Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Михайлов, А. К. Гущин, Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики”, *Лекц. курсы НОЦ*, 2007, выпуск 7, 3–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn7>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:50:28

Оглавление

Предисловие	5
Часть I	7
Введение	7
Глава 1. Пространства Соболева и теоремы вложения	13
§ 1. Обобщенные производные и усредненные функции	17
§ 2. Пространства Соболева	22
§ 3. След функций из $H^k(Q)$	25
§ 4. Пространство $\dot{H}^1(Q)$	30
§ 5. Вложение $H^1(a, b)$ в $C([a, b])$	32
§ 6. Вложение $H^1(Q)$ в $L_2(Q)$	34
§ 7. Компактность вложения $H^1(Q)$ в $L_2(\partial Q)$	37
§ 8. Вложение $H^k(Q)$ в $C^l(\overline{Q})$	40
§ 9. Эквивалентные нормировки пространств $H^1(Q)$ и $\dot{H}^1(Q)$	46
Глава 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений	51
§ 1. Вторая и третья краевые задачи для уравнения второго порядка	51
§ 2. Первая краевая задача для уравнения второго порядка	63
§ 3. Задача о собственных значениях и собственных функциях	75
Часть II	83
Глава 3. Некоторые дополнительные сведения из теории пространств Соболева	85
§ 1. Пространства L_p и L_∞	85
§ 2. Вложение пространства $W_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$	89
§ 3. Обобщенные производные сложной функции	97

Глава 4. Разрешимость задачи Дирихле для общего линейного эллиптического уравнения второго порядка	103
§ 1. Принцип максимума	104
§ 2. Пространства $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ и $W_2^{-1}(Q)$	110
§ 3. Теоремы об однозначной разрешимости задачи Дирихле	118
Глава 5. Непрерывность по Гёльдеру решений эллиптических уравнений	125
§ 1. Субрешения эллиптического уравнения	126
§ 2. Локальная ограниченность обобщенных решений эллиптического уравнения	133
§ 3. Слабое неравенство Гарнака	136
§ 4. Непрерывность по Гёльдеру решений эллиптического уравнения	141

Предисловие

Настоящий курс лекций был прочитан в Научно-образовательном центре при Математическом институте им. В. А. Стеклова. Он содержит независимое изложение некоторых разделов теории линейных эллиптических уравнений второго порядка, не входящих в традиционные курсы. Предполагается, что читатели знакомы с основными понятиями и утверждениями функционального анализа. Изложение базируется на вариационном подходе к рассматриваемым вопросам и концепции обобщенного решения.

Курс состоит из двух частей. Первая часть – она содержит лекции, прочитанные В. П. Михайловым, – посвящена разрешимости основных краевых задач и необходимым для этого понятиям и утверждениям из теории пространств Соболева. Большое внимание уделено теоремам вложения и связи обобщенных решений с классическими. Вторая часть лекций, в которых обсуждаются более специальные свойства обобщенных решений, была прочитана А. К. Гузиным. Основной ее целью является доказательство фундаментального результата Е. Де Джорджи и Дж. Нэша о гёльдеровой непрерывности решений уравнения с измеримыми и ограниченными коэффициентами. Потребности этого доказательства во многом определили содержание второй части.

Часть I

Введение

Наш курс посвящен обобщенным решениям простейших краевых задач для линейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. В качестве введения рассмотрим классическую задачу о равновесии мембраны. Мы покажем, что функция, задающая уравнение мембраны в состоянии равновесия, является обобщенным решением некоторой краевой задачи для эллиптического уравнения – уравнения Эйлера для квадратичного функционала, представляющего собой потенциальную энергию мембраны.

Напомним, что мембрана – это тонкая пленка, сопротивляющаяся растяжению; будем представлять ее в виде поверхности в $\mathbb{R}^3$: $u = u(x)$, $x \in Q$, где Q – некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $u(x) \in C^1(\bar{Q})$. Считаем, что точки мембраны, находящейся под действием некоторой системы сил, совершают только вертикальные перемещения, и все силы, приложенные к мембране, имеют только вертикальные составляющие.

Пусть в точках $x \in Q$ на мембрану действует сила с плотностью $f(x) - a(x)u$, $x \in Q$, а в точках $x \in \partial Q$ сила с (линейной) плотностью $f_1(x) - a_1(x)u$, $x \in \partial Q$, т.е. на мембрану действуют внешние силы с плотностью $f(x)$ для $x \in Q$ и $f_1(x)$ для $x \in \partial Q$, и силы сопротивления упругих сред, в которых находится внутренность мембраны ($x \in Q$) и ее граница ($x \in \partial Q$) с плотностями $-a(x)u$ в области Q и $-a_1(x)u$ на границе ∂Q , пропорциональные величине перемещения мембраны и обратные ему по знаку, $a(x) \geq 0$, $x \in Q$, $a_1(x) \geq 0$, $x \in \partial Q$ – коэффициенты упругости соответствующих сред.

Работа этих сил по перемещению мембраны из какого-то положения $u = u_0(x)$ в положение $u = u(x)$ соответственно равны

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_Q \int_{u_0(x)}^{u(x)} (f(x) - a(x)u) du dx \\ &= \int_Q \left[f(x)(u(x) - u_0(x)) - \frac{a(x)}{2}(u^2(x) - u_0^2(x)) \right] dx, \\ T_2 &= \int_{\partial Q} \left[f_1(x)(u(x) - u_0(x)) - \frac{a_1(x)}{2}(u^2(x) - u_0^2(x)) \right] dS \end{aligned}$$

Во внутренних точках $x \in Q$ на мембрану действует также внутренняя упругая сила. Будем считать, что ее работа по перемещению мембраны из положения $u_0(x)$ в положение $u(x)$ равна

$$T_3 = - \int_Q k(x) (\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \sqrt{1 + |\nabla u_0|^2}) dx$$

(работа этой силы, отнесенная к площадке $dx = dx_1 dx_2$ пропорциональна изменению площади мембраны, проектирующейся на эту площадку, с коэффициентом пропорциональности $k(x) > 0$, который называется коэффициентом натяжения мембраны). Для упрощения задачи будем считать, что для всех допустимых положений мембраны функция $|\nabla u|$, $x \in \bar{Q}$, столь мала, что величиной $|\nabla u|^4$, $x \in \bar{Q}$, можно пренебречь. В таком случае можно считать, что работа внутренней упругой силы равна

$$T_3 = - \int_Q \frac{k(x)}{2} (|\nabla u|^2 - |\nabla u_0|^2) dx.$$

Таким образом, потенциальная энергия мембраны $U(u)$ в положении $u(x)$ равна

$$\begin{aligned} U(u) &= U(u_0) - T_1 - T_2 - T_3 \\ &= C_0 + \frac{1}{2} \int_Q (k(x)|\nabla u|^2 + a(x)u^2 - 2f(x)u) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial Q} (a_1(x)u^2 - 2f_1(x)u) dS, \end{aligned}$$

где $U(u_0)$ – потенциальная энергия мембраны в положении $u_0(x)$, а C_0 – не зависящая от $u(x)$ постоянная.

В рассмотренном случае на значения функции $u(x)$ на границе ограничений не налагается; это случай со свободной границей. Наряду с ним важным является также случай, когда граница закреплена, т.е. когда при всех допустимых $u(x)$ выполняется условие

$$u(x)|_{\partial Q} = \varphi(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ – заданная на ∂Q функция (граница мембраны проходит через пространственную кривую $u = \varphi(x)$, $x \in \partial Q$). В этом случае потенциальная энергия мембраны в положении $u(x)$ имеет вид

$$U(u) = C_1 + \frac{1}{2} \int_Q (k(x)|\nabla u|^2 + a(x)u^2 - 2f(x)u) dx,$$

где C_1 – не зависящая от $u(x)$ постоянная.

Согласно принципу механики в состоянии равновесия мембраны ее потенциальная энергия минимальна, т.е. в случае свободной границы характеризующая состояние равновесия функция $u(x) \in C^1(\overline{Q})$ реализует минимальное значение функционала

$$J_1(u) = \int_Q (k(x)|\nabla u|^2 + a(x)u^2 - 2f(x)u) dx + \int_{\partial Q} (a_1(x)u^2 - 2f_1(x)u) dS, \quad (2)$$

среди всех функций из $C^1(\overline{Q})$, а в случае закрепленной границы – минимальное значение функционала

$$J_2(u) = \int_Q (k(x)|\nabla u|^2 + a(x)u^2 - 2f(x)u) dx, \quad (3)$$

среди всех функций из $C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющих условию (1).

Здесь мы не будем заниматься вопросом о существовании функции $u(x)$; ниже существование и единственность решений каждой из этих задач будут установлены в значительно более общей ситуации.

Пусть функция $u(x) \in C^1(\overline{Q})$ удовлетворяет условию (1) и реализует минимальное значение функционала (3) на множестве функций из $C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющих условию (1). Тогда при любой функции $v(x) \in C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющей условию

$$v|_{\partial Q} = 0, \quad (10)$$

для всех $t \in \mathbb{R}^1$ имеет место неравенство

$$P_2(t) = J_2(u + tv) - J_2(u) = 2t \int_Q (k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv) dx + t^2 \int_Q (k(x)|\nabla v|^2 + av^2) dx \geq 0, \quad (4)$$

и следовательно,

$$\int_Q (k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv) dx = 0 \quad (5)$$

для всех $v \in C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющих условию (1₀).

Аналогично, если $u(x) \in C^1(\overline{Q})$ и реализует минимум функционала (2) на множестве $C^1(\overline{Q})$, то при любой функции $v \in C^1(\overline{Q})$ при всех $t \in \mathbb{R}^1$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} P_1(t) &= J_1(u + tv) - J_1(u) \\ &= 2t \left[\int_Q (k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv) dx + \int_{\partial Q} (a_1 uv - f_1 v) dS \right] \\ &\quad + t^2 \left[\int_Q (k(x)|\nabla v|^2 + av^2) dx + \int_{\partial Q} a_1 v^2 dS \right] \geq 0, \end{aligned}$$

и следовательно,

$$\int_Q (k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv) dx + \int_{\partial Q} (a_1 uv - f_1 v) dS = 0 \quad (6)$$

для всех $v \in C^1(\overline{Q})$.

Верны и обратные утверждения: если подчиненная граничному условию (1) и принадлежащая $C^1(\overline{Q})$ функция $u(x)$, удовлетворяет интегральному тождеству (5) при всех подчиненных граничному условию (1₀) функциях v из $C^1(\overline{Q})$, то она реализует минимальное значение функционала (3) на множестве функций из $C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющих граничному условию (1). И аналогично, если функция $u(x)$ из $C^1(\overline{Q})$ удовлетворяет интегральному тождеству (6) при любой v из $C^1(\overline{Q})$, то она реализует минимальное значение функционала (2) на множестве функций $C^1(\overline{Q})$. Докажем первое из них, второе доказывается аналогично.

Пусть $u(x) \in C^1(\overline{Q})$, $u|_{\partial Q} = \varphi$, и выполняется при всех $v \in C^1(\overline{Q})$, $v|_{\partial Q} = 0$, интегральное тождество (5), а $w(x)$ – произвольная функция из $C^1(\overline{Q})$, $w|_{\partial Q} = \varphi$. Пусть $v(x) = w(x) - u(x)$. Очевидно, $v \in C^1(\overline{Q})$, $v|_{\partial Q} = 0$. В силу (4) имеем неравенство

$$\begin{aligned} J_2(w) - J_2(u) &= (J_2(u + tv) - J_2(u))|_{t=1} \\ &= 2 \int_Q (k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv) dx + \int_Q (k(x)|\nabla v|^2 + av^2) dx \\ &= \int_Q (k(x)|\nabla v|^2 + av^2) dx \geq 0, \end{aligned}$$

из которого вытекает, что $J_2(w) \geq J_2(u)$, что и требовалось установить.

Таким образом, задачи нахождения функций, реализующих минимумы функционалов J_1 и J_2 эквивалентны нахождению функций, удовлетворяющим интегральным тождествам (6) и (5).

Можно доказать, что при достаточной гладкости данных задачи (функций $k(x), a(x), \dots, \varphi(x)$ и границы области) функции $u(x)$, реализующие минимальные значения функционалов J_1 и J_2 , принадлежат $C^2(\bar{Q})$. Тогда эти функции удовлетворяют не только интегральным тождествам (6) и (5), но и являются решениями следующих краевых задач: в случае свободной границы – задачи

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u &= f(x), & x \in Q, \\ \left(k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + a_1(x)u\right)\Big|_{\partial Q} &= f_1(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор нормали к ∂Q , внешней по отношению к области Q , а в случае закрепленной границы – задачи

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u &= f(x), & x \in Q, \\ u|_{\partial Q} &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Действительно, если функция $u(x) \in C^2(\bar{Q})$ и удовлетворяет при всех $v \in C^1(\bar{Q})$, $v|_{\partial Q} = 0$, равенству (5), то это равенство можно переписать в виде

$$\int_Q (-\operatorname{div}(k(x)\nabla u) + au - f)v \, dx = 0,$$

поскольку $k(\nabla u, \nabla v) = \operatorname{div}(kv \cdot \nabla u) - v \cdot \operatorname{div}(k\nabla u)$, а по формуле Остроградского

$$\int_Q \operatorname{div}(k(x)v(x) \cdot \nabla u) \, dx = \int_{\partial Q} kv \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS = 0.$$

Следовательно, функция $u(x)$ является решением задачи Дирихле (8).

Аналогично доказывается, что если функция $u(x)$ удовлетворяет при всех $v \in C^1(\bar{Q})$ равенству (6) и принадлежит $C^2(\bar{Q})$, то (при достаточно гладких данных задачи) она является решением краевой задачи (7).

Очевидно, верно и такое утверждение. Если функция $u(x) \in C^2(\bar{Q})$ и является решением задачи (8) или задачи (7), то в первом случае она удовлетворяет интегральному тождеству (5) при

всех $v(x)$ из $C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющих условию (10), и интегральному тождеству (6) при всех $v(x) \in C^1(\overline{Q})$ во втором случае.

Действительно, пусть, например, $u(x)$ есть решение задачи (7). Умножая первое равенство в (7) на $v(x) \in C^1(\overline{Q})$ и интегрируя полученное равенство по Q , получим равенство

$$\begin{aligned} \int_Q f(x)v(x) dx &= \int_Q (a(x)uv - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) \cdot v) dx \\ &= \int_Q (a(x)uv + k(x)(\nabla u, \nabla v)) dx - \int_{\partial Q} k(x)v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \\ &= \int_Q (a(x)uv + k(x)(\nabla u, \nabla v)) dx + \int_{\partial Q} (a_1(x)uv - f_1(x)v) dS, \end{aligned}$$

совпадающее с тождеством (6).

Интегральное тождество (6) фактически является тождеством, с помощью которого ниже (во второй главе) будет определено обобщенное решение задачи (7), а с помощью интегрального тождества (5) – обобщенное решение задачи (8).

Таким образом, как об этом уже говорилось в начале введения, решение задачи о равновесии мембраны определяется с помощью обобщенного решения соответствующей краевой задачи.

Определение обобщенного решения краевой задачи будет дано во второй главе. Там же получены и результаты, из которых, в частности, вытекают существование и единственность решений обсуждавшихся выше задач, связанных с состоянием равновесия мембраны. При этом, как мы увидим, удобно пользоваться не пространствами типа $C^k(\overline{Q})$ непрерывно дифференцируемых функций, а банаховыми пространствами обобщенно дифференцируемых функций – пространствами Соболева. Необходимые для второй главы сведения об этих пространствах изложены в первой главе.

Глава 1

Пространства Соболева и теоремы вложения

Вначале договоримся об обозначениях и терминологии.

Прежде всего области $Q, D, \Omega, \dots$ n -мерного вещественного пространства $\mathbb{R}^n$, в которых задаются те или иные функции $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q, D, \Omega, \dots$, *будут*, если противоположное не оговорено особо, *считаться ограниченными*.

Как обычно, множество всех комплекснозначных функций, имеющих в области Q все частные производные до порядка k включительно, непрерывные в Q , где k – некоторое целое неотрицательное число, будем обозначать через $C^k(Q)$, а подмножество этого множества, состоящее из всех функций, все частные производные которых непрерывны в $\bar{Q}$, обозначим через $C^k(\bar{Q})$.

$C^k(\bar{Q})$ есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{C^k(\bar{Q})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{Q}} |D^\alpha f(x)|,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – вектор с целыми неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, а

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Множество всех функций, принадлежащих всем $C^k(Q)$, обозначим через $C^\infty(Q)$, т.е. $C^\infty(Q) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(Q)$. Аналогично, $C^\infty(\bar{Q}) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\bar{Q})$.

Множество всех финитных в Q функций из $C^k(Q)$ будем обозначать через $C_0^k(Q)$, а пересечение всех этих множеств $\bigcap_{k=1}^\infty C_0^k(Q)$ – через $C_0^\infty(Q)$.

Множество всех измеримых в области Q функций, p -ые степени модулей которых интегрируемы по любой строго внутренней подобласти Q_1 области Q , $Q_1 \Subset Q$, где $p \geq 1$, будем обозначать через $L_{p,\text{loc}}(Q)$, а подмножество этого множества, состоящее из

функций, модули p -ых степеней которых интегрируемы по области Q , обозначим через $L_p(Q)$. При этом, как обычно, различающиеся на множестве меры нуль функции будем отождествлять, т.е. считать одним и тем же элементом пространства $L_{p,\text{loc}}(Q)$ ($L_p(Q)$). Множество $L_p(Q)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_p(Q)} = \left(\int_Q |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$L_p(Q) \subset L_{p'}(Q)$ при $p > p'$ (напомним, что Q – ограниченная область).

Подмножество пересечения $\bigcap_{p \geq 1} L_p(Q)$, состоящее из всех существенно ограниченных функций, т.е. функций $f(x)$, для каждой из которых существует такая постоянная M , что $|f(x)| \leq M$ для п.в. $x \in Q$, будем обозначать через $L_\infty(Q)$. $L_\infty(Q)$ – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(Q)} = \text{vrai sup}_{x \in Q} |f(x)| = \inf_{\text{mes}\{|f(x)| > M\} = 0} M.$$

Под $(n-1)$ -мерной замкнутой поверхностью S мы будем понимать ограниченную замкнутую $(n-1)$ -мерную поверхность без края класса C^k при некотором $k \geq 1$, т.е. лежащее в $\mathbb{R}^n$ связанное ограниченное замкнутое множество $S = \bar{S}$, обладающее следующим свойством: для любой точки $x^0 \in S$ существует ее (n) -мерная окрестность U_{x^0} и принадлежащая $C^k(U_{x^0})$ функция $F_{x^0}(x)$, для которой $\nabla F_{x^0}(x^0) \neq 0$, такие, что множество $S \cap U_{x^0}$ описывается уравнением $F_{x^0}(x) = 0$ (т.е. все точки множества $S \cap U_{x^0}$ удовлетворяют уравнению $F_{x^0}(x) = 0$ и любая удовлетворяющая уравнению $F_{x^0}(x) = 0$ точка из U_{x^0} принадлежит S).

Граница рассматриваемых областей будет предполагаться состоящей из конечного числа непересекающихся замкнутых $(n-1)$ -мерных поверхностей (класса C^1).

Заметим, что если замкнутая $(n-1)$ -мерная поверхность S принадлежит классу C^k , то для любой ее точки x^0 существует столь малая ее окрестность U'_{x^0} , что пересечение $S \cap U'_{x^0}$ однозначно проектируется на некоторую $(n-1)$ -мерную область D_{x^0} с границей класса C^k , лежащую в одной из координатных плоскостей, т.е. описывается при некотором $i, i = 1, \dots, n$, уравнением

$$x_i = \varphi_{x^0}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in D_{x^0}, \quad \varphi_{x^0} \in C^k(\bar{D}_{x^0}).$$

Пересечение $S \cap U'_{x_0}$ будем называть *простым куском* поверхности S .

Так как S ограничена и замкнута, то из покрытия $\{U'_x, x \in S\}$ поверхности S можно выбрать конечное подпокрытие. Совокупность соответствующих такому конечному покрытию простых кусков $S_1, \dots, S_N$ будем называть *покрытием поверхности S простыми кусками*.

Под $(n-1)$ -мерной поверхностью S класса C^k будем понимать связную поверхность, которую можно так покрыть конечным числом (n) -мерных областей $U_i, i = 1, \dots, N$, что каждое из множеств $S_i = S \cap U_i, i = 1, \dots, N$, однозначно проектируется на некоторую $(n-1)$ -мерную область D_i с границей класса C^k , лежащую в одной из координатных плоскостей, т.е. при некотором $p = p(i), 1 \leq p \leq n$, описывается уравнением

$$x_p = \varphi_i(x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n), \\ (x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n) \in D_i, \quad \varphi_i \in C^k(\overline{D_i}).$$

Совокупность поверхностей S_i – простых кусков поверхности S будем называть *покрытием поверхности S простыми кусками*. В дальнейшем под $(n-1)$ -мерной поверхностью мы будем понимать $(n-1)$ -мерную поверхность класса C^k при некотором $k \geq 1$.

Пусть S – простой кусок некоторой лежащей в $\overline{Q}$ поверхности класса C^k при некотором $k \geq 1$ и пусть

$$x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \varphi(x'), \quad x' \in D, \quad \varphi(x') \in C^k(\overline{D}),$$

– уравнение этого куска.

Заданную на S функцию $f(x) = f(x_1, \dots, x_n), x \in S$, будем считать принадлежащей множеству $C^k(S), f(x) \in C^k(S)$, если $f(x', \varphi(x')) \in C^k(\overline{D})$.

Пусть теперь S – замкнутая лежащая в $\overline{Q}$ поверхность класса $C^k, k \geq 1$, (в частности, $S = \partial Q$), а $S_1, \dots, S_N$ – ее покрытие простыми кусками. Заданную на S функцию $f(x), x \in S$, считаем принадлежащей множеству $C^k(S), f(x) \in C^k(S)$, если $f(x) \in C^k(S_i)$ при всех $i = 1, \dots, N$. Нетрудно убедиться в том, что принадлежность функции $f(x)$ множеству $C^k(S)$ не зависит от покрытия поверхности S простыми кусками.

Определим в $\bar{Q}$ функцию $r(x)$, $r(x) = \min_{y \in \partial Q} |x - y|$. Очевидно, $r(x) \in C(\bar{Q})$. Обозначим через Q_δ , $\delta > 0$, множество точек $\{x \in Q : r(x) > \delta\}$, а через Q^δ , $\delta > 0$, множество $\bigcup_{x^0 \in Q} \{|x - x^0| < \delta\}$.

Пусть $\omega_1(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$ – бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция переменного $t \in \mathbb{R}^1$, равная нулю для $|t| \geq 1$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_1(|x|) dx = \int_{|x| < 1} \omega_1(|x|) dx = \sigma_n \int_0^1 \omega_1(r) r^{n-1} dr = 1,$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ ($\sigma_1 = 2$). В качестве $\omega_1(t)$ можно взять, например, функцию

$$\omega_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{C_n} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

с соответствующим образом подобранной постоянной C_n .

Функция

$$\omega_h(|x|) = \frac{1}{h^n} \omega_1(|x|/h), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где число $h > 0$, называется *ядром усреднения*.

Очевидны следующие свойства ядра усреднения:

- а) $\omega_h(|x|) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\omega_h(|x|) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$,
- б) $\omega_h(|x|) \equiv 0$ для $|x| \geq h$
- в) $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(|x|) dx = 1$,
- г) для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где α вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, при всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$|D^\alpha \omega_h(|x|)| \leq \frac{c_\alpha}{h^{n+|\alpha|}}$$

с постоянной $c_\alpha > 0$, не зависящей от h .

Для любой функции $f \in L_1(Q)$ при всех $h > 0$ определена функция

$$f_h(x) = \int_Q f(y) \omega_h(|x - y|) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

называемая *усредненной функцией для функции f (усреднением функции f)*. Ясно, что $f_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Усредненные функции будут играть в наших дальнейших рассмотрениях важную роль.

§ 1. Обобщенные производные и усредненные функции

Пусть непрерывная в Q функция $f(x)$ имеет непрерывную в Q производную $f_{x_i}(x)$. Тогда для любой $g(x) \in C_0^1(\overline{Q})$ имеет место равенство

$$\int_Q f(x) \overline{g_{x_i}(x)} dx = - \int_Q f_{x_i}(x) \overline{g(x)} dx.$$

Оказывается этим равенством производная $f_{x_i}(x)$ функции $f(x)$ полностью определяется: легко видеть, что если для функции $f(x) \in C^1(Q)$ существует функция $h_i(x) \in C(Q)$ такая, что для любой $g(x) \in C_0^1(\overline{Q})$ имеет место равенство

$$\int_Q f(x) \overline{g_{x_i}(x)} dx = - \int_Q h_i(x) \overline{g(x)} dx, \quad (1)$$

то функция $h_i(x)$, $x \in Q$, является производной $f_{x_i}(x)$ функции $f(x)$.

Если в равенстве (1) отказаться от непрерывности функций f и h_i , а потребовать их интегрируемость, то мы приходим к введенному С. Л. Соболевым понятию обобщенной производной.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – вектор с целыми неотрицательными компонентами. Функция $f^\alpha \in L_{1,\text{loc}}(Q)$ называется α -ой обобщенной производной (о.п.) функции $f \in L_{1,\text{loc}}(Q)$, если для всех $g(x) \in C_0^{|\alpha|}(\overline{Q})$ имеет место равенство

$$\int_Q f(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f^\alpha(x) \overline{g(x)} dx, \quad (2)$$

Этим равенством о.п. определяется (как элемент пространства $L_{1,\text{loc}}(Q)$) однозначно: если существует еще одна функция $f_1^\alpha(x) \in L_{1,\text{loc}}(Q)$, для которой выполняется тождество (2), то функция $f^\alpha(x) - f_1^\alpha(x)$, принадлежащая при любой $Q_1 \Subset Q$ пространству $L_1(Q_1)$, удовлетворяет равенству

$$\int_Q (f^\alpha(x) - f_1^\alpha(x)) \overline{g(x)} dx = 0$$

для всех $g(x) \in C_0^{|\alpha|}(\overline{Q_1})$. Поэтому $f^\alpha(x) = f_1^\alpha(x)$ в Q_1 , а значит, и в Q .

Приведенное определение обобщенной производной по существу такое же как и определение производной обобщенной функции. Функцию $f(x)$ из $L_{1,\text{loc}}(Q)$ также можно рассматривать как обобщенную функцию (регулярную обобщенную функцию). При этом у нее существуют все производные любых порядков, являющиеся обобщенными функциями. В нашей ситуации производная $D^\alpha f$ является не просто обобщенной функцией, а регулярной обобщенной функцией, принадлежащей $L_{1,\text{loc}}(Q)$.

Поскольку для функции $f(x) \in C^{|\alpha|}(Q)$ равенство (2) выполняется с функцией $f^\alpha = D^\alpha f(x)$, где $D^\alpha f(x)$ обычная производная функции f , то эта производная является и соответствующей обобщенной производной функции f . Поэтому в дальнейшем о.п. f^α функции f будем обозначать через $D^\alpha f$, для о.п. первого, второго и т.д. порядков будем также пользоваться обозначениями $f_{x_i}, f_{x_i, x_j}, \dots$.

Отметим несколько просто доказываемых утверждений.

Поскольку для гладких функций $g(x)$ производная $D^\alpha g$ не зависит от порядка дифференцирования, то и о.п. $D^\alpha f$ не зависит от порядка дифференцирования.

Если функции f_i , $i = 1, 2$, имеют о.п. $D^\alpha f_i$, $i = 1, 2$, то функция $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$ при любых постоянных C_1, C_2 имеет о.п. $D^\alpha f = C_1 D^\alpha f_1 + C_2 D^\alpha f_2$.

Если $D^\alpha f$ — о.п. функции f в области Q , а область $Q_1 \subset Q$, то $D^\alpha f$, $x \in Q_1$, является о.п. функции f в Q_1 .

Если для функции $f \in L_{1,\text{loc}}(Q)$ существует о.п. $D^\alpha f = F$, а у функции F существует о.п. $D^\beta F$, то функция $D^\beta F$ является о.п. $D^{\alpha+\beta} f$ функции f .

Функция $f(x) = |x_1|$ в n -мерном шаре $\{|x| < 1\}$ имеет о.п. $f_{x_1} = \text{sgn } x_1$, и $f_{x_i} = 0$, $i = 2, \dots, n$.

Функция $f(x) = \text{sgn } x_1$ в шаре $\{|x| < 1\}$ обобщенной производной f_{x_1} не имеет, а обобщенные производные по остальным переменным существуют и $f_{x_i} = 0$, $i = 2, \dots, n$.

О.п. $D^\alpha f$ функции f , в отличие от обычной производной, определяется сразу для порядка $|\alpha|$ без предположения о существовании соответствующих младших производных. Для функции $f(x) = \text{sgn } x_1 + \text{sgn } x_2$ в n -мерном шаре $\{|x| < 1\}$ существует о.п. $f_{x_1 x_2} = 0$, но о.п. f_{x_1} и f_{x_2} не существует.

Несколько сложнее доказывается следующее утверждение: если функция f имеет о.п. $D^\alpha f$ в областях Q_1 и Q_2 и $Q = Q_1 \cup Q_2$

тоже область, то $D^\alpha f$ существует и в Q (доказательство см., например, в [1], [2]).

В нашем курсе основную роль будут играть пространства, связанные с квадратичной интегрируемостью. Поэтому мы, как правило, будем формулировать те или иные результаты и доказывать их лишь для случая, когда степень интегрируемости $p = 2$, хотя зачастую они справедливы и для других p .

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Если $f(x) \in L_2(Q)$, то $f_h(x) \rightarrow f(x)$ в $L_2(Q)$ при $h \rightarrow 0$.

Наряду с теоремой 1 имеют место и аналогичные утверждения, отличающиеся от теоремы 1 тем, что в их формулировках пространство $L_2(Q)$ заменено на $L_p(Q)$ при $p \geq 1$ или на $C(\bar{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Считая функцию $f(x)$ продолженной нулем вне Q , имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f_h(x)|^2 &= \left| \int_{|x-y|<h} (f(x) - f(y)) \omega_h(|x-y|) dy \right|^2 \\ &\leq \int_{|x-y|<h} |f(x) - f(y)|^2 dy \cdot \frac{\text{const}}{h^n} \\ &= \frac{\text{const}}{h^n} \int_{|z|<h} |f(x) - f(x+z)|^2 dz \end{aligned}$$

и, тем самым,

$$\|f - f_h\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{\text{const}}{h^n} \int_{|z|<h} dz \int_Q |f(x) - f(x+z)|^2 dx. \quad (3)$$

Как известно, принадлежащая $L_2(Q)$ функция $f(x)$ непрерывна в метрике $L_2(Q)$, т.е. по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0 > 0$, что

$$\int_Q |f(x) - f(x+z)|^2 dx \leq \varepsilon$$

для всех z , $|z| \leq h_0$ ($f(y) = 0$ для $y \in \mathbb{R}^n \setminus Q$). Поэтому из неравенства (3) вытекает, что при всех $h \in (0, h_0]$

$$\|f - f_h\|_{L_2(Q)}^2 \leq \text{const} \cdot \varepsilon.$$

Что и требовалось установить.

СЛЕДСТВИЕ. Множество $C_0^\infty(Q)$ всюду плотно в $L_2(Q)$.

Действительно, для функции $f \in L_2(Q)$ по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|f - f^\delta\| \leq \varepsilon$, где финитная в Q_δ функция $f^\delta(x) = f(x)$ для $x \in Q_\delta$ и $f^\delta(x) = 0$ для $x \in Q \setminus Q_\delta$. В силу теоремы 1 существует столь малое h , $h < \delta/2$, что финитная в Q усредненная функция $(f^\delta)_h(x)$ обладает свойством $\|(f^\delta)_h(x) - f^\delta\|_{L_2(Q)} \leq \varepsilon$. Следовательно, $\|(f^\delta)_h(x) - f\|_{L_2(Q)} \leq 2\varepsilon$ для выбранных δ и h .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L_2(Q)$ и существует о.н. $D^\alpha f \in L_2(Q)$. Тогда для любой подобласти $Q_1 \Subset Q$

$$\|D_x^\alpha f_h(x) - D_x^\alpha f(x)\|_{L_2(Q_1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Действительно, по теореме 1

$$\|D^\alpha f - (D^\alpha f)_h\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

С другой стороны, для $x \in Q_{2h}$

$$\begin{aligned} (D^\alpha f)_h(x) &= \int_Q D^\alpha f(y) \omega_h(|x - y|) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_Q f(y) D_y^\alpha \omega_h(|x - y|) dy \end{aligned}$$

поскольку при таких x функция (переменного y) $\omega_h(|x - y|) \in C_0^\infty(Q)$. Поэтому для $x \in Q_{2h}$

$$(D^\alpha f)_h(x) = \int_Q f(y) D_x^\alpha \omega_h(|x - y|) dy = D_x^\alpha (f_h(x)).$$

Следовательно, для любой области $Q_1 \Subset Q$ имеет место доказываемое соотношение.

Из теоремы 2 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если финитная в Q функция $f \in L_2(Q)$ и у нее существует о.н. $D^\alpha f \in L_2(Q)$, то

$$\|D^\alpha f_h(x) - D^\alpha f(x)\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если у функции $f(x) \in L_2(Q)$ все первые обобщенные производные $f_{x_i} = 0$, $i = 1, \dots, n$, то $f = \text{const}$.

Действительно, в любой подобласти $Q_1 \Subset Q$ при достаточно малых h имеем равенства $(f_h)_{x_i} = (f_{x_i})_h = 0$, $i = 1, \dots, n$, из которых вытекает, что $f_h = \text{const} = c(h)$ в Q_1 для таких h . Так как $\|f_h - f\|_{L_2(Q_1)} = \|c(h) - f\|_{L_2(Q_1)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то

$$\|c(h_1) - c(h_2)\|_{L_2(Q_1)} = |c(h_1) - c(h_2)|\sqrt{\text{mes } Q_1} \rightarrow 0$$

при $h_1, h_2 \rightarrow 0$. Следовательно, $c(h) = f_h$ при $h \rightarrow 0$ сходится равномерно в Q_1 (и тем более в $L_2(Q_1)$) к некоторой постоянной, т.е. $f = \text{const}$ в Q_1 , и тем самым, в Q .

С помощью теорем 1 и 2 нетрудно получить следующее необходимое и достаточное условие существования обобщенной производной.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы функция $f \in L_2(Q)$ имела о.п. $D^\alpha f$ необходимо и достаточно, чтобы для любой подобласти $Q_1 \Subset Q$ существовали такие постоянные $C(Q_1) > 0$ и $h(Q_1) > 0$, что $\|D^\alpha f_h\|_{L_2(Q_1)} \leq C(Q_1)$ для всех $h \leq h(Q_1)$.*

Доказательства этой теоремы мы проводить не будем, поскольку она не будет использована в дальнейших построениях. С ее доказательством можно познакомиться в [2]. В [2] есть и еще один критерий существования о.п., связанный со свойствами соответствующего конечноразностного отношения.

§ 2. Пространства Соболева

Множество функций $f(x)$, принадлежащих $L_{p,\text{loc}}(Q)$, $p \geq 1$, и имеющих все принадлежащие $L_{p,\text{loc}}(Q)$ о.п. до k -го порядка включительно образуют пространство Соболева $W_{p,\text{loc}}^k(Q)$; в случае, когда функция f и все ее о.п. принадлежат $L_p(Q)$, это множество обозначается через $W_p^k(Q)$. При этом, как и в случае пространства $L_p(Q)$, функции из $W_{p,\text{loc}}^k(Q)$ и $W_p^k(Q)$, различающиеся на множестве меры нуль, отождествляются; при $p = 2$ (этим случаем мы, в основном, и будем интересоваться) наряду с приведенными обозначениями $W_{2,\text{loc}}^k(Q)$ и $W_2^k(Q)$ пользуются также обозначениями $H_{\text{loc}}^k(Q)$ и $H^k(Q)$.

Из определения обобщенной производной вытекает, что множество $W_p^k(Q)$, $p \geq 1$, $k \geq 0$ (при $k = 0$ $W_p^0(Q) = L_p(Q)$) является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{W_p^{(k)}(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p(Q)}^p \right)^{1/p},$$

а множество $H^k(Q)$ – гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_{H^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L_2(Q)}$$

и порождаемой им нормой

$$\|f\|_{H^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L_2(Q)}^2 \right)^{1/2},$$

Отметим некоторые очевидные свойства пространств $H^k(Q)$.

1. Если область $Q_1 \subset Q$ и $f \in H^k(Q)$, то $f \in H^k(Q_1)$.
2. Если $f \in H^k(Q)$ и $a(x) \in C^k(\bar{Q})$, то $af \in H^k(Q)$. При этом любая о.п. вычисляется по обычным правилам дифференцирования, например, $(af)_{x_1} = a_{x_1}f + af_{x_1}$.

Свойства 1 и 2 немедленно вытекают из соответствующих свойств обобщенных производных. Следующее свойство есть теорема о возможности продолжения функции с сохранением гладкости в более широкую область.

ТЕОРЕМА 1. Пусть граница области Q $\partial Q \in C^k$ при некотором целом $k \geq 1$. Тогда в любой области $Q_1 \ni Q$ для любой

функции $f(x) \in H^k(Q)$ ($f(x) \in C^k(\overline{Q})$) существует финитная в Q_1 функция $F(x) \in H^k(Q_1)$ ($F(x) \in C^k(\overline{Q_1})$), совпадающая с f на Q . При этом существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от f , что

$$\|F\|_{H^k(Q_1)} \leq C\|f\|_{H^k(Q)} \quad (\|F\|_{C^k(\overline{Q_1})} \leq C\|f\|_{C^k(\overline{Q})}).$$

Эта теорема для случая пространства $C^k(\overline{Q})$ есть классическая теорема Уитни–Хестинса (см. [3]). Доказательство ее для случая пространства $H^k(Q)$, почти полностью совпадающее с доказательством в [3], проведено в [2].

Полезным является также утверждение о возможности продолжить функцию с границы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi(x) \in C^1(\partial Q)$. Тогда существует функция $f(x) \in C^1(\overline{Q}) \subset H^1(Q)$ такая, что $f|_{\partial Q} = \varphi$. При этом имеет место неравенство

$$\|f\|_{C^1(\overline{Q})} \leq C\|\varphi\|_{C^1(\partial Q)},$$

в котором постоянная $C > 0$ не зависит от φ .

С доказательством этой теоремы также можно познакомиться в [3] и [2].

Из следствия 1 теоремы 2 предыдущего параграфа вытекает

ТЕОРЕМА 3.

1. Пусть $f \in H^k(Q)$ при некотором целом $k \geq 1$, а $Q_1 \Subset Q$. Тогда $\|f_h - f\|_{H^k(Q_1)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.
2. Для любой финитной функции $f \in H^k(Q)$, $k \geq 1$, имеет место соотношение $\|f_h - f\|_{H^k(Q)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

В качестве следствия из теоремы 3 и теоремы 1 отметим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\partial Q \in C^k$ при некотором $k \geq 1$. Тогда множество $C^\infty(\overline{Q})$ всюду плотно в $H^k(Q)$.

Для доказательства возьмем произвольную (ограниченную) область $Q_1 \Subset Q$. По теореме 1 для любой функции $f(x) \in H^k(Q)$ существует финитная в Q_1 функция $F(x) \in H^k(Q_1)$, совпадающая с функцией $f(x)$ при $x \in Q$. Согласно п. 2 теоремы 3 $\|F_h - F\|_{H^k(Q_1)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и тем более, $\|F_h - F\|_{H^k(Q)} =$

$\|F_h - f\|_{H^k(Q)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, что и требовалось установить, поскольку при любом $h > 0$ функция $F_h(x) \in C^\infty(\bar{Q})$.

Функции из пространства $W_p^k(Q)$ при любых p и k (напомним, что $H^k(Q) = W_2^k(Q)$) определены в Q с точностью до произвольного множества меры нуль. Это означает, что каждую функцию из $W_p^k(Q)$ можно произвольно изменить на любом множестве меры нуль, оставляя ее тем же элементом этого пространства. Т.е. каждой функции из $W_p^k(Q)$ можно произвольно приписать любые значения на каком угодно множестве меры нуль, в частности, на граничной поверхности или, тем более, на поверхностях меньшей размерности, например, в отдельных точках.

Поскольку в $W_p^k(Q)$ наряду с “не очень хорошими” функциями есть и гладкие в классическом смысле функции, “испорченные”, быть может, на каком-то множестве меры нуль, то возникает естественный вопрос, как отобрать их из числа всех остальных. Оказывается, гарантией возможности такого отбора является наличие у функции достаточного числа обобщенных производных, интегрируемых в достаточно высокой степени. В частности, принадлежность функции пространству $W_p^k(Q)$ при достаточно больших p и k (пространству $H^k(Q)$ при достаточно большом k) позволяет, изменив эту функцию на надлежащем множестве меры нуль, сделать ее достаточно гладкой в классическом смысле слова: например, обладающей граничными значениями на поверхностях той или иной размерности, непрерывно переходящими друг в друга при непрерывном перемещении этих поверхностей и, в частности, непрерывной и даже непрерывно дифференцируемой достаточное число раз в каждой точке рассматриваемой области. Такого сорта результаты составляют основное содержание так называемых теорем вложения. Метод доказательства этих теорем, принятый в наших лекциях, следующий. Для произвольной функции $f(x)$ из $H^k(Q)$ ($W_p^k(Q)$) берется последовательность гладких функций, сходящаяся к $f(x)$ в норме этого пространства. Затем доказывается, что при соответствующих предположениях о k (k и p) эта последовательность сходится еще и, скажем, в норме пространства $C^l(\bar{Q})$ при некотором l . Это и означает, что взятая функция допускает такое ее изменение на некотором множестве меры нуль, в результате которого она становится функцией из $C^l(\bar{Q})$. Формулировке и доказательству некоторых из теорем вложения, используемых далее в нашем курсе, посвящены последующие параграфы этой главы.

§ 3. След функций из $H^k(Q)$

За счет перенесения начала координат область Q в силу ее ограниченности можно считать расположенной вместе с некоторой ее объемлющей областью Q_1 , $Q \Subset Q_1$, в первом координатном углу: $Q \Subset Q_1 \subset \{0 < x_i, i = 1, \dots, n\}$.

Рассмотрим сначала случай, когда размерность пространства $n > 1$; более простой случай $n = 1$ будет рассмотрен в § 5. Пусть S некоторая $n - 1$ -мерная поверхность класса C^1 , лежащая в $\overline{Q}$ (в частности, $S = \partial Q$), а $S_1, \dots, S_N$, — ее покрытие простыми кусками, $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$. Пусть простой кусок S_1 однозначно проектируется на $n - 1$ -мерную область D_1 координатной плоскости $\{x_n = 0\}$, а

$$x_n = \varphi(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D_1, \quad \varphi(x') \in C^1(\overline{D}_1),$$

— уравнение этого куска.

Возьмем произвольную функцию $f(x) \in C^1(\overline{Q})$, продолжим ее согласно теореме 1 из § 2 в область Q_1 , а затем продолжим полученную функцию нулем в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}_1$; эту функцию, принадлежащую $C^1(\mathbb{R}^n)$, по-прежнему будем обозначать через $f(x)$. По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$f(x', \varphi(x')) = \int_0^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n,$$

откуда

$$|f(x', \varphi(x'))|^2 \leq \varphi(x') \int_0^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n.$$

Проинтегрируем это неравенство по D_1 , предварительно умножив его на $\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x')|^2}$. В результате, снова используя теорему о продолжении функций (теорему 1 предыдущего параграфа), получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{S_1} |f(x)|^2 dS &\leq \int_{D_1} \varphi(x') \sqrt{1 + |\nabla \varphi(x')|^2} \int_0^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n dx' \\ &\leq C \|f\|_{H^1(Q_1)}^2 \leq C_1 \|f\|_{H^1(Q)}^2, \end{aligned}$$

в котором постоянная C_1 не зависит от f . Аналогичное неравенство имеет место и для любого другого простого куска S_k ,

$k = 2, \dots, N$, поверхности S и, тем самым, существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что для любой $f \in C^1(\bar{Q})$ имеет место неравенство

$$\int_S |f(x)|^2 dS = \|f\|_{L_2(S)}^2 \leq C_2 \|f\|_{H^1(Q)}^2. \quad (1)$$

Возьмем теперь функцию $f(x) \in H^1(Q)$. В силу плотности множества $C^1(\bar{Q})$ в $H^1(Q)$ (теорема 4 предыдущего параграфа) найдется последовательность $f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$, функций из $C^1(\bar{Q})$, сходящаяся к $f(x)$ в норме $H^1(Q)$. Для функции $f_p - f_q$ неравенство (1) имеет вид

$$\|f_p - f_q\|_{L_2(S)}^2 \leq C_2 \|f_p - f_q\|_{H^1(Q)}^2. \quad (2)$$

Так как $\|f_p - f_q\|_{H^1(Q)} \rightarrow 0$ при $p, q \rightarrow \infty$, то и $\|f_p - f_q\|_{L_2(S)} \rightarrow 0$ при $p, q \rightarrow \infty$. Это означает, что последовательность значений $f_p|_S$, $p = 1, \dots$, функций $f_p(x)$ на поверхности S является фундаментальной в норме $L_2(S)$, и, следовательно, существует функция $f|_S \in L_2(S)$, к которой она сходится в норме $L_2(S)$. Переходя в (2) к пределу при $q \rightarrow \infty$, получим

$$\|f_p - f|_S\|_{L_2(S)}^2 \leq C_2 \|f_p - f\|_{H^1(Q)}^2. \quad (3)$$

Покажем, что функция $f|_S$ не зависит от выбора последовательности $f_1(x), \dots$, аппроксимирующей функцию $f(x)$. Действительно, пусть $f'_1(x), \dots$ другая последовательность функций из $C^1(\bar{Q})$, $\|f'_p - f\|_{H^1(Q)} \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, а $f'|_S$ — предел в норме $L_2(S)$ последовательности $f'_p|_S$, $p = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|f|_S - f'|_S\|_{L_2(S)} \\ & \leq \|f|_S - f_p|_S\|_{L_2(S)} + \|f_p - f'_p\|_{L_2(S)} + \|f'_p - f'|_S\|_{L_2(S)} \\ & \leq C_2 (\|f - f_p\|_{H^1(Q)} + \|f_p - f'_p\|_{H^1(Q)} + \|f'_p - f\|_{H^1(Q)}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $p \rightarrow \infty$, т.е. $f|_S = f'|_S$.

Функцию $f|_S$ (как элемент $L_2(S)$) будем называть *следом* на S функции $f \in H^1(Q)$; $L_2(S)$ -норму следа $f|_S$ будем обозначать $\|f\|_{L_2(S)}$.

В силу плотности множества $C^1(\bar{Q})$ в $H^1(Q)$ неравенство (1), установленное для любой функции f из $C^1(\bar{Q})$, справедливо и для любой функции $f \in H^1(Q)$, причем в левой части этого неравенства стоит квадрат $L_2(S)$ -нормы следа функции f . Таким образом, установлена

ТЕОРЕМА 1. Каждая функция $f(x) \in H^1(Q)$ на любой поверхности S (класса C^1) имеет след $f|_S \in L_2(S)$. При этом справедливо неравенство

$$\int_S |f(x)|^2 dS = \|f\|_{L_2(S)}^2 \leq C_2 \|f\|_{H^1(Q)}^2, \quad (1)$$

в котором постоянная $C_2 > 0$ не зависит от f .

На доказанное утверждение можно смотреть и следующим образом. Каждой функции $f(x) \in H^1(Q)$ поставлена в соответствие функция $f|_{\partial Q} \in L_2(\partial Q)$ – след функции f на граничной поверхности (аналогично, ее след $f|_S$ на некоторой принадлежащей классу C^1 поверхности $S \subset \bar{Q}$). Это означает, что на $H^1(Q)$ задан оператор $\mathbb{J}$, переводящий $H^1(Q)$ в $L_2(\partial Q)$, оператор вложения $H^1(Q)$ в $L_2(\partial Q)$: для каждой $f \in H^1(Q)$ $\mathbb{J}f = f|_{\partial Q}$. Этот оператор, очевидно, линейный и в силу теоремы 1 ограниченный:

$$\|\mathbb{J}f\|_{L_2(\partial Q)} = \|f|_{\partial Q}\|_{L_2(\partial Q)} \leq C_2 \|f\|_{H^1(Q)}$$

причем $\|\mathbb{J}\| \leq C_2$. Ниже, в § 8, будет доказано, что оператор $\mathbb{J}$ вполне непрерывный.

Вернемся к началу нашего рассмотрения в этом параграфе, при этом будем считать, что поверхность S_k из покрытия поверхности S простыми кусками имеет вид $\{|x - x_k| < r\} \cap S$, где x_k – некоторая точка поверхности S , а r – достаточно малое число (т.е. считаем, что поверхность S покрыта достаточно мелкими простыми кусками).

Пусть S_1 – некоторый простой кусок поверхности S , временно нам его удобно переобозначить через Γ_0 , $\Gamma_0 = S_1 = \{x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n), x_n = \varphi(x'), x' \in D_1\}$, $\varphi(x') \in C^1(\bar{D}_1)$, и пусть $\delta_0 > 0$ столь мало, что область $\Omega_{\delta_0}^1 = \{\varphi(x') - \delta_0 < x_n < \varphi(x'), x' \in D_1\} \subset Q$ (аналогично рассматривается случай, когда область $\Omega_{\delta_0}^1 = \{\varphi(x') < x_n < \varphi(x') + \delta_0, x' \in D_1\} \subset Q$). Для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ “параллельная” Γ_0 поверхность $\Gamma_\delta = \{x_n = \varphi(x') - \delta, x' \in D_1\}$ лежит в Q и пусть $x^\delta = (x', \varphi(x') - \delta)$ – точка этой поверхности, а $x^0 = (x', \varphi(x'))$ – лежащая над ней точка поверхности Γ_0 .

Для любой функции $f(x) \in C^1(\bar{Q})$ имеем равенство

$$f(x^0) - f(x^\delta) = \int_{\varphi(x') - \delta}^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n, \quad (4)$$

из которого, как и прежде, получаем неравенство

$$\|f(x^0) - f(x^\delta)\|_{L_2(\Gamma_0)}^2 \leq C\delta \|f\|_{H^1(\Omega_\delta^1)}^2, \quad (5)$$

и неравенство

$$\|f(x^0) - f(x^\delta)\|_{L_2(\Gamma_\delta)}^2 \leq C\delta \|f\|_{H^1(\Omega_\delta^1)}^2, \quad (5')$$

в которых постоянная C не зависит ни от f , ни от δ . Следовательно, неравенства (5) и (5') имеют место и для любой функции $f \in H^1(Q)$ (в левых частях этих неравенств стоят следы функции f на поверхностях Γ_0 и Γ_δ). Эти неравенства выражают определенную *непрерывность следов функции $f \in H^1(Q)$ на семействе поверхностей Γ_δ относительно сдвигов этих поверхностей*.

Из равенства (4) для $f(x) \in C^1(\bar{Q})$ вытекает также и неравенство

$$\|f\|_{L_2(\Gamma_\delta)}^2 \leq 2\|f\|_{L_2(\Gamma_0)}^2 + 2C\delta \|f\|_{H^1(\Omega_\delta^1)}^2,$$

интегрируя которое по δ в пределах от 0 до δ , получим неравенство

$$\|f\|_{L_2(\Omega_\delta^1)}^2 \leq 2\delta \|f\|_{L_2(\Gamma_0)}^2 + 2C\delta^2 \|f\|_{H^1(\Omega_\delta^1)}^2, \quad (6)$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей ни от f , ни от δ .

Пусть теперь поверхность S есть граница ∂Q области Q , а $\{S_1, \dots, S_N\}$ – множество простых кусков, покрывающее границу ∂Q . Для простого куска S_1 мы получили неравенство (6); аналогичные неравенства есть и для любого другого куска S_k , $k = 2, \dots, N$:

$$\|f\|_{L_2(\Omega_\delta^k)}^2 \leq 2\delta \|f\|_{L_2(S_k)}^2 + C\delta^2 \|f\|_{H^1(\Omega_\delta^k)}^2,$$

где Ω_δ^k , $0 < \delta \leq \delta_0$, – подобласть области Q , построенная по поверхности S_k , $k = 2, \dots, N$, аналогично тому, как область Ω_δ^1 , $0 < \delta \leq \delta_0$ построена по поверхности $S_1 = \Gamma_0$.

Суммируя эти неравенства по k , $k = 1, \dots, N$, и пользуясь тем, что при достаточно малом $\delta_0 > 0$ для всех δ , $0 < \delta \leq \delta_0$, справедливы включения $Q \setminus Q_{\delta/2} \subset \bigcup_{k=1}^N \Omega_\delta^k \subset Q \setminus Q_{2\delta}$, получим, что для любой $f \in C^1(\bar{Q})$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{L_2(Q \setminus Q_{\delta/2})}^2 \leq C(\delta \|f\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \delta^2 \|f\|_{H^1(Q \setminus Q_{2\delta})}^2), \quad (7)$$

в котором постоянная C не зависит ни от f , ни от δ . Следовательно, последнее неравенство справедливо и для любой функции $f(x) \in H^1(Q)$.

Поскольку в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для любой функции $f(x) \in H^1(Q)$ $\|f\|_{H^1(Q \setminus Q_{2\delta})} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то из неравенства (7) вытекает следующее утверждение, которым мы воспользуемся в следующем параграфе.

ЛЕММА. *Для функции $f(x) \in H^1(Q)$, след которой на границе равен нулю, $f|_{\partial Q} = 0$, справедливо соотношение*

$$\|f\|_{L_2(Q \setminus Q_\delta)} = o(\delta) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Если функция $f(x) \in H^k(Q)$, $k > 1$, то любая ее обобщенная производная $D^\alpha f$, $|\alpha| < k$, принадлежит $H^1(Q)$ и, следовательно, имеет след на поверхности S , о которой идет речь в теореме 1, при этом имеет место неравенство

$$\|D^\alpha f\|_{L_2(S)} \leq C \|f\|_{H^{|\alpha|+1}(Q)} \leq C \|f\|_{H^k(Q)}.$$

Отметим еще *формулу интегрирования по частям*: для любых f и g из $H^1(Q)$ справедливы равенства

$$\int_Q f_{x_i} \bar{g} dx = \int_{\partial Q} f \bar{g} \nu_i dS - \int_Q f \bar{g}_{x_i} dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

в которых f и g , стоящие под знаком интеграла по ∂Q являются следами на ∂Q соответствующих функций, $\nu_i = \nu_i(x)$ — i -ая компонента вектора внешней по отношению к области Q единичной нормали $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ к поверхности ∂Q . Для получения этой формулы аппроксимируем f и g в норме $H^1(Q)$ последовательностями $f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$ и $g_1(x), \dots, g_s(x), \dots$, функций из $C^1(\bar{Q})$ и перейдем к пределу при $s \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$ в равенствах

$$\int_Q f_{kx_i} \bar{g}_s dx = \int_{\partial Q} f_k \bar{g}_s \nu_i dS - \int_Q f_k \bar{g}_{sx_i} dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из формул (8) вытекает формула Остроградского: для любого вектора $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, компоненты которого $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, принадлежат $H^1(Q)$ имеет место равенство

$$\int_Q \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial Q} (f(x), \nu(x)) dS.$$

§ 4. Пространство $\dot{H}^1(Q)$

Обозначим через $\dot{H}^1(Q)$ множество функций из $H^1(Q)$, след которых на границе ∂Q равен нулю. $\dot{H}^1(Q)$ – очевидно, линейное подмножество пространства $H^1(Q)$ и, тем самым, является предгильбертовым пространством в скалярном произведении пространства $H^1(Q)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. $\dot{H}^1(Q)$ – подпространство пространства $H^1(Q)$.

Для доказательства теоремы достаточно установить замкнутость множества $\dot{H}^1(Q)$.

Пусть $f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$, где $f_k(x) \in \dot{H}^1(Q)$ для всех $k \geq 1$, – последовательность функций, сходящаяся в норме $H^1(Q)$: $\|f_k - f_s\|_{H^1(Q)} \rightarrow 0$ при $k, s \rightarrow \infty$. Предельная функция $f(x)$ принадлежит $H^1(Q)$. Для того чтобы доказать, что ее след на ∂Q равен нулю, воспользуемся теоремой 1 предыдущего параграфа: для любого $k \geq 1$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{L_2(\partial Q)} = \|f - f_k\|_{L_2(\partial Q)} \leq C_2 \|f - f_k\|_{H^1(Q)},$$

в котором постоянная C_2 не зависит от k . Но правая часть этого неравенства может быть сделана при достаточно больших k сколь угодно малой. Следовательно, $\|f\|_{L_2(\partial Q)} = 0$.

Поскольку функция $f(x) = 1 \in H^1(Q)$, но не содержится в пространстве $\dot{H}^1(Q)$, то $\dot{H}^1(Q)$ – истинное подпространство пространства $H^1(Q)$, т.е. подпространство, не совпадающее с самим $H^1(Q)$.

Важное значение имеет следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Множество $C_0^\infty(Q)$ всюду плотно в $\dot{H}^1(Q)$.

Легко проверить, что при любом $\delta > 0$ функция

$$\zeta_\delta(x) = \int_{Q_{\frac{3\delta}{4}}} \omega_{\delta/4}(|x - y|) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

обладает следующими свойствами:

- а) $0 \leq \zeta_\delta(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$,
- б) $\zeta_\delta(x) = 1$ для $x \in Q_\delta$,
- в) $\zeta_\delta(x) = 0$ вне $Q_{\delta/2}$,
- г) $\left| \frac{\partial \zeta_\delta(x)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{C}{\delta}$ $x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, где C – некоторая положительная не зависящая от δ постоянная.

Пусть функция $f(x) \in \dot{H}^1(Q)$. Тогда функция $f(x)\zeta_\delta(x) \in \dot{H}^1(Q)$ и равна нулю вне $Q_{\delta/2}$. Кроме того, в силу леммы предыдущего параграфа

$$\begin{aligned}
\|f - f\zeta_\delta\|_{H^1(Q)}^2 &= \int_Q |f(1 - \zeta_\delta)|^2 dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_Q |f_{x_i}(1 - \zeta_\delta) - f\zeta_{\delta x_i}|^2 dx \\
&\leq \int_{Q \setminus Q_\delta} |f|^2 dx + 2 \sum_{i=1}^n \int_{Q \setminus Q_\delta} |f_{x_i}|^2 dx \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^n \int_{Q \setminus Q_\delta} |f|^2 |\zeta_{\delta x_i}|^2 dx \\
&\leq \int_{Q \setminus Q_\delta} |f|^2 dx + 2 \sum_{i=1}^n \int_{Q \setminus Q_\delta} |f_{x_i}|^2 dx \\
&\quad + \frac{nC^2}{\delta^2} \int_{Q \setminus Q_\delta} |f|^2 dx = o(1) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Т.е. по любому $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что принадлежащая $H^1(Q)$, равная нулю вне $Q_{\delta/2}$ функция $f\zeta_\delta$ отличается от функции f по норме $H^1(Q)$ меньше, чем на ε : $\|f - f\zeta_\delta\|_{H^1(Q)} \leq \varepsilon$. По теореме 3 из § 2 $\|(f\zeta_\delta)_h - f\zeta_\delta\|_{H^1(Q)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, причем при $h < \delta/2$ функция $(f\zeta_\delta)_h$ — финитная в Q , т.е. можно найти столь малое $h > 0$, что $\|(f\zeta_\delta)_h - f\zeta_\delta\|_{H^1(Q)} < \varepsilon$, откуда $\|f - (f\zeta_\delta)_h\|_{H^1(Q)} \leq 2\varepsilon$. Теорема доказана.

§ 5. Вложение $H^1(a, b)$ в $C([a, b])$

В § 3 рассматривался вопрос о следах функций из $H^1(Q)$ для областей $Q \subset \mathbb{R}^n$ при $n > 1$. Обратимся теперь к случаю $n = 1$. Пусть область $Q = (a, b)$, где $-\infty < a < b < \infty$. Легко проверить, что для любой функции $f(x) \in C_0^1([a, b])$ имеет место равенство

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_a^b f'(y) \operatorname{sgn}(x - y) dy, \quad x \in [a, b],$$

из которого вытекает справедливое для всех $x \in [a, b]$ неравенство

$$|f(x)| \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2} \|f'\|_{L_2(a,b)},$$

т.е. неравенство

$$\|f\|_{C([a,b])} \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2} \|f\|_{H^1(a,b)}.$$

С помощью этого неравенства получим аналогичное неравенство

$$\|f\|_{C([a,b])} \leq C_0 \|f\|_{H^1(a,b)}, \quad (1)$$

с не зависящей от f постоянной C_0 и справедливое для любой функции $f(x) \in C^1([a, b])$: для этого продолжим согласно теореме 1 из § 2 функцию $f(x) \in C^1([a, b])$ на больший отрезок $[a', b']$, $-\infty < a' < a < b < b' < \infty$, функцией $F(x) \in C_0^1[a', b']$ и воспользуемся неравенством $\|F\|_{H^1(a', b')} \leq C_1 \|f\|_{H^1(a,b)}$, в котором постоянная C_1 не зависит от f .

Поскольку множество $C^1([a, b])$ по теореме 4 из § 2 всюду плотно в $H^1(a, b)$, то для произвольной функции $f(x) \in H^1(a, b)$ найдется последовательность функций $f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$, где $f_k(x) \in C^1([a, b])$ для всех $k \geq 1$, сходящаяся к функции $f(x)$ в норме пространства $H^1(a, b)$. Из неравенства (1) для функции $f_k(x) - f_s(x)$ получаем, что взятая последовательность фундаментальна в норме пространства $C([a, b])$, и следовательно, она равномерно сходится на $[a, b]$ к функции из $C([a, b])$, п.в. совпадающей с функцией $f(x)$. Это означает, что функцию $f(x)$ можно изменить на множестве меры нуль так, что в результате она станет непрерывной на $[a, b]$, и, тем самым, любая функция $f(x)$ из $H^1(a, b)$ принадлежит $C([a, b])$ и для нее имеет место неравенство (1), в котором постоянная C_0 не зависит от f . Для получения этого неравенства воспользуемся неравенством (1) для функции $f_n(x)$ из взятой выше последовательности и перейдем в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, имеет место *вложение* пространства $H^1(a, b)$ в пространство $C([a, b])$: $H^1(a, b) \subset C([a, b])$, при этом оператор вложения $\mathbb{J}$, действующий из $H^1(a, b)$ в $C([a, b])$ по формуле $\mathbb{J}f = f$, очевидно, линейный, является в силу (1) ограниченным:

$$\|f\|_{C([a, b])} = \|\mathbb{J}f\|_{C([a, b])} \leq C_0 \|f\|_{H^1(a, b)},$$

и $\|\mathbb{J}\| \leq C_0$.

Докажем, что этот оператор вполне непрерывен, т.е. что он переводит любое ограниченное в $H^1(a, b)$ множество M во множество, компактное в $C([a, b])$. Действительно, для любой $f(x) \in C^1([a, b])$ и любых двух точек x_1 и x_2 из $[a, b]$ имеем

$$f(x_1) - f(x_2) = \int_{x_2}^{x_1} f'(y) dy,$$

откуда

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \|f'\|_{L_2(a, b)}.$$

Повторяя далее предыдущие рассуждения, получим, что для любой функции $f(x) \in H^1(a, b)$ (она, как было выше установлено, непрерывна на $[a, b]$) при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C_1 \sqrt{|x_1 - x_2|} \|f\|_{H^1(a, b)}$$

с постоянной, не зависящей от f . Это означает, что каждая функция из $H^1(a, b)$ не только непрерывна, но и удовлетворяет условию Гёльдера порядка $1/2$.

Поскольку множество M ограничено в $H^1(a, b)$, т.е. при некоторой постоянной $C_2 > 0$ для всех $f \in M$

$$\|f\|_{H^1(a, b)} \leq C_2,$$

то для всех $f \in M$ и всех $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C_1 C_2 \sqrt{|x_1 - x_2|}.$$

Из этого неравенства вытекает, что множество функций M равномерно непрерывно: при произвольном $\varepsilon > 0$ для всех $f \in M$ и всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $|x_1 - x_2| \leq \varepsilon^2 / (C_1 C_2)^2$ имеем неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$. Поскольку равномерная ограниченность в $C([a, b])$ этого множества вытекает из неравенства (1), то по теореме Арцеля множество M компактно в $C([a, b])$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Пространство $H^1(a, b)$ вкладывается в пространство $C([a, b])$ и соответствующий оператор вложения вполне непрерывен.*

§ 6. Вложение $H^1(Q)$ в $L_2(Q)$

Из определения пространства $H^1(Q)$ вытекает, что каждая функция, принадлежащая $H^1(Q)$, принадлежит и $L_2(Q)$. Это означает, что пространство $H^1(Q)$ вложено в пространство $L_2(Q)$, и соответствующий оператор вложения $\mathbb{J}$, оператор из $H^1(Q)$ в $L_2(Q)$, ставящий каждой функции $f(x) \in H^1(Q)$ в соответствие ее же, как функцию из $L_2(Q)$, очевидно, линейный и ограниченный; его норма $\|\mathbb{J}\| \leq 1$ (при введенной нами нормировке пространств $H^1(Q)$ и $L_2(Q)$). Имеет место также следующая

ТЕОРЕМА 1. *Оператор вложения $\mathbb{J}$ пространства $H^1(Q)$ в $L_2(Q)$ вполне непрерывен.*

Другими словами, любое ограниченное множество функций в пространстве $H^1(Q)$ является компактным множеством в $L_2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \{f(x)\}$ ограниченное в $H^1(Q)$ множество функций, т.е. множество, для которого существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что

$$\|f\|_{H^1(Q)} \leq C_0 \quad \text{для всех } f \in M. \quad (1)$$

Предположим вначале, что $M \subset \dot{H}^1(Q)$. Продолжим все функции из M нулем вне Q и пусть $f_h(x)$ – усредненная функция для $f(x) \in M$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f_h - f\|_{L_2(Q)}^2 &= \int_Q \left| \int_{|x-y|<h} (f(y) - f(x)) \omega_h(|x-y|) dy \right|^2 dx \\ &\leq \frac{C_1}{h^n} \int_{|z|<h} dz \int_Q |f(x+z) - f(x)|^2 dx \end{aligned} \quad (2)$$

Для функции $f(x) \in C_0^1(\overline{Q})$, также продолженной нулем вне Q , при любом векторе $z \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$f(x+z) - f(x) = \int_0^1 \frac{df(x+tz)}{dt} dt = \int_0^1 (\nabla f(x+tz), z) dt.$$

Значит,

$$|f(x+z) - f(x)|^2 \leq |z|^2 \int_0^1 |\nabla f(x+tz)|^2 dt$$

и, тем самым,

$$\int_Q |f(x+z) - f(x)|^2 dx \leq |z|^2 \|f\|_{H^1(Q)}^2. \quad (3)$$

Неравенство (3) справедливо и для любой функции $f \in \dot{H}^1(Q)$, поскольку множество $C_0^1(\bar{Q})$ функций $f(x)$, для которых выполнено неравенство (2), всюду плотно в $\dot{H}^1(Q)$. Для $f \in M$ из (2) и (3) в силу (1) имеем

$$\|f_h - f\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{C_1}{h^n} \|f\|_{H^1(Q)}^2 h^2 \int_{|z|<h} dz \leq C_2^2 h^2, \quad (4)$$

где постоянная C_2 ни от h , ни от $f \in M \subset \dot{H}^1(Q)$ не зависит.

Множество функций

$$M_h = \left\{ f_h(x) = \int_Q f(y) \omega_h(|x-y|) dy, \quad x \in \bar{Q}; \quad f \in M \right\}$$

при любом фиксированном $h > 0$ в силу теоремы Арцела компактно в $C(\bar{Q})$, поскольку для всех $f \in M$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |f_h(x)| &= \left| \int_Q f(y) \omega_h(|x-y|) dy \right| \leq \frac{C_0}{h^n} \int_Q |f(y)| dy \\ &\leq \frac{C_3}{h^n} \|f\|_{L_2(Q)} \leq \frac{C_4}{h^n} \|f\|_{H^1(Q)} \leq \frac{C_5}{h^n}, \\ |f_{hx_i}(x)| &\leq \frac{C_6}{h^{n+1}} \int_Q |f(y)| dy \leq \frac{C_7}{h^{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

в которых постоянные $C_i, i \leq 7$, не зависят от $f_h \in M_h$. Тем более, каждое множество $M_h, h > 0$, компактно в $L_2(Q)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу $L_2(Q)$ -компактности множества $M_\varepsilon = M_h|_{h=\varepsilon}$ по теореме Хаусдорфа в M_ε существует конечная ε -сеть, т.е. в M_ε существует конечное число $N = N(\varepsilon)$ таких функций $f_\varepsilon^1(x), \dots, f_\varepsilon^N(x)$, что для любой функции $f_\varepsilon(x)$ из M_ε найдется функция $f_\varepsilon^k(x)$, удовлетворяющая неравенству $\|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^k(x)\|_{L_2(Q)} \leq C_2 \varepsilon$. Покажем, что множество $f^1(x), \dots, f^N(x)$ функций из M , обладающих свойством: $\|f^k(x) - f_\varepsilon^k(x)\|_{L_2(Q)} \leq C_2 \varepsilon$ для всех $k = 1, \dots, N$, ($f^k(x)$ — функция из M , для которой $f_\varepsilon^k(x)$ есть ε -усредненная функция) является $(2C_2 + 1)\varepsilon$ -сетью для множества M , и, тем самым, по теореме

Хаусдорфа множество M $L_2(Q)$ -компактно. Действительно, для любой $f \in M$ имеем $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_{L_2(Q)} \leq C_2\varepsilon$, а для $f_\varepsilon(x)$ найдется функция $f_\varepsilon^k(x)$ такая, что $\|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^k(x)\|_{L_2(Q)} \leq \varepsilon$. Следовательно, $\|f - f^k\|_{L_2(Q)} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L_2(Q)} + \|f_\varepsilon - f_\varepsilon^k\|_{L_2(Q)} + \|f_\varepsilon^k - f^k\|_{L_2(Q)} \leq (2C_2 + 1)\varepsilon$.

Пусть теперь $M \in H^1(Q)$. Обозначим через M' множество функций $F(x)$ из $\dot{H}^1(Q')$, полученных в результате продолжения функций $f(x)$ из M в некоторую область $Q' \ni Q$. Поскольку $\|F\|_{H^1(Q')} \leq \text{const}\|f\|_{H^1(Q)}$ с постоянной, не зависящей от f , то множество M' ограничено в $\dot{H}^1(Q')$. По только что доказанному, оно компактно в $L_2(Q')$. Значит множество M компактно в $L_2(Q)$. Теорема доказана.

§ 7. Компактность вложения $H^1(Q)$ в $L_2(\partial Q)$

В § 3 доказано, что любая функция $f(x) \in H^1(Q)$ имеет на граничной поверхности ∂Q (так же как и на любой лежащей в $\bar{Q}$ $(n-1)$ -мерной поверхности S класса C^1) след $f|_{\partial Q} \in L_2(\partial Q)$, и что, тем самым, на $H^1(Q)$ определен линейный оператор $\mathbb{J}$, оператор вложения $H^1(Q)$ в $L_2(\partial Q)$, ставящий в соответствие функции f ее след на ∂Q : $\mathbb{J}f = f|_{\partial Q}$. Там же доказано, что оператор $\mathbb{J}$ ограничен. Докажем его компактность. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Оператор вложения $\mathbb{J}$ пространства $H^1(Q)$ в пространство $L_2(\partial Q)$ вполне непрерывен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \{f(x)\}$ ограниченное в $H^1(Q)$ множество функций, т.е. пусть существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство

$$\|f\|_{H^1(Q)} \leq C \quad (1)$$

имеет место для всех $f \in M$. Нам нужно доказать, что множество следов этих функций на ∂Q компактно в $L_2(\partial Q)$.

Пусть S_1 – простой кусок поверхности ∂Q , и пусть

$$x_n = \varphi(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D, \quad \varphi(x') \in C^1(\bar{D}),$$

– уравнение этого куска.

Существует такое $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ область $\Omega_\delta = \{\varphi(x') - \delta < x_n < \varphi(x'), x' \in D\} \subset Q$ (или область $\Omega'_\delta = \{\varphi(x') + \delta > x_n > \varphi(x'), x' \in D\} \subset Q$). Для любой функции $f(x) \in C^1(\bar{Q})$ при любом $t \in (0, \delta]$, $\delta \in (0, \delta_0]$ имеет место равенство

$$f(x', \varphi(x')) - f(x', \varphi(x') - t) = \int_{\varphi(x')-t}^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n,$$

из которого вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & |f(x', \varphi(x'))|^2 \\ & \leq 2 \left(|f(x', \varphi(x') - t)|^2 + \left| \int_{\varphi(x')-t}^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n \right|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \left(|f(x', \varphi(x')) - t|^2 + t \int_{\varphi(x')-t}^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n \right) \\
&\leq 2 \left(|f(x', \varphi(x')) - t|^2 + \delta \int_{\varphi(x')-\delta}^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n \right),
\end{aligned}$$

проинтегрировав которое по $t \in (0, \delta)$, получим

$$\begin{aligned}
\delta |f(x', \varphi(x'))|^2 &\leq 2 \int_0^\delta |f(x', \varphi(x')) - t|^2 dt \\
&\quad + 2\delta^2 \int_{\varphi(x')-\delta}^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n.
\end{aligned}$$

Умножим последнее неравенство на $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \dots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ и проинтегрируем его по D :

$$\begin{aligned}
\delta \int_{S_1} |f(x)|^2 dS &\leq 2 \int_{\Omega_\delta} |f(x)|^2 dx + 2\delta^2 \|f\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 \\
&\leq 2\|f\|_{L_2(Q)}^2 + 2\delta^2 \|f\|_{H^1(Q)}^2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку $\partial Q \subset \bigcup_{i=1}^N S_i$, где S_i , $i = 1, \dots, N$, – совокупность простых кусков, покрывающих поверхность ∂Q , для каждого из которых имеет место неравенство, аналогичное неравенству (2), то для любой функции $f(x) \in C^1(\overline{Q})$ получаем справедливое для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ неравенство

$$\|f\|_{L_2(\partial Q)}^2 \leq \frac{C_1}{\delta} \|f\|_{L_2(Q)}^2 + C_1 \delta \|f\|_{H^1(Q)}^2, \tag{3}$$

в котором постоянная C_1 не зависит от f и δ . В силу плотности в $H^1(Q)$ множества $C^1(\overline{Q})$ это неравенство имеет место и для любой функции $f(x) \in H^1(Q)$.

Из теоремы 1 §6 следует, что множество M компактно в $L_2(Q)$. Поэтому из произвольной последовательности $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$, функций из M можно выбрать подпоследовательность (будем считать, что это сама взятая последовательность), которая фундаментальна в $L_2(Q)$. Это означает, что по любому ε , $0 < \varepsilon \leq \delta_0$, найдется такое N_0 , что $\|f_k - f_s\|_{L_2(Q)} \leq \varepsilon$ для

всех $k, s \geq N_0$. Но тогда в силу (3) и (1) при любом $\delta, 0 < \delta < \delta_0$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|f_k - f_s\|_{L_2(\partial Q)}^2 &\leq \frac{C_1}{\delta} \varepsilon^2 + C_1 \delta \|f_k - f_s\|_{H^1(Q)}^2 \\ &\leq \frac{C_1}{\delta} \varepsilon^2 + C_1 \delta (\|f_k\|_{H^1(Q)} + \|f_s\|_{H^1(Q)})^2 \\ &\leq \frac{C_1}{\delta} \varepsilon^2 + 4C^2 C_1 \delta, \end{aligned}$$

из которого при $\delta = \varepsilon$ получим, что

$$\|f_k - f_s\|_{L_2(\partial Q)}^2 \leq C_2 \varepsilon$$

для всех $k, s \geq N_0$. Что и требовалось доказать.

§ 8. Вложение $H^k(Q)$ в $C^l(\overline{Q})$

В этом параграфе будет изучаться взаимоотношение пространств $H^k(Q)$ и $C^l(\overline{Q})$. Будет показано, что если функция принадлежит пространству $H^k(Q)$ при достаточно большом k , то она принадлежит и пространству $C^l(\overline{Q})$, т.е. ее можно так изменить на множестве меры нуль, что она будет непрерывна вместе со всеми производными до порядка l в $\overline{Q}$.

Пусть функция $f(x) \in C_0^2(\overline{Q})$. Тогда для любой точки $x \in Q$ имеет место равенство

$$f(x) = \int_Q U(x-y) \Delta f(y) dy, \quad x \in Q, \quad (1)$$

где $U(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}} & \text{при } n > 2, \\ \frac{\ln|x|}{2\pi} & \text{при } n = 2, \end{cases}$$

а $\sigma_n = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)$ – площадь поверхности $(n-1)$ -мерной единичной сферы.

Это равенство вытекает из хорошо известной (см., например, [2], [4] или [5]) формулы Грина: для $f(x) \in C^2(\overline{Q})$ в любой точке $x \in Q$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_Q U(x-y) \Delta f(y) dy \\ &+ \int_{\partial Q} \left(f(y) \frac{\partial U(x-y)}{\partial \nu_y} - \frac{\partial f(y)}{\partial \nu} U(x-y) \right) dS_y, \end{aligned}$$

в котором ν – единичный вектор внешней по отношению к области Q нормали к поверхности ∂Q (напомним, что $\partial Q \in C^1$).

Если функция f более гладкая, $f \in C_0^k(\overline{Q})$, то наряду с (1) для нее имеют место и представления через производные k -го порядка. Для получения этих представлений нам потребуется следующее простое утверждение.

ЛЕММА. Пусть $n \geq 3$. Тогда при любом (вещественном) μ функция

$$u_\mu(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{\mu+2}}{(\mu+2)(\mu+n)} & \text{при } \mu \neq -2, \mu \neq -n, \\ \frac{\ln|x|}{n-2} & \text{при } \mu = -2, \\ -\frac{\ln|x|}{|x|^{n-2}(n-2)} & \text{при } \mu = -n \end{cases}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, удовлетворяет уравнению $\Delta u_\mu = |x|^\mu$.

В справедливости леммы легко убедиться непосредственной проверкой.

Пусть функция $f \in C_0^2(\overline{Q})$. В силу формулы (1) для $x \in Q$ при $n = 2$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_Q \Delta f(y) \ln|x-y| dy, \quad (2)$$

при $n = 3$

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_Q \frac{\Delta f(y)}{|x-y|} dy, \quad (3)$$

при $n > 3$

$$f(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_Q \frac{\Delta f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \quad (4)$$

Пусть $n = 4$, а функция $f \in C_0^3(\overline{Q})$. С помощью равенства $\frac{1}{|x-y|^2} = \frac{1}{2} \Delta_y \ln|x-y|$ (см. лемму) интегрированием по частям получим из (4)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4\sigma_4} \int_Q \Delta f(y) \cdot \Delta_y \ln|x-y| dy \\ &= -\frac{1}{4\sigma_4} \int_Q \nabla(\Delta f(y)) \cdot \nabla_y \ln|x-y| dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Если $n = 5$, то из (4) и равенства $|x-y|^{-3} = -\frac{1}{2} \Delta_y \frac{1}{|x-y|}$ (см. лемму) для функции $f(x) \in C_0^3(\overline{Q})$ получим представление

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2 \cdot 3\sigma_5} \int_Q \Delta f(y) \cdot \Delta_y \frac{1}{|x-y|} dy \\ &= -\frac{1}{2 \cdot 3\sigma_5} \int_Q \nabla(\Delta f(y)) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|} dy. \end{aligned} \quad (6)$$

и т.д. Пусть $f \in C_0^{2p}(\overline{Q})$, $p \geq 2$. Тогда из справедливых при $n > 4p - 3$ равенств

$$\begin{aligned}\frac{1}{|x-y|^{4p-4}} &= C'_{4p-2} \Delta_y^{p-1} \frac{1}{|x-y|^{2p-2}}, \\ \frac{1}{|x-y|^{4p-3}} &= C'_{4p-1} \Delta_y^{p-1} \frac{1}{|x-y|^{2p-1}},\end{aligned}$$

вытекающих из леммы, в силу (4) имеем

$$f(x) = C''_{4p-2} \int_Q \frac{\Delta^p f(y)}{|x-y|^{2p-2}} dy \quad \text{при } n = 4p - 2 \quad (7_{4p-2})$$

и

$$f(x) = C''_{4p-1} \int_Q \frac{\Delta^p f(y)}{|x-y|^{2p-1}} dy \quad \text{при } n = 4p - 1 \quad (7_{4p-1})$$

где C'_i и C''_i – некоторые абсолютные постоянные. Так как при $n > 4p - 1$, $p \geq 2$,

$$\frac{1}{|x-y|^{4p-2}} = C'_{4p} \Delta_y^p \frac{1}{|x-y|^{2p-2}}$$

и

$$\frac{1}{|x-y|^{4p-1}} = C'_{4p+1} \Delta_y^p \frac{1}{|x-y|^{2p-1}},$$

то для $f \in C_0^{2p+1}(\overline{Q})$, $p \geq 2$, из (4) имеем

$$f(x) = C''_{4p} \int_Q \nabla(\Delta^p f(y)) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|^{2p-2}} dy \quad \text{при } n = 4p \quad (7_{4p})$$

и

$$f(x) = C''_{4p+1} \int_Q \nabla(\Delta^p f(y)) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|^{2p-1}} dy \quad \text{при } n = 4p + 1, \quad (7_{4p+1})$$

где C'_i , C''_i – абсолютные постоянные.

Поскольку $|\nabla_y \frac{1}{|x-y|^s}| = \frac{s}{|x-y|^{s+1}}$ при $s \geq 1$, то из (3), (5), (6), (7_{4p-2})–(7_{4p+1}) получаем неравенства

$$|f(x)| \leq C_{4p-2} \int_Q \frac{|\Delta^p f(y)|}{|x-y|^{2p-2}} dy \quad \text{при } n = 4p - 2, \quad p > 1, \quad x \in Q, \quad (8_{4p-2})$$

$$|f(x)| \leq C_{4p-1} \int_Q \frac{|\Delta^p f(y)|}{|x-y|^{2p-1}} dy \quad \text{при } n = 4p - 1, \quad p \geq 1, \quad x \in Q, \quad (8_{4p-1})$$

для всех $f \in C_0^{2p}(\overline{Q})$, и неравенства

$$|f(x)| \leq C_{4p} \int_Q \frac{|\nabla \Delta^p f(y)|}{|x-y|^{2p-1}} dy \quad \text{при } n = 4p, \quad p \geq 1, \quad x \in Q, \quad (8_{4p})$$

$$|f(x)| \leq C_{4p+1} \int_Q \frac{|\nabla \Delta^p f(y)|}{|x-y|^{2p}} dy \quad \text{при } n = 4p+1, \quad p \geq 1, \quad x \in Q, \quad (8_{4p+1})$$

для всех $f \in C_0^{2p+1}(\overline{Q})$, C_i – абсолютные постоянные.

При $n = 2$ с помощью неравенства Буняковского для функции $f(x)$ из $C_0^2(\overline{Q})$ из (2) получаем неравенство

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_Q |\Delta f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_Q |\ln|x-y||^2 dy \right)^{1/2}$$

$$\leq C \|f\|_{H^2(Q)}, \quad x \in Q,$$

в котором не зависящая от $f(x)$ постоянная

$$C > \max_{x \in \overline{Q}} \int_Q |\ln|x-y||^2 dy.$$

При $n = 4p-2$, $p > 1$, для $f(x) \in C_0^{2p}(\overline{Q})$ из (8_{4p-2}) аналогично получаем неравенство

$$|f(x)| \leq C_{4p-2} \left(\int_Q |\Delta^p f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{dy}{|x-y|^{4p-4}} \right)^{1/2}$$

$$\leq C \|f\|_{H^{2p}(Q)}, \quad x \in Q,$$

в котором не зависящая от $f(x)$ постоянная

$$C > \max_{x \in \overline{Q}} \int_Q \frac{dy}{|x-y|^{4p-4}},$$

а из (8_{4p-1})–(8_{4p+1}) – соответственно неравенства

$$|f(x)| \leq C \|f\|_{H^{2p}(Q)}, \quad n = 4p-1 \geq 3, \quad x \in Q,$$

$$|f(x)| \leq C \|f\|_{H^{2p+1}(Q)}, \quad n = 4p \geq 4, \quad x \in Q,$$

$$|f(x)| \leq C \|f\|_{H^{2p+1}(Q)}, \quad n = 4p+1 \geq 5, \quad x \in Q,$$

в которых постоянная C не зависит от f .

Таким образом, неравенство

$$\|f\|_{C(\overline{Q})} \leq C\|f\|_{H^{[n/2]+1}(Q)} \quad (9)$$

имеет место для всех $f \in C_0^{[n/2]+1}(\overline{Q})$, $n \geq 1$, с не зависящей от f постоянной. Справедливость этого неравенства при $n = 1$ немедленно следует из представления

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_a^b \operatorname{sgn}(x-y) \cdot f'(y) dy, \quad x \in [a, b],$$

любой функции $f(x) \in C_0^1([a, b])$, которым мы уже пользовались в § 5.

Если функция $f(x) \in C_0^{[n/2]+1+l}(\overline{Q})$ при некотором $l > 0$, то наряду с неравенством (9) она удовлетворяет и неравенству

$$\|f\|_{C^l(\overline{Q})} \leq C_l\|f\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)} \quad (10)$$

в котором постоянная C_l не зависит от f .

Действительно, для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, $|\alpha| \leq l$, в силу (9) имеем

$$\|D^\alpha f\|_{C(\overline{Q})} \leq C\|D^\alpha f\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}(Q)} \leq C\|f\|_{H^{[n/2]+1+|\alpha|}(Q)}.$$

Суммируя эти неравенства по всем α , $|\alpha| \leq l$, получим неравенство (10).

Пусть финитная в Q функция $f(x) \in H^{[n/2]+1+l}(Q)$, а $\{f_m(x), m = 1, 2, \dots\}$ – последовательность функций из $C_0^{[n/2]+1+l}(\overline{Q})$, сходящаяся в норме $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ к $f(x)$ (теорема 3 из § 2). В силу (10)

$$\|f_m - f_s\|_{C^l(\overline{Q})} \leq C\|f_m - f_s\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)} \rightarrow 0$$

при $m, s \rightarrow \infty$, т.е. последовательность $\{f_m(x), m = 1, 2, \dots\}$ оказывается фундаментальной, а, значит, и сходящейся и в норме $C^l(\overline{Q})$. Это означает, что предельная для этой последовательности функция $f(x)$ принадлежит не только $H^{[n/2]+1+l}(Q)$, но и $C^l(\overline{Q})$, т.е. функция $f(x)$ допускает возможность такого ее изменения на множестве меры нуль, в результате которого она становится функцией из $C^l(\overline{Q})$. Переходя в неравенстве $\|f_m\|_{C^l(\overline{Q})} \leq C\|f_m\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)}$ к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим справедливость неравенства (10) для любой финитной функции $f(x)$ из $H^{[n/2]+1+l}(Q)$.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. $H_{\text{loc}}^{[n/2]+1+l}(Q) \subset C^l(Q)$, т.е. любая функция из пространства $H_{\text{loc}}^{[n/2]+1+l}(Q)$ после ее изменения на множестве меры нуль принадлежит пространству $C^l(Q)$.

Действительно, пусть функция $f(x) \in H_{\text{loc}}^{[n/2]+1+l}(Q)$. Возьмем любую подобласть Q' , $Q' \Subset Q$, и построим функцию $\zeta(x) \in C_0^\infty(\bar{Q})$, равную 1 в Q' . Функция $f(x)\zeta(x) \in H^{[n/2]+1+l}(Q)$ и является финитной в Q , поэтому она принадлежит $C_0^l(\bar{Q})$ и, значит, функция $f(x)$ принадлежит $C^l(\bar{Q}')$. В силу произвольности Q' функция $f(x)$ принадлежит $C^l(Q)$.

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная функция из $H^{[n/2]+1+l}(Q)$. Предположим, что $\partial Q \in C^{[n/2]+1+l}$. Тогда в силу теоремы о продолжении (теорема 1 из § 2) для (любой ограниченной) области Q' , $Q' \ni Q$, существует финитная в Q' функция $F(x) \in H^{[n/2]+1+l}(Q')$, совпадающая с $f(x)$ в Q , причем $\|F\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q')} \leq C' \|f\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)}$, где постоянная C' не зависит от $f(x)$.

По доказанному функция $F(x) \in C^l(\bar{Q}')$ и для нее имеет место неравенство $\|F\|_{C^l(\bar{Q}')} \leq C'' \|F\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q')}$ (неравенство (10) для функции $F(x)$ в области Q'). Следовательно, $f(x) \in C^l(\bar{Q})$ и справедливо неравенство

$$\|f\|_{C^l(\bar{Q})} \leq C' C'' \|f\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)}.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. Если $\partial Q \in C^{[n/2]+1+l}$, то $H^{[n/2]+1+l}(Q) \subset C^l(\bar{Q})$, т.е. каждая функция из $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ допускает такое ее изменение на множестве меры нуль, в результате которого она становится функцией из $C^l(\bar{Q})$. При этом для любой функции $f(x) \in H^{[n/2]+1+l}(Q)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{C^l(\bar{Q})} \leq C_l \|f\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)} \quad (10)$$

в котором постоянная $C_l > 0$ не зависит от $f(x)$.

Иначе говоря, если $\partial Q \in C^{[n/2]+1+l}$, то на $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ определен линейный ограниченный оператор $\mathbb{J}$ из $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ в $C^l(\bar{Q})$, ставящий в соответствие каждой функции, принадлежащей $H^{[n/2]+1+l}(Q)$, ее же, как функцию из $C^l(\bar{Q})$, оператор вложения $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ в $C^l(\bar{Q})$, при этом $\|\mathbb{J}\| \leq C_l$.

Можно доказать, что оператор $\mathbb{J}$ вполне непрерывен (доказательство см. в [1]).

§ 9. Эквивалентные нормировки пространств $H^1(Q)$ и $\dot{H}^1(Q)$

Пусть в области Q задана вещественная симметрическая матрица $\mathbb{A}(x) = \|a_{ij}(x)\|_{i,j=1,\dots,n}$, элементы которой принадлежат $L_\infty(Q)$, функция $a(x) \in L_\infty(Q)$ и функция $\sigma(x) \in L_\infty(\partial Q)$. Определим на $H^1(Q)$ эрмитову билинейную форму

$$W(f, g) = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_i} \bar{g}_{x_j} + a(x) f \bar{g} \right) dx + \int_{\partial Q} \sigma(x) f \bar{g} dS \quad (1)$$

(в последнем интеграле, конечно, $f = f|_{\partial Q}$, $g = g|_{\partial Q}$ — следы на ∂Q соответствующих функций).

ТЕОРЕМА 1. *Если матрица $\mathbb{A}(x)$ положительно определена, т.е. для любого вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и для п.в. $x \in Q$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \geq \gamma \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad (2)$$

с постоянной $\gamma > 0$, функции $a(x) \geq 0$ п.в. на Q , $\sigma(x) \geq 0$ п.в. на ∂Q , и $\text{mes}\{a(x) > 0\} + \text{mes}\{\sigma(x) > 0\} > 0$, то билинейная форма (1) определяет на $H^1(Q)$ скалярное произведение

$$(f, g)'_{H^1(Q)} = W(f, g),$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f, g)_{H^1(Q)} = \int_Q (\nabla f \nabla \bar{g} + f \bar{g}) dx. \quad (3)$$

Напомним, что скалярное произведение $(f, g)'_{H^1(Q)}$ эквивалентно скалярному произведению $(f, g)_{H^1(Q)}$, если существуют постоянные $A > 0$ и $B > 0$ такие, что для всех $f \in H^1(Q)$

$$A(f, f)_{H^1(Q)} \leq (f, f)'_{H^1(Q)} \leq B(f, f)_{H^1(Q)}. \quad (4)$$

Билинейная форма (1), очевидно, удовлетворяет правому неравенству в (4) причем постоянная B зависит лишь от $\|a_{ij}\|_{L_\infty(Q)}$, $i, j = 1, \dots, n$, $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|\sigma\|_{L_\infty(\partial Q)}$ и постоянной C_2 из теоремы 1 § 3.

Докажем справедливость левого неравенства в (4). Предположим, что нужной постоянной не существует. Тогда для любого целого $m \geq 1$ найдется такая функция $f_m(x) \in H^1(Q)$, что $\|f_m\|_{H^1(Q)}^2 > mW(f_m, f_m)$ (напомним, что в силу условий теоремы число $W(f_m, f_m)$ неотрицательно) или, что то же самое, найдется функция $g_m(x) \in H^1(Q)$, для которой

$$\|g_m\|_{H^1(Q)} = 1 \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} W(g_m, g_m) &= \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) g_{mx_i} \bar{g}_{mx_j} + a(x) |g_m|^2 \right) dx \\ &\quad + \int_{\partial Q} \sigma(x) |g_m|^2 dS < \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства вытекает, что каждое из трех слагаемых в $W(g_m, g_m)$ меньше $\frac{1}{m}$, поэтому в силу (2)

$$\begin{aligned} \int_Q |\nabla g_m|^2 dx &< \frac{1}{\gamma m}, \quad \int_Q a(x) |g_m|^2 dx < \frac{1}{m}, \\ \int_{\partial Q} \sigma(x) |g_m|^2 dS &< \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из равенства (5) вытекает, что последовательность $\{g_m(x), m = 1, 2, \dots\}$ ограничена в $H^1(Q)$, следовательно, по теореме 1 из § 6 из этой последовательности можно выбрать фундаментальную в $L_2(Q)$ подпоследовательность. Не умаляя общности, будем считать, что сама последовательность $\{g_m(x), m = 1, 2, \dots\}$ фундаментальна в $L_2(Q)$, т.е. $\|g_m - g_p\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0$ при $m, p \rightarrow \infty$. Так как в силу первого из неравенств в (6)

$$\begin{aligned} \|g_m - g_p\|_{H^1(Q)}^2 &= \|g_m - g_p\|_{L_2(Q)}^2 + \|\nabla(g_m - g_p)\|_{L_2(Q)}^2 \\ &\leq \|g_m - g_p\|_{L_2(Q)}^2 + 2\|\nabla g_m\|_{L_2(Q)}^2 + 2\|\nabla g_p\|_{L_2(Q)}^2 \\ &\leq \|g_m - g_p\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{2}{m\gamma} + \frac{2}{p\gamma}, \end{aligned}$$

то $\|g_m - g_p\|_{H^1(Q)}^2 \rightarrow 0$ при $m, p \rightarrow \infty$, т.е. последовательность $\{g_m(x), m = 1, 2, \dots\}$ фундаментальна в $H^1(Q)$. Следовательно, она сходится в $H^1(Q)$ к некоторой функции $g(x) \in H^1(Q)$. Переходя в (5) и (6) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим соотношения:

- а) $\|g\|_{H^1(Q)} = 1$,
 б) $\int_Q |\nabla g|^2 dx = 0$,
 в) $\int_Q a(x)|g|^2 dx = 0$,
 г) $\int_{\partial Q} \sigma(x)|g|^2 dS = 0$.

Из равенств б) и а) вытекает, что $g(x) = \text{const} = 1/\sqrt{\text{mes } Q}$ в Q и $g|_{\partial Q} = 1/\sqrt{\text{mes } Q}$. Но это противоречит, если $\text{mes}\{a(x) > 0\} > 0$, равенству в) или, если $\text{mes}\{\sigma(x) > 0\} > 0$, равенству г). Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. *Если матрица $A(x)$ положительно определена и $a(x) \geq 0$ п.в. в Q , то билинейная форма*

$$W_1(f, g) = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_i} \bar{g}_{x_j} + a(x) f \bar{g} \right) dx$$

задает в $\dot{H}^1(Q)$ скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (3).

Так как $\dot{H}^1(Q) \subset H^1(Q)$, то из теоремы 1 вытекает, что в $\dot{H}^1(Q)$ можно ввести скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (3), с помощью билинейной формы (1) при $\sigma(x) = 1$ и $a(x) \geq 0$ п.в. в Q . Но для $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащих $\dot{H}^1(Q)$ значения билинейных форм W и W_1 совпадают. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *В частности, эквивалентным (3) скалярным произведением в $\dot{H}^1(Q)$ является скалярное произведение*

$$(f, g)'_{\dot{H}^1(Q)} = \int_Q (\nabla f, \nabla \bar{g}) dx.$$

Из теоремы 2 вытекает также

СЛЕДСТВИЕ 2. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $f \in \dot{H}^1(Q)$ имеет место неравенство Стеклова*

$$\int_Q |f|^2 dx \leq C \int_Q |\nabla f|^2 dx.$$

Рассмотрим заданные на $H^1(Q)$ эрмитовы билинейные формы

$$W_2(f, g) = \int_Q f \, dx \cdot \int_Q \bar{g} \, dx \\ + \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_i} \bar{g}_{x_j} + a(x) f \bar{g} \right) dx$$

и

$$W_3(f, g) = \int_{\partial Q} f \, dS \cdot \int_{\partial Q} \bar{g} \, dS \\ + \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_i} \bar{g}_{x_j} + a(x) f \bar{g} \right) dx$$

в которых, как и выше, $\mathbb{A}(x) = \|a_{ij}(x)\|_{i,\dots,n}$ – вещественная симметрическая матрица, элементы которой принадлежат $L_\infty(Q)$, $a(x) \in L_\infty(Q)$.

ТЕОРЕМА 3. Если матрица $\mathbb{A}(x)$ положительно определена, и $a(x) \geq 0$ п.в. на Q , то билинейные формы $W_2(f, g)$ и $W_3(f, g)$ порождают в $H^1(Q)$ скалярные произведения, эквивалентные скалярному произведению (3).

Эта теорема легко доказывается по тому же плану, что и теорема 1.

Так же как из теоремы 2 были получены следствия 1 и 2, из теоремы 3 немедленно вытекают следствия 3 и 4.

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях теоремы 3 на подпространствах

$$H_1^1(Q) = \left\{ f(x) \in H^1(Q), \int_Q f(x) \, dx = 0 \right\}$$

и

$$H_2^1(Q) = \left\{ f(x) \in H^1(Q), \int_{\partial Q} f(x) \, dS = 0 \right\}$$

пространства $H^1(Q)$ билинейная форма

$$W_4(f, g) = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_i} \bar{g}_{x_j} + a(x) f \bar{g} \right) dx$$

определяет скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (3).

СЛЕДСТВИЕ 4. Существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что для всех функций $f \in H^1(Q)$ имеют место неравенства

$$\int_Q |f|^2 dx \leq C_1 \left(\left| \int_Q f dx \right|^2 + \int_Q |\nabla f|^2 dx \right),$$

$$\int_Q |f|^2 dx \leq C_2 \left(\left| \int_{\partial Q} f dS \right|^2 + \int_Q |\nabla f|^2 dx \right)$$

(неравенства Пуанкаре и Фридрихса).

Глава 2

Краевые задачи для эллиптических уравнений

§ 1. Вторая и третья краевые задачи для уравнения второго порядка

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}\nu_j(x) + \sigma(x)u \right) \Big|_{\partial Q} = \varphi(x), \quad (2')$$

где $\mathbb{A}(x) = \|a_{ij}(x)\|_{i,j=1,\dots,n}$ – вещественная симметрическая квадратная $n \times n$ -матрица, элементы которой $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{Q})$, $i, j = 1, \dots, n$; эту матрицу для всех $x \in \overline{Q}$ считаем положительно определенной (условие эллиптичности уравнения (1)): т.е. существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что при всех $x \in \overline{Q}$ и при любом векторе $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_j \geq \gamma \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2. \quad (3)$$

Функция $a(x) \in C(\overline{Q})$, функции $a_i(x) \in C^1(\overline{Q})$, $i = 1, \dots, n$, $\sigma(x) \in C(\partial Q)$, $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ – вектор единичной нормали к ∂Q , внешней по отношению к области Q . На граничной поверхности ∂Q

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}\nu_j(x) = \sum_{i=1}^n u_{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\nu_j(x) = A(x) \frac{\partial u}{\partial \nu'},$$

где ν' – единичный вектор *внешней кономалы*, связанной с оператором в (1), к поверхности ∂Q :

$$\begin{aligned}\nu' &= \nu'(x) = (\nu'_1(x), \dots, \nu'_n(x)), \\ \nu'_i &= \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \nu_j(x)}{A(x)}, \quad i = 1, \dots, n, \\ A(x) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \nu_j(x) \right)^2 \right)^{1/2}\end{aligned}$$

(легко проверить, что $A(x) > 0$ для всех $x \in \partial Q$, а векторы ν и ν' составляют острый угол).

В связи со сказанным граничное условие (2') можно переписать в виде

$$\left(A(x) \frac{\partial u}{\partial \nu'} + \sigma(x) u \right) \Big|_{\partial Q} = \varphi(x). \quad (2)$$

Под *классическим решением* задачи (1), (2) (при $\sigma(x) \equiv 0$ задача (1), (2) называется второй краевой задачей, а в противном случае – третьей краевой задачей для уравнения (1)) понимается функция $u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$, удовлетворяющая условиям (1) и (2); для существования такого решения, очевидно, необходимо, чтобы $f(x) \in C(Q)$, $\varphi(x) \in C(\partial Q)$.

Пусть $u(x)$ – классическое решение задачи (1), (2), принадлежащее $C^2(\bar{Q})$; в этом случае $f \in C(\bar{Q})$. Умножим (1) на произвольную функцию $v(x) \in C^1(\bar{Q})$ и проинтегрируем полученное равенство по Q . С помощью формулы Остроградского получим равенство

$$\begin{aligned}\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a(x) u \right) \bar{v} \right) dx \\ + \int_{\partial Q} \sigma u \bar{v} dS = \int_Q f(x) \bar{v} dx + \int_{\partial Q} \varphi(x) \bar{v} dS, \quad (4')\end{aligned}$$

или эквивалентное ему (но более удобное для нас в дальнейшем) равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + u \left(- \sum_{i=1}^n (a_i(x) \bar{v})_{x_i} + a(x) \bar{v} \right) \right) dx \\ & + \int_{\partial Q} \left(\sigma + \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i(x) \right) u \bar{v} dS = \int_Q f(x) \bar{v} dx + \int_{\partial Q} \varphi(x) \bar{v} dS, \end{aligned} \quad (4)$$

которые в силу плотности множества $C^1(\bar{Q})$ в $H^1(Q)$ справедливы и для любой функции $v(x) \in H^1(Q)$.

Верно также и следующее утверждение: если принадлежащая $C^2(\bar{Q})$ функция $u(x)$ удовлетворяет при всех $v(x) \in H^1(Q)$ равенству (4) (или (4')), то она является классическим решением задачи (1), (2).

Действительно, равенство (4'), которому функция $u(x)$ удовлетворяет, при $v \in C_0^1(\bar{Q})$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a u \right) \bar{v} \right) dx \\ & = \int_Q f(x) \bar{v} dx, \quad v \in C_0^1(\bar{Q}), \end{aligned}$$

или после интегрирования по частям в первом члене левой части

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(- \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a(x) u - f(x) \right) \bar{v} dx = 0, \quad v \in C_0^1(\bar{Q}), \end{aligned}$$

откуда вытекает, что функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1). После этого равенство (4) при любой функции $v \in C^1(\bar{Q})$ можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(- \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a(x) u - f(x) \right) \bar{v} dx \\ & + \int_{\partial Q} \left(A(x) \frac{\partial u}{\partial \nu'} + \sigma(x) u - \varphi(x) \right) \bar{v} dS = 0, \quad v \in C^1(\bar{Q}), \end{aligned}$$

и, тем самым,

$$\int_{\partial Q} \left(A(x) \frac{\partial u}{\partial \nu'} + \sigma(x)u - \varphi(x) \right) \bar{v} dS = 0, \quad v \in C^1(\bar{Q}),$$

откуда в силу произвольности функции $v(x) \in C^1(\bar{Q})$ следует выполнение граничного условия (2).

Из сказанного следует, что равенством (4) ((4')) естественно воспользоваться для определения обобщенного решения задачи (1), (2).

При определении обобщенного решения и при работе с ним нет необходимости в тех требованиях на данные задачи (1), (2), которые были на них наложены при определении классического решения.

В дальнейшем будем считать, что матрица $A(x) \in L_\infty(Q)$, т.е. $a_{ij}(x) \in L_\infty(Q)$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, $a(x) \in L_\infty(Q)$, $\sigma(x) \in L_\infty(\partial Q)$, и при этом, естественно, считаем, что неравенство (3) выполняется лишь для почти всех $x \in Q$; функции $a_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, будем по-прежнему считать принадлежащими $C^1(\bar{Q})$, хотя и на них можно было бы ослабить требования; функции $f(x)$, $x \in Q$, и $\varphi(x)$, $x \in \partial Q$, будут считаться такими, чтобы линейный функционал

$$l_{f,\varphi}(v) = \int_Q f(x) \bar{v} dx + \int_{\partial Q} \varphi(x) \bar{v} dS, \quad v \in H^1(Q), \quad (5)$$

был ограничен на $H^1(Q)$.

Функция $u(x) \in H^1(Q)$ называется *обобщенным решением* задачи (1), (2), если она при всех $v(x) \in H^1(Q)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + u \left(- \sum_{i=1}^n (a_i(x) \bar{v})_{x_i} + a(x) \bar{v} \right) \right) dx \\ + \int_{\partial Q} \left(\sigma + \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i(x) \right) u \bar{v} dS = l_{f,\varphi}(v), \quad v(x) \in H^1(Q), \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим сначала частный случай задачи (1), (2) – задачу

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a(x)u = f(x), \quad x \in Q, \quad (7)$$

$$\left(A(x) \frac{\partial u}{\partial \nu'} + \sigma(x)u \right) \Big|_{\partial Q} = \varphi(x). \quad (2)$$

Обобщенное решение этой задачи – функция $u(x) \in H^1(Q)$, удовлетворяющая равенству

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + a(x)u\bar{v} \right) dx + \int_{\partial Q} \sigma u \bar{v} dS \\ = \int_Q f(x)\bar{v} dx + \int_{\partial Q} \varphi(x)\bar{v} dS, \end{aligned} \quad (8)$$

при любой функции $v \in H^1(Q)$.

Предположим дополнительно, что $a(x) \geq 0$ п.в. в Q и $\sigma(x) \geq 0$ п.в. на ∂Q , причем $\text{mes}\{a(x) > 0\} + \text{mes}\{\sigma(x) > 0\} > 0$. Тогда левую часть равенства (8) можно согласно теореме 1 параграфа § 9 предыдущей главы принять за скалярное произведение в $H^1(Q)$

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + a(x)u\bar{v} \right) dx + \int_{\partial Q} \sigma u \bar{v} dS,$$

а само равенство (8) переписать в виде

$$(u, v)_{H^1(Q)} = l_{f,\varphi}(v), \quad (9)$$

где $l_{f,\varphi}(v)$ – линейный функционал над $H^1(Q)$, определенный равенством (5).

Поскольку функционал $l_{f,\varphi}(v)$ ограничен в $H^1(Q)$, то по теореме Рисса в $H^1(Q)$ существует единственная функция $F(x)$, для которой при всех $v \in H^1(Q)$ имеет место равенство

$$l_{f,\varphi}(v) = (F, v)_{H^1(Q)}, \quad (10)$$

при этом

$$\|F\|_{H^1(Q)} = \|l_{f,\varphi}\|.$$

В частности, если $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in L_2(\partial Q)$, то

$$\begin{aligned} |l_{f,\varphi}(v)| &\leq \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)} \|v\|_{L_2(\partial Q)} \\ &\leq (C_1 \|f\|_{L_2(Q)} + C_2 \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}) \|v\|_{H^1(Q)}, \end{aligned}$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – постоянные из соответствующих теорем вложения, т.е. в этом случае

$$\|F\|_{H^1(Q)} = \|l_{f,\varphi}\| \leq C_1 \|f\|_{L_2(Q)} + C_2 \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}.$$

Из (9) и (10) следует, что единственным обобщенным решением $u(x)$ задачи (7), (2) является функция $F(x)$, $u(x) = F(x)$, и это решение удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq \|l_{f,\varphi}\|, \quad (11)$$

(на самом деле, $\|u\|_{H^1(Q)} = \|l_{f,\varphi}\|$), а в частном случае, когда $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C_1 \|f\|_{L_2(Q)} + C_2 \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}. \quad (11')$$

Неравенства (11) и (11') выражают непрерывную зависимость решения от данных задачи (функций f и φ). Таким образом, доказано следующее утверждение

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a(x) \geq 0$ п.в. в Q , $\sigma(x) \geq 0$ п.в. на ∂Q и $\text{mes}\{a(x) > 0\} + \text{mes}\{\sigma(x) > 0\} > 0$. Тогда существует и единственно обобщенное решение $u(x)$ задачи (7), (2). Это решение удовлетворяет неравенству (11)

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq \|l_{f,\varphi}\|, \quad (11)$$

где $l_{f,\varphi}(v)$ – линейный ограниченный на $H^1(Q)$ функционал, заданный формулой (5), и, в частности, если $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in L_2(\partial Q)$, то обобщенное решение $u(x)$ удовлетворяет неравенству неравенству (11')

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C_1 \|f\|_{L_2(Q)} + C_2 \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}, \quad (11')$$

положительные постоянные C_1 и C_2 в котором не зависят от f и φ .

Рассмотрим теперь более общий случай – граничную задачу (1), (2). Интегральное равенство (6), определяющее обобщенное решение этой задачи представим в виде

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + u \bar{v} \right) dx - l_1(v) + l_2(v) = l_{f,\varphi}(v), \quad (12)$$

в котором линейные по $v \in H^1(Q)$ функционалы $l_1(v)$ и $l_2(v)$ имеют вид

$$l_1(v) = \int_Q u \left[(1-a)\bar{v} + \sum_{i=1}^n (a_i \bar{v})_{x_i} \right] dx,$$

$$l_2(v) = \int_{\partial Q} u \left(\sigma + \sum_{i=1}^n a_i \nu_i(x) \right) \bar{v} dS,$$

а функционал $l_{f,\varphi}(v)$ определен равенством (5).

Первое слагаемое левой части равенства (12) примем, используя теорему 2 § 9 предыдущей главы, за скалярное произведение в $H^1(Q)$

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + u \bar{v} \right) dx = (u, v)_{H^1(Q)}. \quad (13)$$

При каждом $u \in L_2(Q)$ функционал $l_1(v)$, $v \in H^1(Q)$, ограничен:

$$|l_1(v)| \leq C_0 \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{H^1(Q)}.$$

Следовательно, по теореме Рисса для каждого $u \in L_2(Q)$ существует функция $U_1(x) \in H^1(Q)$, для которой

$$l_1(v) = (U_1, v)_{H^1(Q)}, \quad (14)$$

причем

$$\|U_1\|_{H^1(Q)} = \|l_1\| \leq C_0 \|u\|_{L_2(Q)}.$$

Это означает, что на $L_2(Q)$ определен линейный оператор A_1 из $L_2(Q)$ в $H^1(Q)$, действующий по формуле

$$A_1 u = U_1, \quad (15)$$

причем оператор A_1 ограничен: $\|A_1\| \leq C_0$.

Сужение оператора A_1 на $H^1(Q)$ (мы его по-прежнему будем обозначать через A_1) является вполне непрерывным оператором: любое ограниченное в $H^1(Q)$ множество является по теореме 1 § 6 главы 1 компактным в $L_2(Q)$ и, следовательно, переводится ограниченным из $L_2(Q)$ в $H^1(Q)$ оператором A_1 в компактное в $H^1(Q)$ множество. Окончательно, из (14) и (15) имеем равенство

$$l_1(v) = (A_1 u, v)_{H^1(Q)}. \quad (16)$$

Совершенно аналогично получаем равенство

$$l_2(v) = (A_2 u, v)_{H^1(Q)}, \quad (17)$$

в котором A_2 – линейный ограниченный оператор из $L_2(\partial Q)$ в $H^1(Q)$, являющийся согласно теореме 1 из § 8 предыдущей главы вполне непрерывным оператором из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$ (сужение на $H^1(Q)$ оператора A_2 мы обозначаем той же буквой).

Как и прежде, обозначим через $F(x)$ единственную функцию из $H^1(Q)$, с помощью которой согласно теореме Рисса реализуется в скалярном произведении пространства $H^1(Q)$ значение ограниченного на $H^1(Q)$ функционала $l_{f,\varphi}(v)$

$$l_{f,\varphi}(v) = (F, v)_{H^1(Q)}, \quad (10)$$

при этом

$$\|F\|_{H^1(Q)} = \|l_{f,\varphi}\|.$$

Из равенств (12), (16), (17) и (10) получаем, что обобщенное решение задачи (1), (2) есть решение в $H^1(Q)$ операторного уравнения

$$u - Au = F, \quad u \in H^1(Q), \quad (18)$$

где линейный вполне непрерывный оператор A из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$ определяется равенством

$$A = A_1 - A_2.$$

Из теорем Фредгольма следует, что для существования решения уравнения (18) при любой функции $F \in H^1(Q)$ необходимо и достаточно, чтобы число 1 не было характеристическим числом оператора A ; при этом решение уравнения единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C \|F\|_{H^1(Q)} = C \|l_{f,\varphi}\| \quad (19)$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от f и φ , и, в частности, при $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C_1 \|f\|_{L_2(Q)} + C_2 \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}. \quad (20)$$

Если 1 является характеристическим числом оператора A , то размерности линейных подпространств $N = \ker(E - A)$ и $N^* =$

$\ker(E - A^*)$ пространства $H^1(Q)$, состоящих, соответственно, из решений однородного уравнения

$$u - Au = 0, \quad u \in H^1(Q), \quad (18_0)$$

и однородного уравнения

$$u^* - A^*u^* = 0, \quad u^* \in H^1(Q), \quad (18_0^*)$$

где A^* – оператор, сопряженный оператору A , одинаковы и конечны; эта размерность называется, напомним, кратностью характеристического числа. При этом для существования решения уравнения (18) необходимо и достаточно выполнения условия

$$F \perp N^*.$$

При выполнении этого условия в подпространстве $N^\perp$ пространства $H^1(Q)$, состоящем из всех функций пространства $H^1(Q)$, ортогональных подпространству N , $N^\perp$ – ортогональное дополнение подпространства N , существует единственное решение уравнения (18); это решение удовлетворяет при некоторой постоянной $C > 0$ неравенству (19) или, в частности, неравенству (20), если $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in L_2(\partial Q)$. Общее же решение уравнения (18) в этом случае отличается от найденного решения из $N^\perp$ добавлением к нему произвольного элемента из N .

Таким образом, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Задача нахождения обобщенного решения задачи (1), (2) есть задача решения в пространстве $H^1(Q)$ операторного уравнения*

$$u - Au = F,$$

в котором A – линейный вполне непрерывный оператор из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$, а $F(x)$ – функция из $H^1(Q)$, определенная равенством (10).

Если число 1 не является характеристическим числом оператора A , то обобщенное решение задачи (1), (2) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C \|l_{f,\varphi}\|, \quad (19)$$

и, в частности, если $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$ – неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C_1 \|f\|_{L_2(Q)} + C_2 \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}, \quad (20)$$

в которых $C > 0$, $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – не зависящие от f и φ постоянные.

Пусть число 1 – характеристическое число оператора A , а $N = \ker(E - A)$ и $N^* = \ker(E - A^*)$ – собственные подпространства пространства $H^1(Q)$ для операторов A и A^* соответственно, отвечающие характеристическому числу 1. Для существования обобщенного решения задачи (1), (2) в этом случае необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$F \perp N^*;$$

при выполнении этого условия обобщенное решение задачи (1), (2) существует и единственно в подпространстве $N^\perp$, состоящем из всех функций из $H^1(Q)$, ортогональных (в скалярном произведении (13) пространства $H^1(Q)$) подпространству N . Это решение удовлетворяет неравенству (19) и, в частности, при $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$ – неравенству (20). Общее обобщенное решение задачи (1), (2) есть сумма этого решения и произвольной функции из N .

Рассмотрим важный пример. Пусть $a(x) \equiv 0$, $a_i(x) \equiv 0$, $i = 1, \dots, n$, для $x \in Q$, и $\sigma(x) \equiv 0$ для $x \in \partial Q$, т.е. речь пойдет о второй краевой задаче

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = f(x), \quad x \in Q, \quad (7')$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}\nu_j(x) \right) \Big|_{\partial Q} = \varphi(x). \quad (2'')$$

В этом случае

$$l_1(v) = (u, v)_{L_2(Q)}, \quad l_2(v) = 0,$$

и, следовательно, линейный вполне непрерывный оператор A из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$ в уравнении (18) удовлетворяет равенству

$$(Au, v)_{H^1(Q)} = (u, v)_{L_2(Q)},$$

скалярное произведение в $H^1(Q)$ в котором определено формулой (13). Таким образом, для всех u и v из $H^1(Q)$

$$\begin{aligned} (Au, v)_{H^1(Q)} &= (u, v)_{L_2(Q)} = \overline{(v, u)}_{L_2(Q)} \\ &= \overline{(Av, u)}_{H^1(Q)} = (u, Av)_{H^1(Q)}, \end{aligned}$$

т.е. оператор A в рассматриваемом случае самосопряженный – $A = A^*$.

Пусть $u \in H^1(Q)$ – решение уравнения (18₀) (совпадающего с (18₀^{*})). Тогда

$$(u, u)_{H^1(Q)} = (u, u)_{L_2(Q)},$$

т.е. в силу (13)

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{u}_{x_j} dx = 0,$$

а это согласно (3) означает, что $u_{x_i} = 0$ в Q для всех $i = 1, \dots, n$, т.е. $u = \text{const}$. Таким образом, в рассматриваемом случае 1 является характеристическим числом оператора A (и A^*); это характеристическое число однократное и подпространства собственных функций $N = N^*$ состоят из постоянных. Поэтому необходимое и достаточное условие существования обобщенного решения

$$l_{f,\varphi}(1) = (F, 1)_{H^1(Q)} = 0,$$

в этом случае в силу (10) и (5) имеет вид

$$\int_Q f(x) dx + \int_{\partial Q} \varphi(x) dS = 0,$$

При выполнении этого условия существует единственное решение, подчиненное равенству

$$(u, 1)_{H^1(Q)} = (u, 1)_{L_2(Q)} = \int_Q u(x) dx = 0.$$

Это решение удовлетворяет неравенству (19) и, в частности, неравенству (20), если $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$. Общее обобщенное решение задачи есть сумма этого решения и произвольной постоянной.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Обобщенное решение задачи (7'), (2'') существует тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$l_{f,\varphi}(1) = \int_Q f(x) dx + \int_{\partial Q} \varphi(x) dS = 0,$$

где $l_{f,\varphi}(v)$ – линейный ограниченный функционал, определенный равенством (5).

При выполнении этого условия обобщенное решение существует и единственно в подпространстве функций из $H^1(Q)$, подчиненных условию

$$\int_Q u(x) dx = 0,$$

это решение удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C \|l_{f,\varphi}\|, \quad (19)$$

и, в частности, если $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$ – неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C_1 (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}), \quad (20)$$

в которых постоянные $C > 0$ и $C_1 > 0$ не зависят от f и φ . Общее обобщенное решение есть сумма этого обобщенного решения и произвольной постоянной.

§ 2. Первая краевая задача для уравнения второго порядка

Рассмотрим теперь первую краевую задачу для уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a(x)u = f(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

т.е. задачу нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего граничному условию

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x); \quad (2)$$

при этом будем считать, что $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{Q})$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x) \in C(\bar{Q})$, и для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и всех $x \in \bar{Q}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_j \geq \gamma \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad (3)$$

в котором постоянная $\gamma > 0$. Случай более общего уравнения можно рассмотреть по аналогии с тем, как это сделано в предыдущем параграфе для третьей (и второй) краевой задачи.

Под классическим решением задачи (1), (2), как обычно, понимаем функцию $u(x) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, удовлетворяющую условиям (1) и (2); таким образом, необходимыми условиями для существования классического решения являются условия: $f \in C(Q)$, $\varphi \in C(\partial Q)$.

Предположим, что $u(x)$ является классическим решением задачи (1), (2) и пусть *дополнительно* $u \in H^1(Q)$, т.е. мы *дополнительно предполагаем*, что первые производные решения принадлежат $L_2(Q)$. Считая, что $f(x) \in L_2(Q)$, проинтегрируем по Q умноженное на $\bar{v} \in C_0^1(\bar{Q})$ равенство (1). В результате получим равенство

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}\bar{v}_{x_j} + a(x)u\bar{v} \right) dx = \int_Q f(x)\bar{v} dx, \quad (4)$$

которое в силу плотности множества $C_0^1(Q)$ в $\dot{H}^1(Q)$ (теорема 2 § 4 главы 1) остается справедливым и для всех функций $v \in \dot{H}^1(Q)$.

Обобщенным решением задачи (1), (2) называется функция $u(x) \in H^1(Q)$, удовлетворяющая равенству (4) при любой $v \in \dot{H}^1(Q)$ и след которой на ∂Q равен $\varphi(x)$.

В случае первой краевой задачи, как и в предыдущем параграфе в случае третьей (и второй) краевой задачи, при определении обобщенного решения естественно избавиться от излишних условий, наложенных на данные задачи при определении классического решения.

Будем считать, что коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x) \in L_\infty(Q)$; условие (3) считаем выполненным лишь для п.в. $x \in Q$. Граничную функцию $\varphi(x)$ естественно считать следом на ∂Q некоторой функции из $H^1(Q)$, а функцию $f(x)$ будем предполагать такой, чтобы линейный функционал

$$l_f(v) = \int_Q f(x) \bar{v} dx, \quad v \in \dot{H}^1(Q), \quad (5)$$

был ограниченным на $\dot{H}^1(Q)$.

Кроме того, поскольку здесь мы желаем ограничиться лишь самым простым случаем, будем считать, что $a(x) \geq 0$ п.в. в Q .

В связи со сказанным равенство (4), с помощью которого определено обобщенное решение задачи (1), (2), перепишем в виде

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + a(x) u \bar{v} \right) dx = l_f(v), \quad v \in \dot{H}^1(Q). \quad (6)$$

Прежде всего докажем единственность обобщенного решения. Пусть u_1 и u_2 – два решения. Их разность $u = u_1 - u_2 \in \dot{H}^1(Q)$ и удовлетворяет при всех $v \in \dot{H}^1(Q)$ равенству

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + a(x) u \bar{v} \right) dx = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(u, v)_{\dot{H}^1(Q)} = 0 \quad \text{для всех } v \in \dot{H}^1(Q),$$

если скалярное произведение в $\dot{H}^1(Q)$ определить на основании теоремы 2 §9 главы 1 формулой

$$(u', v')_{\dot{H}^1(Q)} = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u'_{x_i} \bar{v}'_{x_j} + a(x) u' \bar{v}' \right) dx, \quad (7)$$

где $u', v' \in \dot{H}^1(Q)$. Следовательно, $u = 0$, т.е. $u_1 = u_2$, что и требовалось установить.

Перейдем теперь к вопросу о существовании обобщенного решения. Согласно сделанному предположению существует функция $\Phi(x) \in H^1(Q)$, для которой граничная функция $\varphi(x)$, $x \in \partial Q$, является следом на ∂Q : $\Phi|_{\partial Q} = \varphi(x)$. Сделаем в равенстве (6) замену $u = \Phi + w$ искомой функции $u \in H^1(Q)$ на функцию $w \in \dot{H}^1(Q)$. В результате, для функции $w(x)$ получаем равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) w_{x_i} \bar{v}_{x_j} + a(x) w \bar{v} \right) dx \\ &= l_f(v) - \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \Phi_{x_i} \bar{v}_{x_j} + a(x) \Phi \bar{v} \right) dx, \end{aligned}$$

которое должно выполняться для всех $v \in \dot{H}^1(Q)$. Это равенство можно переписать в виде

$$(w, v)_{\dot{H}^1(Q)} = l_{f,\Phi}(v),$$

где линейный по $v \in \dot{H}^1(Q)$ функционал

$$l_{f,\Phi}(v) = l_f(v) - \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \Phi_{x_i} \bar{v}_{x_j} + a(x) \Phi \bar{v} \right) dx, \quad v \in \dot{H}^1(Q),$$

ограничен в $\dot{H}^1(Q)$, поскольку имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |l_{f,\Phi}(v)| &\leq \|l_f\| \|v\|_{\dot{H}^1(Q)} + C \|\Phi\|_{H^1(Q)} \|v\|_{\dot{H}^1(Q)} \\ &= (\|l_f\| + C \|\Phi\|_{H^1(Q)}) \|v\|_{\dot{H}^1(Q)}, \end{aligned}$$

постоянная $C > 0$ в котором не зависит ни от v , ни от Φ , и, тем самым,

$$\|l_{f,\Phi}\| \leq \|l_f\| + C \|\Phi\|_{H^1(Q)}.$$

Следовательно, по теореме Рисса существует единственная функция $F(x) \in \dot{H}^1(Q)$, для которой при всех $v(x) \in \dot{H}^1(Q)$ имеет место равенство

$$l_{f,\Phi}(v) = (F, v)_{\dot{H}^1(Q)},$$

при этом

$$\|F\|_{\dot{H}^1(Q)} = \|l_{f,\Phi}\|,$$

где норма в $\dot{H}^1(Q)$ порождена скалярным произведением (7).

Это означает, что функция

$$u(x) = \Phi(x) + F(x)$$

является обобщенным решением задачи (1), (2), и это решение непрерывно зависит от f и Φ (а, тем самым, и от f и φ):

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(Q)} &= \|\Phi + F\|_{H^1(Q)} \\ &\leq \|\Phi\|_{H^1(Q)} + \|l_{f,\Phi}\| \leq \|l_f\| + C_1 \|\Phi\|_{H^1(Q)}. \end{aligned} \quad (8)$$

В частности, если $f \in L_2(Q)$, то в силу (5) и неравенства Стеклова (следствие 2 из теоремы 2 §9 главы 1)

$$|l_f(v)| = |(f, v)_{L_2(Q)}| \leq \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leq C_2 \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\dot{H}^1(Q)}$$

т.е.

$$\|l_f\| \leq C_2 \|f\|_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, в этом случае неравенству (8) можно придать вид

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C_3 (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)}), \quad (8')$$

в котором постоянная $C_3 > 0$ не зависит от f и φ .

Поскольку постоянные C_1 и C_3 в (8) и (8') не зависят от Φ , то наряду с этими неравенствами имеют место и неравенства

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq \|l_f\| + C_1 \inf_{\Phi \in H^1(Q), \Phi|_{\partial Q} = \varphi} \|\Phi\|_{H^1(Q)}, \quad (8'')$$

и, в частности, когда $f \in L_2(Q)$,

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C_3 (\|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\Phi \in H^1(Q), \Phi|_{\partial Q} = \varphi} \|\Phi\|_{H^1(Q)}), \quad (8''')$$

выражающее непрерывную зависимость решения от функций f и φ в “явном” виде.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x) \in L_\infty(Q)$, $a(x) \geq 0$ п.в. в Q , и для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и п.в. $x \in \bar{Q}$ выполняется неравенство (3). Тогда при любой функции $\varphi(x)$, которая является следом на ∂Q некоторой функции из $H^1(Q)$, и любой функции f , для которой определенный равенством (5) функционал $l_f(v)$, $v \in \dot{H}^1(Q)$, ограничен, существует и единственно обобщенное решение $u(x)$ задачи (1), (2); это решение удовлетворяет неравенству (8'') и, в частности, если $f \in L_2(Q)$, – неравенству (8''').

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно проверить, что множество заданных на ∂Q функций $\varphi(x)$, являющихся следами некоторых функций из $H^1(Q)$, образует банахово пространство $B(\partial Q)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{B(\partial Q)} = \inf_{\Phi \in H^1(Q), \Phi|_{\partial Q} = \varphi} \|\Phi\|_{H^1(Q)}.$$

Сказанное позволяет неравенства (8'') и (8''') переписать соответственно в виде

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq \|l_f\| + C_1 \|\varphi\|_{B(\partial Q)}$$

и

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C_3(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{B(\partial Q)}).$$

Из полученных в этом и предыдущем параграфах результатов вытекает, в частности, существование и единственность решения рассмотренной во введении задачи о равновесии мембраны. Напомним, что функция $u(x)$, $x \in Q \subset \mathbb{R}^2$, задающая уравнение $u = u(x)$, $x \in Q$, мембраны в состоянии равновесия, является экстремалью того или иного в зависимости от способа закрепления границы квадратичного функционала, характеризующего потенциальную энергию мембраны, и тем самым, представляет собой обобщенное решение соответствующей краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка. Аналогичная ситуация имеет место не только в задаче о равновесии мембраны, но и в ряде других механических задач. В связи с этим рассматриваемые нами обобщенные решения иногда называют энергетическими обобщенными решениями. Важным свойством таких решений является не только их связь с соответствующими физическими задачами, но и достаточная простота работы с ними, в чем мы уже частично убедились.

Вернемся к установленному в этом параграфе результату.

Из определения обобщенного решения и доказанной теоремы вытекает, что при наложенных на коэффициенты уравнения и на функцию $f(x)$ условиях для существования обобщенного решения задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x) \in B(\partial Q)$. В связи с этим возникает естественная потребность дать конструктивное описание элементов пространства $B(\partial Q)$.

Из теоремы 2 § 2 главы 1 вытекает, что любая функция $\varphi(x) \in C^1(\partial Q)$ является следом на ∂Q некоторой функции из $C^1(\bar{Q})$ и, тем самым, функции из $H^1(Q)$, т.е. $C^1(\partial Q) \subset B(\partial Q)$. Можно доказать, что $B(\partial Q)$ – гильбертово пространство $H^{1/2}(\partial Q)$

функций с половинным порядком гладкости. Поскольку изучение пространств H^α с нецелыми α , да еще в случае более или менее произвольных областей находятся вне рамок нашего курса, то мы ограничимся в этом направлении лишь изучением пространства $B(\partial Q)$ для случая, когда область Q есть круг в $\mathbb{R}^2$. На этом примере, в частности, будет продемонстрировано, что множество $B(\partial Q)$ не достаточно богато: оно не содержит в себе, например, все непрерывные на границе функции, $C(\partial Q) \not\subset B(\partial Q)$, и что, тем самым, возможна ситуация, когда классическое решение задачи Дирихле с некоторой непрерывной граничной функцией существует (для уравнения Лапласа в круге), но обобщенного решения эта задача не имеет.

В связи с этим было введено более общее понятие обобщенного решения задачи (1), (2), обобщающее не только введенное выше, но и понятие классического решения. Это решение $u(x)$ из $H_{\text{loc}}^1(Q)$; уравнению (1) функция $u(x)$ удовлетворяет в том смысле, что для нее выполняется равенство (4) при всех финитных функциях $v(x)$ из $H^1(Q)$, а граничное условие (2) можно, например, в случае гладкой границы понимать как предел в определенной норме множества следов функции $u(x)$ на аппроксимирующей границу изнутри области системе “параллельных” границе поверхностей. При рассмотрении обобщенных решений из $H_{\text{loc}}^1(Q)$ от граничной функции можно предполагать лишь принадлежность $L_2(\partial Q)$. Мы в нашем курсе будем рассматривать лишь энергетические обобщенные решения. С обобщенными решениями из $H_{\text{loc}}^1(Q)$ можно познакомиться в [2] и в работах авторов этих лекций.

Приведем теперь в случае, когда область Q есть круг в $\mathbb{R}^2$, пример классического решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа, которое не принадлежит $H^1(Q)$.

Пусть Q – круг $\{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, где r и θ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Классическим решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & |x| < 1, \\ u|_{r=1} &= \varphi_0(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k^3 \theta}{k^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

(с непрерывной граничной функцией $\varphi_0(\theta)$) является функция

$$u_0(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{k^3} \frac{\cos k^3 \theta}{k^2}.$$

Покажем, что $u_0(x) \notin H^1(|x| < 1)$. Действительно, для любого $R \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \int_{|x| < R} |\nabla u_0|^2 dx &= \int_{|x| < R} \left((u_{0r})^2 + \frac{1}{r^2} (u_{0\theta})^2 \right) dx \\ &= 2 \int_{|x| < R} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k^3-1} \sin k^3 \theta \right)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^1 r \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{2k^3-2} \right] dr = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{2k^3}}{k}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\int_{|x| < R} |\nabla u_0|^2 \rightarrow \infty \quad \text{при } R \rightarrow 1 - 0.$$

Следовательно, $u_0 \notin H^1(|x| < 1)$.

На самом деле, справедливо более сильное утверждение: в $H^1(|x| < 1)$ не существует функции, след которой на границе совпадает с непрерывной функцией φ_0 из (9), и, тем самым, задача (9) вообще не имеет обобщенного решения. Это утверждение есть следствие каждого из следующих двух критериев, в формулировках и доказательствах которых, как и в только что приведенном примере, область Q есть круг $\{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, где r и θ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\varphi(\theta) \in L_2(0, 2\pi)$, и

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad (10)$$

– ее разложение в ряд Фурье. Для того чтобы функция $\varphi(\theta)$ была следом на $\{|x| = 1\}$ некоторой функции из $H^1(|x| < 1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2). \quad (11)$$

Для функции $\varphi_0(\theta)$ из (9) коэффициенты $b_s = 0$, $s = 1, 2, \dots$, а коэффициенты $a_s = 1/k^2$, если $s = k^3$ при некотором целом $k > 0$, и $a_s = 0$ в противном случае. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 = \infty,$$

и, тем самым, функция $\varphi_0(\theta)$ из (9) не является следом на окружности $\{|x| = 1\}$ какой-либо функции из $H^1(|x| < 1)$.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим в круге $\{|x| < 1\}$ функцию

$$w(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \quad (12)$$

Поскольку в силу равенства Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 < \infty \quad (13)$$

множество коэффициентов Фурье функции φ ограничено, то ряд в (12) и ряды, полученные из него дифференцированием любого порядка, равномерно сходятся на любом замкнутом подмножестве круга $\{|x| < 1\}$. Следовательно, $w(x) \in C^\infty(|x| < 1)$ и является гармонической функцией (каждый член ряда в (12) есть гармонический многочлен). Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА. Для того чтобы определенная рядом (12) функция $w(x)$ принадлежала пространству $H^1(|x| < 1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд (11).

Обозначим через $w_m(x)$ частичную сумму ряда (12):

$$w_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Так как все функции системы $\{1, r^k \cos k\vartheta, r^k \sin k\vartheta, k = 1, 2, \dots\}$ попарно ортогональны в $L_2(|x| < 1)$ и

$$\|r^k \cos k\vartheta\|_{L_2(|x| < 1)}^2 = \|r^k \sin k\vartheta\|_{L_2(|x| < 1)}^2 = \frac{\pi}{2(k+1)}$$

при $k = 1, 2, \dots$, то для любых p и q , $q > p \geq 0$,

$$\|w_q - w_p\|_{L_2(|x|<1)}^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{k=p+1}^q \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1}.$$

Поэтому из сходимости ряда (13) вытекает сходимость в $L_2(|x|<1)$ последовательности $w_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$. Следовательно, функция $w(x) \in L_2(|x|<1)$ и ряд (12) сходится к ней в $L_2(|x|<1)$.

Пусть сходится ряд (11). Тогда (при $q > p \geq 0$)

$$\begin{aligned} \|w_q - w_p\|_{H^1(|x|<1)}^2 &= \int_{|x|<1} [(w_q - w_p)^2 + |\nabla(w_q - w_p)|^2] dx \\ &= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} \left[(w_q - w_p)^2 + (w_{qr} - w_{pr})^2 + \frac{1}{r^2} (w_{q\theta} - w_{p\theta})^2 \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=p+1}^q \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} + \pi \sum_{k=p+1}^q k(a_k^2 + b_k^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $p, q \rightarrow \infty$. Т.е. последовательность $w_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$, сходится в $H^1(|x|<1)$. Следовательно, $w(x) \in H^1(|x|<1)$.

Пусть теперь $w(x) \in H^1(|x|<1)$. Так как для любого $R < 1$ последовательность норм

$$\begin{aligned} \|w_m\|_{H^1(|x|<R)}^2 &= \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^m R^{2k} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=1}^m R^{2k-2} k(a_k^2 + b_k^2) \right), \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

монотонно не убывая, стремится при $m \rightarrow \infty$ к $\|w\|_{H^1(|x|<R)}^2$, то при всех $R < 1$ и всех m имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m R^{2k} k(a_k^2 + b_k^2) &\leq \frac{1}{\pi} \|w_m\|_{H^1(|x|<R)}^2 \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|w\|_{H^1(|x|<R)}^2 \leq \frac{1}{\pi} \|w\|_{H^1(|x|<1)}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, частичные суммы ряда (11) ограничены:

$$\sum_{k=1}^m k(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \|w\|_{H^1(|x|<1)}^2.$$

т.е. ряд (11) сходится. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Достаточность немедленно вытекает из леммы, поскольку в случае сходимости ряда (11) функция $w(x)$ из (12) принадлежит $H^1(|x| < 1)$ и ее след на окружности $\{|x| = 1\}$ равен $\varphi(\theta)$ (функция $\varphi(\theta)$ является пределом в $L_2(0, 2\pi)$ последовательности частичных сумм ряда (10), которые являются значениями на границе соответствующих принадлежащих $C^1(|x| \leq 1)$ частичных сумм сходящегося в $H^1(Q)$ ряда (12).

Докажем необходимость. Пусть существует функция $\Phi(x) \in H^1(|x| < 1)$, для которой $\Phi|_{|x|=1} = \varphi$. Тогда в силу теоремы 1 существует обобщенное решение краевой задачи

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & |x| < 1, \\ u|_{|x|=1} &= \varphi.\end{aligned}$$

(она является частным случаем задачи (1), (2)). Известно (см., например, [6], [7]), что обобщенное решение этой задачи $u(x) \in C^\infty(|x| < 1)$ и является гармонической функцией в $\{|x| < 1\}$. Разложим $u(x) = u(r, \theta)$ при фиксированном $r < 1$ в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье:

$$u(r, \theta) = \frac{U_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k(r) \cos k\theta + V_k(r) \sin k\theta),$$

где

$$\begin{aligned}U_k(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \vartheta) \cos k\theta \, d\theta, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ V_k(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) \sin k\theta \, d\theta, & k = 1, 2, \dots.\end{aligned}$$

Функции $U_k(r)$ (и $V_k(r)$), $k = 0, 1, \dots$, бесконечно дифференцируемы при $0 < r < 1$ и ограничены при $r \rightarrow +0$. Поскольку $u \in H^1(|x| < 1)$, то в силу непрерывности следа функций из $H^1(|x| < 1)$, установленного в §3 главы 1,

$$\int_0^{2\pi} (u(r, \theta) - \varphi(\theta))^2 \, d\theta \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1 - 0$$

для всех $k = 0, 1, \dots$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (u(r, \theta) - \varphi(\theta)) \cos k\theta \, d\theta &\rightarrow 0 \\ \left(\int_0^{2\pi} (u(r, \theta) - \varphi(\theta)) \sin k\theta \, d\theta \rightarrow 0 \right) \end{aligned}$$

при $r \rightarrow 1 - 0$.

Таким образом, все функции $U_k(r)$ ($V_k(r)$) непрерывны слева в точке $r = 1$ и $U_k(1) = a_k$ ($V_k(1) = b_k$), $k = 0, 1, \dots$.

Так как для $r \in (0, 1)$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0,$$

то для таких r

$$\begin{aligned} U_k''(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_{rr}(r, \theta) \cos k\theta \, d\theta = -\frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} u_r(r, \theta) \cos k\theta \, d\theta \\ &\quad - \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} u_{\theta\theta}(r, \theta) \cos k\theta \, d\theta = -\frac{1}{r} U_k' + \frac{k^2}{r^2} U_k \end{aligned}$$

при $k = 0, 1, \dots$.

Это означает, что для любых $k = 0, 1, \dots$ функция $U_k(r)$ удовлетворяет при $0 < r < 1$ обыкновенному дифференциальному уравнению (Эйлера)

$$y'' + \frac{1}{r} y' - \frac{k^2}{r^2} y = 0.$$

Поскольку общее решение этого уравнения имеет вид $Br^k + Cr^{-k}$ при $k \neq 0$ и $B + C \ln r$ при $k = 0$, то $U_k(r) = a_k r^k$, $k = 0, 1, \dots$. Аналогично показывается, что $V_k(r) = b_k r^k$, $k = 1, 2, \dots$.

Таким образом, функция u , принадлежащая $H^1(|x| < 1)$, совпадает с функцией w из (12). А тогда в силу леммы сходится ряд (11). Теорема доказана.

Приведем еще один критерий того, чтобы функция $\varphi = \varphi(\theta)$ была следом на границе круга $\{|x| < 1\}$ функции из $H^1(|x| < 1)$.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы функция $\varphi(\vartheta)$ была следом на границе круга $\{|x| < 1\}$ функции из $H^1(|x| < 1)$ необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{t^2} \int_0^{2\pi} (\varphi(\theta + t) - \varphi(\theta))^2 \, d\theta < \infty.$$

Для функции $\varphi(\theta)$, разложенной в ряд Фурье (10) имеем

$$\begin{aligned}\varphi(\theta + t) - \varphi(\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\cos k\theta (\cos kt - 1) - \sin k\theta \sin kt) \\ &\quad + b_k (\sin k\theta (\cos kt - 1) + \cos k\theta \sin kt) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\cos k\theta [a_k (\cos kt - 1) + b_k \sin kt] \\ &\quad + \sin k\theta [b_k (\cos kt - 1) - a_k \sin kt]).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\varphi(\theta + t) - \varphi(\theta))^2 d\vartheta \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k (\cos kt - 1) + b_k \sin kt)^2 \\ &\quad + (b_k (\cos kt - 1) - a_k \sin kt)^2] \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) [(\cos kt - 1)^2 + \sin^2 kt] \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) (1 - \cos kt) = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 \frac{kt}{2}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{t^2} \int_0^{2\pi} (\varphi(\vartheta + t) - \varphi(\vartheta))^2 d\vartheta &= 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{kt}{2}}{t^2} dt \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) k \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau.\end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau > 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

то сходимость ряда (10) и сходимость интеграла в формулировке теоремы 3 эквивалентны. Теорема доказана.

§ 3. Задача о собственных значениях и собственных функциях

В этом параграфе сначала мы рассмотрим третью (вторую) краевую задачу:

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a(x)u = \lambda u, \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})\nu_j(x) + \sigma(x)u \right) \Big|_{\partial Q} = 0, \quad (2)$$

в которой все коэффициенты – вещественнозначные функции, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{Q})$, $i, j = 1, \dots, n$, при всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и всех $x \in \bar{Q}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_j \geq \gamma \sum_i |\xi_i|^2 \quad (3)$$

с постоянной $\gamma > 0$, $a(x) \in C(\bar{Q})$, $\sigma(x) \in C(\partial Q)$, через $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ обозначен единичный вектор внешней по отношению к области Q нормали к границе ∂Q , λ – числовой параметр.

Поскольку нас будут интересовать обобщенные решения этой задачи, то как и в § 1 разумно снизить требования на коэффициенты в (1) и (2).

Будем считать, что вещественнозначные функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i, j = 1, \dots, n$, неравенство (3) выполняется для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и п.в. $x \in Q$, $a(x) \in L_\infty(Q)$, $\sigma(x) \in L_\infty(\partial Q)$.

Кроме того, для простоты будем считать, что $\sigma(x) \geq 0$ п.в. на ∂Q .

В рассматриваемом случае определение обобщенного решения задачи (1), (2) выглядит следующим образом – это функция $u(x) \in H^1(Q)$, удовлетворяющая при всех $v(x) \in H^1(Q)$ равенству

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}\bar{v}_{x_j} + a(x)u\bar{v} \right) dx + \int_{\partial Q} \sigma(x)u\bar{v} dS = \lambda \int_Q u\bar{v} dx. \quad (4)$$

Число λ называется *собственным значением задачи* (1), (2), если при этом значении λ существует функция $u(x) \in H^1(Q)$,

$\text{mes}\{u(x) \neq 0\} > 0$, удовлетворяющая равенству (4) при любой $v(x) \in H^1(Q)$; функция $u(x)$ называется *обобщенной собственной функцией задачи* (1), (2), отвечающей собственному значению λ .

Возьмем произвольное число $m > -\text{vrai} \min_{x \in Q} a(x)$. Тогда $a(x) + m > 0$ п.в. в Q . Представим равенство (4) в виде

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + (a(x) + m) u \bar{v} \right) dx + \int_{\partial Q} \sigma(x) u \bar{v} dS \\ & = (\lambda + m) \int_Q u \bar{v} dx, \quad v \in H^1(Q), \end{aligned}$$

или, что то же самое, в виде

$$(u, v)_{H^1(Q)} = (\lambda + m)(u, v)_{L_2(Q)} \quad \text{для всех } v \in H^1(Q), \quad (5)$$

если скалярное произведение в $H^1(Q)$ согласно теореме 1 §9 главы 1 определить формулой

$$\begin{aligned} & (u, v)_{H^1(Q)} \\ & = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + (a(x) + m) u \bar{v} \right) dx + \int_{\partial Q} \sigma(x) u \bar{v} dS. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку при любом $u \in L_2(Q)$ линейный функционал $l_u(v) = (u, v)_{L_2(Q)}$ ограничен:

$$\begin{aligned} |l_u(v)| & = |(u, v)_{L_2(Q)}| \leq C \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{H^1(Q)}, \\ \|l_u\| & \leq C \|u\|_{L_2(Q)}, \end{aligned}$$

то по теореме Рисса при любом $u \in L_2(Q)$ существует единственная функция $U(x) \in H^1(Q)$, для которой

$$\begin{aligned} (u, v)_{L_2(Q)} & = (U, v)_{H^1(Q)} \quad \text{при всех } v \in H^1(Q), \\ \|U\|_{H^1(Q)} & = \|l_u\|. \end{aligned}$$

Следовательно, на $L_2(Q)$ задан линейный ограниченный оператор A из $L_2(Q)$ в $H^1(Q)$:

$$\begin{aligned} Au & = U, \\ \|Au\|_{H^1(Q)} & = \|U\|_{H^1(Q)} \leq C \|u\|_{L_2(Q)}, \quad u \in L_2(Q), \end{aligned}$$

откуда

$$\|A\| \leq C,$$

при этом для всех $u \in L_2(Q)$ и $v \in H^1(Q)$ имеет место равенство

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{H^1(Q)}.$$

Поскольку уравнение $Au = 0$, $u \in L_2(Q)$, в силу этого равенства имеет решение только $u = 0$, то оператор A имеет обратный A^{-1} .

Сужение оператора A на $H^1(Q)$ (мы обозначаем это сужение той же буквой A) в силу теоремы 1 § 6 главы 1 является вполне непрерывным оператором из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$. Так как при всех v , $u \in H^1(Q)$

$$\begin{aligned} (Au, v)_{H^1(Q)} &= (u, v)_{L_2(Q)} \\ &= \overline{(v, u)}_{L_2(Q)} = \overline{(Av, u)}_{H^1(Q)} = (u, Av)_{H^1(Q)}, \end{aligned}$$

то оператор A из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$ самосопряженный, $A = A^*$, и поскольку

$$(Au, u)_{H^1(Q)} = (u, u)_{L_2(Q)} > 0$$

для всех $u \neq 0$, то оператор A положительный.

Равенство (5) с помощью оператора A можно записать в виде

$$(u, v)_{H^1(Q)} = (\lambda + m)(Au, v)_{H^1(Q)} \quad \text{при } v \in H^1(Q). \quad (7)$$

Следовательно, задача разыскания собственных значений и собственных функций эквивалентна задаче отыскания характеристических чисел и собственных элементов оператора A :

$$u = (\lambda + m)Au, \quad u \in H^1(Q).$$

Число λ является собственным значением нашей задачи тогда и только тогда, когда число $\mu = \lambda + m$ является характеристическим числом оператора A , а обобщенные собственные функции являются соответствующими собственными элементами этого оператора.

Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны (в скалярном произведении (6) пространства $H^1(Q)$).

Поскольку функция $Cu(x)$ вместе с собственной функцией $u(x)$, где постоянная $C \neq 0$, тоже является собственной функцией, отвечающей тому же собственному значению, то собственные функции можно считать нормированными в $H^1(Q)$ (в норме, порождаемой скалярным произведением (6)): $\|u\|_{H^1(Q)} = 1$. Множество собственных функций, отвечающих собственному значению λ образует линейное подпространство M_λ пространства $H^1(Q)$; по второй теореме Фредгольма его размерность, называемая кратностью $k(\lambda)$ собственного значения, конечна: $\dim M_\lambda = k(\lambda) < \infty$. В M_λ можно выбрать ортонормированный (в скалярном произведении (6)) базис, состоящий из $k(\lambda)$ собственных функций, отвечающих собственному значению λ .

Из теорем Фредгольма и теоремы Гильберта–Шмидта следует, что множество собственных значений является непустым счетным множеством вещественных чисел $\{\lambda_i, i = 1, 2, \dots\}$, которое можно расположить в порядке невозрастания:

$$-m < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (8)$$

причем каждое собственное значение в этой последовательности повторяется столько раз, какова его кратность. Соответствующая последовательность собственных функций

$$u_1(x), \dots, u_k(x), \dots \quad (9)$$

образует ортонормированный в скалярном произведении (6) базис пространства $H^1(Q)$:

$$(u_1, u_2)_{H^1(Q)} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

В силу (7) для всех $i, j = 1, 2, \dots$, имеем равенство

$$(u_i, u_j)_{H^1(Q)} = (\lambda_i + m)(u_i, u_j)_{L_2(Q)},$$

из которого вытекает, что

$$(u_i, u_j)_{L_2(Q)} = \frac{1}{\lambda_i + m} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

т.е. последовательность (9) ортогональна в $L_2(Q)$, а последовательность

$$\frac{u_1(x)}{\sqrt{\lambda_1 + m}}, \dots, \frac{u_k(x)}{\sqrt{\lambda_k + m}}, \dots, \quad (10)$$

является ортонормированной системой в $L_2(Q)$.

Поскольку $H^1(Q)$ является всюду плотным в $L_2(Q)$ множеством, то последовательность (10) является ортонормированным базисом пространства $L_2(Q)$.

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, $\sigma(x)$ в (1) и (2) вещественнозначные функции, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x) \in L_\infty(Q)$, $\sigma(x) \in L_\infty(\partial Q)$ и $\sigma(x) \geq 0$ п.в. на ∂Q . Тогда множество всех собственных значений задачи (1), (2) есть счетное множество вещественных чисел

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots,$$

при этом $\lambda_1 \geq \inf_{x \in Q} a(x)$ и $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

В этой последовательности каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Соответствующая последовательность обобщенных собственных функций

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

образует ортонормированный в скалярном произведении (6) базис пространства $H^1(Q)$. Система

$$\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{L_2(Q)}}, \frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{L_2(Q)}}, \dots, \frac{u_n(x)}{\|u_n\|_{L_2(Q)}}, \dots$$

является ортонормированным базисом пространства $L_2(Q)$.

Совершенно аналогично рассматривается и задача на собственные значения в случае граничного условия первого рода:

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a(x)u = \lambda u, \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad (11)$$

в которой все коэффициенты – вещественнозначные функции, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{Q})$, $i, j = 1, \dots, n$, при всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и всех $x \in \bar{Q}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i \bar{\xi}_j \geq \gamma \sum_i |\xi_i|^2 \quad (3)$$

с постоянной $\gamma > 0$, $a(x) \in C(\bar{Q})$, λ – числовой параметр.

Поскольку нас будут интересовать обобщенные решения этой задачи, то как и в § 2 разумно снизить требования на коэффициенты в (1) и (2).

Будем считать, что вещественнозначные функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i, j = 1, \dots, n$, неравенство (3) выполняется для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и п.в. $x \in Q$, $a(x) \in L_\infty(Q)$.

В рассматриваемом случае определение обобщенного решения задачи (1), (11) выглядит, напомним, следующим образом: это функция $u(x) \in \dot{H}^1(Q)$, удовлетворяющая при всех $v(x) \in \dot{H}^1(Q)$ равенству

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + a(x) u \bar{v} \right) dx = \lambda \int_Q u \bar{v} dx. \quad (12)$$

Число λ называется *собственным значением задачи* (1), (11), если при этом значении λ существует функция $u(x) \in \dot{H}^1(Q)$, $\text{mes}\{u(x) \neq 0\} > 0$, удовлетворяющая равенству (12) при любой $v(x) \in \dot{H}^1(Q)$; функция $u(x)$ называется *обобщенной собственной функцией задачи* (1), (11), отвечающей собственному значению λ .

Введем обозначение $m = -\text{vrai} \min_{x \in Q} a(x)$ (тогда $a(x) + m \geq 0$ п.в. в Q) и перепишем (12) в виде

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + (a(x) + m) u \bar{v} \right) dx \\ = (\lambda + m) \int_Q u \bar{v} dx, \quad v \in \dot{H}^1(Q), \end{aligned}$$

или, что то же самое, в виде

$$(u, v)_{\dot{H}^1(Q)} = (\lambda + m)(u, v)_{L_2(Q)}, \quad v \in \dot{H}^1(Q), \quad (13)$$

если скалярное произведение в $\dot{H}^1(Q)$ согласно теореме 2 § 9 главы 1 определить по формуле

$$(u, v)_{\dot{H}^1(Q)} = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + (a(x) + m) u \bar{v} \right) dx. \quad (14)$$

Интегральное равенство (13) аналогично интегральному равенству (5), которое получено при рассмотрении задачи (1), (2),

в нем лишь роль пространства $H^1(Q)$ играет его подпространство $\dot{H}^1(Q)$. Проводя на основании равенства (13) те же рассуждения, что выше были проведены на основании равенства (5), конечно, с естественной заменой $H^1(Q)$ на $\dot{H}^1(Q)$, убедимся в справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$ в (1) вещественнозначные функции, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x) \in L_\infty(Q)$. Тогда множество всех собственных значений задачи (1), (11) есть счетное множество вещественных чисел

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots,$$

при этом $\lambda_1 > -\operatorname{grai} \min_{x \in Q} a(x)$ и $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

В этой последовательности каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Соответствующая последовательность обобщенных собственных функций

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

образует ортонормированный в скалярном произведении (14) базис пространства $\dot{H}^1(Q)$. Система

$$\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{L_2(Q)}}, \frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{L_2(Q)}}, \dots, \frac{u_n(x)}{\|u_n\|_{L_2(Q)}}, \dots$$

является ортонормированным базисом пространства $L_2(Q)$.

Список литературы

Цитированная литература

- [1] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.
- [2] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.
- [3] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1, ГИТТЛ, М., 1951.
- [4] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988.
- [5] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физико-математическая литература, М., 2000.
- [6] С. Л. Соболев, *Уравнения математической физики*, ГИТТЛ, М., 1954.
- [7] В. П. Михайлов, *Лекции по уравнениям математической физики*, Физматлит, М., 2001.

Рекомендуемые учебники по общим вопросам теории функций и функционального анализа

- [8] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.
- [9] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Наука, М., 1965.
- [10] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах*, ГИТТЛ, М., 1959.
- [11] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.
- [12] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Лекционные курсы НОЦ, **5**, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, М., 2006.
- [13] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.
- [14] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, ИЛ, М., 1954.
- [15] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, ГИТТЛ, М., 1957.

Часть II

В первой части курса были установлены основные свойства пространств Соболева и изучена разрешимость краевых задач для линейных эллиптических уравнений второго порядка. Вторая часть посвящена доказательству более тонких свойств обобщенных решений этих уравнений. В частности, в ней доказывается, что обобщенное решение однородного уравнения с измеримыми и ограниченными коэффициентами, принадлежащее по определению пространству $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, на самом деле непрерывно внутри рассматриваемой области Q , а для решений задачи Дирихле справедлив принцип максимума. Более того, решение непрерывно по Гёльдеру внутри Q . Доказательство этого фундаментального результата Е. Де Джорджи и Дж. Нёша (см. [1], [2]) является основной целью данной части и его потребности во многом определили выбор материала. О роли этого результата в развитии теории квазилинейных уравнений, а также в решении 19-ой и 20-ой проблем Гильберта, см., например, [3], [4].

Теорема о гёльдеровой непрерывности справедлива и для решений общего (в том числе и неоднородного) эллиптического уравнения второго порядка. Однако мы ограничимся простейшим случаем уравнения в самосопряженной форме без младших членов, в котором легче увидеть основные идеи доказательства. С возможными обобщениями этого результата можно ознакомиться, например, в книгах [3], [4]. В основе изложения лежит доказательство, предложенное Мозером (см. [5]). Оно потребует знания некоторых дополнительных свойств пространств Соболева; их изложению посвящена глава 3. Доказательству принципа максимума и вытекающего из него утверждения об однозначной разрешимости задачи Дирихле посвящена глава 4. Там же рассмотрены пространства с отрицательным показателем гладкости и доказана теорема об изоморфизме. Последняя глава содержит слабое неравенство Гарнака и доказательство теоремы о гёльдеровой непрерывности решений.

Глава 3

Некоторые дополнительные сведения из теории пространств Соболева

В этой главе будут приведены некоторые свойства пространств Соболева, которые нам понадобятся при изучении свойств решений эллиптических уравнений. Будет доказан критерий принадлежности измеримой функции пространству $L_\infty(Q)$, установлена теорема вложения $W_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$ и получена специальная оценка нормы в $L_p(Q)$ через интеграл Дирихле и норму в L_2 по множеству заданной меры. Кроме того, мы рассмотрим не изучавшийся в первой части вопрос об обобщенных производных сложной функции.

§ 1. Пространства L_p и L_∞

Пусть $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – измеримое (относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^n$) множество, $\text{mes } \mathcal{E} > 0$, mes – мера Лебега. Всюду в этой части мы будем рассматривать только вещественнозначные функции. Напомним, что пространство $L_p(\mathcal{E})$, $p \geq 1$, состоит из определенных в $\mathcal{E}$ измеримых функций, p -ая степень модуля которых суммируема (по $\mathcal{E}$); при этом функции из $L_p(\mathcal{E})$ считаются равными (образуют один элемент этого пространства), если их значения совпадают почти всюду. Норму в $L_p(\mathcal{E})$ будем далее обозначать через $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{E})}$ или через $\|\cdot\|_p$,

$$\|f\|_{L_p(\mathcal{E})} = \|f\|_p = \left(\int_{\mathcal{E}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Известно, что $L_p(\mathcal{E})$ является сепарабельным банаховым пространством. Напомним, что метрическое пространство называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т.е. замыкание этого счетного множества совпадает со всем пространством (см., например, [6], [7]).

Для любых функций $f \in L_p(\mathcal{E})$ и $g \in L_q(\mathcal{E})$, где $1/p + 1/q = 1$, их произведение fg принадлежит $L_1(\mathcal{E})$ и справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\int_{\mathcal{E}} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Если мера множества $\mathcal{E}$ конечна ($\text{mes } \mathcal{E} < +\infty$), то из неравенства Гёльдера немедленно следует, что семейство пространств $L_p(\mathcal{E})$, $p \geq 1$, монотонно убывает по вложению: если $p_1 < p_2$, то $L_{p_2}(Q) \subset L_{p_1}(Q)$, при этом для всех $f \in L_{p_2}(\mathcal{E})$ справедлива оценка

$$\|f\|_{p_1} \leq (\text{mes } \mathcal{E})^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}} \|f\|_{p_2}.$$

Далее нам потребуется следующее *обобщенное неравенство Гёльдера*.

ЛЕММА 1. Пусть $f_1 \in L_{p_1}(\mathcal{E})$, $f_2 \in L_{p_2}(\mathcal{E})$, ..., $f_m \in L_{p_m}(\mathcal{E})$, где $1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_m = 1$. Тогда произведение $f_1 f_2 \dots f_m \in L_1(\mathcal{E})$ и

$$\int_{\mathcal{E}} |f_1(x)f_2(x) \dots f_m(x)| dx \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_m\|_{p_m}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО естественно провести индукцией по числу функций в системе. При $m = 2$ утверждение верно (оно совпадает с неравенством Гёльдера). Предположим, что оно справедливо при $m = k - 1$, и докажем его при $m = k$. В силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{E}} |f_1(x)f_2(x) \dots f_k(x)| dx \\ & \leq \left(\int_{\mathcal{E}} |f_1(x)|^{p_1} dx \right)^{1/p_1} \left(\int_{\mathcal{E}} |f_2(x) \dots f_k(x)|^{q_1} dx \right)^{1/q_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $1/p_1 + 1/q_1 = 1$. Возьмем $r_i = p_i/q_1$, $i = 2, \dots, k$. Так как $1/r_2 + \dots + 1/r_k = q_1(1/p_2 + \dots + 1/p_k) = 1$, то по индукционному предположению

$$\int_{\mathcal{E}} |f_2(x)|^{q_1} \dots |f_k(x)|^{q_1} dx \leq \|f_2\|_{r_2}^{q_1} \dots \|f_k\|_{r_k}^{q_1}.$$

Подставляя полученное неравенство в (2), получаем (1).

Перейдем теперь к изучению пространства существенно ограниченных функций $L_\infty(\mathcal{E})$. Напомним, что это пространство состоит из всех измеримых функций f , каждая из которых удовлетворяет условию: существует такая постоянная $M = M(f)$, что $\text{mes}\{x \in \mathcal{E} : |f(x)| > M\} = 0$. Легко видеть, что это условие эквивалентно условию ограниченности множества чисел K , для которых $\text{mes}\{x \in \mathcal{E} : |f(x)| > K\} > 0$. Наименьшая из постоянных M (равная, очевидно, точной верхней грани чисел K) называется нормой f в $L_\infty(\mathcal{E})$; будем обозначать ее через $\|f\|_{L_\infty(\mathcal{E})}$ или через $\|f\|_\infty$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_\infty(\mathcal{E})} &= \|f\|_\infty \\ &= \min\{M : \text{mes}\{x \in \mathcal{E} : |f(x)| > M\} = 0\} \\ &= \sup\{K : \text{mes}\{x \in \mathcal{E} : |f(x)| > K\} > 0\} = \text{vrai sup}_{\mathcal{E}} |f|.\end{aligned}$$

Конечно, как и для пространств $L_p(\mathcal{E})$, функции из $L_\infty(\mathcal{E})$ считаем равными, если их значения совпадают почти всюду в $\mathcal{E}$.

Будем предполагать, что $\text{mes } \mathcal{E} < +\infty$. Тогда пространство $L_\infty(\mathcal{E})$ вложено во все пространства $L_p(\mathcal{E})$. Нетрудно убедиться, что $L_\infty(\mathcal{E})$ не совпадает с пересечением $L_p(Q)$, $p \geq 1$. Далее нам понадобится следующий критерий принадлежности функции пространству $L_\infty(\mathcal{E})$.

ТЕОРЕМА 1. *Функция f принадлежит пространству $L_\infty(\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда она принадлежит всем пространствам $L_p(\mathcal{E})$, $p \geq 1$, и существует такая постоянная C , что для всех $p \geq 1$ $\|f\|_p \leq C$. При этом*

$$\|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty \quad \text{при } p \rightarrow \infty. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что выражение

$$\left(\frac{1}{\text{mes } \mathcal{E}} \int_{\mathcal{E}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \|f\|'_p$$

задает эквивалентную норму в пространстве $L_p(\mathcal{E})$. В силу неравенства Гёльдера для любой функции f из пересечения $\bigcap_{p \geq 1} L_p(\mathcal{E})$ семейство норм $\|f\|'_p$ монотонно не убывает (по p). А так как $\|f\|'_p \sim \|f\|_p$ при $p \rightarrow \infty$, то в доказательстве теоремы можно рассматривать как нормы $\|f\|_p$, так и нормы $\|f\|'_p$.

Утверждение о необходимости очевидно: из ограниченности измеримой функции f следует суммируемость $|f|^p$. А так как

$\|f\|'_p \leq \|f\|_\infty$, то ограничено, а следовательно, и сходится при $p \rightarrow \infty$ семейство норм функции f в $L_p(\mathcal{E})$. При этом

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|'_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty. \quad (4)$$

Докажем утверждение о достаточности. Пусть функция f принадлежит пересечению пространств $L_p(\mathcal{E})$, $p \geq 1$, и с некоторой постоянной C выполняется условие: $\|f\|_p \leq C$ для всех $p \geq 1$. Возьмем произвольное неотрицательное число K , для которого мера множества $\mathcal{E}_K = \{x \in \mathcal{E} : |f(x)| > K\}$ положительна. Поскольку для всех p

$$K^p \text{mes } \mathcal{E}_K \leq \int_{\mathcal{E}_K} |f(x)|^p dx \leq \int_{\mathcal{E}} |f(x)|^p dx,$$

то каждое такое число K должно удовлетворять оценке

$$K \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_p}{(\text{mes } \mathcal{E}_K)^{1/p}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq C.$$

Следовательно, $f \in L_\infty(\mathcal{E})$ и

$$\|f\|_\infty = \sup\{K : \text{mes } \mathcal{E}_K > 0\} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

Последнее неравенство вместе с (4) дают (3).

§ 2. Вложение пространства $W_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$

Пусть Q – ограниченная область $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; гладкость ее границы (если это не оговорено особо) мы предполагать не будем. В этом параграфе будут доказаны теоремы вложения пространств $\dot{W}_2^1(Q)$ и $W_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$; при этом мы будем следить за зависимостью постоянной от области Q . Кроме того. В § 9 главы 1 были доказаны теоремы об эквивалентных нормировках пространств $W_2^1(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$, из которых следовали оценки квадрата нормы в $L_2(Q)$ через сумму интеграла Дирихле и квадрата интеграла по Q от рассматриваемой функции из $W_2^1(Q)$ (неравенство Пуанкаре) и через интеграл Дирихле для функций из $W_2^1(Q)$ (неравенство Стеклова). Из этих теорем (точнее, из теоремы 1 § 9 главы 1) нетрудно получить и оценку интеграла по Q от квадрата функции f (из $W_2^1(Q)$) через сумму интеграла Дирихле этой функции и интеграла от f по некоторому множеству положительной меры. В конце этого параграфа мы убедимся (см. лемму 1), что постоянная в обсуждаемой оценке зависит не от вида и расположения в Q этого множества, а только от его меры (считаем, что область Q фиксирована). Более подробную информацию о пространствах Соболева, в частности, теоремы вложения при минимальных предположениях относительно гладкости границы области можно найти, например, в [8].

Прежде всего, договоримся, что мы будем понимать под пространствами $W_2^1(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$; определения этих пространств были даны для случая области с гладкой границей, а мы от этого требования отказались. Рассмотрим множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и финитных функций. Под $C^\infty(\bar{Q})$ будем понимать множество сужений на Q функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. На $C^\infty(\bar{Q})$ введем скалярное произведение

$$(f, g)_{W_2^1(Q)} = \int_Q [(\nabla f(x), \nabla g(x)) + f(x)g(x)] dx; \quad (5)$$

напомним, что мы договорились рассматривать вещественнозначные функции. Если последовательность фундаментальна в полученном нормированном пространстве, то она, очевидно, фундаментальна в $L_2(Q)$. Добавим к функциям из $C^\infty(\bar{Q})$ пределы (элементы $L_2(Q)$) всех фундаментальных (в норме, порожденной скалярным произведением (5)) последовательностей функций из $C^\infty(\bar{Q})$. Полученное таким образом замыкание $C^\infty(\bar{Q})$

по норме, порожденной скалярным произведением (5), является гильбертовым пространством с тем же скалярным произведением (оно изоморфно пополнению $C^\infty(\overline{Q})$); его мы и будем обозначать через $\dot{W}_2^1(Q)$. Отметим, что в случае области с гладкой границей приведенное определение эквивалентно (в силу теоремы 4 § 2 главы 1) определению, использованному в первой части. Под пространством $\dot{W}_2^1(Q)$ будем понимать замыкание по той же норме множества финитных бесконечно дифференцируемых в Q функций. Если граница ∂Q области Q состоит (как в части I) из конечного числа гладких поверхностей, то след на ∂Q функций из $\dot{W}_2^1(Q)$, очевидно, равен нулю. А теорема 2 § 4 главы 1 дает справедливость в этом случае и обратного утверждения: если след на ∂Q функции из $\dot{W}_2^1(Q)$ равен нулю, то она является пределом (в норме, порожденной скалярным произведением (5)) некоторой последовательности функций из $C_0^\infty(Q)$. Таким образом, и новое определение пространства $\dot{W}_2^1(Q)$ является расширением определения из главы 1 на области с негладкой границей. Отметим также, что в приведенных определениях вместо бесконечно дифференцируемых функций можно рассматривать непрерывно дифференцируемые функции: функция из $C^1(\overline{Q})$, очевидно, принадлежит $\dot{W}_2^1(Q)$, а если она еще и финитна, то и $\dot{W}_2^1(Q)$. Так же естественно определить пространства $\dot{W}_2^1(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$ и в случае неограниченной области Q ; заметим, что если $Q = \mathbb{R}^n$, то так определенные пространства $\dot{W}_2^1(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$ совпадают.

Аналогично, под пространством $W_p^k(Q)$ естественно понимать замыкание $C^\infty(\overline{Q})$ по норме этого пространства (см. часть I); $\dot{W}_p^k(Q)$ – это замыкание $C_0^\infty(Q)$ по той же норме.

Начнем изучение указанных в названии параграфа вложений со случая пространства $\dot{W}_2^1(Q)$. В этом случае нет необходимости требовать ограниченность области Q .

ТЕОРЕМА 1. Пусть размерность пространства n не меньше трех. Тогда $\dot{W}_2^1(Q) \subset L_{\frac{2n}{n-2}}(Q)$. При этом для любой функции f из $\dot{W}_2^1(Q)$ справедлива оценка

$$\|f\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(Q)} \leq \frac{2(n-1)}{n-2} \|\nabla f\|_{L_2(Q)}. \quad (6)$$

Если $n = 2$ и $\text{mes } Q < \infty$, то для всех $p \geq 1$ $\dot{W}_2^1(Q) \subset L_p(Q)$ и

$$\|f\|_{L_p(Q)} \leq \frac{p}{2} (\text{mes } Q)^{1/p} \|\nabla f\|_{L_2(Q)}, \quad f \in \dot{W}_2^1(Q). \quad (6')$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\text{mes } Q < \infty$, то из первого утверждения теоремы 1 немедленно следует (в силу монотонности по вложению семейства пространств $L_p(Q)$), что все $L_p(Q)$, $p \in [1, \frac{2n}{n-2}]$, содержат $\mathring{W}_2^1(Q)$. При этом

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(Q)} &\leq (\text{mes } Q)^{\frac{p(2-n)+2n}{2np}} \|f\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(Q)} \\ &\leq \frac{2(n-1)}{n-2} (\text{mes } Q)^{\frac{p(2-n)+2n}{2np}} \|\nabla f\|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

В частности, при $p = 2$ имеем неравенство Стеклова

$$\|f\|_{L_2(Q)} \leq \frac{2(n-1)}{n-2} (\text{mes } Q)^{1/n} \|\nabla f\|_{L_2(Q)}, \quad (6'')$$

в котором постоянная зависит только от размерности пространства n и меры области Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Возьмем произвольную функцию f из $C_0^\infty(Q)$; доопределим ее нулем вне Q . Тогда для любой точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и любого i , $1 \leq i \leq n$,

$$|f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x'_i, t_i) dt_i \right|,$$

здесь $(x'_i, t_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Перемножая n таких равенств, соответствующих $i = 1, \dots, n$, и возводя произведение в степень $1/(n-1)$, имеем

$$|f(x)|^{n/(n-1)} \leq \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x'_i, t_i) \right| dt_i \right)^{1/(n-1)}.$$

Интегрируя это неравенство по x_1 и применяя обобщенное неравенство Гёльдера (1) с $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = n-1$, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|^{n/(n-1)} dx_1 \\
 & \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x'_1, t_1) \right| dt_1 \right)^{1/(n-1)} \\
 & \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x'_i, t_i) \right| dt_i \right)^{1/(n-1)} dx_1 \\
 & \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x'_1, t_1) \right| dt_1 \right)^{1/(n-1)} \\
 & \quad \times \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt_i \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x'_i, t_i) \right| dx_1 \right)^{1/(n-1)}.
 \end{aligned}$$

Откуда, интегрируя по остальным переменным ($x_k, k = 2, \dots, n$) и каждый раз применяя обобщенное неравенство Гёльдера с теми же показателями, имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{n/(n-1)} dx \\
 & \leq \left[\prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| dx \right]^{1/(n-1)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \right)^{n/(n-1)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали (напомним, что $f = 0$ вне Q) справедливость для всех $f \in C_0^\infty(Q)$ оценки

$$\|f\|_{L_{n/(n-1)}(Q)} \leq \int_Q |\nabla f(x)| dx = \|\nabla f\|_{L_1(Q)}. \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из полученного неравенства (7) немедленно следует, что для любой области $Q \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$, пространство $\dot{W}_1^1(Q)$ вложено в $L_{n/(n-1)}(Q)$ и для всех $f \in \dot{W}_1^1(Q)$ справедливо (7).

Действительно, возьмем произвольную функцию $f \in \dot{W}_1^1(Q)$ и пусть $\{f_m\}$ – последовательность функций из $C_0^\infty(Q)$, сходящаяся к f в $\dot{W}_1^1(Q)$. Из (7) следует фундаментальность этой последовательности и в $L_{n/(n-1)}(Q)$. Легко видеть, что предел в $L_{n/(n-1)}(Q)$

этой последовательности совпадает (п.в. в Q) с f (Докажите!) и его норма в $L_{n/(n-1)}(Q)$ – предел норм f_m в этом пространстве – удовлетворяет (7) (предел норм $|\nabla f_m|$ в $L_1(Q)$, конечно, равен норме $|\nabla f|$ в $L_1(Q)$).

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть, по-прежнему, $f \in C_0^\infty(Q)$, а $n > 2$. Применим к непрерывно дифференцируемой и финитной в Q функции $|f(x)|^\gamma$, где $\gamma = \frac{2(n-1)}{n-2} > 2$, оценку (7); для таких функций она справедлива в силу замечания 2. Получим

$$\begin{aligned} \| |f|^\gamma \|_{L_{n/(n-1)}(Q)} &= \left(\int_Q |f(x)|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \gamma \int_Q |f(x)|^{\gamma-1} |\nabla f(x)| dx \leq \gamma \| |f|^{\gamma-1} \|_{L_2(Q)} \| |\nabla f| \|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Или, учитывая выбранное значение γ , имеем оценку

$$\left(\int_Q |f(x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{2(n-1)}{n-2} \left(\int_Q |f(x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \| |\nabla f| \|_{L_2(Q)},$$

которая, очевидно, совпадает с (6). Из доказанной для гладких финитных функций оценки (6) вытекает, как и в замечании 2, первое утверждение доказываемой теоремы.

Докажем второе утверждение. Пусть теперь размерность пространства n равна двум, $f \in C_0^\infty(Q)$. Тогда (доказанное для всех $n \geq 2$) неравенство (7) имеет вид

$$\|f\|_{L_2(Q)} \leq \| |\nabla f| \|_{L_1(Q)}.$$

Возьмем произвольное число $\gamma > 1$ и применим (7) к функции $|f(x)|^\gamma$. Используя неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\begin{aligned} &\left(\int_Q |f(x)|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \gamma \int_Q |f(x)|^{\gamma-1} |\nabla f(x)| dx \leq \gamma \| |f|^{\gamma-1} \|_{L_2(Q)} \| |\nabla f| \|_{L_2(Q)} \\ &\leq \gamma \left(\int_Q |f(x)|^{2(\gamma-1) \frac{\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} (\text{mes } Q)^{\frac{1}{2\gamma}} \| |\nabla f| \|_{L_2(Q)}, \end{aligned}$$

которая, очевидно, совпадает с (6'), $p = 2\gamma > 2$. Для $p \in [1, 2]$ неравенство (6') получается из доказанного с помощью неравенства Гёльдера. Утверждение о вложении $\dot{W}_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$ и

справедливость (6') для всех $f \in \dot{W}_2^1(Q)$ устанавливается, как и в замечании 2, с помощью приближения произвольной функции из $\dot{W}_2^1(Q)$ гладкими финитными функциями.

В случае ограниченной области Q с гладкой (класса C^1) границей из доказанной теоремы 1 и теоремы 1 § 2 главы 1 немедленно вытекает справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Q – ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Тогда $W_2^1(Q) \subset L_p(Q)$ для $p \in [1, \frac{2n}{n-2}]$ при $n \geq 3$ и для всех $p \geq 1$ при $n = 2$. При этом справедлива оценка

$$\|f\|_{L_p(Q)} \leq C \|f\|_{W_2^1(Q)},$$

в которой постоянная C зависит от размерности пространства n , показателя суммируемости p и области Q ; $C = C(n, p, Q)$.

Пусть теперь Q – шар единичного радиуса,

$$Q = \mathcal{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

ЛЕММА 1. Для произвольной положительной постоянной c_0 найдется такая постоянная $C = C(n, c_0)$, что для любого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}_1$, мера которого не меньше c_0 , и всех функций $f \in W_2^1(\mathcal{B}_1)$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathcal{B}_1} f^2(x) dx \leq C \left[\int_{\mathcal{B}_1} |\nabla f|^2(x) dx + \int_{\mathcal{E}} f^2(x) dx \right]. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем две произвольные точки x и y шара $\mathcal{B}_1$. Наряду с декартовыми координатами точки y , $y = (y_1, \dots, y_n)$ будем рассматривать и ее сферические координаты с центром в точке x : $y = x + r\omega$, $r = |y - x|$, $|\omega| = 1$. Пусть g – произвольная функция из $C_0^\infty(\mathcal{B}_1)$. Так как

$$g(x) = g(y) - \int_0^r \frac{d}{dt} [g(x + t\omega)] dt,$$

то

$$|g(x)| \leq |g(y)| + \int_0^r |\nabla g(x + t\omega)| dt.$$

Интегрируя это неравенство по множеству $\mathcal{E}$ (по переменным y) и заменяя во втором слагаемом правой части интеграл по $\mathcal{E}$ на

интеграл по всему шару $\mathcal{B}_1$, получаем

$$\text{mes } \mathcal{E} |g(x)| \leq \int_{\mathcal{E}} |g(y)| dy + \int_{\mathcal{B}_1} \left[\int_0^r |\nabla g(x + t\omega)| dt \right] dy.$$

Доопределим функцию $|\nabla g|$ нулем вне $\mathcal{B}_1$ и обозначим ее через h : $h(z) = |\nabla g(z)|$ при $z \in \mathcal{B}_1$ и $h(z) = 0$ при $z \notin \mathcal{B}_1$. Так как

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}_1} \left[\int_0^r |h(x + t\omega)| dt \right] dy \\ &= \int_0^2 r^{n-1} \left[\int_{|\omega|=1} \left(\int_0^r h(x + t\omega) dt \right) dS_\omega \right] dr \\ &\leq \int_0^2 r^{n-1} \left[\int_{|\omega|=1} \left(\int_0^2 h(x + t\omega) dt \right) dS_\omega \right] dr \\ &= \frac{2^n}{n} \int_{\{z: |z-x| < 2\}} \frac{h(z)}{|z-x|^{n-1}} dz = \frac{2^n}{n} \int_{\mathcal{B}_1} \frac{|\nabla g(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz, \end{aligned}$$

то для всех точек x из $\mathcal{B}_1$

$$|g(x)| \leq \frac{1}{c_0} \int_{\mathcal{E}} |g(y)| dy + \frac{2^n}{nc_0} \int_{\mathcal{B}_1} \frac{|\nabla g(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz.$$

Интегрируя последнее неравенство по шару $\mathcal{B}_1$, получаем, что для любой функции $g \in C_0^\infty(\mathcal{B}_1)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_1} |g(x)| dx &\leq \frac{C(n)}{c_0} \int_{\mathcal{E}} |g(y)| dy + \frac{2^n}{nc_0} \int_{\mathcal{B}_1} \left[\int_{\mathcal{B}_1} \frac{|\nabla g(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz \right] dx \\ &\leq C(n, c_0) \left[\int_{\mathcal{E}} |g(x)| dx + \int_{\mathcal{B}_1} |\nabla g(x)| dx \right] \end{aligned} \quad (8')$$

с зависящей только от n и c_0 постоянной $C(n, c_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Приближая произвольную функцию g , принадлежащую $W_1^1(\mathcal{B}_1)$, функциями из $C_0^\infty(\mathcal{B}_1)$, немедленно получаем (8') для $g \in W_1^1(\mathcal{B}_1)$.

Вернемся к доказательству леммы 1. Возьмем произвольную $f \in C_0^\infty(\mathcal{B}_1)$ и к функции $g(x) = f^2(x)$ применим (8'). Получим неравенство

$$\int_{\mathcal{B}_1} f^2(x) dx \leq C(n, c_0) \left[\int_{\mathcal{E}} f^2(x) dx + \int_{\mathcal{B}_1} |f(x)| |\nabla f(x)| dx \right],$$

из которого немедленно вытекает доказываемая оценка (8) для $f \in C_0^\infty(\mathcal{B}_1)$. Справедливость (8) для всех $f \in W_2^1(\mathcal{B}_1)$ получается стандартным приемом с помощью приближения гладкими функциями.

Из следствия 1 и леммы 1 немедленно вытекает следующее утверждение, описывающее зависимость от радиуса шара ρ постоянной в оценке квадрата нормы в $L_p(\mathcal{B}_\rho)$ через интеграл Дирихле и квадрат нормы в $L_2(\mathcal{E})$, $\mathcal{B}_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \rho\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для произвольной положительной постоянной c_0 и для любого показателя $p \in [1, \frac{2n}{n-2}]$ при $n \geq 3$ и $p \geq 1$ при $n = 2$ найдется такая постоянная $C = C(n, c_0, p)$, что для любого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}_\rho$, мера которого не меньше $c_0 \rho^n$, и для всех функций $f \in W_2^1(\mathcal{B}_1)$ справедливо неравенство

$$\left[\rho^{-n} \int_{\mathcal{B}_\rho} |f(x)|^p dx \right]^{2/p} \leq C \left[\rho^{2-n} \int_{\mathcal{B}_\rho} |\nabla f|^2(x) dx + \rho^{-n} \int_{\mathcal{E}} f^2(x) dx \right]. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения очевидно: подставляя в оценку нормы в $L_p(\mathcal{B}_1)$ следствия 1 неравенство (8), имеем (9) для единичного шара; для шара произвольного радиуса неравенство (9) получается с помощью растяжения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Оценка вида (9), конечно, верна и для любой ограниченной области Q с гладкой границей. Для ее доказательства достаточно продолжить (с сохранением принадлежности W_2^1) функцию в содержащий область Q шар и применить к ней (9), взяв $\mathcal{E} \subset Q$; конечно, постоянная в полученной оценке будет зависеть не только от n , c_0 и p , но еще и от области Q .

§ 3. Обобщенные производные сложной функции

Пусть f – отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Следующее утверждение дает достаточное условие принадлежности пространству $W_2^1(Q)$ суперпозиции отображений $F = f \circ u$ для всех $u \in W_2^1(Q)$. Напомним, что область Q мы договорились считать ограниченной.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема на всей оси, а ее производная ограничена. Тогда для любой $u \in W_2^1(Q)$ сложная функция $F(x) = f(u(x))$ принадлежит $W_2^1(Q)$, а ее обобщенные производные имеют вид*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из ограниченности производной функции f следует оценка

$$\begin{aligned} |F(x)|^2 &= |f(u(x))|^2 = \left| f(0) + \int_0^{u(x)} f'(t) dt \right|^2 \\ &\leq 2K^2 u^2(x) + 2f^2(0), \quad K = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|, \end{aligned}$$

которая вместе с очевидной измеримостью $F(x)$ дает принадлежность функции F пространству $L_2(Q)$. Аналогично, функции

$$f'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

измеримы и их квадраты мажорируются суммируемой функцией:

$$\left| f'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 \leq K^2 |\nabla u(x)|^2.$$

Следовательно, и они принадлежат $L_2(Q)$.

Пусть последовательность $\{u_k\}$ функций из $C^\infty(\bar{Q})$ сходится к функции u в $W_2^1(Q)$. Выделим из нее сходящуюся п.в. (к u) подпоследовательность; будем обозначать эту подпоследовательность также через $\{u_k\}$; заметим, что последовательности $f(u_k(x)) - f(u(x))$ и $f'(u_k(x)) - f'(u(x))$ п.в. стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. А так как

$$|f(u_k(x)) - f(u(x))|^2 \leq K^2 |u_k(x) - u(x)|^2,$$

то по теореме Лебега последовательность гладких функций $f \circ u_k$ сходится к $f \circ u$ в $L_2(Q)$. Покажем, что и последовательности производных $(\partial f \circ u_k)/\partial x_i$ сходятся в $L_2(Q)$ к $(f' \circ u)\partial u/\partial x_i$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \| (f' \circ u_k) \nabla u_k - (f' \circ u) \nabla u \|_{L_2(Q)} \\ & \leq \| |f' \circ u_k - f' \circ u| |\nabla u| \|_{L_2(Q)} + \| |f' \circ u_k| |\nabla u_k - \nabla u| \|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю в силу теоремы Лебега, так как

$$|f'(u_k(x)) - f'(u(x))|^2 \leq K^2.$$

Второе слагаемое оценивается величиной $K \| |\nabla u_k - \nabla u| \|_{L_2(Q)}$, которая стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, функции $f'(u(x))\partial u/\partial x_i(x)$ являются обобщенными производными функции $F(x)$, а F является пределом в норме $W_2^1(Q)$ последовательности гладких функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть I – одно из следующих множеств: либо это отрезок $[a, b]$, либо одна из полуосей $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$. Предположим, что функция u принимает значения из этого множества: $u(x) \in I$ для п.в. x из Q . Тогда, как легко видеть, для справедливости теоремы 1 достаточно потребовать, чтобы функция f была непрерывно дифференцируема на I и ее производная была ограничена на этом множестве. Для доказательства этого утверждения достаточно линейно продолжить f на всю ось.

ЛЕММА 1. Для любой функции u из $W_2^1(Q)$ функция $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ принадлежит $W_2^1(Q)$. При этом

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) & \text{для } x : u(x) > 0 \\ 0 & \text{для } x : u(x) \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как

$$\begin{aligned} u^-(x) &= \min\{u(x), 0\} = -[(-u)^+(x)], \\ |u(x)| &= u^+(x) - u^-(x), \\ \max\{u(x), v(x)\} &= (u(x) - v(x))^+ + (v(x) - u(x))^+, \\ \min\{u(x), v(x)\} &= -\max\{-u(x), -v(x)\}, \end{aligned}$$

то из леммы 1 вытекает принадлежность и этих функций пространству $W_2^1(Q)$, если ему принадлежат функции u и v .

Очевидно также, что и функция $u^{(a)} = (u - a)^+$ принадлежит пространству $W_2^1(Q)$ при любом $a \in \mathbb{R}$. При этом

$$\frac{\partial u^{(a)}}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) & \text{при } u(x) > a \\ 0 & \text{при } u(x) \leq a. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\text{mes}\{x \in Q : u(x) = a, |\nabla u(x)| > 0\} = 0$$

при всех a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Возьмем произвольное положительное число ε и пусть

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что функция f_ε непрерывно дифференцируема на всей оси, принимает неотрицательные значения, а ее производная имеет вид

$$f'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{(t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

Отметим, что для всех $t \in \mathbb{R}$ $|f'_\varepsilon(t)| \leq 1$. В силу теоремы 1 при любом $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon(u(x)) \in W_2^1(Q)$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon(u(x)) = f'_\varepsilon(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Семейство функций $f_\varepsilon(u(x))$ стремится к функции $u^+(x)$ в $L_2(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, поскольку $f_\varepsilon(u(x)) \rightarrow u^+(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ п.в. и $|f_\varepsilon(u(x)) - u^+(x)| \leq |u(x)|$. Также в силу теоремы Лебега производная $f_\varepsilon(u(x))$ по x_i сходится в $L_2(Q)$ к функции, стоящей в правой части формулы (10), так как

$$f'_\varepsilon(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0$$

в тех точках x , в которых $u(x) > 0$, и

$$f'_\varepsilon(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0$$

в остальных точках, а квадрат разности этих функций оценивается квадратом модуля градиента u . Следовательно, $u^+ \in W_2^1(Q)$, а заданные формулой (10) функции являются ее обобщенными производными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из леммы 1 немедленно следует, что в теореме 1 вместо условия гладкости функции f можно потребовать, чтобы она была кусочно гладкой, т.е. чтобы f была непрерывной, а ее производная существовала и была непрерывной всюду, кроме конечного числа точек, в которых она имеет конечные пределы слева и справа, и была ограниченной.

Докажем это утверждение для случая одной точки излома функции f . Не ограничивая общность, можно считать, что точкой излома является точка $t = 0$ (если $u \in W_2^1(Q)$, то и $u - \text{const} \in W_2^1(Q)$; напомним, область Q ограничена). В этом случае $f(u(x)) = f(u^+(x)) + f(u^-(x)) - f(0)$ и в силу замечания 1 для каждого из слагаемых справедливо утверждение теоремы 1. Ясно, что с помощью того же приема доказывается утверждение и в случае нескольких точек излома.

Задачи к главе 3

Пусть $\mathcal{A}$ – σ -алгебра (σ -кольцо с единицей) подмножеств некоторого множества X , а μ – σ -аддитивная мера (конечная: $\mu(X) < \infty$) на $\mathcal{A}$ (см. [6], [7]). отождествим множества A и B из $\mathcal{A}$, если их симметрическая разность является множеством меры нуль ($\mu(A \triangle B) = 0$), и рассмотрим метрическое пространство $\mathcal{M}$, элементами которого являются множества из $\mathcal{A}$, а расстояние $\rho(A, B) = \mu(A \triangle B)$.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что метрическое пространство $\mathcal{M}$ является полным.

Рассмотрим множество μ -измеримых функций f , для которых функция $|f|^p$ суммируема (μ -интегрируема) по X (см. [6], [7]). отождествим функции, если их значения совпадают μ -п.в. Введем на нем норму

$$\|f\|_{L_p(X;\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Будем обозначать это пространство через $L_p(X; \mu)$.

ЗАДАЧА 2. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ удовлетворяют условиям задачи 1. Докажите, что пространство $L_p(X; \mu)$ банахово.

ЗАДАЧА 3. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ удовлетворяют условиям задачи 1, а $\mathcal{M}$ – метрическое пространство из той же задачи. Докажите, что пространство $L_p(X; \mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно метрическое пространство $\mathcal{M}$ (μ – мера со счетным базисом, см. [6]).

Пространство $L_\infty(X; \mu)$ состоит из μ -измеримых функций f , каждая из которых удовлетворяет условию: существует такая постоянная M , что $\mu\{x \in X : |f(x)| > M\} = 0$; функции считаем равными, если их значения совпадают μ -п.в. Легко видеть, что это условие эквивалентно условию ограниченности множества чисел K , для которых $\mu\{x \in X : |f(x)| > K\} > 0$. Наименьшая из таких постоянных M (равная, очевидно, точной верхней грани чисел K) называется нормой f в $L_\infty(X; \mu)$; будем обозначать ее через $\|f\|_{L_\infty(X;\mu)}$.

ЗАДАЧА 4. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ удовлетворяют условиям задачи 1. Докажите, что функция f принадлежит пространству

$L_\infty(X; \mu)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит всем пространствам $L_p(X; \mu)$, $p \geq 1$, и существует такая постоянная C , что для всех $p \geq 1$ $\|f\|_{L_p(X; \mu)} \leq C$. При этом $\|f\|_{L_p(X; \mu)} \rightarrow \|f\|_{L_\infty(X; \mu)}$ при $p \rightarrow \infty$.

ЗАДАЧА 5. Докажите справедливость следующего утверждения. Пусть $u \in W_{2, \text{loc}}^1(Q)$ и $\text{mes}\{x \in Q : u(x) = a\} > 0$. Тогда $|\nabla u(x)| = 0$ п.в. на $\{x \in Q : u(x) = a\}$.

ЗАДАЧА 6. Докажите справедливость следующего утверждения. Пусть $u \in W_2^1(Q)$, а $v \in \dot{W}_2^1(Q)$. Тогда $uv \in \dot{W}_1^1(Q)$.

ЗАДАЧА 7. Докажите, что утверждение теоремы 1 §3 остается справедливым, если от функции f потребовать непрерывность, выпуклость и ограниченность производной (которая существует всюду, кроме, быть может, счетного множества точек).

ЗАДАЧА 8. Приведите пример функции из $W_2^1(Q)$, значения которой нельзя так изменить на множестве меры нуль, чтобы она стала непрерывной хотя бы в одной точке.

ЗАДАЧА 9. Приведите пример функции из $W_2^1(Q)$, значения которой нельзя так изменить на множестве меры нуль, чтобы она стала ограниченной хотя бы в каком-нибудь шаре $\mathcal{B} \subset \bar{Q}$.

ЗАДАЧА 10. Пусть $f \in W_2^1(Q)$, Γ – гладкая поверхность, $\Gamma \subset \bar{Q}$, а $u_0 = u|_\Gamma$ – след функции u на Γ (см. часть I). Докажите, что $(u_0)^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ является следом функции u^+ на Γ .

Глава 4

Разрешимость задачи Дирихле для общего линейного эллиптического уравнения второго порядка

Хорошо известно (см., например, [9], [10], [11], [12], [13], [3], [4]), что для классических решений однородного эллиптического уравнения (при некоторых условиях на коэффициенты) справедлив принцип максимума: наибольшее и наименьшее значения непрерывного в замыкании ограниченной области решения достигается на границе этой области. Аналогичное утверждение имеет место и в случае обобщенного решения. Так как мы не можем говорить о значениях обобщенного решения в точках, то в формулировке этой теоремы следует вместо наибольшего и наименьших значений говорить о существенных максимуме и минимуме. В частности, из ограниченности следа решения на границе следует ограниченность решения в области; как мы уже отмечали раньше (см. также задачу 9 в конце предыдущей главы), ограниченность не вытекает из принадлежности пространству $W_2^1(Q)$. В §2 изучаются пространства $W_2^{-1}(Q)$ и $\dot{W}_2^{-1}(Q)$. Там же доказана теорема об изоморфизме. В §3 будут установлены условия однозначной разрешимости задачи Дирихле.

§ 1. Принцип максимума

Рассмотрим общее линейное однородное уравнение второго порядка. Главную часть будем записывать в самосопряженной форме, что позволяет налагать менее жесткие ограничения на гладкость коэффициентов.

$$-(\nabla, A(x)\nabla u) - (\nabla, B(x)u) + (C(x), \nabla u) + c(x)u = 0, \quad x \in Q, \quad (1_0)$$

где $A(x) = (a_{i,j}(x))$ – симметрическая, равномерно (по $x \in Q$) положительно определенная $n \times n$ -матрица с измеримыми и ограниченными коэффициентами, т.е. $a_{i,j} = a_{j,i} \in L_\infty(Q)$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что для почти всех $x \in Q$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$\gamma|\xi|^2 \leq (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2, \quad (2)$$

здесь и всюду далее под $(\cdot, \cdot)$ понимаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; $(\nabla, B) = \operatorname{div} B$. Будем считать, что векторные поля B , C и скалярное поле c измеримы и ограничены в Q :

$$B(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)), \quad C(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x)),$$

где $b_i \in L_\infty(Q)$, $c_i \in L_\infty(Q)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $c \in L_\infty(Q)$.

Условия измеримости и ограниченности коэффициентов уравнения и условие эллиптичности (2) всюду далее будем предполагать, не отмечая это особо, выполненными. Условие ограниченности коэффициентов при младших членах можно ослабить (по этому поводу см. [3]).

Стоящее в левой части уравнения (1₀) выражение будем обозначать через $\mathcal{L}u$. Мы не будем сейчас описывать область определения и область значений оператора $\mathcal{L}$. Отметим только, что он не определен даже на бесконечно дифференцируемых функциях, если его образами считать регулярные (принадлежащие $L_{1,\operatorname{loc}}(Q)$) функции: произведение $a_{i,j}\partial u/\partial x_j$ функции $a_{i,j}$ из $L_\infty(Q)$ на гладкую функцию $\partial u/\partial x_j$ не обязано иметь обобщенную производную. Первое слагаемое в выражении $\mathcal{L}u$ является в общем случае обобщенной функцией. Описанию возникающего здесь класса обобщенных функций посвящен § 2 этой главы; подробнее с теорией обобщенных функций можно ознакомиться, например, в книгах [10], [14], [15].

Под решением уравнения (1₀), как и в первой части, будем понимать функцию u из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, которая удовлетворяет уравнению (1₀) в смысле равенства обобщенных функций, т.е. выполняется интегральное тождество

$$\int_Q \{ (\nabla \eta(x), [A(x)\nabla u(x) + B(x)u(x)]) + \eta(x)[(C(x), \nabla u(x)) + c(x)u(x)] \} dx = 0, \quad (1'_0)$$

для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$; далее такие функции η будем называть пробными функциями. С помощью приближения гладкими функциями легко убедиться, что тождество (1'₀) выполняется для всех финитных функций η из $W_2^1(Q)$. Если же решение u , дополнительно, принадлежит пространству $W_2^1(Q)$, то (1'₀) имеет место для всех $\eta \in \dot{W}_2^1(Q)$.

Напомним, что для измеримой функции g

$$\begin{aligned} \text{vrai sup}_Q g &= \sup \{ K : \text{mes}\{x \in Q : g(x) > K\} > 0 \} \\ &= \min \{ M : \text{mes}\{x \in Q : g(x) > M\} = 0 \}, \\ \text{vrai inf}_Q g &= \inf \{ K : \text{mes}\{x \in Q : g(x) < K\} > 0 \}. \end{aligned}$$

В случае области с гладкой границей ∂Q и $g \in W_2^1(Q)$ аналогично определяется существенные точные верхняя и нижняя грани множества значений функции на ∂Q : вместо функции g нужно взять ее след на ∂Q , а вместо n -мерной меры Лебега следует использовать меру Лебега на этой $(n-1)$ -мерной поверхности. Заметим, что если $m \geq \text{vrai sup}_{\partial Q} g$, то след на ∂Q функции $g^{(m)}$ равен нулю (см. задачу 10, глава 3), т.е. $g^{(m)} \in \dot{W}_2^1(Q)$. Обратное утверждение очевидно. Таким образом, для $\partial Q \in C^1$

$$g(x) \leq m \text{ на } \partial Q \Leftrightarrow g^{(m)} \in \dot{W}_2^1(Q).$$

Это свойство примем за определение в случае негладкой границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $g \in W_2^1(Q)$. Будем говорить, что $g(x) \leq m$ на ∂Q , если $g^{(m)} = (g - m)^+ \in \dot{W}_2^1(Q)$; $\text{vrai sup}_{\partial Q} g = \inf \{ m : g^{(m)} \in \dot{W}_2^1(Q) \}$. Аналогично, $g(x) \geq m$ на ∂Q , если $(g - m)^- \in \dot{W}_2^1(Q)$; $\text{vrai inf}_{\partial Q} g = \sup \{ m : (g - m)^- \in \dot{W}_2^1(Q) \}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно убедиться, что для любой функции $g \in W_2^1(Q)$ справедливы неравенства

$$\text{vrai sup}_{\partial Q} g \leq \text{vrai sup}_Q g \quad \text{и} \quad \text{vrai inf}_{\partial Q} g \geq \text{vrai inf}_Q g.$$

Действительно, для любого числа $M \geq \text{vrai sup}_Q g$ функция $g^{(M)} = (g - M)^+$ равна нулю п.в. (по определению) и, конечно, принадлежит $W_2^1(Q)$. Тем самым, $g(x) \leq M$ на ∂Q . Утверждение о нижних гранях доказывается, как обычно, применением доказанного утверждения о верхних гранях к функции $-g$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Принадлежащая пространству $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ функция v называется *субрешением уравнения (1₀)*, если для всех неотрицательных пробных функций $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется неравенство

$$\int_Q [(\nabla \eta(x), A(x) \nabla v(x) + B(x)v(x)) + \eta(x)((C(x), \nabla v(x)) + c(x)v(x))] dx \leq 0. \quad (3)$$

Для краткости будем записывать (3) также в виде: $\mathcal{L}v \leq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приближая пробные функции гладкими, легко убедиться, что неравенство (3) выполняется для всех неотрицательных финитных функций η из $W_2^1(Q)$. Если же субрешение v , дополнительно, принадлежит пространству $W_2^1(Q)$, то (3) имеет место для всех $\eta \in W_2^1(Q)$, $\eta(x) \geq 0$ (п.в. в Q). Конечно, любое решение является субрешением.

Рассмотрим сначала простейший случай уравнения без младших членов, в котором принцип максимума доказывается совсем просто. Пусть $B(x) = 0$, $C(x) = 0$, $c(x) = 0$ п.в. в Q , т.е. уравнение (1₀) имеет вид

$$\mathcal{L}_0 u = -(\nabla, A(x) \nabla u) = 0, \quad x \in Q. \quad (4_0)$$

ПРИНЦИП МАКСИМУМА. Для любого принадлежащего пространству $W_2^1(Q)$ субрешения v уравнения (4₀) справедливо равенство

$$\text{vrai sup}_{\partial Q} v = \text{vrai sup}_Q v \quad (5)$$

В частности, для любого решения u уравнения (4₀), принадлежащего пространству $W_2^1(Q)$, отсюда следует справедливость равенств

$$\text{vrai sup}_{\partial Q} u = \text{vrai sup}_Q u \quad \text{и} \quad \text{vrai inf}_{\partial Q} u = \text{vrai inf}_Q u, \quad (5')$$

поскольку u и $-u$ являются субрешениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = \text{vrai sup}_{\partial Q} v < +\infty$. Положим $\eta = v^{(m)} = (v - m)^+$. Так как $\eta \in \dot{W}_2^1(Q)$ и $\eta(x) \geq 0$, то функцию η можно подставить в определяющее субрешение неравенство (3) (с $B(x) = 0$, $C(x) = 0$, $c(x) = 0$). А так как в силу леммы 1 § 3 предыдущей главы

$$\nabla \eta(x) = \nabla (v - m)^+(x) = \nabla (v - m)(x) = \nabla v(x)$$

для тех точек x , в которых $v(x) > m$, и $\nabla \eta(x) = 0$ при $v(x) \leq m$, то

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla v(x)) dx \\ &= \int_{\{x: v(x) > m\}} (\nabla v^{(m)}(x), A(x) \nabla v(x)) dx \\ &= \int_Q (\nabla v^{(m)}(x), A(x) \nabla v^{(m)}(x)) dx. \end{aligned}$$

Откуда с помощью (2) и неравенства Стеклова (напомним, что $v^{(m)} \in \dot{W}_2^1(Q)$):

$$\int_Q [v^{(m)}(x)]^2 dx \leq \text{const} \int_Q |\nabla v^{(m)}(x)|^2 dx$$

получаем, что $v^{(m)}(x) = 0$ (п.в.), т.е. $\text{vrai sup}_Q v \leq m$. Вместе с замечанием 1 это дает доказываемое равенство (5).

Рассмотрим теперь случай общего уравнения (1₀). Пусть сначала коэффициенты являются гладкими функциями. Тогда уравнение (1₀) можно переписать в виде

$$-(\nabla, A(x) \nabla u) + (C(x) - B(x), \nabla u) + [c(x) - (\nabla, B(x))]u = 0$$

и для справедливости принципа максимума следует потребовать неотрицательность коэффициента при u :

$$c(x) - (\nabla, B(x)) \geq 0 \quad \text{для } x \in Q. \quad (6')$$

Ясно, что в общем случае условие должно быть таким, чтобы оно переходило в (6'), если коэффициенты гладкие. Т.е. нужно записать (6') в виде, не использующем производные B . Для этого

заметим, что (6') эквивалентно (для $B \in C^1(\overline{Q})$) выполнению неравенства

$$\int_Q [c(x)\eta(x) + (B(x), \nabla\eta(x))] dx \geq 0 \quad (6)$$

для всех неотрицательных $\eta \in C_0^\infty(Q)$.

В таком виде это условие обеспечивает справедливость принципа максимума и в случае измеримых и ограниченных коэффициентов уравнения.

Пусть теперь коэффициенты уравнения (1₀) измеримы и ограничены, B и c удовлетворяют условию (6). Отметим, что в силу плотности $C_0^\infty(Q)$ в $\dot{W}_1^1(Q)$ это неравенство справедливо для всех неотрицательных $\eta \in \dot{W}_1^1(Q)$.

ТЕОРЕМА 1 (ПРИНЦИП МАКСИМУМА). *Пусть выполнено условие (6). Тогда для любого субрешения v уравнения (1₀), принадлежащего пространству $W_2^1(Q)$, справедливо равенство (5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что доказываемое утверждение неверно, т.е. $m = \text{vrai sup}_{\partial Q} v < \text{vrai sup}_Q v = M$ ($m < +\infty$, $M \leq +\infty$). Возьмем произвольное число $l \in [m, M)$ и положим $\eta = v^{(l)}$. Подставляя такую пробную функцию в (3), получаем

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_Q [(\nabla v^{(l)}(x), A(x)\nabla v(x) + B(x)v(x)) \\ &\quad + v^{(l)}(x)((C(x), \nabla v(x)) + c(x)v(x))] dx \\ &= \int_Q [(\nabla v^{(l)}(x), A(x)\nabla v^{(l)}(x)) + (B(x), \nabla[v(x)v^{(l)}(x)]) \\ &\quad + c(x)v(x)v^{(l)}(x) + v^{(l)}(x)(C(x) - B(x), \nabla v(x))] dx \end{aligned}$$

Откуда, в силу (2) и (6) (неотрицательная функция $v(x)v^{(l)}(x)$ принадлежит $\dot{W}_1^1(Q)$, задача 6, глава 3),

$$\begin{aligned} \gamma \int_Q |\nabla v^{(l)}(x)|^2 dx &\leq \int_Q (\nabla v^{(l)}(x), A(x)\nabla v^{(l)}(x)) dx \\ &\leq \left| \int_Q (C(x) - B(x), \nabla v(x))v^{(l)}(x) dx \right|. \quad (7) \end{aligned}$$

Отметим, что если бы мы рассматривали случай уравнения с самосопряженным оператором ($B = C$), то из последних неравенств следовало бы, что $v^{(l)} = 0$ и утверждение было бы доказано. Продолжим доказательство в общем случае.

Пусть $\mathcal{E}_l = \{x \in Q : v(x) > l \text{ и } |\nabla v(x)| > 0\}$. Возьмем некоторое $p \in (2, \frac{2n}{n-2})$ и оценим правую часть (7) с помощью неравенства Гёльдера и теоремы вложения $\dot{W}_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$ (см. замечание 1 § 2 главы 3)

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q (C(x) - B(x), \nabla v(x)) v^{(l)}(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathcal{E}_l} v^{(l)}(x) (C(x) - B(x), \nabla v^{(l)}(x)) dx \right| \\ &\leq \|B - C\|_{L_\infty(Q)} \|v^{(l)}\|_{L_2(\mathcal{E}_l)} \|\nabla v^{(l)}\|_{L_2(Q)} \\ &\leq \|B - C\|_{L_\infty(Q)} [\text{mes } \mathcal{E}_l]^{1-\frac{1}{p}} \|v^{(l)}\|_{L_p(Q)} \|\nabla v^{(l)}\|_{L_2(Q)} \\ &\leq \text{const} [\text{mes } \mathcal{E}_l]^{1-\frac{1}{p}} \|\nabla v^{(l)}\|_{L_2(Q)}^2, \end{aligned}$$

где положительная постоянная (const) зависит только от n , p , $\|B - C\|_{L_\infty(Q)}$ и меры области Q (не зависит от l). Подставляя полученную оценку в (7), имеем

$$\text{mes } \mathcal{E}_l \geq \text{const} > 0 \quad \text{для всех } l \in [m, M].$$

А так как оценивающая снизу меру множества $\mathcal{E}_l$ постоянная не зависит от l , то, устремляя l к $M = \text{vraisup}_Q v$, получаем, что $M < +\infty$ и $\text{mes}\{x \in Q : v(x) = M, |\nabla v(x)| > 0\} > 0$. Но это невозможно (см. замечание 2 § 3 главы 3). Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теоремы 1 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого принадлежащего пространству $W_2^1(Q)$ решения уравнения (1₀) справедливы равенства (5').

§ 2. Пространства $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ и $W_2^{-1}(Q)$

В первой части была установлена (см. § 2 главы 2) однозначная разрешимость задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}u = g$ в случае $B = C = 0$. При этом отмечалось, что на правую часть уравнения g можно налагать более слабые условия, чем ее принадлежность пространству $L_2(Q)$. На этом вопросе мы остановимся подробнее в этом параграфе. Будет получено описание множества всех правых частей g , для которых существует решение задачи Дирихле с однородным граничным условием в случае простейшего уравнения $\mathcal{L}_0 u = g$. Тем самым будет дано описание области значений оператора $\mathcal{L}_0$ с областью определения $\mathring{W}_2^1(Q)$.

Рассмотрим задачу Дирихле с однородным граничным условием

$$u|_{\partial Q} = 0 \quad (8_0)$$

для простейшего эллиптического уравнения второго порядка

$$\mathcal{L}_0 u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = g(x), \quad x \in Q. \quad (4)$$

Напомним, что мы считаем коэффициенты $a_{i,j} = a_{j,i}$ уравнения измеримыми ограниченными функциями. Уравнение (4) равномерно эллиплично в Q , т.е. выполнено условие (2).

Напомним также, что для $g \in L_2(Q)$ обобщенным решением рассматриваемой задачи Дирихле (задачи (4), (8₀)) называется функция $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla u(x)) dx = \int_Q \eta(x) g(x) dx$$

для всех $\eta \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Так как левая часть этого равенства задает эквивалентное скалярное произведение

$$(\eta, u)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla u(x)) dx \quad (9)$$

в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ (см. теорему 2 § 9 главы 1), то интегральное тождество можно переписать в виде

$$(\eta, u)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \int_Q \eta(x) g(x) dx. \quad (10)$$

Однозначная разрешимость (существование и единственность решения) задачи Дирихле (4), (8₀) немедленно вытекает из теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала скалярным произведением, поскольку правая часть (10) является линейным непрерывным функционалом (η – его аргумент) на пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$.

Ясно, что множество правых частей g уравнения (4), для которых существует решение рассматриваемой задачи, является множеством всех линейных непрерывных функционалов на $\dot{W}_2^1(Q)$; причем действие функционалов следует реализовывать, как это принято в теории обобщенных функций, исходя из скалярного произведения в $L_2(Q)$.

Легко видеть, что условие принадлежности правой части g пространству $L_2(Q)$, достаточное для ограниченности задаваемого ей функционала l_g ,

$$\langle l_g, \eta \rangle = \int_Q g(x) \eta(x) dx, \quad (11)$$

не является необходимым; $\langle l_g, \eta \rangle$ – значение функционала l_g на элементе η пространства $\dot{W}_2^1(Q)$. Например, его можно ослабить, потребовав принадлежность g пространству $L_{\frac{2n}{n+2}}(Q)$ при $n \geq 3$ и пространству $L_p(Q)$ с каким-нибудь $p > 1$ при $n = 2$, задачи 1 и 2 этой главы. Кроме того, линейный непрерывный функционал на $\dot{W}_2^1(Q)$ может задаваться и нерегулярной обобщенной функцией: определенный равенством

$$\langle l_F, \eta \rangle = - \int_Q (\nabla \eta(x), F(x)) dx, \quad (12)$$

где $F = (f_1, \dots, f_n) \in [L_2(Q)]^n$, линейный функционал l_F также является ограниченным функционалом на $\dot{W}_2^1(Q)$, а его норма не превосходит нормы $|F|$ в $L_2(Q)$. Действительно, для всех $\eta \in \dot{W}_2^1(Q)$

$$\begin{aligned} |\langle l_F, \eta \rangle| &\leq \|\nabla \eta\|_{L_2(Q)} \|F\|_{L_2(Q)} = \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \|F\|_{L_2(Q)}; \\ (\eta, u)_{\dot{W}_2^1(Q)} &= \int_Q (\nabla \eta(x), \nabla u(x)) dx, \quad \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}^2 = (\eta, \eta)_{\dot{W}_2^1(Q)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Функционал l_F с $f_i = f \in L_2(Q)$ и $f_j = 0$ при $j \neq i$, будем называть *производной функции f по переменной x_i* и обозначать $\partial f / \partial x_i$; отметим, что так определенная производная не является обобщенной производной, мы не требуем ее регулярность (принадлежность $L_{1,\text{loc}}(Q)$). В общем случае задаваемый формулой (11) функционал l_F будем называть *дивергенцией векторного поля F* и обозначать $(\nabla, F) = \text{div } F$.

Из ограниченности функционала $l_F = \text{div } F$, $F \in [L_2(Q)]^n$ немедленно следует однозначная разрешимость задачи (4), (8₀) и в случае $g = \text{div } F$; под решением такой задачи естественно понимать функцию u из $\dot{W}_2^1(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla u(x)) \, dx = \int_Q (\nabla \eta(x), F(x)) \, dx \quad (14)$$

для всех $\eta \in \dot{W}_2^1(Q)$.

Множество всех обобщенных функций g из $\mathcal{D}'(Q)$ (g – линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{D}(Q)$), для которых справедлива оценка

$$|\langle g, \eta \rangle| \leq C \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \quad \text{для всех } \eta \in C_0^\infty(Q) \quad (15)$$

с некоторой постоянной $C = C(g)$, будем называть *пространством $\dot{W}_2^{-1}(Q)$* ; $\langle g, \eta \rangle$ – значение обобщенной функции g на основной функции η . Очевидно, что каждая такая обобщенная функция продолжается по непрерывности (напомним, что по определению $C_0^\infty(Q)$ всюду плотно в $\dot{W}_2^1(Q)$) до ограниченного функционала на $\dot{W}_2^1(Q)$. Наименьшая из постоянных C , с которыми справедливо (15), является нормой этого функционала; будем называть ее нормой g в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ и обозначать $\|g\|_{\dot{W}_2^{-1}(Q)}$,

$$\|g\|_{\dot{W}_2^{-1}(Q)} = \sup_{\eta \in \dot{W}_2^1(Q), \eta \neq 0} \frac{|\langle g, \eta \rangle|}{\|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}}. \quad (16)$$

А так как на $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ любой линейный ограниченный функционал можно рассматривать, как удовлетворяющую условию (15) обобщенную функцию (сужение этого функционала на $C_0^\infty(Q)$; из (15), очевидно, следует непрерывность этого сужения в топологии $\mathcal{D}(Q)$), то введенное пространство $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ является сопряженным к пространству $\dot{W}_2^1(Q)$, а следовательно, гильбертовым пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенным решением задачи (4), (8₀) с $g \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$ будем называть функцию из $\dot{W}_2^1(Q)$, которая удовлетворяет тождеству*

$$\int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla u(x)) dx = \langle \eta, g \rangle \quad \text{для всех } \eta \in \dot{W}_2^1(Q). \quad (14')$$

Тождество (14') – это реализация функционала η в гильбертовом пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$ в виде скалярного произведения (9). Поэтому и в этом случае обобщенное решение существует для любой $g \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$ и единственно.

Следующая теорема дает общий вид линейного ограниченного функционала на $\dot{W}_2^1(Q)$.

ТЕОРЕМА 1.

$$g \in \dot{W}_2^{-1}(Q) \quad \Leftrightarrow \quad g = -\operatorname{div} F,$$

где $F \in [L_2(Q)]^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что заданный формулой (12) с $F \in [L_2(Q)]^n$ линейный функционал l_F является ограниченным, т.е. является элементом $\dot{W}_2^{-1}(Q)$, доказано выше. Докажем обратное утверждение. Пусть g – произвольный линейный ограниченный функционал на $\dot{W}_2^1(Q)$. Обозначим через w такой элемент пространства $\dot{W}_2^1(Q)$, который реализует функционал g в скалярном произведении (13), т.е.

$$\langle g, \eta \rangle = \int_Q (\nabla w(x), \nabla \eta(x)) dx, \quad \text{для всех } \eta \in \dot{W}_2^1(Q)$$

(w – решение задачи Дирихле с однородным граничным условием для уравнения Пуассона $-\Delta w = g$). А последнее тождество и означает, что $g = -\operatorname{div} F$ с $F = \nabla w \in [L_2(Q)]^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле доказано более сильное утверждение: для любого $g \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$ существует и единственно такое потенциальное векторное поле $F_g = \nabla w_g$ с принадлежащим пространству $\dot{W}_2^1(Q)$ потенциалом w_g , что $g = -\operatorname{div} F_g$; при этом

$$(g, h)_{\dot{W}_2^{-1}(Q)} = (F_g, F_h)_{[L_2(Q)]^n}.$$

Определим теперь оператор $\mathcal{L}_0: \dot{W}_2^1(Q) \rightarrow \dot{W}_2^{-1}(Q)$ следующим правилом: для каждой функции u из $\dot{W}_2^1(Q)$ $\mathcal{L}_0 u = -\operatorname{div} F$, где $F = A \nabla u \in [L_2(Q)]^n$. Оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_0 u\|_{\dot{W}_2^{-1}(Q)} &= \|\operatorname{div} F\|_{\dot{W}_2^{-1}(Q)} = \sup_{\eta \in \dot{W}_2^1(Q), \eta \neq 0} \frac{|\langle \operatorname{div} F, \eta \rangle|}{\|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}} \\ &\leq \|F\|_{L_2(Q)} = \|A \nabla u\|_{L_2(Q)} \leq C(\|a_{i,j}\|_{L_\infty(Q)}) \|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \end{aligned}$$

доказывает ограниченность этого оператора. Область значений оператора $\mathcal{L}_0$ совпадает со всем пространством $\dot{W}_2^{-1}(Q)$, поскольку решение задачи (4), (8₀) существует для всех $g \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$. А так как решение этой задачи единственно, то оператор $\mathcal{L}_0$ обратим. Обратный оператор (он ставит в соответствие каждому элементу g из $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ решение $u = \mathcal{L}_0^{-1} g$ задачи Дирихле (4), (8₀) с правой частью g) будем обозначать символом $\mathcal{L}_0^{-1}$. Более того, из (14') следует также равенство

$$\|u\|'_{\dot{W}_2^1(Q)} = \|\mathcal{L}_0 u\|_{\dot{W}_2^{-1}(Q)} \quad \text{для любого } u \in \dot{W}_2^1(Q), \quad (17)$$

где $\|\cdot\|'_{\dot{W}_2^1(Q)}$ – норма в $\dot{W}_2^1(Q)$, порожденная скалярным произведением (9). Таким образом, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение $\mathcal{L}_0: \dot{W}_2^1(Q) \mapsto \dot{W}_2^{-1}(Q)$ является изоморфизмом гильбертовых пространств $\dot{W}_2^1(Q)$ и $\dot{W}_2^{-1}(Q)$.*

Напомним, что каждая функция g из $L_2(Q)$ задает функционал $l_g \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$ равенством (11); при этом $\|l_g\|_{\dot{W}_2^{-1}(Q)} \leq \|g\|_{L_2(Q)}$. В силу плотности множества функций из $\dot{W}_2^1(Q)$ в пространстве $L_2(Q)$ каждый такой функционал задается единственной функцией. Отождествляя такие функционалы l_g с задающими их функциями g , получаем вложение $L_2(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$.

Итак, мы имеем вложения

$$\dot{W}_2^1(Q) \subset L_2(Q) \subset \dot{W}_2^{-1}(Q) = \mathcal{L}_0 \dot{W}_2^1(Q).$$

Причем первое из них ($\dot{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$) вполне непрерывно (теорема 1 §6 главы 1). Докажем, что и второе вложение вполне непрерывно.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор вложения $L_2(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ вполне непрерывен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что единичный шар в $L_2(Q)$ является компактным множеством в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ (тогда, очевидно, и любое ограниченное в $L_2(Q)$ множество будет компактным в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$).

Возьмем произвольную последовательность $\{f_k\}$ элементов единичного шара в $L_2(Q)$: $\|f_k\|_{L_2(Q)} \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$. В силу слабой компактности ограниченного множества в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не загромождать формулы индексами, обозначим эту подпоследовательность снова через $\{f_k\}$. Ее слабый предел обозначим через $f \in L_2(Q)$:

$$(f_k - f, \eta)_{L_2(Q)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad \text{для всех } \eta \in L_2(Q). \quad (18)$$

Докажем, что

$$\|f - f_k\|_{\dot{W}_2^{-1}(Q)} = \sup_{\|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}=1} |(f - f_k, \eta)_{L_2(Q)}| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (19)$$

(сходимость равномерна по единичной сфере в $\dot{W}_2^1(Q)$).

Предположим, что (19) не верно, т.е. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists k > N$ и $\exists \eta_k \in \dot{W}_2^1(Q)$, $\|\eta_k\|_{\dot{W}_2^1(Q)} = 1$, для которых $|(f - f_k, \eta_k)_{L_2(Q)}| \geq \varepsilon$. Т.е. найдется подпоследовательность, снова обозначим ее $\{f_k\}$, и лежащая на единичной сфере в $\dot{W}_2^1(Q)$, а следовательно, ограниченная в $\dot{W}_2^1(Q)$ последовательность $\{\eta_k\}$, для которых

$$|(f - f_k, \eta_k)_{L_2(Q)}| \geq \varepsilon. \quad (20)$$

В силу компактности вложения $\dot{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$ из последовательности $\{\eta_k\}$ можно выделить сходящуюся (сильно) в $L_2(Q)$ подпоследовательность $\{\eta_{k_m}\}$:

$$\eta_{k_m} \rightarrow \eta \quad \text{в } L_2(Q) \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Возьмем соответствующую ей подпоследовательность $\{f_{k_m}\}$. Для них в силу (20), (18) и (21) имеем

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon &\leq |(f - f_{k_m}, \eta_{k_m})_{L_2(Q)}| \\ &\leq |(f_{k_m}, \eta - \eta_{k_m})_{L_2(Q)}| + |(f - f_{k_m}, \eta)_{L_2(Q)}| + |(f, \eta_{k_m} - \eta)_{L_2(Q)}| \\ &\leq 2\|\eta - \eta_{k_m}\|_{L_2(Q)} + |(f - f_{k_m}, \eta)_{L_2(Q)}| \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает (19), а следовательно, и теорему 3.

Кратко остановимся на сопряженном к $W_2^1(Q)$ пространстве $W_2^{-1}(Q)$. Так как $\dot{W}_2^1(Q)$ является подпространством пространства $W_2^1(Q)$, то согласно теореме Хана–Банаха каждый линейный непрерывный функционал на $\dot{W}_2^1(Q)$ может быть продолжен на $W_2^1(Q)$ с сохранением нормы. Например, можно доопределить этот функционал нулем на ортогональном дополнении к $\dot{W}_2^1(Q)$. Продолжение функционала, конечно, не единственно; произвол в выборе продолжения определяется пространством линейных ограниченных функционалов на ортогональном дополнении к $\dot{W}_2^1(Q)$ в $W_2^1(Q)$.

Пространство $W_2^{-1}(Q)$ естественно рассматривать как множество всех обобщенных функций g из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ с носителями в $\bar{Q}$, для которых справедлива оценка

$$|\langle g, \eta \rangle| \leq C \|\eta\|_{W_2^1(Q)} \quad \text{для всех } \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (15')$$

с некоторой постоянной $C = C(g)$. Действительно, если g – линейный непрерывный функционал на $W_2^1(Q)$, то он, конечно, определен и на всех $\eta \in C^\infty(\bar{Q}) \subset W_2^1(Q)$. Следовательно, его можно отождествить с обобщенной функцией из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ с носителем в $\bar{Q}$, для которой справедлива оценка (15'): каждой функции $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ставится в соответствие значение функционала g на сужении этой функции на $\bar{Q}$. Если же g – удовлетворяющая (15') обобщенная функция, то этот функционал распространяется по непрерывности на все пространство $W_2^1(Q)$; напомним, что множество $C^\infty(\bar{Q})$ (множество сужений на $\bar{Q}$ функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) всюду плотно в $W_2^1(Q)$.

Наименьшую из постоянных C , с которыми справедливо (15') будем называть нормой g в $W_2^{-1}(Q)$ и обозначать $\|g\|_{W_2^{-1}(Q)}$:

$$\|g\|_{W_2^{-1}(Q)} = \sup_{\eta \in W_2^1(Q), \eta \neq 0} \frac{|\langle g, \eta \rangle|}{\|\eta\|_{W_2^1(Q)}}. \quad (16')$$

Легко видеть, что формулы (11) с $g \in L_2(Q)$ и (12) с $F \in [L_2(Q)]^n$ определяют ограниченные функционалы и на $W_2^1(Q)$. Однако, в отличие от пространства $\dot{W}_2^1(Q)$ не все элементы $W_2^{-1}(Q)$ задаются формулой (12). Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что все заданные формулой (12) функционалы имеют равное нулю значение на функции $\eta = \text{const} \in W_2^1(Q)$ (область Q мы считаем ограниченной). Общий вид линейного непрерывного функционала на $W_2^1(Q)$ дает следующая

ТЕОРЕМА 2'.

$$g \in W_2^{-1}(Q) \Leftrightarrow g = -\operatorname{div} F + f,$$

где $F \in [L_2(Q)]^n$, а $f \in L_2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что заданные формулами (12) с $F \in [L_2(Q)]^n$ и (11) с $f \in L_2(Q)$ линейные функционалы l_F и l_f являются ограниченными, т.е. являются элементами $W_2^{-1}(Q)$, доказано выше. Докажем обратное утверждение. Пусть g — произвольный линейный ограниченный функционал на $W_2^1(Q)$. Обозначим через w такой элемент пространства $W_2^1(Q)$, который реализует функционал g в скалярном произведении

$$(\eta, w)_{W_2^1(Q)} = \int_Q [(\nabla \eta(x), \nabla w(x)) + \eta w] dx, \quad (13')$$

т.е.

$$\langle g, \eta \rangle = \int_Q [(\nabla w(x), \nabla \eta(x)) + \eta w] dx, \quad \text{для всех } \eta \in W_2^1(Q)$$

(w — решение задачи Неймана с однородным граничным условием для уравнения $-\Delta w + w = g$). Последнее тождество означает, что функционал $g = -\operatorname{div} F + l_f$ с $F = \nabla w \in [L_2(Q)]^n$ и $f = w \in L_2(Q)$.

§ 3. Теоремы об однозначной разрешимости задачи Дирихле

В этом параграфе мы докажем две теоремы об однозначной разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в произвольной ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$. При этом правую часть уравнения будем брать из пространства $\dot{W}_2^{-1}(Q)$. В силу теоремы 1 § 2 этой главы ее можно записать в виде $-\operatorname{div} F$ с $F \in [L_2(Q)]^n$.

Рассмотрим задачу Дирихле для общего линейного уравнения второго порядка

$$-(\nabla, A(x)\nabla u) - (\nabla, B(x)u) + (C(x), \nabla u) + c(x)u = -\operatorname{div} F(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q} = \varphi. \quad (8)$$

Здесь, как и выше, $A(x) = (a_{i,j}(x))$ – симметрическая, равномерно (по $x \in Q$) положительно определенная $n \times n$ -матрица с измеримыми и ограниченными коэффициентами, векторные поля B , C и скалярное поле c измеримы и ограничены в Q . Граничную функцию φ будем считать определенной в области Q и принадлежащей пространству $W_2^1(Q)$. Под решением рассматриваемой задачи (1), (8) будем понимать функцию u из $W_2^1(Q)$, которая удовлетворяет уравнению (1) в смысле равенства обобщенных функций, т.е.

$$\begin{aligned} & \int_Q \{ (\nabla \eta(x), [A(x)\nabla u(x) + B(x)u(x)]) \\ & + \eta(x) [(C(x), \nabla u(x)) + c(x)u(x)] \} dx = \int_Q (\nabla \eta(x), F(x)) dx \end{aligned} \quad (1')$$

для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$, и удовлетворяет граничному условию (8) в следующем смысле:

$$u - \varphi \in \dot{W}_2^1(Q). \quad (8')$$

В случае области с гладкой границей условие (8') эквивалентно условию (8), понимаемому в обычном смысле: следы на ∂Q функций u и φ совпадают. Отметим также, что интегральное тождество (1') выполняется для всех η из $\dot{W}_2^1(Q)$.

Как и в § 2 главы 2 первой части курса сведем задачу к случаю однородных краевых условий: функция $v = u - \varphi$ принадлежит пространству $\dot{W}_2^1(Q)$ и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & -(\nabla, A(x)\nabla v) - (\nabla, B(x)v) \\ & + (C(x), \nabla v) + c(x)v = g(x) - \operatorname{div} G(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (22)$$

в котором

$$\begin{aligned} g &= (C(x), \nabla \varphi) + c(x)\varphi \in L_2(Q), \\ G &= F(x) + A(x)\nabla \varphi + B(x)\varphi \in [L_2(Q)]^n. \end{aligned}$$

Отметим очевидные оценки

$$\|g\|_{L_2(Q)} \leq \operatorname{const} \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}, \quad (23)$$

$$\|G\|_{[L_2(Q)]^n} \leq \operatorname{const} [\|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}], \quad (24)$$

в которых постоянные зависят только от норм в $L_\infty(Q)$ коэффициентов уравнения.

Перепишем изучаемую задачу в виде $\mathcal{L}v = g - \operatorname{div} G$, где оператор $\mathcal{L}$, действующий из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$, определен равенством

$$\mathcal{L}w = -\operatorname{div}[A(x)\nabla w + B(x)w] + (C(x), \nabla w) + c(x)w \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$$

для всех $w \in \dot{W}_2^1(Q)$, а $g - \operatorname{div} G \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$. Так как осуществляемое оператором $\mathcal{L}_0^{-1}$ отображение пространства $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ на $\dot{W}_2^1(Q)$ является изоморфизмом, то задача (22), (8) эквивалентна следующему уравнению в пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$

$$v + \mathcal{B}_1 v + \mathcal{B}_2 v + \mathcal{B}_3 v = h, \quad (25)$$

в котором операторы $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_3$ (действующие в $\dot{W}_2^1(Q)$) определены равенствами

$$\mathcal{B}_1 w = -\mathcal{L}_0^{-1} \operatorname{div}(Bw), \quad (26_1)$$

$$\mathcal{B}_2 w = \mathcal{L}_0^{-1}(C, \nabla w), \quad (26_2)$$

$$\mathcal{B}_3 w = \mathcal{L}_0^{-1}(cw), \quad (26_3)$$

а $h = \mathcal{L}_0^{-1}(g - \operatorname{div} G)$. В силу (17), (23) и (24) имеем оценку

$$\|h\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \operatorname{const} [\|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}] \quad (27)$$

для всех $F \in [L_2(Q)]^n$ и всех $\varphi \in W_2^1(Q)$, в которой постоянная зависит только от постоянной эллиптичности γ и норм коэффициентов в $L_\infty(Q)$.

ЛЕММА. *Операторы $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_3$ вполне непрерывны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 § 6 главы 1 (теорема о компактности вложения $\dot{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$) любое ограниченное множество в $\dot{W}_2^1(Q)$ компактно в $L_2(Q)$. Оператор умножения на функцию $B \in L_\infty(Q)$, очевидно, ограничен в $L_2(Q)$, оператор div , как доказано в § 2, ограничен из $L_2(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$, а оператор $\mathcal{L}^{-1}$ является ограниченным оператором из $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$ (теорема 2 § 2 этой главы). Поэтому оператор $\mathcal{B}_1$ переводит ограниченные множества в компактные.

Столь же просто доказывается полная непрерывность оператора $\mathcal{B}_2$. Оператор $w \mapsto (C, \nabla w)$ ограничен из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$. А так как вложение $L_2(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ вполне непрерывно (теорема 3 § 2), то этот оператор переводит каждое ограниченное множество пространства $\dot{W}_2^1(Q)$ в компактное множество в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$. Полная непрерывность $\mathcal{B}_2$ теперь немедленно следует из ограниченности оператора $\mathcal{L}^{-1}$ из $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$. Утверждение о полной непрерывности оператора $\mathcal{B}_3$ очевидно.

Итак, мы свели (как и в первой части) задачу Дирихле к операторному уравнению (25) с вполне непрерывным оператором $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3$ в пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$. В силу теорем Фредгольма для разрешимости такого уравнения необходима и достаточна ортогональность правой части h уравнения (25) подпространству решений сопряженной однородной задачи. В частности, если решение (25) единственно (тогда однородная сопряженная задача имеет только тривиальное решение), то оно существует для всех $h \in \dot{W}_2^1(Q)$. При этом для всех $h \in \dot{W}_2^1(Q)$ справедлива оценка

$$\|v\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \operatorname{const} \|h\|_{\dot{W}_2^1(Q)}$$

с зависящей только от коэффициентов уравнения постоянной. Из нее и (27) следует оценка

$$\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \operatorname{const} [\|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}] \quad (28)$$

для всех $F \in [L_2(Q)]^n$ и $\varphi \in W_2^1(Q)$.

Таким образом, если доказать единственность решения задачи (1), (8), то получим ее разрешимость для всех $F \in [L_2(Q)]^n$, $\varphi \in W_2^1(Q)$, а также справедливость оценки (28). Единственность решения немедленно вытекает из принципа максимума (теорема 1 § 1 главы 4, см. следствие 1 из этой теоремы). Тем самым мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию

$$\int_Q [c(x)\eta(x) + (B(x), \nabla\eta(x))] dx \geq 0$$

для всех неотрицательных функций η из $C_0^\infty(Q)$. Тогда для любых $F \in [L_2(Q)]^n$ и $\varphi \in W_2^1(Q)$ существует решение задачи (1), (8). Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} [\|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}]$$

с независимой от F и φ постоянной.

Другое достаточное условие однозначной разрешимости дает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию

$$\int_Q \left[c(x)\eta(x) + \frac{1}{2}(B(x) + C(x), \nabla\eta(x)) \right] dx \geq 0 \quad (29)$$

для всех неотрицательных функций η из $C_0^\infty(Q)$. Тогда для любых $F \in [L_2(Q)]^n$ и $\varphi \in W_2^1(Q)$ существует решение задачи (1), (8). Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} [\|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}]$$

с независимой от F и φ постоянной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что неравенство (29) справедливо для всех $\eta \in \dot{W}_1^1(Q)$. Для доказательства этого факта достаточно приблизить произвольную функцию η , принадлежащую $\dot{W}_1^1(Q)$, функциями из $C_0^\infty(Q)$; напомним, что по принятому в этой части определению множество бесконечно дифференцируемых и финитных в Q функций всюду плотно во всех соболевских пространствах.

Пусть u – решение однородной задачи (1_0) , (8_0) , т.е. $u \in \dot{W}_2^1(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству $(1'_0)$ для всех пробных функций η из $\dot{W}_2^1(Q)$. Подставляя в это тождество $\eta = u$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q \{ (\nabla u(x), [A(x)\nabla u(x) + B(x)u(x)]) \\ &\quad + u(x)[(C(x), \nabla u(x)) + c(x)u(x)] \} dx \\ &= \int_Q (\nabla u(x), A(x)\nabla u(x)) dx \\ &\quad + \int_Q \left[\frac{1}{2}(B(x) + C(x), \nabla u^2(x)) + c(x)u^2(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Так как согласно условию (29) (с $\eta = u^2 \in \dot{W}_1^1(Q)$) второе слагаемое в правой части последнего равенства неотрицательно, то

$$\int_Q (\nabla u(x), A(x)\nabla u(x)) dx \leq 0.$$

Откуда в силу (2) $u = 0$, что и доказывает единственность решения.

Задачи к главе 4

ЗАДАЧА 1. Пусть Q – область $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, а $g \in L_{\frac{2n}{n+2}}(Q)$. Докажите, что определенный формулой

$$\langle l_g, \eta \rangle = \int_Q \eta(x)g(x) dx$$

функционал l_g является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$.

ЗАДАЧА 2. Пусть $g \in L_{\frac{2n}{n+2}}(Q)$, а Q – ограниченная область $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, с гладкой границей. Докажите, что определенный формулой

$$\langle l_g, \eta \rangle = \int_Q \eta(x)g(x) dx$$

функционал l_g является линейным непрерывным функционалом на пространстве $W_2^1(Q)$.

ЗАДАЧА 3. Пусть Q – ограниченная область $\mathbb{R}^2$, а $g \in L_p(Q)$ с некоторым $p > 1$. Докажите, что определенный формулой

$$\langle l_g, \eta \rangle = \int_Q \eta(x)g(x) dx$$

функционал l_g является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$.

ЗАДАЧА 4. Пусть Q – ограниченная область $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, а $g \in L_p(Q)$ с некоторым $p > 1$. Докажите, что определенный формулой

$$\langle l_g, \eta \rangle = \int_Q \eta(x)g(x) dx$$

функционал l_g является линейным непрерывным функционалом на пространстве $W_2^1(Q)$.

ЗАДАЧА 5. Докажите, что множество заданных равенством (11) функционалов l_g , $g \in L_2(Q)$, всюду плотно в сопряженном к $\dot{W}_2^1(Q)$ пространстве.

ЗАДАЧА 6. Докажите, что пространство векторных полей $[L_2(Q)]^n$ разлагается в прямую сумму двух ортогональных подпространств $\dot{J}(Q)$ и $G(Q)$, где $\dot{J}(Q)$ – подпространство потенциальных векторных полей с принадлежащим $\dot{W}_2^1(Q)$ потенциалом

$$\dot{J}(Q) = \{F = \nabla w, w \in \dot{W}_2^1(Q)\},$$

а $G(Q)$ – пространство соленоидальных векторных полей

$$G(Q) = \{F \in [L_2(Q)]^n : \operatorname{div} F = 0\}.$$

Глава 5

Непрерывность по Гёльдеру решений эллиптических уравнений

Известно, что решение эллиптического уравнения с достаточно гладкими коэффициентами принадлежит пространству $W_{2,\text{loc}}^{k+2}(Q)$, если правая часть принадлежит $W_{2,\text{loc}}^k(Q)$, $k \geq 0$ (см., например, [12]). Из этого утверждения и теорем вложения (§9 первой главы) следует гладкость решения и в классических терминах. Однако, от условия гладкости коэффициентов в теореме о принадлежности решения $W_2^{k+2}(Q)$, как нетрудно увидеть, освободиться нельзя. Тем не менее, некоторой гладкостью решение обладает и без дополнительных условий; как утверждает теорема Е. Де Джорджи и Дж. Нэша оно непрерывно по Гёльдеру внутри рассматриваемой области. Доказательству этого результата и посвящена настоящая глава.

Мы ограничимся случаем однородного уравнения без младших членов

$$-(\nabla, A(x)\nabla u) = 0, \quad x \in Q. \quad (1)$$

Область $Q \subset \mathbb{R}^n$ будем считать ограниченной, хотя основной результат о внутренней непрерывности по Гёльдеру имеет локальный характер и поэтому справедлив в произвольной области. Как и ранее, мы будем предполагать, что коэффициенты уравнения – элементы $a_{i,j}$ симметрической матрицы A – измеримые и ограниченные функции. Напомним, что мы всегда предполагаем выполненным условие равномерной эллиптичности: существует такая постоянная $\gamma > 0$, что для почти всех $x \in Q$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\gamma|\xi|^2 \leq (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2. \quad (2)$$

§ 1. Субрешения эллиптического уравнения

В этом параграфе мы будем изучать свойства субрешений уравнения (1). В теореме 1 §3 главы 3 было доказано, что суперпозиция $v = f \circ u$ гладкого отображения $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ и $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ принадлежит $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, если производная функции f ограничена. Условие ограниченности f' , как легко видеть, существенно; без него функции

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = f'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

не обязаны принадлежать $L_{2,\text{loc}}(Q)$. В этом параграфе будет доказано (теорема 2), что если u – неотрицательное субрешение уравнения (1), а функция f монотонно не убывает и выпукла вниз, то от условия ограниченности производной f можно отказаться, заменив его требованием принадлежности сложной функции v пространству $L_{2,\text{loc}}(Q)$. Более того, функция v также будет субрешением. Доказательство этого результата опирается на оценку интеграла Дирихле субрешения через его норму в L_2 . С этого утверждения, имеющего и самостоятельное значение, мы начнем изучение обсуждаемых вопросов.

Прежде всего напомним определение субрешения. Принадлежащая пространству $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ функция v называется *субрешением уравнения (1)* в области Q , если для всех неотрицательных пробных функций $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется неравенство

$$\int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla v(x)) dx \leq 0. \quad (3)$$

Если $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ и для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется равенство

$$\int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla u(x)) dx = 0, \quad (1')$$

то функция u называется *обобщенным решением уравнения (1)* в Q . Далее мы будем рассматривать только обобщенные решения. Поэтому прилагательное “обобщенное” обычно будем опускать. Как отмечалось выше, неравенство (3) выполняется для всех неотрицательных финитных функций из $W_2^1(Q)$. Аналогично, и равенство (1') справедливо для всех финитных функций

из $W_2^1(Q)$. Конечно, решение уравнения (1) является его субрешением. Отметим также, что если функция v является слабым пределом в $W_2^1(Q')$ для всех $Q' \Subset Q$ последовательности субрешений, то и она является субрешением.

ТЕОРЕМА 1. Пусть v – неотрицательное субрешение уравнения (1). Тогда для любой точки $x^0 \in Q$ и всех положительных чисел ρ и σ , удовлетворяющих условию $\rho + \sigma < \text{dist}(x^0, \partial Q)$, справедлива оценка

$$\int_{\mathcal{B}_\rho(x^0)} |\nabla v(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\gamma^2 \sigma^2} \int_{\mathcal{B}_{\rho+\sigma}(x^0)} v^2(x) dx. \quad (4)$$

Здесь и всюду далее $\mathcal{B}_r(x^0)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x^0 , $\text{dist}(x^0, \partial Q)$ – расстояние от точки x^0 до множества ∂Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем функцию

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{в } \mathcal{B}_\rho(x^0), \\ \frac{\rho + \sigma - |x - x^0|}{\sigma} & \text{при } \rho \leq |x - x^0| \leq \rho + \sigma, \\ 0 & \text{вне шара } \mathcal{B}_{\rho+\sigma}(x^0). \end{cases}$$

Эта функция финитна в Q , удовлетворяет условию Липшица и $|\nabla \zeta(x)| \leq 1/\sigma$ для п.в. x . Функция $\eta = \zeta^2 v$ неотрицательна, финитна в Q и, как легко видеть, принадлежит пространству $W_2^1(Q)$. Подставляя ее в (3), получим

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_Q (\nabla \zeta^2(x) v(x), A(x) \nabla v(x)) dx \\ &= \int_Q (\nabla(\zeta(x) v(x)), A(x) \nabla(\zeta(x) v(x))) dx \\ &\quad - \int_Q v^2(x) (\nabla \zeta(x), A(x) \nabla \zeta(x)) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

поскольку

$$\begin{aligned} (\nabla(\zeta^2 v), A \nabla v) &= (\zeta \nabla(\zeta v) + \zeta v \nabla \zeta, A \nabla v) \\ &= (\nabla(\zeta v), A \nabla(\zeta v)) - v(\nabla(\zeta v), A \nabla \zeta) + v(\nabla \zeta, A \nabla(\zeta v)) \\ &\quad - v^2(\nabla \zeta, A \nabla \zeta) = (\nabla(\zeta v), A \nabla(\zeta v)) - v^2(\nabla \zeta, A \nabla \zeta). \end{aligned}$$

Оценка (4) вытекает из (5) в силу (2):

$$\begin{aligned} \gamma \int_{\mathcal{B}_\rho(x^0)} |\nabla v(x)|^2 dx &\leq \gamma \int_Q |\nabla(\zeta(x)v(x))|^2 dx \\ &\leq \int_Q (\nabla(\zeta(x)v(x)), A(x)\nabla(\zeta(x)v(x))) \\ &\leq \int_Q v^2(x)(\nabla\zeta(x), A(x)\nabla\zeta(x)) dx \leq \frac{1}{\gamma\sigma^2} \int_{\mathcal{B}_{\rho+\sigma}(x^0)} v^2(x) dx. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если субрешение v является решением уравнения (1), то утверждение теоремы 1 справедливо и без условия его неотрицательности.

Перейдем теперь к изучению суперпозиции отображений. Будем рассматривать кусочно гладкие функции f (f непрерывна на всей оси и ее производная существует и непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет пределы слева и справа). Будем также предполагать, что функция f выпукла вниз (ее производная f' монотонно не убывает).

ТЕОРЕМА 2. Пусть f – неотрицательная, кусочно гладкая, выпуклая вниз функция, $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ и $v = f \circ u \in L_{2,\text{loc}}(Q)$. Тогда справедливы следующие утверждения

- 1) если u – решение уравнения (1) в Q , то v – субрешение уравнения (1) в Q (в частности, $v \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$); при этом

$$\nabla v(x) = f'(u(x))\nabla u(x); \quad (6)$$

- 2) если u – субрешение уравнения (1) в Q и, дополнительно, производная f' функции f неотрицательна, то v – субрешение уравнения (1) в Q ; при этом справедливо равенство (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем сначала утверждение теоремы при более жестких ограничениях на функцию f . Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$, для всех $t \in \mathbb{R}$ $f(t) \geq 0$, $f''(t) \geq 0$, и пусть существует такое число M , что

$$f''(t) = 0 \quad \text{для всех } t \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty). \quad (7)$$

В этом случае требование $v \in L_{2,\text{loc}}(Q)$, конечно, излишне.

Так как из (7) следует ограниченность производной функции f , то по теореме 1 §3 главы 3 $v = f \circ u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, и справедливо равенство (6). По той же причине $f' \circ u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ и

$$\nabla(f' \circ u) = (f'' \circ u)\nabla u. \quad (6')$$

Нужно доказать, что v – субрешение уравнения (1). Пусть u – субрешение уравнения (1), а $f'(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Возьмем произвольную неотрицательную пробную функцию η из $C_0^\infty(Q)$. В силу (6) и (6')

$$\begin{aligned} \int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla v(x)) dx &= \int_Q f'(u(x)) (\nabla \eta(x), A(x) \nabla u(x)) dx \\ &= \int_Q (\nabla (f'(u(x)) \eta(x)), A(x) \nabla u(x)) dx \\ &\quad - \int_Q f''(u(x)) \eta (\nabla u(x), A(x) \nabla u(x)) dx \leq 0; \end{aligned}$$

первое слагаемое в правой части последнего неравенства неположительно, поскольку функция $(f' \circ u)\eta \in W_2^1(Q)$, финитна и неотрицательна в Q , а u – субрешение. Неположительность второго слагаемого вытекает из эллиптичности уравнения и выпуклости функции f . Аналогично доказывается и первое утверждение: если u – решение уравнения (1), то первое слагаемое равно нулю (условие неотрицательности функций f' и η в этом случае не нужно).

2. Освободимся от условия гладкости функции f . Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 2 и, дополнительно, линейна при $t > M$ и при $t < -M$.

Прежде всего заметим, что и в этом случае выполнены условия, гарантирующие принадлежность сложной функции v пространству $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ и справедливость равенства (6). Нужно доказать, что v – субрешение уравнения (1) в области Q .

Возьмем произвольное положительное число h и рассмотрим усреднение

$$f_h = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(|t - \tau|) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(|\tau|) f(t - \tau) d\tau$$

функции f с неотрицательным ядром $\omega_h(t) = \omega(t/h)$ (см. § 1 главы 1). При любом $h > 0$ функция f_h бесконечно дифференцируема, неотрицательна и монотонно не убывает, если монотонно не убывает функция f (второе утверждение теоремы). А так как $(f')_h = (f_h)'$, то и функция f'_h монотонно не убывает. И наконец, $f''_h(t) = 0$ при $|t| > M + h$, поскольку усреднением линейной функции является сама усредняемая функция. По доказанному

в п. 1 функции $v_h = f_h \circ u$ являются субрешениями (и для них справедливы равенства (6)).

Так как f_h равномерно на всей оси сходится к f при $h \rightarrow +0$ ($f_h(t) = f(t)$ для $|t| > M + h$), то $f_h \circ u \rightarrow f \circ u$ в $L_2(Q')$ для любой подобласти Q' , компактно принадлежащей Q . Пусть точка x такова, что функция f' непрерывна в $u(x)$. Тогда $f'_h(u(x)) \rightarrow f'(u(x))$ при $h \rightarrow +0$. На множестве $\{x : u(x) - \text{точка разрыва функции } f'\}$ $|\nabla u(x)| = 0$ п.в. (замечание 2 §3 главы 3). Поэтому

$$f'_h(u(x))\nabla u(x) \rightarrow f'(u(x))\nabla u(x)$$

п.в. в Q при $h \rightarrow +0$. А так как $|f'_h(u(x))|^2 |\nabla u(x)|^2$ мажорируется суммируемой функцией $\text{const}|\nabla u(x)|^2$, то по теореме Лебега

$$\int_{Q'} |\nabla f_h(u(x)) - \nabla f(u(x))|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0$$

для любой $Q' \Subset Q$. Таким образом, функция v является субрешением уравнения (1), как предел субрешений.

3. Докажем теперь утверждения теоремы 2 в общем случае. Возьмем положительное число M_0 столь большим, чтобы были выполнены следующие три условия:

- 1) все точки излома функции f (точки разрыва f') лежат в интервале $(-M_0, M_0)$,
- 2) если $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) > 0$ (в частности, если $f(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$), то $f'(M_0) > 0$ (а следовательно, $f'(t) > 0$ для всех $t \geq M_0$),
- 3) если $\lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) < 0$ (в частности, если $f(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow -\infty$), то $f'(-M_0) < 0$ (а следовательно, $f'(t) < 0$ для всех $t \leq -M_0$).

Для каждого $M > M_0$ определим кусочно гладкую функцию $f_{(M)}$ следующим образом.

Для $|t| \leq M$

$$f_{(M)}(t) = f(t).$$

Для $t > M$

$$f_{(M)}(t) = f(M), \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) \leq 0,$$

и

$$f_{(M)}(t) = f'(M), \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) > 0.$$

Для $t < -M$

$$f_{(M)}(t) = f(-M), \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) \geq 0,$$

и

$$f'_{(M)}(t) = f'(-M), \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) < 0.$$

Прежде всего отметим, что по теореме 1 § 3 главы 3 функции $v_{(M)} = f_{(M)} \circ u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, и для них справедливо неравенство (6), а по доказанному в п. 2 утверждению функции $v_{(M)}$ являются субрешениями уравнения (1).

Кроме того, при $u(x) > M$

$$|f(u(x)) - f_{(M)}(u(x))| \leq f(u(x)), \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) > 0,$$

и

$$|f(u(x)) - f_{(M)}(u(x))| \leq f(M) \leq f(M_0), \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) \leq 0.$$

Аналогично, при $u(x) < -M$

$$|f(u(x)) - f_{(M)}(u(x))| \leq f(u(x)), \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) < 0,$$

и

$$|f(u(x)) - f_{(M)}(u(x))| \leq f(-M) \leq f(M_0), \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) \geq 0.$$

Поэтому для любой $Q' \Subset Q$

$$\begin{aligned} & \int_{Q'} |f(u(x)) - f_{(M)}(u(x))|^2 dx \\ &= \int_{\{x \in Q' : |u(x)| > M\}} [f^2(u(x)) + f^2(M_0) + f^2(-M_0)] dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $M \rightarrow +\infty$. Таким образом, $v_{(M)} \rightarrow v = f \circ u$ при $M \rightarrow +\infty$ в $L_2(Q')$ для любой $Q' \Subset Q$. И следовательно, ограничено семейство их норм: $\|v_{(M)}\|_{L_2(Q')} \leq C(Q')$ для всех $M > M_0$.

Докажем теперь сходимостъ производных функций из этого семейства. Возьмем произвольную подобласть $Q' \Subset Q$; обозначим $\text{dist}(Q', \partial Q) = d'$. Покроем подобласть Q' конечным набором

шаров радиуса $d'/4$ с центрами в Q' и в каждом из них применим к произвольной функции $v_{(M)}$ из рассматриваемого семейства оценку (4) теоремы 1 с $\sigma = \rho = d'/4$. Получим

$$\int_{Q'} |\nabla v_{(M)}(x)|^2 dx \leq C(Q') \int_{Q''} v_{(M)}^2(x) dx \leq \text{const},$$

где $Q'' = \{x \in Q : \text{dist}(x, Q') < d'/2\} \Subset Q$, а постоянная $C(Q')$ не зависит от $M > M_0$. Так как

$$\nabla v_{(M)}(x) = f'_{(M)}(u(x)) \nabla u(x) \rightarrow f'(u(x)) \nabla u(x)$$

при $M \rightarrow +\infty$ почти всюду ($\text{mes}\{x \in Q' : |u(x)| > M\} \rightarrow 0$ при $M \rightarrow +\infty$), то по лемме Фату функция $(f'(u(x)))^2 |\nabla u(x)|^2$ суммируема по Q' . А так как

$$\begin{aligned} & \int_{Q'} |f'(u(x)) - f'_{(M)}(u(x))|^2 |\nabla u(x)|^2 dx \\ & \leq \int_{\{x \in Q' : |u(x)| > M\}} |f'(u(x))|^2 |\nabla u(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

то обобщенные производные функций $v_{(m)}$ сходятся в $L_2(Q')$ к функциям $f'(u(x)) \partial u / \partial x_i(x)$. Следовательно, предельная функция $v = f \circ u$ принадлежит $W_2^1(Q')$, и для нее справедливо равенство (6). Более того, она является пределом в $W_2^1(Q')$ субрешений $v_{(M)}$, а следовательно, сама является субрешением.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 2 немедленно следует, что $|u|$ является субрешением уравнения (1), если u – решение (1). Более того, пусть p – произвольное число из интервала $(1, \frac{n}{n-2})$, а u – решение уравнения (1) в Q . Тогда в силу следствия 1 из теоремы 1 §2 главы 3 $|u|^p \in L_{2,\text{loc}}(Q)$ и по только что доказанной теореме 2 $|u|^p$ – субрешение уравнения (1) в Q .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть I – одно из следующих множеств: либо это отрезок $[a, b]$, либо одна из полуосей $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$. Предположим, что субрешение u принимает значения из этого множества: $u(x) \in I$ для п.в. x из Q . Тогда, как легко видеть, выполнение условий на функцию f в теореме 2 следует требовать на этом множестве I . В частности, если $p \in (1, \frac{n}{n-2})$, а v – неотрицательное субрешение (например, $v = |u|^p$, где u – решение уравнения (1)), то функция v^p также является субрешением (1). Поэтому для любого решения u и всех натуральных k функции $|u|^{p^k}$ являются субрешениями.

§ 2. Локальная ограниченность обобщенных решений эллиптического уравнения

ТЕОРЕМА 1. Любое неотрицательное субрешение v в области Q уравнения (1) принадлежит пространству $L_{\infty, \text{loc}}(Q)$. Более того, существует такая зависящая только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ постоянная C , что для любых подобластей $Q', Q'', Q' \Subset Q$ справедлива оценка

$$\text{vrai sup}_{Q'} v^2(x) \leq C(d)^{-n} \int_{Q''} v^2(y) dy, \quad (8)$$

в которой $d = \text{dist}(Q', \partial Q'')$ – расстояние от подобласти Q' до границы Q'' .

В частности, оценка (8) справедлива для $v(x) = |u(x)|$, где u – произвольное решение уравнения (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что достаточно доказать справедливость для любой точки $x^0 \in Q$ и всех $r \in (0, \frac{1}{2} \text{dist}(x^0, \partial Q))$ оценки

$$\text{vrai sup}_{x \in \mathcal{B}_r(x^0)} v^2(x) \leq C(2r)^{-n} \int_{\mathcal{B}_{2r}(x^0)} v^2(y) dy. \quad (8')$$

Справедливость оценки (8), а тем самым и принадлежность субрешения v пространству $L_{\infty, \text{loc}}(Q)$, немедленно следует из (8').

Пусть v – произвольное неотрицательное субрешение уравнения (1). Возьмем и зафиксируем число $p = 2\kappa \in (2, \frac{2n}{n-2})$ (например, $\kappa = \frac{n}{n-1}$) и любую точку x^0 из Q . Для произвольных $\rho > 0$ и $\sigma > 0$, для которых $\mathcal{B}_{\rho+\sigma} = \mathcal{B}_{\rho+\sigma}(x^0) \Subset Q$, подставляя оценку (4) теоремы 1 предыдущего параграфа в неравенство (9) следствия 2 § 2 главы 3 (с $\mathcal{E} = \mathcal{B}_\rho$), имеем

$$\begin{aligned} \left[\rho^{-n} \int_{\mathcal{B}_\rho} v^{2\kappa}(x) dx \right]^{1/\kappa} &\leq C(n, \gamma) \left[\left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^2 + 1 \right] \left[\frac{\rho + \sigma}{\rho} \right]^n \\ &\quad \times \left[(\rho + \sigma)^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho+\sigma}} v^2(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Возьмем произвольное положительное число r такое, что $r < \frac{1}{2} \text{dist}(x^0, \partial Q)$. Положим $\rho_0 = 2r$, $\sigma_k = r2^{-k}$, $\rho_k = \rho_{k-1} - \sigma_k$, $k = 1, 2, \dots$. Последовательность $\{\rho_k\}$ монотонно убывает и сходится к числу r . Как отмечалось в замечании 3 предыдущего параграфа, функции $v_1(x) = v^\kappa(x)$, $v_2(x) = v_1^\kappa(x) = v^{\kappa^2}(x), \dots, v_k(x) = v_{k-1}^\kappa(x) = v^{\kappa^k}(x), \dots$ являются субрешениями (в Q) уравнения (1). Поэтому для каждой из них справедлива оценка (9). Положим в (9) $v = v_{k-1}$, $\rho = \rho_k$ и $\sigma = \sigma_k$, при этом $\rho + \sigma = \rho_{k-1}$. Тогда

$$\left[\left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^2 + 1 \right] \left[\frac{\rho + \sigma}{\rho} \right]^n = \left[\left(\frac{\rho_k}{\sigma_k} \right)^2 + 1 \right] \left[\frac{\rho_k + \sigma_k}{\rho_k} \right]^n \leq C(n)4^k.$$

Таким образом, для любого натурального k имеем оценку

$$\begin{aligned} \left[\rho_k^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_k}} v_k^2(x) dx \right]^{1/\kappa} &= \left[\rho_k^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_k}} v_{k-1}^{2\kappa}(x) dx \right]^{1/\kappa} \\ &\leq C 4^k \left[\rho_{k-1}^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_{k-1}}} v_{k-1}^2(x) dx \right], \end{aligned}$$

здесь и далее постоянная $C = C(n, \gamma)$ зависит только от n и γ . Из нее получаем

$$\begin{aligned} \rho_k^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_k}} v_k^2(x) dx &\leq C^\kappa 4^{k\kappa} \left[\rho_{k-1}^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_{k-1}}} v_{k-1}^2(x) dx \right]^\kappa \\ &\leq C^{\kappa+\kappa^2} 4^{k\kappa+(k-1)\kappa^2} \left[\rho_{k-2}^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_{k-2}}} v_{k-2}^2(x) dx \right]^{\kappa^2} \\ &\leq C^{\kappa+\kappa^2+\dots+\kappa^k} 4^{k\kappa+(k-1)\kappa^2+\dots+\kappa^k} \left[\rho_0^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_0}} v_0^2(x) dx \right]^{\kappa^k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \|v^2\|'_{L_{\kappa^k}(\mathcal{B}_r)} &\leq \|v^2\|'_{L_{\kappa^k}(\mathcal{B}_{\rho_k})} = \left[\rho_k^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_k}} v^{2\kappa^k}(x) dx \right]^{\frac{1}{\kappa^k}} \\
 &= \left[\rho_k^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_k}} v_k^2(x) dx \right]^{\frac{1}{\kappa^k}} \\
 &\leq C^{\frac{\kappa + \kappa^2 + \dots + \kappa^k}{\kappa^k}} 4^{\frac{k\kappa + (k-1)\kappa^2 + \dots + \kappa^k}{\kappa^k}} \left[\rho_0^{-n} \int_{\mathcal{B}_{\rho_0}} v_0^2(x) dx \right] \\
 &\leq C^{\sum_{m=0}^{\infty} \kappa^{-m}} 4^{\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\kappa^{-m}} \left[(2r)^{-n} \int_{\mathcal{B}_{2r}} v^2(x) dx \right].
 \end{aligned}$$

Устремляя теперь k к бесконечности, в силу теоремы 1 § 1 главы 3 получаем доказываемое неравенство (8).

§ 3. Слабое неравенство Гарнака

В этом параграфе мы докажем, что нетривиальное неотрицательное в некотором шаре решение уравнения (1) в шаре меньшего радиуса (с тем же центром) отделено от нуля. Для доказательства этого утверждения нам понадобится неочевидная оценка интеграла Дирихле для специального класса субрешений, с которой мы и начнем изложение.

Возьмем произвольный шар

$$\mathcal{B}_{2r} = \mathcal{B}_{2r}(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < 2r\},$$

$$x^0 \in Q, \quad r < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x^0, \partial Q).$$

Пусть u – решение уравнения (1) (в области Q). По теореме 1 предыдущего параграфа решение ограничено в любой компактно вложенной в Q подобласти, в частности, в шаре $\mathcal{B}_{2r}$. Прибавляя к решению постоянную (она, очевидно, является решением уравнения (1)), можно добиться, чтобы решение стало неотрицательным в $\mathcal{B}_{2r}$. Далее мы будем считать решение u неотрицательным и ограниченным: существует такое число M , что $0 \leq u(x) \leq M$ п.в. в $\mathcal{B}_{2r}$. Будем рассматривать кусочно гладкие функции f на отрезке $[0, M]$: f непрерывна на этом отрезке, имеет производную f' всюду, кроме конечного числа “точек излома” (точками излома считаем и крайние точки отрезка), и эта производная непрерывна на каждом из отрезков, на которые точки излома разбивают $[0, M]$ (в частности, в крайних точках 0 и M существуют односторонние производные, равные соответствующим односторонним пределам f'). Будем предполагать, что функция f неотрицательна и удовлетворяет следующему условию

$$\text{функция } g(t) = -e^{-f(t)} \text{ выпукла,} \quad (10)$$

т.е. ее производная g' монотонно не убывает.

Остановимся подробнее на этом классе функций. Для дважды непрерывно дифференцируемых функций f $g''(t) = [f''(t) - f'^2(t)]e^{-f(t)}$ и условие (10) эквивалентно условию

$$f''(t) \geq f'^2(t), \quad 0 \leq t \leq M. \quad (10')$$

Из последнего неравенства, конечно, следует выпуклость и функции f . Выпуклость функции f следует из (10) и без дополнительного условия гладкости. В этом можно убедиться, например, следующим образом:

$$f(t) = -\ln(-g(t)), \quad f'(t) = \frac{g'(t)}{-g(t)},$$

и из монотонного неубывания g' следует монотонное неубывание f' . Отметим, что в отличие от класса выпуклых функций, множество функций, удовлетворяющих условию (10), не инвариантно (см. (10')) относительно умножения на положительные (большие единицы) числа, а следовательно, и относительно сложения. Кроме того, отметим, что удовлетворяющая условию (10) кусочно гладкая функция $f \neq \text{const}$ не может быть продолжена с сохранением этого свойства на всю ось. Однако в некоторую окрестность отрезка $[0, M]$ такое продолжение возможно (например, решением задачи Коши для уравнения $f''(t) = f'^2(t)$).

Продолжая f на всю ось с сохранением ее (а не функции g !) свойства выпуклости (например, линейно: f' постоянна на полуосях $(-\infty, 0)$ и $(M, +\infty)$; условие (10) при этом, конечно, нарушится), из теоремы 2 § 1 получим, что сложная функция $v = f \circ u$ является субрешением уравнения (1) в Q , а следовательно, и в $\mathcal{B}_{2r}$.

ЛЕММА 1. *Существует такая постоянная $C = C(n, \gamma)$, что для любого шара $\mathcal{B}_{2r} \Subset Q$, любого неотрицательного решения u и любой неотрицательной кусочно гладкой функции f , удовлетворяющей условию (10), субрешение $v = f \circ u$ удовлетворяет оценке*

$$\int_{\mathcal{B}_r} |\nabla v(x)|^2 dx \leq Cr^{n-2}. \quad (11)$$

Подчеркнем, что постоянная C в оценке (11) не зависит ни от рассматриваемого шара, ни от неотрицательного решения (в частности, C не зависит от M), ни от функции f ; она зависит только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим сначала случай дважды непрерывно дифференцируемой функции f . В этом случае, как

отмечалось выше, условие (10) эквивалентно условию (10'). Функцию f продолжим линейно на всю числовую ось. В силу теоремы 1 §3 главы 3 функция $f' \circ u$ принадлежит пространству $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, а ее производные (конечно, обобщенные) вычисляются по обычному правилу (по формуле (6)).

Возьмем функцию $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \zeta \subset \mathcal{B}_{2r}$, $\zeta(x) = 1$ в $\mathcal{B}_r$ и $|\nabla \zeta(x)| \leq \text{const } r^{-1}$ для всех $x \in Q$. Подставим

$$\eta = \zeta^2(x) f'(u(x)) \in \mathring{W}_2^1(Q), \quad \text{supp } \eta \subset \mathcal{B}_{2r},$$

в определяющее обобщенное решение интегральное тождество. Используя (10'), получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{B}_{2r}} [f'(u(x)) (\nabla \zeta^2(x), A(x) \nabla u(x)) \\ &\quad + \zeta^2(x) f''(u(x)) (\nabla u(x), A(x) \nabla u(x))] dx \\ &= \int_{\mathcal{B}_{2r}} \left[(\nabla \zeta^2(x), A(x) \nabla v(x)) \right. \\ &\quad \left. + \zeta^2(x) \frac{f''(u(x))}{f'^2(u(x))} (\nabla v(x), A(x) \nabla v(x)) \right] dx \\ &\geq \int_{\mathcal{B}_{2r}} [(\nabla \zeta^2(x), A(x) \nabla v(x)) + \zeta^2(x) (\nabla v(x), A(x) \nabla v(x))] dx. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует оценка

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{B}_{2r}} \zeta^2(x) (\nabla v(x), A(x) \nabla v(x)) dx \\ &\leq \int_{\mathcal{B}_{2r}} 2\zeta(x) (\nabla \zeta(x), A(x) \nabla v(x)) dx \\ &\leq 2 \left[\int_{\mathcal{B}_{2r}} \zeta^2(x) (\nabla v(x), A(x) \nabla v(x)) dx \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[\int_{\mathcal{B}_{2r}} (\nabla \zeta(x), A(x) \nabla \zeta(x)) dx \right]^{1/2} \\ &\leq C(n, \gamma) r^{\frac{n-2}{2}} \left[\int_{\mathcal{B}_{2r}} \zeta^2(x) (\nabla v(x), A(x) \nabla v(x)) dx \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

из которой немедленно вытекает (11).

2. Рассмотрим теперь случай кусочно гладкой функции f . Значения функции g отрицательны на всем отрезке $[0, M]$. Продолжим ее линейно на некоторый отрезок $[-\delta, M + \delta]$, $\delta > 0$ с сохранением этого свойства (и свойства выпуклости). Тогда усреднения $g_h(t)$ с $h < \delta$ являются бесконечно дифференцируемыми выпуклыми функциями на отрезке $[0, M]$, принимающими отрицательные значения. Поэтому функции $f^{(h)}(t) = -\ln(-g_h(t))$ удовлетворяют условию (10') и по доказанному в п. 1 субрешения $v_h = f^{(h)} \circ u$ удовлетворяют оценке (11):

$$\int_{\mathcal{B}_r} |\nabla v_h(x)|^2 dx \leq C(n, \gamma) r^{n-2}. \quad (11')$$

Так как $g_h(t) \rightarrow g(t)$ при $h \rightarrow +0$, $g'_h(t) \rightarrow g'(t)$, $h \rightarrow +0$, а следовательно, и $(f^{(h)})'(t) \rightarrow f'(t)$, $h \rightarrow +0$ во всех точках отрезка $[0, M]$, за исключением точек излома, то

$$\nabla v_h(x) = (f^{(h)})'(u(x)) \nabla u(x) \rightarrow f'(u(x)) \nabla u(x)$$

при $h \rightarrow +0$ п.в. в $\mathcal{B}_{2r}$.

Справедливость оценки (11) теперь следует из (11') в силу леммы Фату.

ТЕОРЕМА 1 (СЛАБОЕ НЕРАВЕНСТВО ГАРНАКА). *Для любого числа $c_0 > 0$ найдется такая постоянная $c = c(n, \gamma, c_0) > 0$, что для произвольного шара $\mathcal{B}_{2r} \in Q$ и произвольного неотрицательного в этом шаре решения u уравнения (1), удовлетворяющего условию*

$$\text{mes}\{x \in \mathcal{B}_r : u(x) \geq 1\} \geq c_0 r^n \quad (12)$$

справедлива оценка

$$u(x) \geq c \quad \text{для п.в. } x \in \mathcal{B}_{r/2}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное положительное число ε и рассмотрим функцию $f_\varepsilon(t) = \max\{0, -\ln(t + \varepsilon)\}$. Она удовлетворяет условиям леммы 1: функция $g_\varepsilon(t) = -e^{-f(t)} =$

$\max\{-1, -(t + \varepsilon)\}$ выпукла. Поэтому субрешение $v_\varepsilon = f_\varepsilon \circ u$ удовлетворяет оценке (11):

$$\int_{\mathcal{B}_r} |\nabla v_\varepsilon(x)|^2 dx \leq Cr^{n-2}.$$

Кроме того, из (12) следует, что $\text{mes}\{x \in \mathcal{B}_r : f_\varepsilon(u(x)) = 0\} \geq c_0 r^n$. Поэтому из оценки (9) следствия 2 из леммы 1 §2 главы 3 (с $p = 2$ и $\mathcal{E} = \{x \in \mathcal{B}_r : f_\varepsilon(u(x)) = 0\}$) имеем

$$r^{-n} \int_{\mathcal{B}_r} v_\varepsilon^2(x) dx \leq C(n, c_0) r^{2-n} \int_{\mathcal{B}_r} |\nabla v_\varepsilon(x)|^2 dx \leq C(n, \gamma, c_0).$$

А по теореме 1 §2 этой главы

$$v_\varepsilon(x) = \max\{0, -\ln(u(x) + \varepsilon)\} \leq C(n, \gamma, c_0) \quad \text{п.в. в } \mathcal{B}_{r/2}.$$

Откуда

$$u(x) \geq e^{-C(n, \gamma, c_0)} = c(n, \gamma, c_0) \quad \text{п.в. в } \mathcal{B}_{r/2}.$$

§ 4. Непрерывность по Гёльдеру решений эллиптического уравнения

Пусть u – любое решение (в Q) уравнения (1). Возьмем произвольный шар $\mathcal{B}_\rho \in Q$ и обозначим

$$\omega(\rho) = \omega_u(\rho) = \text{vrai sup}_{x \in \mathcal{B}_\rho} u(x) - \text{vrai inf}_{x \in \mathcal{B}_\rho} u(x).$$

ЛЕММА 1. *Существует такое число $\lambda = \lambda(n, \gamma) < 1$, что для любого решения уравнения (1) и любого шара $\mathcal{B}_\rho \in Q$ справедливо неравенство*

$$\omega(\rho/4) \leq \lambda \omega(\rho). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega(\rho) = 2M$. Поскольку прибавление к решению постоянной не меняет значения ω , не ограничивая общность, можно считать, что

$$M = \text{vrai sup}_{x \in \mathcal{B}_\rho} u(x) = - \text{vrai inf}_{x \in \mathcal{B}_\rho} u(x).$$

Рассмотрим решения $w_\pm(x) = (M \pm u(x))/M$. Они неотрицательны в рассматриваемом шаре, причем

$$\begin{aligned} \text{vrai sup}_{x \in \mathcal{B}_\rho} w_\pm(x) &= 2, & \text{vrai inf}_{x \in \mathcal{B}_\rho} w_\pm(x) &= 0, \\ \omega_{w_+}(\rho) &= \omega_{w_-}(\rho) = \frac{1}{M} \omega_u(\rho). \end{aligned}$$

Кроме того, если

$$\text{mes}\{x \in \mathcal{B}_{\rho/2} : w_-(x) \geq 1\} < \frac{1}{2} \text{mes } \mathcal{B}_{\rho/2},$$

то

$$\text{mes}\{x \in \mathcal{B}_{\rho/2} : w_+(x) \geq 1\} \geq \frac{1}{2} \text{mes } \mathcal{B}_{\rho/2}. \quad (15)$$

Если w_+ не удовлетворяет (15), то ему удовлетворяет w_- . Т.е. по крайней мере одна из функций $w_\pm$ удовлетворяет (15). Пусть это будет w_+ . Применяя к ней теорему 1 § 3, получаем $\text{vrai inf}_{\mathcal{B}_{\rho/4}} w_+(x) \geq c = c(n, \gamma) > 0$. Следовательно,

$$\omega_u(\rho/4) = M \omega_{w_+}(\rho/4) \leq (2 - c)M = (1 - c/2) \omega_u(\rho)$$

и мы получили (14) с $\lambda = \lambda(n, \gamma) = 1 - c/2$.

Отметим, что из леммы 1 легко следует справедливость теоремы Лиувилля и в случае уравнения (1) с измеримыми и ограниченными коэффициентами (задача 3, глава 5).

ТЕОРЕМА 1. *Существуют такие зависящие только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ постоянные α и C , что для любого решения в Q уравнения (1) и любых $Q' \Subset Q'' \Subset Q$ справедливо неравенство*

$$|u(x) - u(y)| \leq C d^{-\frac{n}{2} - \alpha} |x - y|^\alpha \|u\|_{L_2(Q'')} \quad \text{для п.в. } x \text{ и } y \text{ из } Q, \quad (16)$$

в котором $d = \text{dist}\{Q', \partial Q''\}$ – расстояние между подобластью Q' и границей подобласти Q'' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in Q'$, $y \in Q'$ и $|x - y| < d/2$. Обозначим $r_0 = d/2$, $r_k = 4^{-k}r_0$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть m – такое натуральное число, что $r_{m+1} \leq |x - y| < r_m$. Применим к шару $\mathcal{B}_{r_m}(y)$ лемму 1 этого параграфа. С помощью теоремы 1 §2 этой главы имеем

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \omega(r_m) \leq \lambda \omega(r_{m-1}) \leq \dots \leq \lambda^m \omega(r_0) \\ &\leq 2\lambda^m \text{vrai sup}_{z \in \mathcal{B}_{r_0}(y)} |u(z)| \leq \lambda^m C(n, \gamma) d^{-n} \|u\|_{L_2(Q'')}. \end{aligned}$$

Положим $\alpha = \alpha(n, \gamma) = -\log_4 \lambda > 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \lambda^m &= 4^{m \log_4 \lambda} = (4^{-m})^{-\log_4 \lambda} \\ &= (4^{-m})^\alpha = \left(\frac{2r_m}{d}\right)^\alpha = \left(\frac{8}{d}\right)^\alpha r_{m+1}^\alpha \leq \frac{8^\alpha}{d^\alpha} |x - y|^\alpha, \end{aligned}$$

имеем (16) для $|x - y| < d/2$.

Пусть теперь $x \in Q'$, $y \in Q'$ и $|x - y| \geq d/2$. В этом случае оценка (16) немедленно вытекает из теоремы 1 §2. Действительно,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq 2\|u\|_{L_\infty(Q')} \leq C(n, \gamma) d^{-n} \|u\|_{L_2(Q'')} \\ &\leq C(n, \gamma) d^{-n} \left(\frac{2|x - y|}{d}\right)^\alpha \|u\|_{L_2(Q'')}. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана.

Задачи к главе 5

ЗАДАЧА 1. Докажите утверждение теоремы 2 §1 в случае счетного множества точек излома функции f (точек разрыва производной функции f).

В силу теоремы 1 §4 значения решения уравнения (1) можно так изменить на множестве меры нуль, что оно будет непрерывным внутри рассматриваемой области. Т.е. в этом классе отождествляемых функций имеется непрерывная функция. Ее естественно и понимать под решением уравнения.

ЗАДАЧА 2. Докажите **строгий принцип максимума**. Если решение уравнения (1) с измеримыми и ограниченными коэффициентами достигает наибольшего значения во внутренней точке области, то оно постоянно.

ЗАДАЧА 3. Докажите **теорему Лиувилля**. Ограниченное во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ решение уравнения (1) постоянно.

Список литературы

- [1] E. DeGiorgi, “Sulla differenziabilita e l’analiticitа delle estremali degli integrali multipli regolari”, *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **3** (1957), 25–43.
- [2] J. Nash, “Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations”, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 931–954.
- [3] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [4] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [5] J. Moser, “A new proof of De Giorgi’s theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17** (1964), 101–134.
- [6] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.
- [7] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [8] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд. Ленинградского университета, Л., 1985.
- [9] И. Г. Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Государственное изд. технико-теоретической литературы, М., 1953.
- [10] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981.
- [11] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физико-математическая литература, М., 2000.
- [12] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.
- [13] В. П. Михайлов, *Лекции по уравнениям математической физики*, Физматлит, М., 2001.
- [14] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.
- [15] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Лекционные курсы НОЦ, **5**, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, М., 2006.