рядами. Перейдем к пределу при $\lambda \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{P}(T > n) &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{P}(S_n > 0) \right] = \\ &= \frac{\exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} [\mathbf{P}(S_n > 0) - \tfrac{1}{2}] \right\}}{\sqrt{1-s}}. \end{aligned}$$

По теореме 15.1 правая часть при $s \uparrow 1$ эквивалентна $e^c / \sqrt{1-s}$. Поскольку последовательность $\{\mathbf{P}(T > n)\}$ монотонна по n , то по теореме С при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{1}{\Gamma(1/2)} e^c \frac{1}{\sqrt{n}},$$

что совпадает с утверждением теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 15.1. Итак, доказано, что в условиях теоремы 15.2 при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad \mathbf{P}(\tau > n) \sim \frac{c_2}{\sqrt{n}},$$

причем $c_1 \mathbf{E} S_T = \sigma / \sqrt{2\pi}$, $c_2 \mathbf{E} S_T = \sigma / \sqrt{2\pi}$, $c_1 c_2 = 1/\pi$.

ТЕОРЕМА 15.3. Пусть $\mathbf{E} X_1 = 0$, $\mathbf{E} X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда для любого $x \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(M_n \leq x) \sim \frac{e^{-c}}{\sqrt{\pi}} u(x) \frac{1}{\sqrt{n}},$$

где $u(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\tau_i} \leq x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождество Спизера: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbf{E} e^{-\lambda M_n} = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E} e^{-\lambda S_n^+} \right) =$$

$$= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E} \left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0 \right) \right] \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{P} (S_n \leq 0) \right]. \quad (15.12)$$

Первый множитель в правой части по тождеству Спарре–Андерсена равен

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E} \left(e^{-\lambda S_n}; T > n \right) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} u_s(dx), \quad (15.13)$$

где

$$u_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbf{P} (S_n \leq x; T > n).$$

Из (15.12) и (15.13) следует, что при $x \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbf{P} (M_n \leq x) = u_s(x) \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{P} (S_n \leq 0) \right]. \quad (15.14)$$

Используя теорему A и переход к двойственному случайному блужданию, получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{s \uparrow 1} u_s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P} (S_n \leq x; T > n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P} (S_n > S_i, \ i = 0, 1, \dots, n-1; S_n \leq x) = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P} (S_{\tau_i} \leq x) = u(x). \end{aligned} \quad (15.15)$$

Можно показать, что функция $u(x)$ конечна при любом $x \geq 0$ (см. окончание лекции). Что касается второго множителя в правой части (15.14), то

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{P} (S_n \leq 0) \right] &= \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{2n} \right) \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \left[\mathbf{P} (S_n \leq 0) - \frac{1}{2} \right] \right\} \sim \\ &\sim \frac{e^{-c}}{\sqrt{1-s}}, \quad s \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Итак, правая часть (15.14) при $s \uparrow 1$ эквивалентна $e^{-c}u(x)/\sqrt{1-s}$. Откуда по теореме С, учитывая монотонность последовательности $\{P(M_n \leq x)\}$, получаем утверждение теоремы.

В дальнейшем потребуется также оценка сверху для $P(M_n \leq x)$: в условиях теоремы 15.3 существует такая положительная постоянная K , не зависящая от x и n , что при всех $x \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$

$$P(M_n \leq x) \leq \frac{Ku(x)}{\sqrt{n}}. \quad (15.16)$$

Действительно, из (15.14), (15.15) и монотонности $u_s(x)$ по s следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(M_n \leq x) \leq u(x) \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n \leq 0) \right] = \frac{u(x)h(s)}{\sqrt{1-s}},$$

где $h(s) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (s^n/n) [P(S_n \leq 0) - (1/2)] \right\}$. При $s = 1 - 1/n$ ввиду монотонности $P(M_n \leq x)$ по n находим, что

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n P(M_n \leq x) &\leq \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k P(M_k \leq x) \leq \\ &\leq u(x)\sqrt{n}h\left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Осталось учесть, что $h(1 - (1/n))$ имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что функция $u(x)$ (при $x < 0$ она полагается равной 0) является *функцией восстановления* для неубывающей случайной последовательности $0, S_{\tau_1}, S_{\tau_2}, \dots$. Из теории восстановления (см. [2, гл. 9]) известно, что, во-первых, функция $u(x)$ конечна при всех $x \in \mathbb{R}$ и, во-вторых, в условиях теоремы 15.3 при $x \rightarrow +\infty$

$$u(x) = x/ES_{\tau} + O(1). \quad (15.17)$$

Кроме того, функция $u(x)$ является *гармонической функцией* в следующем смысле:

$$Eu(x - X_1) = u(x), \quad x \geq 0. \quad (15.18)$$

Действительно, при $x > 0$

$$P(S_{n+1} \leq x; T > n+1) = \int_0^{+\infty} P(S_n \in dy; T > n) \int_{-y}^{x-y} dF(z),$$

где $F(z)$ – функция распределения случайной величины X_1 . Поэтому складывая по всем $n \in \mathbb{N}_0$ и используя (15.15) и теорему Фубини, получаем, что

$$\begin{aligned} u(x) - 1 &= \int_0^{+\infty} du(y) \int_{-y}^{x-y} dF(z) = \int_{-\infty}^x dF(z) \int_{-z}^{x-z} du(y) = \\ &= \int_{-\infty}^x u(x-z) dF(z) - \int_{-\infty}^0 u(-z) dF(z). \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\int_{-\infty}^0 u(-z) dF(z) = 1.$$

Следовательно,

$$u(x) = \int_{-\infty}^0 u(x-z) dF(z),$$

что и означает справедливость (15.18).

Лекция 16

Условная локальная предельная теорема и ее применение

Ранее (см. лекцию 8) рассматривалась локальная предельная теорема Стоуна: если $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, и распределение X_1 является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым, то при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\mathbf{P}(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta]) = \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1) \right) \quad (16.1)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и $\Delta \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число (в решетчатом случае Δ кратно максимальному шагу распределения X_1).

Наша цель – доказать условную (при условии, что $T > n$) локальную предельную теорему.

ТЕОРЕМА 16.1. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, и распределение X_1 является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\mathbf{P}(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta] \mid T > n) = \Delta(xe^{-\frac{x^2}{2}} + o(1)) \quad (16.2)$$

равномерно по $x \in (a, +\infty)$ и $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа (в решетчатом случае Δ кратно максимальному шагу распределения X_1).

ЗАМЕЧАНИЕ 16.1. Смысл этой теоремы прост: распределение случайной величины $\{S_n/(\sigma\sqrt{n}) \mid T > n\}$ при больших n мало отличается, ввиду принципа инвариантности Иглхарта, от распределения случайной величины $W^+(1)$, поэтому

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x + \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right] \mid T > n\right) \approx p_1(x) \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}},$$

где $p_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ – плотность вероятностей случайной величины $W^+(1)$ (см. теорему 11.1).

ЛЕММА 16.1. В условиях теоремы 16.1 при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \sigma\sqrt{n}\mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)}(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta], T > n) = \\ & = \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}} \right) + o(1) \end{aligned}$$

равномерно по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$ и $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$ и запишем представление при $x, y, \Delta \in (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)}(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta], T > n) = \\ & = P_1(n) - [P_2(n, \varepsilon) + P_3(n, \varepsilon)], \end{aligned} \quad (16.3)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(n) &= \mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)}(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta]), \\ P_2(n, \varepsilon) &= \mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)}(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta], T \leq (1 - \varepsilon)n), \\ P_3(n, \varepsilon) &= \mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)}(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta], (1 - \varepsilon)n < T \leq n). \end{aligned}$$

По теореме Стоуна при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma\sqrt{n}P_1(n) = \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} + o(1) \right) \quad (16.4)$$

равномерно по $x, y \in (0, +\infty)$, $\Delta \in (0, b)$, где b – произвольное положительное число.

Запишем представление для $P_2(n, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \sigma\sqrt{n}P_2(n, \varepsilon) &= \\ &= \sigma\sqrt{n} \mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)} \left(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta], \min_{i \leq (1-\varepsilon)n} S_i \leq 0 \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)} \left(\min_{i \leq (1-\varepsilon)n} S_i \leq 0, S_{(1-\varepsilon)n} \in \sigma\sqrt{n}dz \right) \times \\ &\quad \times \sigma\sqrt{n} \mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}z)}(S_{\varepsilon n} \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta]). \end{aligned}$$

Откуда по теореме Стоуна и принципу инвариантности Прохорова–Донскера при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sigma\sqrt{n}P_2(n, \varepsilon) &= \\ &= \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)} \left(\min_{i \leq (1-\varepsilon)n} S_i \leq 0, S_{(1-\varepsilon)n} \in \sigma\sqrt{n}dz \right) \times \\ &\quad \times \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2\varepsilon}} + o(1) \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^{(y)}(m(1-\varepsilon) \leq 0, W(1-\varepsilon) \in dz) e^{-\frac{(x-z)^2}{2\varepsilon}} + o(1) \quad (16.5)$$

равномерно по $x, y \in (0, +\infty)$, $\Delta \in (0, b)$, где b – произвольное положительное число. Запишем представление:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^{(y)}(m(1-\varepsilon) \leq 0, W(1-\varepsilon) \in dz) e^{-\frac{(x-z)^2}{2\varepsilon}} = \\ & = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon), \end{aligned} \quad (16.6)$$

где в $I_1(\varepsilon)$ интегрирование ведется от 0 до $+\infty$, а в $I_2(\varepsilon)$ – от $-\infty$ до 0. Нетрудно показать, что при любых $t \in (0, 1)$, $y \in (0, +\infty)$

$$P^{(y)}(m(t) \leq 0, W(t) \in dz) = \begin{cases} P^{(-y)}(W(t) \in dz), & z > 0; \\ P^{(y)}(W(t) \in dz), & z < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$I_1(\varepsilon) = P^{(-y)}(W(1-\varepsilon) > 0, W(1) \in dx) / dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}, \quad (16.7)$$

$$I_2(\varepsilon) = P^{(y)}(W(1-\varepsilon) < 0, W(1) \in dx) / dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (16.8)$$

при этом (16.7) и (16.8) выполняются равномерно по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$, где a – произвольное положительное число. Из (16.5)–(16.8) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma \sqrt{n} P_2(n, \varepsilon) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}, \quad (16.9)$$

причем каждый из пределов слева равномерен по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$, $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

Чтобы оценить $P_3(n, \varepsilon)$, рассмотрим случайное блуждание $\{S_i^*\}$, являющееся обращенным для двойственного к $\{S_i\}$ случайного блуждания, т.е. $S_i^* = -(S_n - S_{n-i})$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда

$$P_3(n, \varepsilon) \leq P^{(\sigma\sqrt{n}x)} \left(S_n^* \in [\sigma\sqrt{n}y - \Delta, \sigma\sqrt{n}y), \min_{i \leq \varepsilon n} S_i^* \leq 0 \right).$$

Но правая часть после умножения на $\sigma\sqrt{n}$ есть (см. вывод (16.5))

$$\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi(1-\varepsilon)}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^{(x)}(m(\varepsilon) \leq 0, W(\varepsilon) \in dz) e^{-\frac{(y-z)^2}{2(1-\varepsilon)}} + o(1)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x, y \in (0, +\infty)$, $\Delta \in (0, b)$, где b – произвольное положительное число, причем первое слагаемое в последнем выражении равно

$$\Delta \cdot P^{(x)}(m(\varepsilon) \leq 0, W(1) \in dy) / dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

равномерно по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$, $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа. Итак, для некоторой числовой функции $f(n, \varepsilon)$, зависящей также от параметров x, y, Δ , при всех $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$

$$\sigma\sqrt{n}P_3(n, \varepsilon) \leq f(n, \varepsilon) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n, \varepsilon) = 0, \quad (16.10)$$

причем каждый из пределов равномерен по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$, $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

Из соотношений (16.3), (16.4), (16.9), (16.10) следует утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 16.1. Зафиксируем $\delta \in (0, 1)$ и запишем представление при $x, \Delta \in (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} & \sigma\sqrt{n}P(S_n \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta] \mid T > n) = \\ &= \int_0^{+\infty} P(S_{\delta n} \in \sigma\sqrt{n}dy \mid T > \delta n) \sigma\sqrt{n} \times \\ & \times P^{(\sigma\sqrt{n}y)}(S_{(1-\delta)n} \in (\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta] ; T > (1-\delta)n) \times \\ & \times \frac{P(T > \delta n)}{P(T > n)}. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Известно (см. лекцию 15), что при $n \rightarrow \infty$

$$P(T > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (16.12)$$

где c_1 – положительная постоянная. По лемме 16.1, соотношению (16.12) и принципу инвариантности Игглхорта предел правой части (16.11) равен

$$\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_0^{+\infty} P\left(W^+(1) \in \frac{dy}{\sqrt{\delta}}\right) \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2(1-\delta)}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2(1-\delta)}}\right)$$

равномерно по $x \in (a, +\infty)$ и $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma \sqrt{n} \mathbf{P}(S_n \in (\sigma \sqrt{n} x, \sigma \sqrt{n} x + \Delta] \mid T > n) = \\ = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(W^+(1) \leq \frac{dy}{\sqrt{\delta}}\right) \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2(1-\delta)}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2(1-\delta)}}\right) \end{aligned} \quad (16.13)$$

равномерно по $x \in (a, +\infty)$ и $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

Левая часть (16.13) не зависит от δ , поэтому можно перейти к пределу правой части при $\delta \rightarrow 0$. Заметим, что правая часть (16.13) равна

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(W^+(1) \leq dy) \left(e^{-\frac{(x-y\sqrt{\delta})^2}{2(1-\delta)}} - e^{-\frac{(x+y\sqrt{\delta})^2}{2(1-\delta)}}\right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \\ \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{2\Delta}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{+\infty} y \mathbf{P}(W^+(1) \in dy). \end{aligned} \quad (16.14)$$

Вспоминая вид плотности вероятностей случайной величины $W^+(1)$ (см. замечание 16.1), находим, что

$$\int_0^{+\infty} y \mathbf{P}(W^+(1) \in dy) = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Итак, правая часть соотношения (16.14) и, следовательно, предел правой части (16.13) при $\delta \rightarrow 0$ равны $\Delta \cdot x \exp(-x^2/2)$. Теорема доказана.

Пусть $T(x)$ – момент первого достижения случайным блужданием $\{S_n\}$ полуоси $(x, +\infty)$ при $x \in (0, +\infty)$. В качестве следствия теоремы 16.1 представляем следующий результат.

ТЕОРЕМА 16.2. В условиях теоремы 16.1 для произвольных положительных x, y при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T(\sigma \sqrt{n} x) = n, S_n - \sigma \sqrt{n} x \leq y) = \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} G_2(y) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (16.15)$$

где $G_2(y)$ – некоторая собственная функция распределения. Соотношение (16.15) выполняется равномерно по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

ЛЕММА 16.2. В условиях теоремы 16.1 при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tau = n, z < S_n \leq z + y) = O\left(\frac{y}{n^{3/2}}\right) \quad (16.16)$$

равномерно по $z \in [0, +\infty)$ и $y \in (0, a)$, где a – произвольное положительное число;

$$\mathbf{P}(\tau = n, S_n > y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{ny^2}}\right) \quad (16.17)$$

равномерно по $y \in (0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тождество Спарре–Андерсена: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; \tau = n) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0)\right].$$

Продифференцируем его по s : при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n s^{n-1} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; \tau = n) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; \tau = n)\right]. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при s^{n-1} :

$$\begin{aligned} n \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; \tau = n) &= \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_k}; S_k > 0) \mathbf{E}(e^{-\lambda S_{n-k}}; \tau = n - k). \end{aligned}$$

Перейдем к распределениям: при $z \in [0, +\infty)$ и $y > 0$

$$\begin{aligned} n \mathbf{P}(S_n \in (z, z + y], \tau = n) &= \mathbf{P}(S_n \in (z, z + y]) - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^z \mathbf{P}(S_{n-k} \in (z - u, z + y - u], \tau = n - k) \mathbf{P}(S_k \in du) - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \int_z^{z+y} \mathbf{P}(S_{n-k} \in (0, z + y - u], \tau = n - k) \mathbf{P}(S_k \in du). \end{aligned} \quad (16.18)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n \in (z, z + y], \tau = n) \leq \frac{\mathbf{P}(S_n \in (z, z + y])}{n}.$$

По теореме Стоуна при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S_n \in (z, z + y]) = O\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по $z \in [0, +\infty)$ и $y \in (0, a)$, где a – произвольное положительное число. Из двух последних соотношений следует (16.16).

Далее, при $y > 0$

$$\mathbf{P}(\tau = n, S_n > y) = \int_{-\infty}^0 \mathbf{P}(\tau > n - 1, S_{n-1} \in dz) \mathbf{P}(X_n > y - z). \quad (16.19)$$

Откуда по неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}(\tau = n, S_n > y) \leq \frac{\sigma^2}{y^2} \mathbf{P}(\tau > n - 1).$$

Для получения (16.17) осталось воспользоваться теоремой 15.2. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 16.2. Если $T(\sigma\sqrt{n}x) = n$, то $\max_{i \leq n-1} S_i = \sigma\sqrt{n}x - z$, где $z \geq 0$. Пусть $(n - k)$ – момент первого достижения этого максимума последовательностью $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$, тогда, переходя от случайного блуждания $S_0, S_1, \dots, S_{n-k}$ к двойственному блужданию, получаем при $x, y \in (0, +\infty)$, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T(\sigma\sqrt{n}x) = n, S_n - \sigma\sqrt{n}x \leq y) &= \\ &= \mathbf{P}(\tau = n, \sigma\sqrt{n}x < S_n \leq \sigma\sqrt{n}x + y) + \\ &+ \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(S_{n-k} \in \sigma\sqrt{n}x - dz, T > n - k) \times \\ &\times \mathbf{P}(\tau = k, S_k \in (z, z + y]). \end{aligned}$$

Умножим обе части последнего соотношения на n и для произвольного $\Delta > 0$ запишем оценку сверху:

$$n\mathbf{P}(T(\sigma\sqrt{n}x) = n, S_n - \sigma\sqrt{n}x \leq y) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq n\mathbf{P}(\tau = n, \sigma\sqrt{n}x < S_n \leq \sigma\sqrt{n}x + y) + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} n\mathbf{P}(S_{n-k} \in (\sigma\sqrt{n}x - (m+1)\Delta, \sigma\sqrt{n}x - m\Delta], T > n-k) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\tau = k, m\Delta < S_k \leq (m+1)\Delta + y).
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части в силу (16.16) есть $o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Для произвольных $L \in \mathbb{N}$, $x_0 \in (0, x)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ разобьем сумму в правой части на составляющие:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(n, \Delta, L, x_0) &= \sum_{k=1}^L \sum_{m=0}^M, \Sigma_2(n, \Delta, L, x_0) = \sum_{k=1}^L \sum_{m=M+1}^{+\infty}, \\
\Sigma_3(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) &= \sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)} \sum_{m=0}^M, \Sigma_4(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) = \sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)} \sum_{m=M+1}^{+\infty}, \\
\Sigma_5(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) &= \sum_{k=n(1-\varepsilon)+1}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty},
\end{aligned}$$

где $M = M(n, \Delta, x_0) := \sigma\sqrt{n}(x - x_0)/\Delta$.

По условной локальной предельной теореме (в решетчатом случае Δ выбираем кратным максимальному шагу распределения X_1) при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(n, \Delta, L, x_0) &= \\
&= \sum_{k=1}^L \sum_{m=0}^M \left[\frac{c_1 \Delta}{\sigma} \left(x \sqrt{\frac{n}{n-k}} - \frac{m\Delta}{\sigma\sqrt{n-k}} \right) \times \right. \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2} \left(x \sqrt{\frac{n}{n-k}} - \frac{m\Delta}{\sigma\sqrt{n-k}} \right)^2} + o(1) \Big] \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\tau = k, m\Delta < S_k \leq (m+1)\Delta + y)
\end{aligned}$$

равномерно по всем возможным парам (k, m) . Следовательно,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \Sigma_1(n, \Delta, L, x_0) &\leq \\
&\leq \frac{c_1}{\sigma} x e^{-\frac{x_0^2}{2}} \sum_{k=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(\tau = k, m\Delta < S_k \leq (m+1)\Delta + y) \Delta.
\end{aligned}$$

Заметим, что последняя двойная сумма равна

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(\tau \leq L, m\Delta < S_{\tau} \leq (m+1)\Delta + y) \Delta \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \\
 & \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(m\Delta < S_{\tau} \leq (m+1)\Delta + y) \Delta = \\
 & = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\tau} > m\Delta) \Delta - \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\tau} > y + (m+1)\Delta) \Delta \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \\
 & \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{E}S_{\tau} - \mathbf{E}(S_{\tau} - y; S_{\tau} > y).
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\limsup_{x_0 \rightarrow x} \limsup_{\Delta \rightarrow 0} \limsup_{L \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \Sigma_1(n, \Delta, L, x_0) \leq \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} G_2(y), \quad (16.20)$$

где

$$G_2(y) = \frac{\sqrt{2\pi}c_1}{\sigma} [\mathbf{E}S_{\tau} - \mathbf{E}(S_{\tau} - y; S_{\tau} > y)]. \quad (16.21)$$

Очевидно, что (см. замечание 14.1)

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} G_2(y) = \frac{\sqrt{2\pi}c_1}{\sigma} \mathbf{E}S_{\tau} = 1,$$

т.е. функция распределения $G_2(y)$ является собственной.

Покажем теперь, что все остальные составляющие $\Sigma_2, \dots, \Sigma_5$ малы. Очевидно,

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2(n, \Delta, L, x_0) & \leq n \sum_{k=1}^L \mathbf{P}(S_{n-k} \leq \sigma\sqrt{n}x_0, T > n-k) \times \\
 & \times \mathbf{P}(\tau = k, S_k > \sigma\sqrt{n}(x - x_0)).
 \end{aligned}$$

Применяя соотношение (16.12) к первой вероятности справа, а соотношение (16.17) – ко второй, получаем, что при $n \rightarrow \infty$ правая часть есть

$$\begin{aligned}
 & O\left(n \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{n-k}} \frac{1}{\sqrt{k}n(x-x_0)^2}\right) = \\
 & = O\left(\sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}}\right) = O\left(\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{n-L}}\right) = o(1).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Sigma_2(n, \Delta, L, x_0) = 0. \quad (16.22)$$

Рассмотрим $\Sigma_3(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon)$. Ввиду теоремы 16.1 и ограниченности функции $x \exp(-x^2/2)$, $x \in [0, +\infty)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S_{n-k} \in (\sigma\sqrt{n}x - (m+1)\Delta, \sigma\sqrt{n}x - m\Delta], T > n-k) = O\left(\frac{\Delta}{n}\right)$$

равномерно по всем слагаемым, представленным в $\Sigma_3(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon)$, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Sigma_3(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) &= O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\tau = k; S_k > m\Delta)\Delta\right) = \\ &= O\left(\sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)} \mathbf{E}(S_\tau; \tau = k)\right) = \\ &= O(\mathbf{E}(S_\tau; \tau > L)). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{E}S_\tau$ конечно, то

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \Sigma_3(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) = 0. \quad (16.23)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Sigma_4(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) &\leq n \sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)} \mathbf{P}(S_{n-k} \leq \sigma\sqrt{n}x_0, T > n-k) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(\tau = k, S_k > \sigma\sqrt{n}(x - x_0)). \end{aligned}$$

Применяя соотношение (16.12) к первой вероятности справа, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\Sigma_4(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) = O\left(\frac{n}{\sqrt{n\varepsilon}} \mathbf{P}(\tau > L, S_\tau > \sigma\sqrt{n}(x - x_0))\right).$$

По неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}(\tau > L, S_\tau > \sigma\sqrt{n}(x - x_0)) \leq \frac{\mathbf{E}(S_\tau; \tau > L)}{\sigma\sqrt{n}(x - x_0)} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

(здесь учтено, что математическое ожидание ES_τ конечно). Поэтому

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \Sigma_4(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) = 0. \quad (16.24)$$

Наконец, рассмотрим $\Sigma_5(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon)$. Поскольку (см. соотношение (16.16)) при $k \rightarrow \infty$

$$P(\tau = k, m\Delta < S_k \leq (m+1)\Delta + y) = O\left(\frac{y + \Delta}{k^{3/2}}\right)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} P(S_{n-k} \in (\sigma\sqrt{n}x - (m+1)\Delta, \sigma\sqrt{n}x - m\Delta], T > n-k) &\leq \\ &\leq P(T > n-k), \end{aligned}$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Sigma_5(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) &= O\left(n \sum_{k=n(1-\varepsilon)}^{n-1} P(T > n-k) \frac{y + \Delta}{k^{3/2}}\right) = \\ &= O\left(n \sum_{k=n(1-\varepsilon)}^{n-1} \frac{1}{k^{3/2}\sqrt{n-k}}\right) = \\ &= O\left(\frac{n}{n^{3/2}(1-\varepsilon)^{3/2}} \sum_{k=n(1-\varepsilon)}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-k}}\right) = \\ &= O\left(\frac{\sqrt{n\varepsilon}}{\sqrt{n}(1-\varepsilon)^{3/2}}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \Sigma_5(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon) = 0. \quad (16.25)$$

Из соотношений (16.20), (16.22)–(16.25) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nP(T(\sigma\sqrt{n}x) = n, S_n - \sigma\sqrt{n}x \leq y) \leq \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} G_2(y).$$

Аналогично показывается, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} nP(T(\sigma\sqrt{n}x) = n, S_n - \sigma\sqrt{n}x \leq y) \geq \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} G_2(y).$$

Соотношение (16.15) установлено. Требуемая равномерность получается некоторым уточнением приведенных рассуждений. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 16.2. Теорема 16.2 справедлива и при $y = +\infty$. Это установлено Эппелем в работе [12]. Наше доказательство также проходит при $y = +\infty$, если вместо (16.16) воспользоваться оценкой $P(\tau = n) = O(1/n^{3/2})$, $n \rightarrow \infty$, которая является очевидным следствием соотношения (16.19) и следующей оценки (см. [12, лемма 2]): при $n \rightarrow \infty$

$$P(\tau > n, S_n \in (x - 1, x]) = O(|x - 1|/n^{3/2}) \quad (16.26)$$

равномерно по $x \in (-\infty, 0]$.

ТЕОРЕМА 16.3. В условиях теоремы 16.1 для произвольного $y > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$P(\tau = n, S_n \leq y) \sim \frac{c_2}{2} G_2(y) n^{-\frac{3}{2}},$$

где c_2 – положительная постоянная (та же, что и в замечании 14.1), $G_2(y)$ – собственная функция распределения (такая же, как и в теореме 16.2).

Прежде чем доказывать эту теорему, сформулируем утверждение, касающееся свертки двух числовых последовательностей (доказательство предоставляется читателю).

ЛЕММА 16.3. Пусть числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $a_n = O(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ сходится, существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b_n := b$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = bA,$$

где $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 16.3. Рассмотрим равенство (16.18) при $z = 0$. Применив к нему лемму 16.3 с учетом теоремы Стоуна и соотношения (16.16), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$P(\tau = n, S_n \leq y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(y - \int_0^y P(S_\tau \leq y - u) du \right) n^{-3/2}.$$

Но выражение в скобках равно $ES_\tau - E(S_\tau - y; S_\tau > y)$. Поэтому, ввиду (16.21), при $n \rightarrow \infty$

$$P(\tau = n, S_n \leq y) \sim \frac{G_2(y)}{2\pi c_1} n^{-3/2}.$$

Осталось применить замечание 14.1. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 16.3. Теорема 16.3 справедлива и при $y = +\infty$ (см. [12]).

В заключение лекции переформулируем теорему 16.2 для момента первого достижения случайным блужданием $\{S_n\}$ полуоси $(-\infty, x]$ при $x \in (-\infty, 0)$. Обозначим его $T(x)$. В условиях теоремы 16.1 для произвольных $x \in (0, +\infty)$, $y \in (0, +\infty]$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P(T(-\sigma\sqrt{nx}) = n, S_n + \sigma\sqrt{nx} \geq -y) &= \\ &= \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} G_1(y) + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (16.27)$$

где $G_1(y)$ – собственная функция распределения, более точно

$$G_1(y) = \frac{\sqrt{2\pi}c_2}{\sigma} [-ES_T + E(S_T + y; S_T \leq -y)]. \quad (16.28)$$

Указанное соотношение выполняется равномерно по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа. Кроме того, в условиях теоремы 16.1 для произвольного $y \in (0, +\infty]$ при $n \rightarrow \infty$

$$P(T = n, S_n \geq -y) \sim \frac{c_1}{2} G_1(y) n^{-3/2}, \quad (16.29)$$

где c_1 – положительная постоянная (та же, что и в соотношении (16.12)).

Лекция 17

Локальная версия принципа инвариантности Иглхарта и ее применение для случайных блужданий с отрицательным сносом

В принципе инвариантности Иглхарта случайное блуждание рассматривается при условии $\{T > n\}$. Что будет, если это условие заменить на условие $\{T = n\}$, локализирующее момент попадания блуждания на полюсь $(-\infty, 0]$?

Положим

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 17.1. Пусть $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, и распределение X_1 является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым, тогда для произвольного $y \in [0, +\infty]$ при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid T = n, S_n \geq -y\} \xrightarrow{D} W_0^+,$$

где W_0^+ – броуновская экскурсия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим сходимость конечномерных распределений. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$. Покажем, что для фиксированных положительных $a_1, a_2, \dots, a_m$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m; T = n, S_n \geq -y) \sim \\ & \sim \frac{c_1 G_1(y)}{2} \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m) n^{-3/2}, \end{aligned} \quad (17.1)$$

где c_1 – положительная постоянная, о которой идет речь в замечании 15.1; G_1 – собственная функция распределения, заданная формулой (16.28). Напомним, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}. \quad (17.2)$$

Запишем представление:

$$n^{-3/2} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m; T = n, S_n \geq -y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{a_m} \mathbf{P} \left(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m-1; \right. \\
&\quad \left. \frac{S_{\lfloor nt_m \rfloor}}{\sigma \sqrt{n}} \in dx_m \mid T > \lfloor nt_m \rfloor \right) \times \\
&\quad \times (n - \lfloor nt_m \rfloor) \times \\
&\quad \times \mathbf{P} \left((-\sigma \sqrt{n} x_m) = n - \lfloor nt_m \rfloor, \right. \\
&\quad \left. S_{n - \lfloor nt_m \rfloor} + \sigma \sqrt{n} x_m \geq -y \right) \times \\
&\quad \times \frac{n^{-3/2} \mathbf{P}(T > \lfloor nt_m \rfloor)}{n - \lfloor nt_m \rfloor}.
\end{aligned}$$

Откуда в силу принципа инвариантности Иглхарта и соотношений (16.27) и (17.2)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3/2} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m; T = n, S_n \geq -y) = \\
&= c_1 G_1(y) \int_0^{a_m} \mathbf{P} \left(\sqrt{t_m} W^+ \left(\frac{t_i}{t_m} \right) \leq a_i, \right. \\
&\quad \left. i = 1, \dots, m-1; \sqrt{t_m} W^+(1) \in dx_m \right) \times \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi t_m (1-t_m)^3}} x_m e^{-\frac{x_m^2}{2(1-t_m)}}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что броуновская извилина является марковским процессом и вспоминая вид ее переходной плотности p^+ (см. лекцию 11), находим, что последний интеграл равен

$$\begin{aligned}
&\int_0^{a_1/\sqrt{t_m}} \dots \int_0^{a_{m-1}/\sqrt{t_m}} \int_0^{a_m} p^+ \left(0, 0; \frac{t_1}{t_m}, x_1 \right) \times \\
&\quad \times p^+ \left(\frac{t_1}{t_m}, x_1; \frac{t_2}{t_m}, x_2 \right) \dots p^+ \left(\frac{t_{m-1}}{t_m}, x_{m-1}; 1, \frac{x_m}{\sqrt{t_m}} \right) \times \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi t_m (1-t_m)^3}} x_m e^{-\frac{x_m^2}{2(1-t_m)}} dx_1 \dots dx_m = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{a_1/\sqrt{t_m}} \dots \int_0^{a_{m-1}/\sqrt{t_m}} \int_0^{a_m} \frac{2x_1}{(t_1/t_m)^{3/2}} e^{-\frac{x_1^2}{2(t_1/t_m)}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times g\left(\frac{t_2 - t_1}{t_m}, x_1, x_2\right) \dots g\left(\frac{t_m - t_{m-1}}{t_m}, x_{m-1}, \frac{x_m}{\sqrt{t_m}}\right) \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{2\pi t_m (1 - t_m)^3}} x_m e^{-\frac{x_m^2}{2(1-t_m)}} dx_1 \dots dx_m. \end{aligned}$$

После замены $\sqrt{t_m}x_1$ на x_1 , ..., $\sqrt{t_m}x_{m-1}$ на x_{m-1} перепишем последнее выражение, учитывая, что при любом $a > 0$ $\sqrt{a}g(at, \sqrt{a}x, \sqrt{a}y) = g(t, x, y)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{a_1} \dots \int_0^{a_m} \frac{2x_1}{\sqrt{2\pi t_1^3}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} g(t_2 - t_1, x_1, x_2) \times \dots \times \\ & \times g(t_m - t_{m-1}, x_{m-1}, x_m) f(t_m, x_m) dx_1 \dots dx_m, \end{aligned}$$

где

$$f(t, x) = \frac{x}{(1-t)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}}.$$

Подынтегральное выражение можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{2x_1}{\sqrt{2\pi t_1^3}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} f(t_1, x_1) g(t_2 - t_1, x_1, x_2) \frac{f(t_2, x_2)}{f(t_1, x_1)} \times \dots \times \\ & \times g(t_m - t_{m-1}, x_{m-1}, x_m) \frac{f(t_m, x_m)}{f(t_{m-1}, x_{m-1})} = \\ & = p_0^+(0, 0; t_1, x_1) \dots p_0^+(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m), \end{aligned}$$

где p_0^+ – переходная плотность броуновской экскурсии (см. лекцию 11). Итак, соотношение (17.1) доказано.

Учитывая теперь, что (см. соотношение (16.29)) при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T = n, S_n \geq -y) \sim \frac{c_1}{2} G_1(y) n^{-3/2}, \quad (17.3)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m | T = n, S_n \geq -y) = \\ & = \mathbf{P}(W^+(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (17.4)$$

Установим, что для любых $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon | T = n, S_n \geq -y) = 0, \quad (17.5)$$

Очевидно, что

$$w_{Y_n}(\delta; 0, 1) \leq w_{Y_n}\left(\delta; 0, \frac{1}{2}\right) + w_{Y_n}\left(\delta; \frac{1}{2}, 1\right). \quad (17.6)$$

Сначала покажем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; 0, \frac{1}{2}\right) \geq \varepsilon \mid T = n, S_n \geq -y\right) = 0. \quad (17.7)$$

Достаточно, ввиду (17.4), показать, что при любом $a > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; 0, \frac{1}{2}\right) \geq \varepsilon, \frac{S_{\lfloor n/2 \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} > a \mid T = n, S_n \geq -y\right) = 0.$$

Но последняя вероятность равна (используем принцип инвариантности Иглхарта и соотношения (16.27), (17.2) и (17.3))

$$\begin{aligned} & \int_a^{+\infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; 0, \frac{1}{2}\right) \geq \varepsilon, \frac{S_{\lfloor n/2 \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \in dx \mid T > \lfloor n/2 \rfloor\right) \times \\ & \quad \times \frac{\mathbf{P}(T > \lfloor n/2 \rfloor)}{\mathbf{P}(T = n, S_n \geq -y)} \times \\ & \quad \times \mathbf{P}(T(-\sigma\sqrt{n}x) = n - \lfloor n/2 \rfloor, S_{n - \lfloor n/2 \rfloor} + \sigma\sqrt{n}x \geq -y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ & \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(w_{W^+}(2\delta; 0, 1) \geq \varepsilon\sqrt{2}, W^+(1)/\sqrt{2} \in dx) \times \\ & \quad \times 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}xe^{-x^2} \leq \\ & \leq K\mathbf{P}(w_{W^+}(2\delta; 0, 1) \geq \varepsilon\sqrt{2}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

где K – положительная постоянная. Итак, соотношение (17.7) доказано.

Теперь покажем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; \frac{1}{2}, 1\right) \geq \varepsilon \mid T = n, S_n \geq -y\right) = 0. \quad (17.8)$$

Осуществим переход к двойственному случайному блужданию $\{\tilde{S}_i\}$: при достаточно больших четных n

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; \frac{1}{2}, 1\right) \geq \varepsilon \mid T = n, S_n \geq -y\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathbf{P}(T = n, S_n \geq -y)} \times \\
&\quad \times \int_{-y}^0 \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; \frac{1}{2}, 1\right) \geq \varepsilon, T = n, S_n \in dx\right) \leq \\
&\leq \frac{1}{\mathbf{P}(T = n, S_n \geq -y)} \times \\
&\quad \times \int_{-y}^0 \mathbf{P}\left(w_{\tilde{Y}_n}(2\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon, \max_{1 \leq i \leq n-1} \tilde{S}_i < x, \tilde{S}_n \in dx\right) \leq \\
&\leq \frac{1}{\mathbf{P}(T = n, S_n \geq -y)} \times \\
&\quad \times \int_{-y}^0 \mathbf{P}(w_{\tilde{Y}_n}(2\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon, \tilde{\tau} > n, \tilde{S}_n \in dx) = \\
&= \frac{1}{\mathbf{P}(T = n, S_n \geq -y)} \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(w_{\tilde{Y}_n}(2\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon, \tilde{\tau} > n, \tilde{S}_n \geq -y) \quad (17.9)
\end{aligned}$$

(здесь $\tilde{Y}_n, \tilde{\tau}$ означают то же для $\{\tilde{S}_i\}$, что Y_n и τ для $\{S_i\}$).

ЛЕММА 17.1. В условиях теоремы 17.1 для любого случайного события A_n из $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ и произвольного числа $y > 0$ существуют такие положительные постоянные K, L, M (не зависящие от n), что для всех n

$$\mathbf{P}(A_n, \tau > n, S_n \geq -y) \leq K \cdot \mathbf{P}(A_n, n < \tau \leq n + L, S_\tau \leq M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют такие положительные числа x_0, M ($x_0 < M$), что $\mathbf{P}(x_0 < X_1 \leq M) > 0$. Возьмем $L = \lceil y/x_0 \rceil$, $K = \mathbf{P}(x_0 < X_1 \leq M)^{-L}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A_n, \tau > n, S_n \geq -y) \mathbf{P}(x_0 < X_{n+1} \leq M, \dots, x_0 < X_{n+L} \leq M) = \\
&= \mathbf{P}(A_n, \tau > n, S_n \geq -y, x_0 < X_{n+1} \leq M, \dots, x_0 < X_{n+L} \leq M) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(A_n, n < \tau \leq n + L, S_\tau \leq M).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. В силу леммы 17.1 правая часть (17.9) не превосходит

$$\begin{aligned}
&K \sum_{i=1}^L \frac{\mathbf{P}(\tilde{\tau} = n + i, \tilde{S}_{n+i} \leq M)}{\mathbf{P}(T = n, S_n \geq -y)} \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(w_{\tilde{Y}_n}(2\delta; 0, 1/2) \geq \varepsilon \mid \tilde{\tau} = n + i, \tilde{S}_{n+i} \leq M).
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ с учетом (17.3), (17.7) и теоремы 16.3, получаем (17.8). Из (17.6)–(17.8) следует (17.5). Из (17.4) и (17.5) следует утверждение теоремы.

Полученная локальная версия принципа инвариантности Иглхарта позволяет установить условные принципы инвариантности для случайного блуждания с отрицательным сносом. Итак, предположим, что

$$-\infty \leq EX_1 < 0.$$

Кроме того, предположим, что выполнено *одностороннее условие Крамера*:

$$(A) \exists a \in (0, +\infty) : E \exp(aX_1) < +\infty.$$

Рассмотрим функцию

$$\theta(t) = E \exp(tX_1).$$

Ее область определения содержит $[0, a]$. Предположим, что выполнено еще одно условие: функция $\theta(t)$ достигает своего минимума во внутренней точке τ области определения, т.е.

$$(B) \theta'(\tau) = 0 \text{ при } \tau \in (0, a).$$

Наконец, предположим, что

(C) распределение X_1 является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым.

Заметим, что у функции $\theta(t)$, $t \in (0, a)$, существуют производные любого порядка и

$$\theta'(t) = E[X_1 \exp(tX_1)], \quad \theta''(t) = [EX_1^2 \exp(tX_1)].$$

Далее,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta'(t) = EX_1 < 0, \quad \theta''(t) > 0 \text{ при } t \in (0, a),$$

поэтому функция $\theta'(t)$ возрастает на $(0, a)$ и, если пересекает ось абсцисс, то только в одной точке τ , в которой функция $\theta(\cdot)$ достигает минимума. Положим $\theta(\tau) = \gamma$. Поскольку $\lim_{t \downarrow 0} \theta(t) = 1$, то $\gamma < 1$.

Зафиксируем $t \in (0, a]$. Пусть $X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения

$$F^{(t)}(x) = \frac{1}{\theta(t)} \int_0^x e^{tu} dF(u),$$

где $F(u)$ – функция распределения случайной величины X_1 . Введем случайное блуждание

$$S_0^{(t)} = 0, \quad S_n^{(t)} = \sum_{i=1}^n X_i^{(t)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

называемое *сопряженным* к блужданию $\{S_n\}$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная измеримая числовая функция от n числовых переменных. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f(S_1, \dots, S_n) &= \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \dots, \sum_{i=1}^n x_i\right) dF(x_1) \dots dF(x_n) = \\ &= \theta^n(t) \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \dots, \sum_{i=1}^n x_i\right) \times \\ &\quad \times \frac{e^{tx_1}}{\theta(t)} dF(x_1) \dots \frac{e^{tx_n}}{\theta(t)} dF(x_n) e^{-t \sum_{i=1}^n x_i} = \\ &= \theta^n(t) \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \dots, \sum_{i=1}^n x_i\right) \times \\ &\quad \times dF^{(t)}(x_1) \dots dF^{(t)}(x_n) e^{-t \sum_{i=1}^n x_i} = \\ &= \theta^n(t) \mathbb{E}[f(S_1^{(t)}, \dots, S_n^{(t)}) e^{-t S_n^{(t)}}], \end{aligned}$$

причем, если существует одно математическое ожидание, то существует и другое.

Очевидно, что $\{S_n^{(\tau)}\}$ является случайным блужданием с нулевым сносом, т.к.

$$\mathbb{E} X_1^{(\tau)} = \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}(X_1 e^{\tau X_1}) = \frac{1}{\gamma} \theta'(\tau) = 0.$$

Найдем шаговую дисперсию этого блуждания:

$$\mathbb{E}(X_1^{(\tau)})^2 = \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}(X_1^2 e^{\tau X_1}) = \frac{\theta''(\tau)}{\gamma} \in (0, +\infty).$$

Таким образом, случайное блуждание $\{S_n^{(\tau)}\}$ удовлетворяет обычным условиям, которые ранее рассматривались (следует сказать, что случайная величина $X_1^{(\tau)}$ имеет конечные моменты любого порядка).

ТЕОРЕМА 17.2. Пусть $-\infty \leq EX_1 < 0$ и выполнены условия (A), (B), (C). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P(T > n) \sim c_3 \gamma^n n^{-3/2}, \quad (17.10)$$

$$P(T = n) \sim c_4 \gamma^n n^{-3/2}, \quad (17.11)$$

где c_3, c_4 – положительные постоянные, причем $c_4 = c_3(1 - \gamma)/\gamma$. Далее, случайные последовательности $\{S_n | T > n\}$ и $\{S_n | T = n\}$ сходятся по распределению при $n \rightarrow \infty$, и для произвольного $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T > n, S_n \leq y) \gamma^{-n} n^{3/2} = c_3 G_3(y), \quad (17.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T = n, S_n \geq -y) \gamma^{-n} n^{3/2} = c_4 G_4(y), \quad (17.13)$$

где $G_3(y), G_4(y)$ – некоторые собственные функции распределения.

Доказательству этой теоремы предположим две леммы, причем доказательство первой из них предоставляется читателю.

ЛЕММА 17.2. Пусть две числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ связаны следующим соотношением:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n\right),$$

когда s принадлежит некоторой окрестности точки 0. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n n^{3/2} = b$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{3/2} = bA,$$

где $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

ЛЕММА 17.3. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, и распределение X_1 является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым. Тогда для произвольного $\lambda \in (0, +\infty)$ при $n \rightarrow \infty$

$$E(e^{-\lambda S_n}; T > n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\lambda}} \sum_{i=0}^{\infty} E(e^{-\lambda S_i}; T > i) n^{-3/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Стоуна при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \mathbf{P}(S_n \in dx) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} dx + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma} \lambda} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \quad (17.14)$$

Запишем тождество Спарре–Андерсена: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; T > n) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) \right].$$

Ввиду (17.14) при $n \rightarrow \infty$

$$b_n := \frac{1}{n} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \lambda} n^{-3/2},$$

поэтому по лемме 17.2 при $n \rightarrow \infty$

$$a_n := \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; T > n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_i}; T > i) n^{-3/2}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 17.2. Заметим, что в силу леммы 17.3 для произвольного $\lambda \in (-\tau, +\infty)$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_n}; T > n) &= \gamma^n \mathbf{E}(e^{-(\lambda+\tau)S_n^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > n) \sim \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^{(\tau)} (\lambda + \tau)} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{-(\lambda+\tau)S_i^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > i) \gamma^n n^{-3/2}, \end{aligned} \quad (17.15)$$

где $\sigma^{(\tau)}$, $T^{(\tau)}$ означают то же самое для $\{S_n^{(\tau)}\}$, что σ , T для $\{S_n\}$. Из (17.15) при $\lambda = 0$ получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^{(\tau)} \tau} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{-\tau S_i^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > i) \gamma^n n^{-3/2},$$

т.е. соотношение (17.10) доказано. Из (17.10) следует (17.11): при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(T > n-1) - \mathbf{P}(T > n) \sim c_3 \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \gamma^n n^{-3/2}.$$

Из (17.10) и (17.15) получаем, что при $\lambda \in (-\tau, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} (e^{-\lambda S_n} | T > n) = \frac{\tau}{\lambda + \tau} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{-(\lambda+\tau)S_i^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > i)}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{-\tau S_i^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > i)}.$$

Ряд в числителе мажорируется по $\lambda \in (0, +\infty)$ сходящимся числовым рядом, поэтому существует предел правой части при $\lambda \downarrow 0$, равный 1. По теореме непрерывности для преобразования Лапласа все это означает, что случайная последовательность $\{S_n | T > n\}$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к случайной величине с некоторой функцией распределения $G_3(y)$. Откуда, учитывая соотношение (17.10), получаем (17.12) для y , являющихся точками непрерывности функции G_3 (более тонкий анализ показывает, что соотношение (17.12) справедливо для всех $y \in \mathbb{R}$). Наконец, при $y \geq 0$

$$P(S_n \leq -y, T = n) = P(T > n-1, S_n \leq -y),$$

поэтому

$$\begin{aligned} P(S_n \leq -y | T = n) &= \\ &= \frac{P(T > n-1)}{P(T = n)} P(S_{n-1} \leq -X_n - y | T > n-1). \end{aligned}$$

Применяя (17.10)–(17.12), получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq -y | T = n) = \frac{1}{1-\gamma} \mathbf{E} G_3(-X_1 - y),$$

причем предел правой части при $y \downarrow 0$ равен 1 (доказательство предоставляется читателю). Итак, установлены сходимость по распределению при $n \rightarrow \infty$ случайной последовательности $\{S_n | T = n\}$ и, следовательно, соотношение (17.13). Теорема доказана.

Положим

$$Z_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma^{(\tau)} \sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 17.3. В условиях теоремы 17.2 для произвольного $y \in [0, +\infty]$ при $n \rightarrow \infty$

$$\{Z_n(t), t \in [0, 1] \mid T = n, S_n \geq -y\} \xrightarrow{D} W_0^+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное борелевское множество A из $D[0, 1]$ такое, что $P(W_0^+ \in \partial A) = 0$. Предположим сначала, что $y \in (0, +\infty)$. Переходом к сопряженному случаю блуждания $\{S_n^{(\tau)}\}$ получаем, что

$$\begin{aligned} P(Z_n \in A \mid T = n, S_n \geq -y) &= \\ &= \int_{-y}^0 P(Z_n^{(\tau)} \in A, S_n^{(\tau)} \in dz \mid T^{(\tau)} = n, S_n^{(\tau)} \geq -y) \times \\ &\quad \times \frac{\gamma^n e^{-\tau z} P(T^{(\tau)} = n, S_n^{(\tau)} \geq -y)}{P(T = n, S_n \geq -y)}, \end{aligned} \quad (17.16)$$

где $Z_n^{(\tau)}(t) = S_{[nt]}^{(\tau)} / (\sigma^{(\tau)} \sqrt{n})$. Дробь в правой части (17.16), ввиду соотношения (17.3) и теоремы 17.2, стремится к

$$(c_1^{(\tau)} G_1^{(\tau)}(y) / (2c_4 G_4(y))) \exp(-\tau z)$$

равномерно по $z \in [-y, 0]$, где $c_1^{(\tau)}$, $G_1^{(\tau)}(y)$ означают то же самое для $\{S_n^{(\tau)}\}$, что c_1 , $G_1(y)$ для $\{S_n\}$. В силу локальной версии принципа инвариантности Иглхарта при $z \in [0, y]$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n^{(\tau)} \in A, S_n^{(\tau)} \geq -z \mid T^{(\tau)} = n, S_n^{(\tau)} \geq -y) &= \\ &= P(W_0^+ \in A) \frac{G_1^{(\tau)}(z)}{G_1^{(\tau)}(y)}. \end{aligned}$$

Поэтому предел правой части (17.16) при $n \rightarrow \infty$ равен

$$P(W_0^+ \in A) \int_{-y}^0 \frac{c_1^{(\tau)} \exp(-\tau z) dG_1^{(\tau)}(z)}{2c_4 G_4(y)}.$$

При $A = D[0, 1]$ получаем, что все это выражение равно 1 и, следовательно, последний интеграл равен 1. Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \in A \mid T = n, S_n \geq -y) = P(W_0^+ \in A).$$

Утверждение теоремы при $y = +\infty$ следует из доказанного и сходимости по распределению при $n \rightarrow \infty$ случайной последовательности $\{S_n \mid T = n\}$ (см. теорему 17.2). Теорема доказана.

Следующий результат представляет собою принцип инвариантности Иглхарта для случайного блуждания с отрицательным сносом, удовлетворяющего условию Крамера.

ТЕОРЕМА 17.4. В условиях теоремы 17.2 при $n \rightarrow \infty$

$$\{Z_n(t), t \in [0, 1] \mid T > n\} \xrightarrow{D} W_0^+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного борелевского множества A из $D[0, 1]$

$$P(Z_n \in A \mid T > n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z_n \in A \mid T = n + k) \frac{P(T = n + k)}{P(T > n)}$$

причем ряд сходится равномерно по n , поскольку его k -й член не превосходит $P(T = n + k) / P(T > n)$, а это отношение, в свою очередь, при достаточно больших n и при всех $k \in \mathbb{N}$ не превосходит $c\gamma^k$, где c — некоторая положительная постоянная. По теореме 17.3, если $P(W_0^+ \in \partial A) = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \in A \mid T = n + k) = P(W_0^+ \in A).$$

Следовательно, с учетом теоремы 17.2 получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \in A \mid T > n) = P(W_0^+ \in A) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_4}{c_3} \gamma^k = P(W_0^+ \in A).$$

Теорема доказана.

Лекция 18

Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона

Пусть в момент времени 0 имеется одна частица. В момент 1 она порождает k частиц с вероятностью p_k , $k \in \mathbb{N}_0$, а сама исчезает (предполагается, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$). Эти k частиц образуют первое поколение. Затем в момент времени 2 частицы первого поколения порождают независимо друг от друга и от предыстории каждая свое количество частиц в соответствии с тем же вероятностным распределением $\{p_k\}$, а сами исчезают. Получается второе поколение и т.д. Обозначим Z_n число частиц в n -ом поколении. Случайная последовательность $\{Z_n\}$ называется *ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона*.

Следует отметить почтенный возраст этой вероятностной модели и огромное количество публикаций, посвященных ей, в том числе замечательные монографии [6], [8], [10].

Введем производящую функцию числа непосредственных потомков одной частицы:

$$\varphi(s) = \mathbb{E} s^{Z_1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad s \in [-1, 1].$$

Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ число потомков от 1-й, 2-й, $\dots$ частиц первого поколения. Тогда

$$Z_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{Z_1},$$

причем $Z_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ – независимые случайные величины с одинаковой производящей функцией $\varphi(s)$. Поэтому производящая функция случайной величины Z_2 равна

$$\begin{aligned} \mathbb{E} s^{Z_2} &= \mathbb{E} s^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{Z_1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} (s^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}; Z_1 = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k) \mathbb{E} s^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \varphi^k(s) = \varphi(\varphi(s)). \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\varphi_n(s) := \mathbb{E} s^{Z_n} = \varphi(\mathbb{E} s^{Z_{n-1}}) = \varphi(\varphi_{n-1}(s)) = \varphi(\varphi(\varphi_{n-2}(s))) = \dots.$$

Среднее число непосредственных потомков одной частицы равно

$$m := \mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \varphi'(1).$$

Точно так же

$$\mathbb{E}Z_n = \varphi'_n(1) = (\varphi'(1))^n,$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}Z_n = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \varphi'(1) > 1; \\ 1, & \text{если } \varphi'(1) = 1; \\ 0, & \text{если } \varphi'(1) < 1. \end{cases}$$

В соответствии с этим процесс $\{Z_n\}$ называется *надкритическим*, если $m > 1$; *критическим*, если $m = 1$; *докритическим*, если $m < 1$.

Пусть T — продолжительность жизни процесса $\{Z_n\}$, т.е. $Z_{T-1} > 0$, а $Z_T = 0$ (следовательно, $Z_{T+1} = 0$, $Z_{T+2} = 0, \dots$). Иногда T называют *моментом вырождения* $\{Z_n\}$. Будем в дальнейшем считать, что $p_0 + p_1 < 1$.

ТЕОРЕМА 18.1. В докритическом и критическом случаях

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1,$$

т.е. процесс $\{Z_n\}$ вырождается с вероятностью 1. В надкритическом случае

$$\mathbb{P}(T < +\infty) < 1,$$

т.е. процесс продолжается неограниченно долго с положительной вероятностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вероятность вырождения

$$\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \varphi_n(0). \quad (18.1)$$

Очевидно, события $\{T \leq n\}$ не убывают с ростом n , поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(T < +\infty) := q.$$

Найдем q . В силу (18.1)

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\varphi_{n-1}(0)) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n-1}(0)\right) = \varphi(q),$$

т.е.

$$q = \varphi(q), \quad q \in [0, 1]. \quad (18.2)$$

Поскольку $\varphi''(s) > 0$, то функция $\varphi(s)$ является выпуклой вниз, $\varphi(0) = p_0 \geq 0$. Если $\varphi'(1) \leq 1$, то уравнение (18.2) имеет единственный корень $q = 1$. Если же $\varphi'(1) > 1$, то наряду с $q_2 = 1$ уравнение (18.2) имеет еще корень $q_1 \in [0, 1)$. Нетрудно показать, что $\varphi_n(0) \rightarrow q_1$ при $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением критического случая. В следующей теореме находится асимптотика при $n \rightarrow \infty$ вероятности невырождения $P(T > n)$.

ТЕОРЕМА 18.2 (КОЛМОГОРОВ). Пусть процесс $\{Z_n\}$ является критическим и $DZ_1 := 2b$, $0 < b < +\infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P(T > n) \sim \frac{1}{bn}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $P_n = P(T > n) = P(Z_n > 0)$. Тогда

$$P_n = 1 - \varphi_n(0), P_{n+1} = 1 - \varphi_{n+1}(0) \implies P_{n+1} = 1 - \varphi(1 - P_n).$$

Введем функцию $g(x) = 1 - \varphi(1 - x)$. Ясно, что

$$P_{n+1} = g(P_n).$$

Заметим, что $g(0) = 0$, $g'(0) = \varphi'(1) = 1$, $g''(0) = -\varphi''(1) = -2b$.

По формуле Тейлора

$$g(x) = x - bx^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Положим $x = P_n$ и рассмотрим последовательность $a_n = 1/P_n$. Поскольку $P_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{P_n - P_{n+1}}{P_n P_{n+1}} = \frac{P_n - g(P_n)}{P_n g(P_n)} = \\ &= \frac{bP_n^2(1 + o(1))}{P_n^2(1 - bP_n + o(P_n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b. \end{aligned}$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \sim nb \implies P_n \sim \frac{1}{bn}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 18.3 (ЯГЛОМ). Если выполнены условия теоремы 18.2, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_n}{bn} \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \xi,$$

где ξ – случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим преобразование Лапласа левой части: при $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\lambda Z_n/(bn)} \mid Z_n > 0) &= \frac{1}{\mathbb{P}(Z_n > 0)} \mathbb{E}(e^{-\lambda Z_n/(bn)}; Z_n > 0) = \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k/(bn)} \mathbb{P}(Z_n = k). \end{aligned} \quad (18.3)$$

Заметим, что при $n \rightarrow \infty$

$$e^{-\lambda/(bn)} - 1 \sim -\lambda/(bn) \sim -P_N,$$

если $N \sim n/\lambda$. Более точно, незначительно изменяя λ (на λ_n : $\lambda_n \downarrow \lambda$) для каждого из всех достаточно больших n можно подобрать такое натуральное N ($N \sim n/\lambda$), что

$$e^{-\lambda_n/(bn)} - 1 = -P_N \implies e^{-\lambda_n k/(bn)} = (1 - P_N)^k.$$

Поэтому ввиду (18.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\lambda_n Z_n/(bn)} \mid Z_n > 0) &= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) (1 - P_N)^k = \\ &= \frac{1}{P_N} \mathbb{P}(Z_{n+N} = 0, Z_n > 0) = \\ &= \frac{1}{P_n} [\mathbb{P}(T > n) - \mathbb{P}(T > n + N)] \sim \\ &\sim 1 - \frac{n}{n + N} = \frac{N}{n + N} \sim \frac{1}{1 + \lambda}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Правая часть есть преобразование Лапласа случайной величины ξ , имеющей показательное распределение с параметром 1. Осталось заметить, что

$$0 \leq \mathbb{E}(e^{-\lambda Z_n/(bn)} - e^{-\lambda_n Z_n/(bn)} \mid Z_n > 0) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E} \left(e^{-\lambda Z_n / (bn)} (\lambda_n - \lambda) \frac{Z_n}{bn} \mid Z_n > 0 \right) \leq \\ &\leq \frac{(\lambda_n - \lambda)}{bn} \mathbb{E}(Z_n \mid Z_n > 0) = \frac{(\lambda_n - \lambda)}{bn P_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

т.к. $\mathbb{E}(Z_n \mid Z_n > 0) = 1/P_n$. Теорема доказана.

Следующий результат принадлежит Феллеру и Линдваллу (см. [18], [23]).

ТЕОРЕМА 18.4. В условиях теоремы 18.2 для любого $x_0 \in (0, +\infty)$ при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[nt]}}{bn}, t \in [0, +\infty) \mid Z_0 = [bnx_0] \right\} \xrightarrow{D} Y,$$

где $Y = \{Y(t), t \in [0, +\infty)\}$ – однородный неотрицательный марковский процесс (с непрерывными траекториями), стартовый из точки x_0 , с поглощающим состоянием в точке 0 и переходной плотностью $p(t, x, y)$ при положительных x, y , преобразование Лапласа которой при $t > 0$ равно

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} p(t, x, y) dy = \exp\left(-\frac{\lambda x}{1 + \lambda t}\right) - \exp\left(-\frac{x}{t}\right), \lambda \in (0, +\infty).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 18.1. Сходимость в теореме 18.4 следует понимать как сходимость по распределению в пространстве $D[0, a]$ при любом $a \in (0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 18.2. Процесс Y является диффузионным и называется *феллеровской диффузией*. Следует отметить, что феллеровская диффузия удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dY(t) = \sqrt{2Y(t)} dW(t).$$

Приведем без доказательства следующий результат Ю. В. Прохорова, обобщающий теорему Пуассона для схемы Бернулли.

ЛЕММА 18.1. Пусть μ_n – число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p_n . Если $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = c$, $c \in (0, +\infty)$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{P}(\mu_n = k) - \mathbb{P}(\mu = k)| \leq \frac{2c}{n} \min(2, c),$$

где μ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 18.4. Зафиксируем произвольное положительное число t и установим сначала сходимость последовательности случайных величин $\{Z_{[nt]}/(bn) \mid Z_0 = [bnx_0]\}$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим те частицы из нулевого поколения, которые имеют потомков в $[nt]$ -м поколении. Пусть μ_n – их число, а $\xi_1^{(nt)}, \xi_2^{(nt)}, \dots$ – число потомков в $[nt]$ -м поколении первой, второй, ... таких частиц. Очевидно, что $\mu_n, \xi_1^{[nt]}, \xi_2^{[nt]}, \dots$ – независимые случайные величины. В силу теоремы Пуассона для схемы Бернулли (см. также лемму 18.1) с учетом теоремы 18.2 получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mu_n \xrightarrow{D} \mu, \quad (18.4)$$

где μ имеет распределение Пуассона с параметром x_0/t . Далее, по теореме Яглома при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\xi_i^{(nt)}}{bnt} \xrightarrow{D} \xi_i, \quad (18.5)$$

где случайная величина ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) имеет показательное распределение с параметром 1. Ясно, что случайные величины $\mu, \xi_1, \xi_2, \dots$ можно считать независимыми. В силу (18.4) и (18.5) при любом $x \in [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{Z_{[nt]}}{bn} \leq x \mid Z_0 = [bnx_0]\right) &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\mu_n} \xi_i^{(nt)}/(bn) \leq x\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^k \xi_i^{(nt)}/(bn) \leq x\right) \mathbf{P}(\mu_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(t \sum_{i=1}^k \xi_i \leq x\right) \mathbf{P}(\mu = k) = \mathbf{P}(t(\xi_1 + \dots + \xi_\mu) \leq x), \end{aligned} \quad (18.6)$$

причем это соотношение выполняется равномерно по $x_0 \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число, что следует из леммы 18.1. Преобразование Лапласа случайной величины

$t(\xi_1 + \dots + \xi_\mu)$ равно

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\lambda t(\xi_1 + \dots + \xi_\mu)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E} e^{-\lambda t \xi_1})^k \mathbb{P}(\mu = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \lambda t} \right)^k \frac{(x_0/t)^k}{k!} e^{-x_0/t} = \\ &= \exp \left(-\frac{\lambda x_0}{1 + \lambda t} \right), \quad \lambda \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (18.7)$$

Из соотношений (18.6) и (18.7) следует, что при любых $x \in [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{Z_{\lfloor nt \rfloor}}{bn} \leq x \mid Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor \right) &= \\ &= \int_0^x p(t, x_0, u) du + \exp(-x_0/t) \end{aligned} \quad (18.8)$$

равномерно по $x_0 \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число.

2) Установим сходимость конечномерных распределений методом математической индукции по размерности m распределения. При $m = 1$ эта сходимость уже установлена. Пусть при некотором $m \in \mathbb{N}$, произвольных моментах времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ таких, что $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$, и любых положительных числах $x_1, \dots, x_m$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_i \rfloor}}{bn} \leq x_i, \quad i = 1, \dots, m \mid Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor \right) &= \\ &= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_m} p(t_1, x_0, u_1) \times \\ &\quad \times p(t_2 - t_1, u_1, u_2) \dots p(t_m - t_{m-1}, u_{m-1}, u_m) du_1 \dots du_m. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Запишем пользуясь тем, что ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона является однородным марковским процессом, что при $t_{m+1} > t_m$ и произвольном положительном x_{m+1}

$$\mathbb{P} \left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_i \rfloor}}{bn} \leq x_i, \quad i = 1, \dots, m+1 \mid Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{x_m} \mathbb{P} \left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_i \rfloor}}{bn} \leq x_i, i = 1, \dots, m; \right. \\
&\quad \left. \frac{Z_{\lfloor nt_m \rfloor}}{bn} \in du_m \mid Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor \right) \times \\
&\quad \times \mathbb{P} \left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_{m+1} \rfloor}}{bn} \leq x_{m+1} \mid Z_{\lfloor nt_m \rfloor} = \lfloor bnu_m \rfloor \right),
\end{aligned}$$

причем вторая вероятность равна

$$\mathbb{P} \left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_{m+1} \rfloor} - \lfloor nt_m \rfloor}{bn} \leq x_{m+1} \mid Z_0 = \lfloor bnu_m \rfloor \right)$$

и сходится, ввиду (18.8), равномерно по $u_m \in [0, x_m]$ к

$$\int_0^{x_{m+1}} p(t_{m+1} - t_m, u_m, u_{m+1}) du_{m+1}.$$

Откуда, учитывая (18.9), получаем, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_i \rfloor}}{bn} \leq x_i, i = 1, \dots, m+1 \mid Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor \right) = \\
&= \int_0^{x_m} \left\{ \left[\int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{m-1}} p(t_1, x_0, u_1) \times \dots \times \right. \right. \\
&\quad \times p(t_{m-1} - t_{m-2}, u_{m-2}, u_{m-1}) du_1 \dots du_{m-1} \Big] \times \\
&\quad \times p(t_m - t_{m-1}, u_{m-1}, u_m) du_m \times \\
&\quad \times \left[\int_0^{x_{m+1}} p(t_{m+1} - t_m, u_m, u_{m+1}) du_{m+1} \right] \Big\} = \\
&= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{m+1}} p(t_1, x_0, u_1) \times \dots \times \\
&\quad \times p(t_{m+1} - t_m, u_m, u_{m+1}) du_1 \dots du_{m+1}.
\end{aligned}$$

Итак, доказана справедливость (18.9) с заменой m на $(m+1)$. Случай, когда $x_1 > 0, \dots, x_{m-1} > 0$, а $x_m = 0$ рассматривается аналогично. Следовательно, сходимость конечномерных распределений установлена.

3) Положим

$$Z_n^*(t) = \frac{Z_{\lfloor nt \rfloor}}{bn}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Покажем, что при любых $\varepsilon, a \in (0, +\infty)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w''_{Z_n^*}(\delta; 0, a) \geq \varepsilon \mid Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor) = 0 \quad (18.10)$$

равномерно по $x_0 \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число (определение модуля непрерывности $w''_x(\delta)$ при $x \in D[0, 1]$ дано в лекциях 2–3; если в этом определении отрезок $[0, 1]$ заменить на $[a, b]$ при $0 \leq a \leq b < +\infty$, то получим определение $w''_x(\delta; a, b)$ при $x \in D[a, b]$).

ЛЕММА 18.2. *Если i, j, k, l – неотрицательные целые числа, $i \leq j \leq k$, то при $\gamma = 4/3$*

$$E^{(l)}(|Z_k - Z_j|^\gamma |Z_j - Z_i|^\gamma) \leq K_1(k - i)^\gamma l^{\gamma/2} (jl + l^2)^{\gamma/4},$$

где K_1 – положительная постоянная, не зависящая от i, j, k, l ; $E^{(l)}(\dots)$ означает $E(\dots \mid Z_0 = l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$E^{(l)}(|Z_k - Z_j|^\gamma |Z_j - Z_i|^\gamma) = E^{(l)}(|Z_j - Z_i|^\gamma E^{(Z_j)}(|Z_k - Z_j|^\gamma)).$$

Поскольку $\gamma/2 < 1$, то по неравенству Йенсена (учитываем, что $DZ_k = kDZ_1$)

$$E^{(Z_j)}(|Z_k - Z_j|^\gamma) \leq (E^{(Z_j)}(|Z_k - Z_j|^2))^{\gamma/2} = (2bZ_j(k - j))^{\gamma/2}.$$

Теперь положим $p = 3/2$, $q = 3$ ($1/p + 1/q = 1$, $1/p = \gamma/2$, $1/q = \gamma/4$). По неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} E^{(l)}(|Z_j - Z_i|^\gamma Z_j^{\gamma/2}) &= E^{(l)}(|Z_j - Z_i|^2)^{1/p} (Z_j^2)^{1/q} \leq \\ &\leq (E^{(l)}(|Z_j - Z_i|^2))^{1/p} (E^{(l)}(Z_j^2))^{1/q} = \\ &= (E^{(l)}(|Z_j - Z_i|^2))^{\gamma/2} (E^{(l)}(Z_j^2))^{\gamma/4} = \\ &= (2bl(j - i))^{\gamma/2} (2bjl + l^2)^{\gamma/4}. \end{aligned}$$

Осталось учесть, что $k - j \leq k - i$, $j - i \leq k - i$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 18.2 при $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq a$

$$E(|Z_n^*(t) - Z_n^*(t_1)|^\gamma |Z_n^*(t_2) - Z_n^*(t_1)|^\gamma \mid Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_1 ([nt_2] - [nt_1])^\gamma \times \\
&\quad \times ([bnx_0])^{\gamma/2} ([nt] [bnx_0] + ([bnx_0])^2)^{\gamma/4} / (bn)^{2\gamma} \leq \\
&\leq K_2 (t_2 - t_1)^\gamma,
\end{aligned} \tag{18.11}$$

где K_2 – положительная постоянная, не зависящая от t_1, t, t_2 ; постоянная K_2 может быть выбрана общей для всех $x_0 \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число.

Вспоминая лемму 2.6 и учитывая (18.11), получаем соотношение (18.10), которое выполняется равномерно по $x_0 \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число.

4) Из сходимости конечномерных распределений и соотношения (18.10), ввиду теоремы 2.2, следует утверждение доказываемой теоремы.

Следующий результат установлен Ламперти, Неем и Дарреттом (см. [16], [21]).

ТЕОРЕМА 18.5. В условиях теоремы 18.2 при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[nt]}}{bn}, t \in [0, 1] \mid T > n \right\} \xrightarrow{D} Y^+,$$

где $Y^+ = \{Y^+(t), t \in [0, 1]\}$ – неоднородный марковский процесс (с непрерывными траекториями), стартовый из нуля и положительный при $t \in (0, 1]$, с переходной плотностью

$$\begin{aligned}
p(s, x; t, y) = \\
= \begin{cases} e^{-y}, & s = 0, \quad t = 1, \quad x = 0, \quad y > 0; \\ t^{-2} e^{-y/t} [1 - e^{-y/(1-t)}], & \\ 0 = s < t < 1, & x = 0, \quad y > 0; \\ p(t - s, x, y) \frac{1 - \exp(-y/(1-t))}{1 - \exp(-x/(1-s))}, & \\ 0 < s < t < 1, & x > 0, \quad y > 0; \\ p(1 - s, x, y) / [1 - \exp(-x/(1-s))], & \\ 0 < s < t = 1, & x > 0, \quad y > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Здесь $p(t, x, y)$ та же функция, что и в теореме 18.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 18.3. Процесс Y^+ является диффузионным с коэффициентами сноса и диффузии

$$a(s, x) = 2 \frac{x/(1-s)}{\exp(x/(1-s)) - 1} \quad \text{и} \quad \sigma^2(s, x) = x [2 + a(s, x)]$$

соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала сходимости конечно-мерных распределений. Рассмотрим $m \in \{2, 3, \dots\}$ и моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1$. Покажем, что для любых положительных $x_1, \dots, x_m$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n^*(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid T > n) &= \\ &= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_m} p(0, 0; t_1, y_1) \times \\ &\quad \times p(t_1, y_1; t_2, y_2) \dots p(t_{m-1}, y_{m-1}; 1, y_m) dy_1 \dots dy_m. \end{aligned} \quad (18.12)$$

Установим (18.12) индукцией по m . При $m = 2$

$$\begin{aligned} P(Z_n^*(t_1) \leq x_1, Z_n^*(1) \leq x_2 \mid T > n) &= \\ &= \int_0^{x_1} P\left(\frac{Z_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{bn} \in dy_1 \mid T > \lfloor nt_1 \rfloor\right) \times \\ &\quad \times P\left(0 < \frac{Z_{n - \lfloor nt_1 \rfloor}}{bn} \leq x_2 \mid Z_0 = \lfloor bny_1 \rfloor\right) \frac{P(T > \lfloor nt_1 \rfloor)}{P(T > n)}. \end{aligned}$$

Откуда, применяя теоремы 18.2, 18.3 и соотношение (18.8), получаем, что предел правой части равен

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \frac{1}{t_1^2} e^{-y_1/t_1} dy_1 \int_0^{x_2/(1-t_1)} p\left(1, \frac{y_1}{1-t_1}, y_2\right) dy_2 &= \\ &= \int_0^{x_1} \frac{1}{t_1^2} e^{-y/t_1} dy_1 \int_0^{x_2} p(1-t_1, y_1, y_2) dy_2 = \\ &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} p(0, 0; t_1, y_1) p(1-t_1, y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

(здесь использовано, что $cp(ct, cx, cy) = p(t, x, y)$, $c > 0$). Итак, соотношение (18.12) при $m = 2$ доказано.

Пусть (18.12) справедливо при некотором $m \geq 2$. Тогда, снова применяя теорему 18.2 и соотношение (18.8), получаем, что

$$\begin{aligned} P(Z_n^*(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m+1 \mid T > n) &= \\ &= \int_0^{x_m} P(Z_n^*(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m-1; \\ &\quad Z_n^*(t_m) \in dy_m \mid T > \lfloor t_m n \rfloor) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{P} \left(0 < \frac{Z_{n-\lfloor nt_m \rfloor}}{bn} \leq x_{m+1} \mid Z_0 = \lfloor bny_m \rfloor \right) \frac{\mathbf{P}(T > \lfloor t_m n \rfloor)}{\mathbf{P}(T > n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m^2} \int_0^{x_m/t_m} dy_m \left\{ \left[\int_0^{x_1/t_m} \dots \int_0^{x_{m-1}/t_m} p \left(0, 0; \frac{t_1}{t_m}, y_1 \right) \times \right. \right. \\
& \times p \left(\frac{t_1}{t_m}, y_1; \frac{t_2}{t_m}, y_2 \right) \dots p \left(\frac{t_{m-1}}{t_m}, y_{m-1}; 1, y_m \right) dy_1 \dots dy_{m-1} \Big] \times \\
& \times \left. \int_0^{\frac{x_{m+1}}{1-t_m}} p \left(1, \frac{y_m}{1-t_m}, y_{m+1} \right) dy_{m+1} \right\}.
\end{aligned}$$

Учитывая связь $p(s, x; t, y)$ с $p(t-s, x, y)$ видим, что правая часть равна

$$\begin{aligned}
& \int_0^{x_1/t_m} \dots \int_0^{x_{m-1}/t_m} \int_0^{x_{m+1}/(1-t_m)} \frac{1}{t_1^2} e^{-y_1 t_m/t_1} \times \\
& \times p \left(\frac{t_2 - t_1}{t_m}, y_1, y_2 \right) \dots p \left(\frac{t_m - t_{m-1}}{t_m}, y_{m-1}, y_m \right) \times \\
& \times p \left(1, \frac{y_m}{1-t_m}, y_{m+1} \right) dy_1 \dots dy_{m+1} = \\
& = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_m} \int_0^{x_{m+1}} \frac{1}{t_1^2} e^{-y_1/t_1} \times \\
& \times p(t_2 - t_1, y_1, y_2) \dots p(t_m - t_{m-1}, y_{m-1}, y_m) \times \\
& \times p(1 - t_m, y_m, y_{m+1}) dy_1 \dots dy_{m+1} = \\
& = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{m+1}} p(0, 0; t_1, y_1) \times \\
& \times p(t_1, y_1; t_2, y_2) \dots p(t_{m-1}, y_m; 1, y_{m+1}) dy_1 \dots dy_{m+1}.
\end{aligned}$$

Итак, соотношение (18.12) с заменой m на $(m+1)$ доказано. Следовательно, сходимость конечномерных распределений установлена.

Покажем, что любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w''_{Z_n^*}(\delta) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0. \quad (18.13)$$

Заметим, что при $\gamma \in (0, 1)$ и $\delta < \gamma$

$$w''_{Z_n^*}(\delta) \leq \max_{i \leq \gamma n} \frac{Z_i}{bn} + w''_{Z_n^*}(\delta; \gamma - \delta, 1). \quad (18.14)$$

Случайная последовательность $\{Z_i/bn\}$ является мартингалом, поэтому по неравенству Дуба

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \gamma n} \frac{Z_i}{bn} \geq \varepsilon \mid T > n\right) &\leq \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \gamma n} \frac{Z_i}{bn} \geq \varepsilon\right) / \mathbf{P}(T > n) \leq \\ &\leq \frac{\mathbf{E} Z_{\gamma n}^2}{b^2 n^2 \varepsilon^2 \mathbf{P}(T > n)} \leq \frac{2b\gamma n + 1}{b^2 n^2 \varepsilon^2 \mathbf{P}(T > n)}. \end{aligned}$$

Вспоминая теорему 18.2, получаем, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \gamma n} \frac{Z_i}{bn} \geq \varepsilon \mid T > n\right) = 0. \quad (18.15)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(w''_{Z_n^*}(\delta; \gamma - \delta, 1) \geq \varepsilon \mid T > n) &\leq \\ &\leq \frac{1}{\mathbf{P}(T > n)} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z_{(\gamma-\delta)n}}{bn} \in dx, T > (\gamma - \delta)n\right) \times \\ &\times \mathbf{P}(w''_{Z_n^*}(\delta) \geq \varepsilon \mid Z_0 = \lfloor bnx \rfloor). \end{aligned}$$

Разобьем интеграл на два при $A > 0$: в первом $I_1(n, \gamma, A)$ интегрирование ведется от 0 до A , а во втором $I_2(n, \gamma, A)$ – от A до $+\infty$. Очевидно, что

$$I_2(n, \gamma, A) \leq \mathbf{P}\left(\frac{Z_{(\gamma-\delta)n}}{bn} > A \mid T > (\gamma - \delta)n\right) \frac{\mathbf{P}(T > (\gamma - \delta)n)}{\mathbf{P}(T > n)}.$$

Из теорем 18.2 и 18.3 следует, что

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_2(n, \gamma, A) = 0. \quad (18.16)$$

Ввиду (18.10)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_1(n, \gamma, A) = 0. \quad (18.17)$$

Из (18.14)–(18.17) следует (18.13).

Из сходимости конечномерных распределений и соотношения (18.13), ввиду теоремы 2.2, следует утверждение доказываемой теоремы.

Лекции 19–20

Ветвящиеся процессы в случайной среде

При рассмотрении ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона предполагалось, что частицы в разных поколениях размножаются в соответствии с одним и тем же вероятностным законом. Предположим теперь, что эти законы зависят от номера поколения, т.е. при $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$P(\text{одна частица из } n\text{-го поколения порождает } k \text{ частиц}) = p_k^{(n)}.$$

Положим $\Pi_n = \{p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Совокупность $\Pi_0, \Pi_1, \dots$ называется *средой* (в данном случае *изменяющейся*, в отличие от *постоянной* для процесса Гальтона–Ватсона). Все остальные предположения (одна частица в нулевом поколении, частицы размножаются независимо друг от друга и от предыстории процесса) сохраним. Получившийся процесс называется *ветвящимся процессом в изменяющейся среде*.

Обозначим Z_n число частиц в n -м поколении этого процесса. Интересно отметить, что случайная последовательность $\{Z_n\}$ является марковской цепью, и если $p_0^{(n)} > 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то п.н. существует предел $\{Z_n\}$ при $n \rightarrow \infty$, который может равняться и $+\infty$. Действительно, если, например, цепь $\{Z_n\}$ имеет две предельные точки $m, n \in \mathbb{N}$, то она совершает бесконечное число переходов из состояния m в состояние n , но вероятность этого события равна нулю, поскольку вероятность хотя бы одного перехода из состояния m в состояние n меньше единицы (есть шанс, что цепь выродится за один шаг). Оказывается (см. [24]), что если $p_1^{(n)} > 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то предел $\{Z_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ равен некоторому натуральному числу с положительной вероятностью тогда и только тогда, когда

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_1^{(n)} > 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p_1^{(n)}) < +\infty.$$

Это совсем просто понять, когда предел $\{Z_n\}$ равен единице. Читателю предоставляется возможность доказать справедливость данного утверждения в случае, когда этот предел больше единицы.

Рассмотренная модель ветвящегося процесса в изменяющейся среде имеет один недостаток, состоящий в том, что затруднительно хранить информацию о счетном числе законов размножения. Поэтому возникает мысль считать, что сами эти законы порождены некоторым случайным механизмом, а при условии, что они зафиксированы, размножение частиц происходит так, как описано выше.

Всюду в дальнейшем будем считать, что случайные последовательности $\Pi_0, \Pi_1, \dots$ независимы и одинаково распределены. Совокупность $\Pi_0, \Pi_1, \dots$ называется *случайной средой*.

Формализуем приведенное выше описание процесса. Введем производящие функции числа непосредственных потомков:

$$\varphi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} s^k, \quad s \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

В случае ветвящегося процесса в изменяющейся среде производящая функция числа частиц в n -ом поколении равна $\varphi_0(\varphi_1(\varphi_2(\dots\varphi_{n-1}(s)\dots)))$.

Ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС) определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^{\xi_n} \mid \Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}) &= \\ &= \varphi_0(\varphi_1(\varphi_2(\dots\varphi_{n-1}(s)\dots))), \quad s \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (19.1)$$

где ξ_n означает число частиц в n -м поколении, $\xi_0 = 1$. Таким образом, при условии, что случайная среда фиксирована, получается ветвящийся процесс в изменяющейся среде.

Положим

$$\hat{P}(\dots) = P(\dots \mid \Pi_0, \Pi_1, \dots), \quad \hat{E}(\dots) = E(\dots \mid \Pi_0, \Pi_1, \dots).$$

По свойству условного математического ожидания для любого борелевского множества B из R^∞

$$P(\{\xi_n\} \in B) = E\hat{P}(\{\xi_n\} \in B). \quad (19.2)$$

Из (19.1) вытекает, что

$$\hat{E}\xi_n = \varphi'_0(1)\varphi'_1(1)\dots\varphi'_{n-1}(1). \quad (19.3)$$

В дальнейшем предполагается, что случайные величины $p_0^{(0)}, p_1^{(0)}$ положительны п.н. Положим

$$X_n = \ln \varphi'_{n-1}(1), n \in \mathbb{N}.$$

Случайные величины $X_1, X_2, \dots$ являются независимыми и одинаково распределенными. Рассмотрим случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

которое называется *сопровождающим* для процесса $\{\xi_n\}$. Тогда (19.3) означает, что

$$\hat{E}\xi_n = e^{S_n}. \quad (19.4)$$

Поэтому в силу (19.2)

$$E\xi_n = E(\hat{E}\xi_n) = E e^{S_n}. \quad (19.5)$$

Будем в дальнейшем предполагать, что математическое ожидание EX_1 определено, т.е. либо конечно, либо равно $+\infty$ или $-\infty$. Случайное блуждание $\{S_n\}$ ведет себя по-разному в зависимости от знака сноса. Если $0 < EX_1 \leq +\infty$, то в силу усиленного закона больших чисел $S_n \rightarrow +\infty$ п.н. при $n \rightarrow \infty$ и по лемме Фату $E\xi_n \rightarrow +\infty$. Если же $0 > EX_1 \geq -\infty$, то $S_n \rightarrow -\infty$ п.н. при $n \rightarrow \infty$. Поэтому кажется разумной следующая классификация. ВПСС называется *надкритическим*, если $0 < EX_1 \leq +\infty$; *докритическим*, если $-\infty \leq EX_1 < 0$; *критическим*, если $EX_1 = 0$.

ВПСС вырождается с вероятностью 1, если он является критическим или докритическим. Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{P}(\xi_n > 0) &= 1 - \varphi_0(\varphi_1(\dots(\varphi_{n-1}(0))\dots)) \leq \\ &\leq \min_{1 \leq k \leq n} \varphi'(1)\varphi'(1)\dots\varphi'_{k-1}(1) = \min_{1 \leq k \leq n} e^{S_k} = e^{\min_{1 \leq k \leq n} S_k}. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Поэтому

$$P(\xi_n > 0) \leq E e^{\min_{0 \leq k \leq n} S_k}. \quad (19.7)$$

При $EX_1 \leq 0$ $\min_{0 \leq k \leq n} S_k \rightarrow -\infty$ и по теореме о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n > 0) = 0,$$

значит, ВПСС $\{\xi_n\}$ вырождается с вероятностью 1. В надкритическом случае (при некоторых дополнительных предположениях) случайный процесс $\{\xi_n\}$ не вырождается с положительной вероятностью.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением критического случая. При этом будем предполагать, что $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Нашей целью является нахождение асимптотики вероятности невырождения $P(\xi_n > 0)$ и теорема о сходимости по растресделению в $D[0, 1]$ последовательности случайных процессов

$$\left\{ \frac{\xi_{[nt]}}{\hat{E}\xi_{[nt]}}, t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0 \right\}$$

при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что сходимость $\xi_{[nt]}/\hat{E}\xi_{[nt]}$ п.в. обеспечивается теоремой Дуба о сходимости мартингалов, поскольку случайная последовательность $\{\xi_n/\hat{E}\xi_n\}$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является неотрицательным мартингалом. Рассмотрение условия $\{\xi_n > 0\}$ вызвано тем, что процесс $\{\xi_n\}$ вырождается с вероятностью 1.

Ввиду (19.7) ясно, что событие $\{\xi_n > 0\}$ связано с такими траекториями сопровождающего случайного блуждания $\{S_n\}$, что $\min_{0 \leq k \leq n} S_k > -x$ при положительных x , близких к нулю.

Положим при $n \in \mathbb{N}_0$

$$L_n = \min_{0 \leq i \leq n} S_i.$$

Для блуждания $\{S_n\}$ рассмотрим последовательность строгих нижних лестничных моментов $T'_1, T'_2, \dots$ и введем функцию

$$v(x) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\infty} P(S_{T'_i} \geq -x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В лекции 15 (см. теорему 15.3 и соотношения (15.16)–(15.18)) показано, что для $x \in [0, +\infty)$ при $n \rightarrow \infty$

$$P(L_n \geq -x) \sim \frac{c_0 v(x)}{\sqrt{n}}, \quad (19.8)$$

где c_0 – положительная постоянная; существует такая положительная постоянная K , не зависящая от x , n , что при всех $x \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$P(L_n \geq -x) \leq \frac{K v(x)}{\sqrt{n}}; \quad (19.9)$$

функция $v(x)$ является гармонической в следующем смысле:

$$\mathbb{E}v(x + X_1) = v(x), \quad x \geq 0; \quad (19.10)$$

наконец, при $x \rightarrow +\infty$

$$v(x) = x/\mathbb{E}S_{T'} + O(1). \quad (19.11)$$

Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N}$ минимальные σ -алгебры, образованные $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$:

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n).$$

Последовательность $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$ образует фильтрацию $\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 19.1. *Случайная последовательность*

$$v(S_n)I\{L_n \geq 0\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

образует мартингал относительно фильтрации F с мерой $\mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется показать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(v(S_{n+1})I\{L_{n+1} \geq 0\} \mid \mathfrak{F}_n) = v(S_n)I\{L_n \geq 0\}. \quad (19.12)$$

Действительно,

$$v(S_{n+1})I\{L_{n+1} \geq 0\} = v(S_n + X_{n+1})I\{L_n \geq 0\},$$

поэтому

$$\mathbb{E}(v(S_{n+1})I\{L_{n+1} \geq 0\} \mid \mathfrak{F}_n) = I\{L_n \geq 0\} \mathbb{E}(v(S_n + X_{n+1}) \mid \mathfrak{F}_n).$$

Поскольку функция $v(x)$ является гармонической (см. (19.10))

$$\mathbb{E}(v(S_n + X_{n+1}) \mid \mathfrak{F}_n) = v(S_n),$$

что и приводит к (19.12). Лемма доказана.

Введем вероятностные меры $\mathbb{P}_n^+$ на $\mathfrak{F}_n$:

$$d\mathbb{P}_n^+ = v(S_n)I\{L_n \geq 0\} d\mathbb{P}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду леммы 19.1 они согласованы, поэтому (возможно с заменой исходного вероятностного пространства) существует такая мера

P^+ , определенная на минимальной σ -алгебре, содержащей все σ -алгебры $\mathfrak{F}_n$, что ограничение P^+ на $\mathfrak{F}_n$ совпадает с P_n^+ , $n \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, для любой $\mathfrak{F}_n$ -измеримой знакоопределенной или ограниченной случайной величины Y_n , $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство

$$E^+ Y_n = E(Y_n v(S_n) I \{L_n \geq 0\}), \quad (19.13)$$

где E^+ означает математическое ожидание, соответствующее мере P^+ .

ЛЕММА 19.2. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда для любой $\mathfrak{F}_k$ -измеримой ограниченной случайной величины U_k , $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(U_k | L_n \geq 0) = E^+ U_k. \quad (19.14)$$

Если, кроме того, последовательность $U_1, U_2, \dots$ равномерно ограничена, согласована с фильтрацией F и сходится P^+ -н.н. к случайной величине U_∞ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(U_n | L_n \geq 0) = E^+ U_\infty. \quad (19.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} E(U_k | L_n \geq 0) &= E(U_k I \{L_k \geq 0\} I \{L_{k,n} \geq -S_k\}) / P(L_n \geq 0) = \\ &= E(U_k I \{L_k \geq 0\} P(L_{k,n} \geq -x) |_{x=S_k}) / P(L_n \geq 0), \end{aligned}$$

где $L_{k,n} = \min_{0 \leq i \leq n-k} (S_{k+i} - S_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Откуда по теореме о мажорируемой сходимости с учетом (19.8), (19.9) и (19.13) получаем (19.14).

Выберем произвольное число $\gamma > 1$. Тогда аналогично получаем, что при $k \leq n$

$$\begin{aligned} |E(U_n - U_k | L_{\gamma n} \geq 0)| &= \\ &= |E((U_n - U_k) I \{L_n \geq 0\} P(L_{(\gamma-1)n} \geq -x) |_{x=S_n})| / P(L_{\gamma n} \geq 0) \\ &\leq K_1 E(|U_n - U_k| v(S_n); L_n \geq 0) = K_1 E^+ |U_n - U_k|, \end{aligned} \quad (19.16)$$

где K_1 – положительная постоянная, не зависящая от k и n . Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, а затем при $k \rightarrow \infty$, получаем из (19.16), что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E(U_n | L_{\gamma n} \geq 0) - E^+ U_\infty \leq 0,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(U_n | L_{\gamma n} \geq 0) - \mathbb{E}^+ U_\infty \geq 0.$$

Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(U_n | L_{\gamma n} \geq 0) = \mathbb{E}^+ U_\infty.$$

Для справедливости (19.15) осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n | L_{\gamma n} \geq 0) &= \frac{\mathbb{P}(L_n \geq 0)}{\mathbb{P}(L_{\gamma n} \geq 0)} \mathbb{E}(U_n | L_n \geq 0) - \\ &\quad - \frac{1}{\mathbb{P}(L_{\gamma n} \geq 0)} \mathbb{E}(U_n; n < T'_1 \leq \gamma n), \end{aligned}$$

причем, ввиду соотношения (19.8), рассматриваемого при $x = 0$,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(n < T'_1 \leq \gamma n)}{\mathbb{P}(L_{\gamma n} \geq 0)} = 0.$$

Лемма доказана.

Случайная последовательность $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ при замене исходной вероятностной меры $\mathbb{P}$ на $\mathbb{P}^+$ перестает быть случайным блужданием, но является, как нетрудно понять, однородной неотрицательной марковской цепью с переходной функцией

$$\mathbb{P}^+(x, dy) = \frac{v(y)}{v(x)} \mathbb{P}(x + X_1 \in dy), \quad x, y \geq 0.$$

Эта марковская цепь получила в англоязычной литературе название *random walk conditioned to stay positive* и является популярным объектом научных исследований. Рассмотрим некоторые свойства указанной марковской цепи.

Введем случайную величину

$$\nu = \min \{m \geq 1: S_{m+n} \geq S_m \text{ для любого } n \in \mathbb{N}_0\},$$

т.е. ν – первый среди всех таких моментов времени, когда будущая траектория лежит не ниже положения в этот момент. Другими словами, случайный момент ν является временем наступления *первого перспективного минимума* случайной последовательности $\{S_n\}$. Напомним, что τ'_1 означает первый слабый верхний лестничный момент для $\{S_n\}$. Следующий, важный для дальнейшего результат принадлежит Танака (см. [26]).

ЛЕММА 19.3. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, и исходная мера P заменена на P^+ . Тогда $\nu < +\infty$ P^+ -п.н. и

1) случайные последовательности $\{S_n\}$ и $\{S_n^*\}$, где $S_n^* = S_{\nu+n} - S_\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$, имеют одинаковое распределение;

2) случайные последовательности $(\nu, S_1, \dots, S_\nu)$ и $\{S_n^*\}$ независимы;

3) при всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \geq 0$ выполняется равенство

$$P^+(\nu = k, S_\nu \in dx) = P(\tau'_1 = k, S_{\tau'_1} \in dx).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \geq 0$. Ввиду монотонности функции $v(x)$

$$\begin{aligned} E^+\left(\sum_{n=0}^{+\infty} I\{S_n \leq x\}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} E^+ I\{S_n \leq x\} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} E(I\{S_n \leq x\} v(S_n); L_n \geq 0) \leq \\ &\leq v(x) \sum_{n=0}^{+\infty} E(I\{S_n \leq x\}; L_n \geq 0) = \\ &= v(x) \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n \leq x, L_n \geq 0) < +\infty \quad (19.17) \end{aligned}$$

(по поводу последней суммы см. соотношение (15.15)). Из соотношения (19.17) следует, что марковская цепь $\{S_n\}$ уходит в $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$ P^+ -п.н. Но это означает, что $\nu < +\infty$ P^+ -п.н. Действительно, $S_1 \geq 0$ и существует такое натуральное число n_0 , что $S_n > S_1$ при $n > n_0$. Тогда ν является моментом первого достижения минимума для последовательности $S_1, \dots, S_{n_0}$.

Положим

$$h_z(x) = \frac{v(x-z)}{v(x)}, \quad x, z \in [0, +\infty).$$

Заметим, что $0 \leq h_z(x) \leq 1$ при всех $x, z \in [0, +\infty)$; $h_z(x) = 0$ при $0 \leq x < z$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_z(x) = 1$ при $z \in [0, +\infty)$, так как $v(x) \rightarrow +\infty$ и $v(x) - v(x-z) = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$ (см. соотношение (19.11)). Кроме того, в силу (19.10)

$$\int_0^{+\infty} h_z(y) P^+(x, dy) = h_z(x), \quad 0 \leq z \leq x.$$

Поэтому случайная последовательность $\{h_z(S_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ является мартингалом относительно фильтрации $\mathfrak{F}$ и вероятностной меры P^+ .

Положим для $z > 0$ и $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sigma_{z,k} = \min \{n : n \geq k, S_n < z\}.$$

Это – марковский момент относительно фильтрации $\mathfrak{F}$, поэтому случайная последовательность $\{h_z(S_{n \wedge \sigma_{z,k}}), n \in \mathbb{N}_0\}$ при $z > 0$ и $k \in \mathbb{N}_0$ является мартингалом относительно фильтрации $\mathfrak{F}$ и вероятностной меры P^+ . Следовательно, при $n \geq k, z > 0, x \geq 0$

$$E^+(h_z(S_{n \wedge \sigma_{z,k}}) \mid S_k = x) = h_z(x). \quad (19.18)$$

Так как $S_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ P^+ -п.н., то из (19.18) по теореме о мажорируемой сходимости получаем, что при $k \in \mathbb{N}_0, z > 0, x \geq 0$

$$P^+(S_k \geq z, S_{k+1} \geq z, \dots \mid S_k = x) = h_z(x).$$

Поэтому, полагая $x_0 = y_0 = 0$, находим, что при $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P^+(\nu = k, S_1 \in dx_1, \dots, S_k \in dx_k, S_1^* \in dy_1, \dots, S_m^* \in dy_m) &= \\ &= I\{x_1 > x_k, \dots, x_{k-1} > x_k\} I\{y_1 \geq 0, \dots, y_{m-1} \geq 0\} \times \\ &\times \prod_{i=1}^k P^+(x_{i-1}, dx_i) \prod_{j=1}^m P^+(y_{j-1} + x_k, dy_j + x_k) h_{x_k}(y_m + x_k) = \\ &= I\{x_1 > x_k, \dots, x_{k-1} > x_k\} \times \\ &\times \prod_{i=1}^k P^+(x_{i-1}, dx_i) h_{x_k}(x_k) \prod_{j=1}^m P^+(y_{j-1}, dy_j). \end{aligned} \quad (19.19)$$

Здесь учтено, что

$$\begin{aligned} P^+(y_{j-1} + x_k, dy_j + x_k) &= \\ &= \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} P(y_{j-1} + x_k + X_1 \in dy_j + x_k) = \\ &= \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} P(y_{j-1} + X_1 \in dy_j) = \\ &= \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} \frac{v(y_{j-1})}{v(y_j)} P^+(y_{j-1}, dy_j) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} h_{x_k}(y_m + x_k) \prod_{j=1}^m \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} \frac{v(y_{j-1})}{v(y_j)} = \\ = \frac{v(y_m)}{v(y_m + x_k)} \prod_{j=1}^m \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} \frac{v(y_{j-1})}{v(y_j)} = \frac{1}{v(x_k)} = h_{x_k}(x_k). \end{aligned}$$

Из соотношения (19.19) следует, что

$$\begin{aligned} P^+(\nu = k, S_1 \in dx_1, \dots, S_k \in dx_k, S_1^* \in dy_1, \dots, S_m^* \in dy_m) = \\ = P^+(\nu = k, S_1 \in dx_1, \dots, S_k \in dx_k) P^+(S_1^* \in dy_1, \dots, S_m^* \in dy_m), \end{aligned}$$

что означает справедливость утверждений 1) и 2) леммы.

Докажем утверждение 3):

$$\begin{aligned} P^+(\nu = k, S_\nu \in dx) = \\ = P^+(S_k \in dx, S_k - S_{k-1} < 0, \dots, S_k - S_1 < 0) h_x(x) = \\ = P(S_k \in dx, S_k - S_{k-1} < 0, \dots, S_k - S_1 < 0) \times \\ \times v(x) I\{L_k \geq 0\} \frac{1}{v(x)} = \\ = P(S_k \in dx, S_k - S_{k-1} < 0, \dots, S_k - S_1 < 0) = \\ = P(S_k \in dx, S_1 < 0, \dots, S_{k-1} < 0) = P(\tau'_1 = k, S_{\tau'_1} \in dx) \end{aligned}$$

(предпоследнее равенство получается переходом к двойственному случайному блужданию). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 19.1. В условиях доказанной леммы можно получить более сильный результат. Положим $\Pi_n^* = \Pi_{\nu+n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда P^+ -п.н.

1) $(\Pi_0, \Pi_1, \dots)$ и $(\Pi_0^*, \Pi_1^*, \dots)$ независимы и одинаково распределены;

2) $(\nu, \Pi_0, \dots, \Pi_{\nu-1})$ и $(\Pi_0^*, \Pi_1^*, \dots)$ независимы.

Положим

$$\eta_n = \frac{\varphi''_{n-1}(1)}{(\varphi'_{n-1}(1))^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что пары $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ независимы и одинаково распределены относительно исходной меры P .

Пусть $\ln^+ x$ означает $\ln(\max(x, 1))$, $x \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 19.4. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, и при некотором $\varepsilon > 0$

$$E(\ln^+ \eta_1)^{2+\varepsilon} < +\infty. \quad (19.20)$$

Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_{k+1} e^{-S_k} < +\infty$ P^+ -п.н.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем последовательность моментов наступления перспективных минимумов случайной последовательности $\{S_n\} : \nu(0) = 0, \nu(1) = \nu, \nu(2) = \min\{m > \nu(1) : S_{m+n} \geq S_m \text{ для любого } n \in \mathbb{N}_0\}, \dots$. В силу леммы 19.3 (если исходная мера P заменена на P^+) случайные величины $S_{\nu(1)}, S_{\nu(2)} - S_{\nu(1)}, \dots$ независимы и одинаково распределены, причем (см. теорему 15.1) $0 < E^+ S_{\nu(1)} < +\infty$. Поэтому, ввиду усиленного закона больших чисел, существует такая положительная постоянная c , что при всех достаточно больших j выполняется P^+ -п.н. неравенство

$$S_{\nu(j)} \geq cj. \quad (19.21)$$

Кроме того, случайные величины $\nu(1), \nu(2) - \nu(1), \dots$ также являются независимыми и одинаково распределенными, причем (см. теорему 15.2)

$$P^+(\nu_1 > n) = P(\tau'_1 > n) = O(1/\sqrt{n}), \quad n \rightarrow +\infty,$$

поэтому

$$E^+ \nu_1^{1/2-\delta} < +\infty$$

для любого $\delta \in (0, 1/2)$. Это означает, ввиду усиленного закона больших чисел для случая бесконечного математического ожидания (см. [5, гл. 9, § 3, теорема 13]), что P^+ -п.н.

$$\begin{aligned} \nu(1) + (\nu(2) - \nu(1)) + \dots + (\nu(j) - \nu(j-1)) &= \\ = \nu(j) = O(j^{2+\delta}), \quad j \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (19.22)$$

для любого $\delta > 0$. По определению $\nu(j)$ при $k \geq \nu(j)$ выполняется неравенство $S_k \geq S_{\nu(j)}$. Откуда, учитывая (19.21), (19.22), получаем, что для любого $\delta \in (0, 1/2)$ можно подобрать такие положительные постоянные c_1, c_2 , что при всех достаточно больших k выполняются P^+ -п.н. неравенства

$$S_k \geq S_{\nu(\lfloor c_1 k^{1/2-\delta} \rfloor)} \geq c_2 k^{1/2-\delta}.$$

Следовательно, при $k \rightarrow +\infty$

$$e^{-S_k} = O(e^{-k^{1/2-\delta}}) \quad (19.23)$$

$\mathbf{P}^+$ -п.н. для любого $\delta \in (0, 1/2)$.

Далее, нетрудно проверить, что функция $v(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $v(x+y) \leq v(x) + v(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, поэтому, ввиду (19.13),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^+(\eta_k > x) &= \mathbf{E}(v(S_k); \eta_k > x, L_k \geq 0) \leq \\ &\leq \mathbf{E}(v(S_{k-1}) + v(X_k); \eta_k > x, L_{k-1} \geq 0) = \\ &= \mathbf{E}(v(S_{k-1}); L_{k-1} \geq 0) \mathbf{P}(\eta_k > x) + \\ &\quad + \mathbf{E}(v(X_k); \eta_k > x) \mathbf{P}(L_{k-1} \geq 0) = \\ &= \mathbf{P}(\eta_1 > x) + \mathbf{E}(v(X_1); \eta_1 > x) \mathbf{P}(L_{k-1} \geq 0). \end{aligned} \quad (19.24)$$

Из условия (19.20) по неравенству Чебышева находим, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{P}(\eta_1 > x) = O\left(\frac{1}{(\ln x)^{2+\varepsilon}}\right). \quad (19.25)$$

Ввиду (19.11)

$$\mathbf{E}v(X_1)^{2-\delta} < +\infty$$

при любом $\delta > 0$. Откуда, снова учитывая условие (19.20), по неравенству Гельдера получаем при $\delta = \varepsilon/(3 + 2\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(v(X_1)(\ln^+ \eta_1)^{1+\varepsilon/3}) &\leq \\ &\leq (\mathbf{E}(v(X_1)^{2-\delta}))^{\frac{1}{2-\delta}} (\mathbf{E}(\ln^+ \eta_1)^{2+\varepsilon})^{\frac{1+\varepsilon/3}{2+\varepsilon}} < +\infty. \end{aligned} \quad (19.26)$$

По неравенству Чебышева при $x > 1$

$$\mathbf{E}(v(X_1); \eta_1 > x) \leq \frac{1}{(\ln x)^{1+\varepsilon/3}} \mathbf{E}(v(X_1)(\ln^+ \eta_1)^{1+\varepsilon/3}). \quad (19.27)$$

Из (19.26), (19.27) следует, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{E}(v(X_1); \eta_1 > x) = O\left(\frac{1}{(\ln x)^{1+\varepsilon/3}}\right). \quad (19.28)$$

Из (19.8), (19.24), (19.25) и (19.28) получаем, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{P}^+(\eta_k > x) = O\left(\frac{1}{(\ln x)^{2+\varepsilon}} + \frac{1}{(\ln x)^{1+\varepsilon/3}\sqrt{k}}\right).$$

Следовательно, для всех достаточно малых $\delta' > 0$ при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^+ (\eta_k > e^{k^{1/2-\delta'}}) &= O(k^{-(1/2-\delta')(2+\varepsilon)} + k^{-(1/2-\delta')(1+\varepsilon/3)-1/2}) = \\ &= O(k^{-1-\varepsilon/7}). \end{aligned}$$

По лемме Бореля–Кантелли находим, что для всех достаточно малых $\delta' > 0$ при $k \rightarrow \infty$ $\mathbf{P}^+$ -п.н.

$$\eta_k = O(e^{k^{1/2-\delta'}}).$$

Эта оценка вместе с оценкой (19.23) доказывает лемму.

Известно, что случайная последовательность $\{S_n\}$ при замене исходной вероятностной меры $\mathbf{P}$ на $\mathbf{P}^+$ перестает быть случайным блужданием. Отсюда следует, что случайные последовательности $\Pi_0, \Pi_1, \dots$ перестают быть независимыми и одинаково распределенными. Будем называть среду $\Pi_0, \Pi_1, \dots$, рассматриваемую при мере $\mathbf{P}^+$, *условной*. А вот ветвящийся процесс $\{\xi_n\}$ не перестает быть ветвящимся в условной среде $\Pi_0, \Pi_1, \dots$, т.е. выполняется основополагающее равенство (сравните с (19.1)): $\mathbf{P}^+$ -п.н.

$$\mathbf{E}^+(s^{\xi_n} \mid \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1}) = \varphi_0(\varphi_1(\dots \varphi_{n-1}(s) \dots)), \quad (19.29)$$

$s \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, выражение справа измеримо относительно $\sigma(\Pi_0, \dots, \Pi_{n-1})$. Рассмотрим произвольное случайное событие B из этой σ -алгебры. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^+(s^{\xi_n}; B) &= \mathbf{E}(s^{\xi_n} v(S_n) I\{L_n \geq 0\}; B) = \\ &= \mathbf{E}[v(S_n) I\{L_n \geq 0\} I\{B\} \mathbf{E}(s^{\xi_n} \mid \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1})] = \\ &= \mathbf{E}[v(S_n) I\{L_n \geq 0\} I\{B\} \varphi_0(\varphi_1(\dots \varphi_{n-1}(s) \dots))] = \\ &= \mathbf{E}^+(\varphi_0(\varphi_1(\dots \varphi_{n-1}(s) \dots)); B), \end{aligned}$$

что и доказывает (19.29).

ЛЕММА 19.5. При $s \in [0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\varphi_0(\varphi_1(\dots \varphi_{n-1}(s) \dots)) \leq 1 - \left(\frac{e^{-S_n}}{1-s} + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{k+1} e^{-S_k} \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned}\varphi_{k,n}(s) &= \varphi_k(\varphi_{k+1}(\dots \varphi_{n-1}(s)\dots)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \\ \varphi_{n,n}(s) &= s.\end{aligned}$$

Тогда при $s \in [0, 1)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \varphi_{0,n}(s)} &= \frac{a_0}{1 - \varphi_{0,n}(s)} = \\ &= \frac{a_n}{1 - \varphi_{n,n}(s)} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_k}{1 - \varphi_{k,n}(s)} - \frac{a_{k+1}}{1 - \varphi_{k+1,n}(s)} \right) = \\ &= \frac{a_n}{1 - s} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k g_k(\varphi_{k+1,n}(s)),\end{aligned}$$

где

$$a_k = e^{-S_k}, \quad g_k(s) = \frac{1}{1 - \varphi_k(s)} - \frac{1}{\varphi'_k(1)(1 - s)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Осталось заметить, что

$$0 \leq g_k(s) \leq \eta_k, \quad s \in [0, 1), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (19.30)$$

Чтобы показать (19.30), отбросим для простоты индекс k и воспользуемся тем, что функция $\varphi(s)$ выпукла вниз при $s \in [0, 1)$:

$$\begin{aligned}\varphi'(1)g(s) &\leq \varphi'(1)g(s) + \frac{s}{1-s} \left(1 - \frac{\varphi'(s)(1-s)}{\varphi(1) - \varphi(s)} \right) = \\ &= \frac{\varphi'(1) - s\varphi'(s)}{1 - \varphi(s)} - 1.\end{aligned} \quad (19.31)$$

Далее (пусть $\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$),

$$\frac{\varphi'(1) - s\varphi'(s)}{1 - \varphi(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} k r_k(s), \quad (19.32)$$

где $r_k(s) = p_k(1 - s^k) / (1 - \varphi(s))$. Заметим, что при $s \in [0, 1)$

$$\frac{r_{k+1}(s)}{r_k(s)} = \frac{p_{k+1}}{p_k} \frac{1 - s^{k+1}}{1 - s^k} = \frac{p_{k+1}}{p_k} \left(1 + \left(\sum_{j=1}^k s^{-j} \right)^{-1} \right). \quad (19.33)$$

Поскольку правая часть соотношения (19.33) возрастает по s и справедливо тождество $\sum_{k=0}^{\infty} r_k(s) = 1$, $s \in [0, 1)$, то возрастает по s правая часть (19.32) и, следовательно, правая часть (19.31), поэтому

$$\varphi'(1)g(s) \leq \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\varphi'(1) - s\varphi'(s)}{1 - \varphi(s)} - 1 \right) = \frac{\varphi''(1)}{\varphi'(1)}.$$

Соотношение (19.30) установлено. Лемма доказана.

Положим

$$\widehat{P}^+(\dots) = P^+(\dots | \Pi_0, \Pi_1, \dots).$$

ЛЕММА 19.6. Пусть выполнены условия леммы 19.4, тогда P^+ -п.н.

$$\widehat{P}^+(\xi_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}) > 0.$$

В частности,

$$P^+(\xi_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}) > 0.$$

Более того, при $n \rightarrow \infty$ P^+ -п.н.

$$\frac{\xi_n}{\exp S_n} \xrightarrow{D} V^+,$$

причем случайная величина V^+ обладает свойством: P^+ -п.н.

$$\{V^+ > 0\} = \{\xi_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (19.29) P^+ -п.н.

$$\widehat{P}^+(\xi_n > 0) = 1 - \varphi_{0,n}(0).$$

Следовательно, по лемме 19.5 выполняется P^+ -п.н. неравенство

$$\widehat{P}^+(\xi_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}) \geq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta_{k+1} e^{-S_k} \right)^{-1}.$$

Но по лемме 19.4 правая часть положительна P^+ -п.н. Итак, первое утверждение леммы доказано. Поскольку $P^+(\dots) = E^+ \widehat{P}^+(\dots)$, то второе утверждение вытекает из первого. Третье утверждение является следствием теоремы Дуба о сходимости мартингалов.

Приступим к доказательству последнего утверждения. Поскольку

$$\{\exists n \in \mathbb{N}: \xi_n = 0\} \subset \{V^+ = 0\},$$

то

$$P^+(V^+ = 0) \geq P^+(\exists n \in \mathbb{N}: \xi_n = 0). \quad (19.34)$$

Покажем, что справедливо противоположное неравенство

$$P^+(V^+ = 0) \leq P^+(\exists n \in \mathbb{N}: \xi_n = 0). \quad (19.35)$$

Сначала установим, что

$$P^+(\exists n \in \mathbb{N}: \xi_n = 0) + P^+(\xi_n \rightarrow +\infty) = 1. \quad (19.36)$$

Для этого достаточно показать, что P^+ -п.н.

$$\widehat{P}^+(\exists n \in \mathbb{N}: \xi_n = 0) + \widehat{P}^+(\xi_n \rightarrow +\infty) = 1. \quad (19.37)$$

В свою очередь, для выполнения соотношения (19.37) достаточно установить (вспомните свойства ветвящегося процесса в изменяющейся среде), что P^+ -п.н.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_1^{(k)}) = +\infty. \quad (19.38)$$

Очевидно, $P(p_1^{(i)} < 1) > 0$ при любом $i \in \mathbb{N}_0$, поскольку $\sigma^2 \neq 0$. Следовательно, $P^+(p_1^{(i)} < 1) > 0$ при любом $i \in \mathbb{N}_0$. Откуда, учитывая, что по замечанию 19.1 случайная величина ν не зависит от случайной последовательности Π_ν , получаем, что

$$P^+(p_1^{(\nu)} < 1) > 0.$$

По замечанию 19.1 случайные величины $p_1^{(\nu(k))}$, $k \in \mathbb{N}_0$, независимы и одинаково распределены. Отсюда следует, что P^+ -п.н.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_1^{(k)}) \geq \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_1^{(\nu(k))}) = +\infty.$$

Итак, условие (19.38) выполнено, и, следовательно, справедливы соотношения (19.37) и (19.36).

Ввиду (19.29) и леммы 19.5, при $\lambda \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} \widehat{E}^+(\exp(-\lambda \xi_n / \exp S_n) \mid \xi_k = 1) &= f_{k,n}(\exp(-\lambda e^{-S_n})) \leq \\ &\leq 1 - \left(\frac{e^{-(S_n - S_k)}}{1 - \exp(-\lambda e^{-S_n})} + \sum_{j=k}^{n-1} \eta_{j+1} e^{-(S_j - S_k)} \right)^{-1} \end{aligned}$$

P^+ -п.н. Поскольку $S_n \rightarrow +\infty$, $\xi_n / \exp S_n \rightarrow V^+$ при $n \rightarrow \infty$ P^+ -п.н., то, устремляя сначала n , а затем λ к бесконечности, получаем, что P^+ -п.н.

$$\widehat{P}^+(V^+ = 0 \mid \xi_k = 1) \leq 1 - \left(\sum_{j=k}^{\infty} \eta_{j+1} e^{-(S_j - S_k)} \right)^{-1}.$$

Поскольку момент $\nu(k)$ определяется только средой, то P^+ -п.н.

$$\widehat{P}^+(V^+ = 0 \mid \xi_{\nu(k)} = l) = (\widehat{P}^+(V^+ = 0 \mid \xi_{\nu(k)} = 1))^l.$$

Из последних двух соотношений находим, что P^+ -п.н.

$$\begin{aligned} \widehat{P}^+(V^+ = 0) &= \widehat{E}^+(\widehat{P}^+(V^+ = 0 \mid \xi_{\nu(k)})) \leq \\ &\leq \widehat{E}^+\left[1 - \left(\sum_{j=\nu(k)}^{\infty} \eta_{j+1} e^{-(S_j - S_{\nu(k)})} \right)^{-1}\right]^{\xi_{\nu(k)}} \leq \\ &\leq \widehat{P}^+(\xi_{\nu(k)} \leq z) + \widehat{E}^+\left[1 - \left(\sum_{j=\nu(k)}^{\infty} \eta_{j+1} e^{-(S_j - S_{\nu(k)})} \right)^{-1}\right]^z \end{aligned}$$

для произвольного $z \in \mathbb{N}_0$. По замечанию 19.1 второй член правой части не зависит от k , поэтому

$$P^+(V^+ = 0) \leq P^+(\xi_{\nu(k)} \leq z) + \widehat{E}^+\left[1 - \left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j+1} e^{-S_j} \right)^{-1}\right]^z.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ и учитывая (19.36), находим, что

$$P^+(V^+ = 0) \leq P^+(\exists n \in \mathbb{N}: \xi_n = 0) + \widehat{E}^+\left[1 - \left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j+1} e^{-S_j} \right)^{-1}\right]^z.$$

Устремляя теперь z к $+\infty$ и учитывая лемму 19.4, получаем (19.35). Из (19.34) и (19.35) следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Введем момент первого достижения минимума для последовательности $S_0, S_1, \dots, S_n$:

$$\tau(n) = \min \{i \leq n: S_i = L_n\}.$$

ЛЕММА 19.7. Пусть $u(x)$, $x \geq 0$, является неотрицательной и невозрастающей числовой функцией, причем $\int_0^{+\infty} xu(x) dx < +\infty$. Если $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $l \in \mathbb{N}$, что для всех $n > l$

$$\sum_{k=l+1}^n E(u(-S_k); \tau(k) = k) P(L_{n-k} \geq 0) \leq \varepsilon P(L_n \geq 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда распределение X_1 является центрально решетчатым или нерешетчатым утверждение леммы элементарно следует из результатов лекции 16 (см. соотношение (16.26) и лемму 16.3). В общем случае доказательство представляется читателю.

Напомним, что

$$L_{k,n} = \min_{0 \leq i \leq n-k} (S_{k+i} - S_k), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

ЛЕММА 19.8. Пусть случайные величины $V_1, V_2, \dots$ равномерно ограничены и при всех $k \in \mathbb{N}_0$ и некотором $m \in \mathbb{N}_0$ P -н.н.

$$\begin{aligned} E(V_n; \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_k) &= \\ &= (V_k(m) + o(1)) P(L_n \geq 0), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (19.39)$$

где $V_k(m)$ является $\mathfrak{F}_k$ -измеримой случайной величиной. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$E(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} E(V_k(m); \tau(k) = k) + o(1) \right) P(L_n \geq 0),$$

причем ряд в правой части абсолютно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда $0 \leq V_n \leq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Запишем для произвольного $l \in \mathbb{N}$ представление:

$$E(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0) = I_1(n, l) + I_2(n, l), \quad (19.40)$$

где

$$I_1(n, l) = \sum_{k=0}^l \mathbb{E} (V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0, \tau(n) = k),$$

$$I_2(n, l) = \sum_{k=l+1}^n \mathbb{E} (V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0, \tau(n) = k).$$

Очевидно, при $k = 0, 1, \dots, n$

$$\{\tau(n) = k\} = \{\tau(k) = k\} \cap \{L_{n-k} \geq 0\}, \quad (19.41)$$

поэтому (см. (19.7))

$$\begin{aligned} I_2(n, l) &\leq \sum_{k=l+1}^n \mathbb{P}(\xi_{\tau(n)} > 0, \tau(n) = k) = \\ &= \sum_{k=l+1}^n \mathbb{P}(\xi_k > 0, \tau(k) = k, L_{k,n} \geq 0) \leq \\ &\leq \sum_{k=l+1}^n \mathbb{E}(e^{S_k}; \tau(k) = k) \mathbb{P}(L_{n-k} \geq 0). \end{aligned} \quad (19.42)$$

Применение леммы 19.7 при $u(x) = \exp(-x)$, $x \geq 0$, дает

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{I_2(n, l)}{\mathbb{P}(L_n \geq 0)} = 0. \quad (19.43)$$

Далее, снова используя (19.41), запишем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0, \tau(n) = k) &= \\ &= \mathbb{E}(V_n; \xi_{k+m} > 0, \tau(k) = k, L_{k,n} \geq 0) = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(V_n; \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_k); \tau(k) = k]. \end{aligned}$$

Заметим, что Р-п.н.

$$\mathbb{E}(V_n; \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_k) \leq \mathbb{P}(L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_k) = \mathbb{P}(L_{n-k} \geq 0),$$

что вместе с (19.39) дает возможность применить теорему о мажорируемой сходимости:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0, \tau(n) = k) / \mathbb{P}(L_n \geq 0) &= \\ &= \mathbb{E}(V_k(m); \tau(k) = k). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_1(n, l)}{P(L_n \geq 0)} = \sum_{k=0}^{\infty} E(V_k(m); \tau(k) = k), \quad (19.44)$$

причем ряд справа абсолютно сходится, поскольку в силу леммы Фату и соотношения (19.42)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=l+1}^{\infty} E(V_k(m); \tau(k) = k) \leq \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=l+1}^n E(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0, \tau(n) = k) / P(L_n \geq 0) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=l+1}^n E(e^{S_k}; \tau(k) = k) P(L_{n-k} \geq 0) / P(L_n \geq 0), \end{aligned}$$

а последний предел конечен ввиду леммы 19.7. Из соотношений (19.40), (19.43) и (19.44) следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 19.2. Утверждение лемм 19.2, 19.6 и 19.8 справедливо не только в случае, когда $\xi_0 = 1$, но и тогда, когда ξ_0 является неотрицательной целочисленной случайной величиной, не зависящей от случайной среды (при этом случай, когда $P(\xi_0 = 0) = 1$, исключается).

ТЕОРЕМА 19.1. Пусть $EX_1 = 0$, $EX_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, и при некотором $\varepsilon > 0$ $E(\ln^+ \eta_1)^{2+\varepsilon} < +\infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P(\xi_n > 0) \sim \frac{c}{\sqrt{n}},$$

где c – положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем писать P_z и P_z^+ , если требуется подчеркнуть, что $\xi_0 = z$, $z \in \mathbb{N}$. Положим

$$U_n = I\{\xi_n > 0\},$$

тогда P^+ -п.н.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = I\{\xi_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

По лемме 19.2 при $z \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_z(\xi_n > 0 \mid L_n \geq 0) = P_z^+(\xi_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}). \quad (19.45)$$

Положим

$$\psi(z, n) = P_z(\xi_n > 0, L_n \geq 0).$$

Тогда (19.45) означает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\psi(z, n) \sim P_z(L_n \geq 0) P_z^+(\xi_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}).$$

Заметим, что P -п.н.

$$P(\xi_n > 0, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_k) = \psi(\xi_k, n - k).$$

Полагая

$$V_n = I\{\xi_n > 0\}, \quad m = 0, \quad V_k(0) = P_{\xi_k}^+(\xi_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}),$$

видим, что условия леммы 19.8 выполнены, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$P(\xi_n > 0) \sim c^* P(L_n \geq 0), \quad (19.46)$$

где

$$c^* = \sum_{k=0}^{\infty} E(P_{\xi_k}^+(\xi_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}); \tau(k) = k) < +\infty. \quad (19.47)$$

Ясно, что $c^* > 0$, т.к. $P_{\xi_0}^+(\xi_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}) > 0$ по лемме 19.6. Вспомогательное соотношение (19.8), получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 19.2. В условиях теоремы 19.1 при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\xi_{[nt]}}{\exp S_{[nt]}}, t \in (0, 1] \mid \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \{V(t), t \in (0, 1]\}, \quad (19.48)$$

где $\{V(t)\}$ – процесс с постоянными положительными траекториями. Сходимость в (19.48) означает сходимость по распределению в пространстве $D[u, 1]$ при любом $u \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольное $u \in (0, 1)$. Положим при $t \in [u, 1]$, $s \in \mathbb{R}$

$$Z_n(t) = \frac{\xi_{[nt]}}{\exp S_{[nt]}}, \quad Z_n = \{\xi_n(t)\}, \quad V_s(t) = \frac{V^+}{\exp s}, \quad V_s = \{V_s(t)\},$$

где случайная величина V^+ та же, что и в лемме 19.6. Пусть f – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на $D[u, 1]$. Положим

$$U_n = f(Z_n e^{-s}) I\{\xi_n > 0\}.$$

По лемме 19.6 при $n \rightarrow \infty$ последовательности $\{Z_n e^{-s}\}$ и $\{I\{\xi_n > 0\}\}$ сходятся P^+ -п.н. соответственно к V_s и $I\{V^+ > 0\}$ в равномерной метрике (на $D[u, 1]$) и, следовательно, в метрике Скорохода, поэтому P^+ -п.н.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = f(V_s) I\{V^+ > 0\}.$$

По лемме 19.2 при $z \in \mathbb{N}$

$$E_z^+(f(Z_n e^{-s}) I\{\xi_n > 0\} \mid L_n \geq 0) = E_z^+(f(V_s); V^+ > 0). \quad (19.49)$$

Положим

$$\psi(z, s, n) = E_z(f(Z_n e^{-s}); \xi_n > 0, L_n \geq 0).$$

Тогда (19.49) означает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\psi(z, s, n) \sim E_z^+(f(V_s); V^+ > 0) P(L_n \geq 0).$$

Заметим, что P -п.н.

$$E(f(Z_n), \xi_n > 0, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_k) = \psi(\xi_k, S_k, n - k).$$

Полагая

$$V_n = f(Z_n) I\{\xi_n > 0\}, \quad m = 0, \quad V_k(0) = E_{\xi_k}^+(f(V_s); V^+ > 0),$$

видим, что условия леммы 19.8 выполнены, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} E(f(\xi_n), \xi_n > 0) &= \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} E(E_{\xi_k}^+(f(V_s); V^+ > 0); \tau(k) = k) + o(1) \right) P(L_n \geq 0). \end{aligned}$$

Откуда, ввиду (19.46),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f(\xi_n) \mid \xi_n > 0) = \frac{1}{c^*} \sum_{k=0}^{\infty} E(E_{\xi_k}^+(f(V_s); V^+ > 0); \tau(k) = k).$$

Правая часть равна

$$\int_{D[u, 1]} f(w) \lambda(dw),$$

где λ – мера на пространстве $D[u, 1]$, задаваемая формулами

$$\lambda(dw) = \frac{1}{c^*} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\lambda_{\xi_k, S_k}(dw); \tau(k) = k),$$

$$\lambda_{z,s}(dw) = \mathbb{P}_z^+(V^s \in dw, V^+ > 0).$$

По лемме 19.6 полная масса меры $\lambda_{z,s}$ равна $\mathbb{P}_z^+(\xi_n > 0 \forall n \in \mathbb{N})$, поэтому, ввиду (19.47), λ является вероятностной мерой. Меры $\lambda_{z,s}$ и, следовательно, мера λ сосредоточены на положительных постоянных функциях w . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 19.3. В условиях теоремы 19.1 при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln \xi_{[nt]}}{\sigma \sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} W^+,$$

где W^+ – броуновская извилина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим, что в условиях теоремы 19.1 при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma \sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} W^+. \quad (19.50)$$

Положим при $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 0, 1, \dots, n$

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma \sqrt{n}}, \quad Y_{k,n}(t) = \frac{S_{[nt] \wedge k}}{\sigma \sqrt{n}}, \quad \tilde{Y}_{k,n}(t) = \frac{S_{[nt]} - S_{[nt] \wedge k}}{\sigma \sqrt{n}}.$$

Кратко эти процессы обозначим Y_n , $Y_{k,n}$, $\tilde{Y}_{k,n}$ соответственно. Очевидно,

$$Y_n = Y_{k,n} + \tilde{Y}_{k,n}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}_0$ и $k + m \leq n$. Рассмотрим произвольную непрерывную ограниченную числовую функцию φ , заданную на $D[0, 1]$. Положим для $w \in D[0, 1]$, $x \in [0, +\infty)$

$$\psi(w, x) = \mathbb{E}(\varphi(w + \tilde{Y}_{k+m,n}); L_{k+m,n} \geq -x).$$

По принципу инвариантности Иглхарта (точнее, его модификации для случая, когда случайное блуждание выходит не из нуля, а из точки $x > 0$) для фиксированных k, m при $n \rightarrow \infty$

$$\{\tilde{Y}_{k+m,n} \mid L_{k+m,n} \geq -x\} \xrightarrow{D} W^+,$$

где W^+ – броуновская извилина. Следовательно, если последовательность функций $w_n \in D[0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится при $n \rightarrow \infty$ Р-п.н. к нулевой функции, то

$$\begin{aligned}\psi(w_n, x) &= (\mathbb{E}\varphi(W^+) + o(1)) \mathbb{P}(L_{n-(k+m)} \geq -x) = \\ &= (\mathbb{E}\varphi(W^+) + o(1)) v(x) \mathbb{P}(L_n \geq 0),\end{aligned}$$

причем последнее равенство объясняется соотношением (19.8). Поскольку

$$\{L_{k,n} \geq 0\} = \{L_{k,k+m} \geq 0\} \cap \{L_{k+m,n} \geq -(S_{k+m} - S_k)\} \quad (19.51)$$

и последовательность функций $Y_{k+m,n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, равномерно сходится при $n \rightarrow \infty$ Р-п.н. к нулевой функции, то

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(Y_n); \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_{k+m}) &= \\ &= \psi(Y_{k+m,n}, S_{k+m} - S_k) I\{\xi_{k+m} > 0, L_{k,k+m} \geq 0\} = \\ &= (\mathbb{E}\varphi(W^+) + o(1)) v(S_{k+m} - S_k) \times \\ &\quad \times I\{\xi_{k+m} > 0, L_{k,k+m} \geq 0\} \mathbb{P}(L_n \geq 0)\end{aligned} \quad (19.52)$$

при $n \rightarrow \infty$ Р-п.н. Из соотношений (19.9) и (19.51) следует, что Р-п.н.

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(\varphi(Y_n); \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_{k+m})| &\leq \\ &\leq \sup_{w \in D[0,1]} |\varphi(w)| \mathbb{P}(L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_{k+m}) \leq \\ &\leq \sup_{w \in D[0,1]} |\varphi(w)| \mathbb{P}(L_{k+m,n} \geq -(S_{k+m} - S_k) \mid \mathfrak{F}_{k+m}) \times \\ &\quad \times I\{L_{k,k+m} \geq 0\} \leq \\ &\leq K_1 v(S_{k+m} - S_k) I\{L_{k,k+m} \geq 0\} \mathbb{P}(L_{n-(k+m)} \geq 0)\end{aligned} \quad (19.53)$$

для некоторой положительной постоянной K_1 . Ввиду (19.10)

$$\mathbb{E}(v(S_{k+m} - S_k); L_{k,k+m} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_k) = v(0) = 1. \quad (19.54)$$

Из соотношения (19.52), учитывая (19.53) и (19.54), по теореме о мажорируемой сходимости под знаком условных математических ожиданий получаем, что при $n \rightarrow \infty$ Р-п.н.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(Y_n); \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_k) &= (\mathbb{E}\varphi(W^+) + o(1)) \times \\ &\times \mathbb{E}(v(S_{k+m} - S_k); \xi_{k+m} > 0, L_{k,k+m} \geq 0 \mid \mathfrak{F}_k) \mathbb{P}(L_n \geq 0) =\end{aligned}$$

$$= (\mathbb{E}\varphi(W^+) + o(1)) P_{\xi_k}^+(\xi_m > 0) P(L_n \geq 0), \quad (19.55)$$

причем последнее равенство объясняется соотношением (19.13).

Положим $V_n = \varphi(Y_n)$. По лемме 19.8, ввиду (19.55), при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi(Y_n); \xi_{\tau_n+m} > 0) &= \\ &= \left(\mathbb{E}\varphi(W^+) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(P_{\xi_k}^+(\xi_m > 0); \tau_k = k) + o(1) \right) P(L_n \geq 0), \end{aligned}$$

причем ряд в правой части сходится. В частности, при $n \rightarrow \infty$

$$P(\xi_{\tau_n+m} > 0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(P_{\xi_k}^+(\xi_m > 0); \tau_k = k) + o(1) \right) P(L_n \geq 0).$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}\varphi(W^+) P(\xi_n > 0) - \mathbb{E}(\varphi(Y_n); \xi_n > 0)| \leq \\ &\leq |\mathbb{E}\varphi(W^+) P(\xi_n > 0) - \mathbb{E}(\varphi(Y_n); \xi_{\tau_n+m} > 0)| + \\ &\quad + \sup_{w \in D[0,1]} |\varphi(w)| |\mathbb{E}[I\{\xi_n > 0\} - I\{\xi_{\tau_n+m} > 0\}]| \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}|I\{\xi_n > 0\} - I\{\xi_{\tau_n+m} > 0\}| \leq \\ &\leq (P(\xi_n > 0) - P(\xi_{n+m} > 0)) + \\ &\quad + (P(\xi_{\tau_n+m} > 0) - P(\xi_{n+m} > 0)). \end{aligned}$$

Откуда, учитывая теорему 19.1, находим, что

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}\varphi(W^+) - \mathbb{E}(\varphi(Y_n) | \xi_n > 0)| \leq \\ &\leq 2 \sup_{w \in D[0,1]} |\varphi(w)| \left| \frac{1}{c^*} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(P_{\xi_k}^+(\xi_m > 0); \tau_k = k) - 1 \right| + o(1). \end{aligned} \quad (19.56)$$

По теореме о монотонной сходимости и соотношению (19.47) при $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(P_{\xi_k}^+(\xi_m > 0); \tau_k = k) \rightarrow c^*.$$

Откуда, переходя к пределу в (19.56) при $m \rightarrow \infty$, получаем требуемое утверждение (19.50).

Из теоремы 19.2 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln Z_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma \sqrt{n}}, t \in (0, 1] \mid \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} 0. \quad (19.57)$$

Положим при $t \in [0, 1]$ и n таких, что $\xi_n > 0$,

$$Y_n^*(t) = \frac{\ln \xi_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma \sqrt{n}}.$$

В качестве следствия соотношений (19.50) и (19.57) находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n^*(t), t \in (0, 1] \mid \xi_n > 0\} \xrightarrow{D} W^+.$$

Чтобы теперь получить утверждение теоремы (т.е. вместо ситуации, когда $t \in (0, 1]$, рассмотреть ситуацию, когда $t \in [0, 1]$) достаточно показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u \downarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n^*}(\delta; 0, u) \geq \varepsilon \mid \xi_n > 0) = 0. \quad (19.58)$$

Заметим, что при $u \in (0, 1)$ и n таких, что $\xi_n > 0$,

$$\begin{aligned} w_{Y_n^*}(\delta; 0, u) &\leq \sup_{t \in [0, u]} Y_n^*(t) \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0, u]} Y_n(t) + \left(\ln \sup_{t \in [0, u]} Z_n(t) \right) / (\sigma \sqrt{n}). \end{aligned} \quad (19.59)$$

Используя соотношение (19.50) и непрерывность траекторий броуновской извилины, находим, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{u \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u]} Y_n(t) > \varepsilon \mid \xi_n > 0 \right) &= \\ = \lim_{u \downarrow 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u]} W^+(t) > \varepsilon \right) &= 0. \end{aligned} \quad (19.60)$$

Случайная последовательность $\{\xi_n / \exp S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является мартингалом, поэтому по неравенству Дуба получаем, что при $u \in (0, 1)$ для произвольного положительного ε

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u]} \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln Z_n(t) > \varepsilon \mid \xi_n > 0 \right) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{P(\xi_n > 0)} P\left(\sup_{i \leq n} \frac{\xi_i}{\exp S_i} > e^{\varepsilon \sigma \sqrt{n}}\right) \leq \\
&\leq \frac{e^{-\varepsilon \sigma \sqrt{n}}}{P(\xi_n > 0)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{19.61}$$

(здесь использована теорема 19.1). Из (19.59)–(19.61) следуют соотношение (19.58) и утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 19.3. Обобщение представленной здесь теории критических ВПСС на случай, когда сопровождающее случайное блуждание является осциллирующим, изложено в работе [13].

В заключение скажем несколько слов о докритических ВПСС. Они подразделяются на *умеренно докритические*, *промежуточно докритические* и *строго докритические* в зависимости от того, положительно, равно нулю или отрицательно математическое ожидание $E(\varphi'_0(1) \ln \varphi'_0(1))$. Оказывается, что если выполнены некоторые дополнительные условия, то при $n \rightarrow \infty$

1) в умеренно докритическом случае

$$\left\{ \frac{\ln \xi_{[nt]}}{\sigma^{(\tau)} \sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} W_0^+,$$

где W_0^+ – броуновская экскурсия, положительная постоянная $\sigma^{(\tau)}$ определена в лекции 17 (см. доказательство теоремы 17.2);

2) в промежуточно докритическом случае

$$\left\{ \frac{\ln \xi_{[nt]}}{\sigma^* \sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} W_0,$$

где W_0 – броуновский мост, $\sigma^* = (E(\varphi'_0(1) \ln^2 \varphi'_0(1)) / E\varphi'_0(1))^{1/2}$;

3) в строго докритическом случае конечномерные распределения случайного процесса $\{\xi_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\}$ сходятся к соответствующим распределениям некоторого положительного случайного процесса, у которого все сечения независимы и одинаково распределены.

С этими и близкими к ним результатами можно ознакомиться по работам [11], [14], [19].

Список литературы

Учебники и монографии

- [1] Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.
- [2] Боровков А. А., *Теория вероятностей*, Эдиториал УРСС, М., 1999.
- [3] Булинский А. В., Ширяев А. Н., *Теория случайных процессов*, Физматлит; Лаборатория базовых знаний, М., 2003.
- [4] Ито К., Маккин Г., *Диффузионные процессы и их траектории*, Мир, М., 1968.
- [5] Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1972.
- [6] Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971.
- [7] Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, 2, Мир, М., 1984.
- [8] Харрис Т., *Теория ветвящихся случайных процессов*, Мир, М., 1966.
- [9] Ширяев А. Н., *Вероятность*, Наука, М., 1989.
- [10] Athreya K. B., Ney P. E., *Branching Processes*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.

Научные статьи

- [11] Афанасьев В. И., “Предельные теоремы для промежуточно докритического и строго докритического ветвящихся процессов в случайной среде”, *Дискретная математика*, **13**:1 (2001), 132–157.
- [12] Эппель М. С., “Локальная предельная теорема для момента первого перескока”, *Сиб. матем. журн.*, **20**:1 (1979), 181–191.
- [13] Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A., “Criticality for branching processes in random environment”, *Ann. Probab.*, **33**:2 (2005), 645–673.
- [14] Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A., “Functional limit theorems for strongly subcritical branching processes in random environment”, *Stochastic Processes and their Applications*, **115**:10 (2005), 1658–1676.
- [15] Bolthausen E., “On a functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive”, *Ann. Probab.*, **4**:3 (1976), 480–485.
- [16] Durrett R. T., “Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes”, *Ann. Probab.*, **6**:5 (1978), 798–828.
- [17] Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R., “Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion”, *Ann. Probab.*, **5**:1 (1977), 117–129.

- [18] Feller W., “Diffusion processes in genetics”, *Proc. 2nd Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.*, 1951, 227–246.
- [19] Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A., “Limit theorems for subcritical branching processes in random environment”, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.*, **39**:4 (2003), 593–620.
- [20] Iglehart D.L., “Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive”, *Ann. Probab.*, **2**:4 (1974), 608–619.
- [21] Lamperti J., Ney P., “Conditioned branching processes and their limiting diffusions”, *Теория вероятностей и ее применения*, **13**:1 (1968), 126–137.
- [22] Liggett T.M., “An invariance principle for conditioned sums of independent random variables”, *J. Math. Mech.*, **18** (1968), 559–570.
- [23] Lindvall T., “Convergence of critical Galton–Watson branching processes”, *J. Appl. Probab.*, **9** (1972), 445–450.
- [24] Lindvall T., “Almost sure convergence of branching processes in varying and random environments”, *Ann. Probab.*, **2**:2 (1974), 344–346.
- [25] Stone C.J., “A local limit theorem for nonlattice multidimensional distribution functions”, *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 546–551.
- [26] Tanaka H., “Time reversal of random walks in one dimension”, *Tokyo J. Math.*, **12** (1989), 159–174.