Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Алгебро-геометрические основы математической физики, *Лекц. курсы НОЦ*, 2008, выпуск 9, 3–209

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn9>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:17:05

Оглавление

Глава 1. Алгебраический минимум	7
1.1. Язык категорий	7
1.1.1. Категории	8
1.1.2. Полезные конструкции	10
1.1.3. Произведение и сумма семейства объектов	11
1.1.4. Функторы	14
1.2. Группы, кольца, модули	16
1.2.1. Группы	16
1.2.2. Абелевы группы	23
1.2.3. Кольца	24
1.2.4. Модули	27
1.2.5. Прямое произведение и прямая сумма семейства модулей	37
1.2.6. Проективные и индуктивные пределы семейств модулей	40
1.2.7. Свободные модули	45
1.2.8. Тензорное произведение семейства модулей	48
1.2.9. Дуальность	53
1.2.10. Градуировка	54
1.3. Линейные пространства	58
1.3.1. Поля	58
1.3.2. Линейные пространства	58
1.3.3. Топологические линейные пространства	59
1.4. Алгебры	63
1.4.1. Алгебры	63
1.4.2. Стандартные конструкции	67
1.4.3. Градуировка	69
1.5. Модули над алгебрами	71
1.5.1. Модули над алгебрами	71
1.5.2. Стандартные конструкции	74
1.5.3. Градуировка	80
1.5.4. Тензорная алгебра модуля	82
1.5.5. Ли модули	84
1.6. Гомологии	86
1.6.1. Дифференциальные модули	86

1.6.2. Комплексы	88
1.6.3. Когомологии	90
1.6.4. Бикомплексы	93
1.7. Спектральные последовательности	100
1.7.1. Модули с фильтрацией	100
1.7.2. Спектральная последовательность дифференциального модуля с фильтрацией	101
1.7.3. Специальные случаи	107
Глава 2. Элементы дифференциальной геометрии	115
2.1. Гладкие многообразия	115
2.1.1. Категория гладких многообразий	115
2.1.2. Прямые произведения	117
2.1.3. Подмногообразия	117
2.2. Расслоения	118
2.2.1. Категория гладких расслоений	118
2.2.2. Векторные расслоения	122
2.3. Касательные и кокасательные поля	123
2.3.1. Гладкие функции, подробнее	123
2.3.2. Дифференцирования	125
2.3.3. Локальность	126
2.3.4. Касательное расслоение	129
2.3.5. Кокасательное расслоение	139
2.3.6. Тензорные поля	145
2.4. Дифференциальные формы	146
2.4.1. Внешняя алгебра дифференцирований	146
2.4.2. Комплекс де Рама $\{\Omega(M), d\}$	150
2.4.3. Векторнозначные дифференциальные формы	162
2.5. Слоения	167
2.5.1. Слоения	167
2.5.2. Распределения	170
2.6. Группы Ли	173
2.6.1. Группы Ли	173
2.6.2. Группы Ли преобразований	175
2.6.3. Алгебра Ли группы Ли	177
2.6.4. Локальные однопараметрические группы преобразований	182
2.6.5. Экспоненциальное отображение	184
2.6.6. Правое действие группы на многообразии	185

Оглавление	5
------------	---

2.7. Связности	187
2.7.1. Связности в гладких расслоениях	187
2.7.2. Связности в главных расслоениях	192
2.7.3. Связности в ассоциированных расслоениях . .	200

Список литературы	204
-------------------	------------

Предметный указатель	206
----------------------	------------

Глава 1. Алгебраический минимум

В лекциях рассматриваются алгебраические и геометрические понятия и методы, применяемые в современной математической физике. В полном объеме подобная задача, конечно, неподъемная, так что предлагаемый материал отражает лишь мой личный опыт и мое понимание предмета.

В этой главе максимально сжато излагаются основные алгебраические объекты и конструкции, наиболее часто применяемые в современной математической физике. Для удобства читателей по каждому разделу приводится список рекомендуемой литературы для более полного изучения предмета.

Стандартные обозначения. Будем обозначать:

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество всех целых чисел;

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество всех неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел;

$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ – множество всех комплексных чисел;

$\mathbb{X}^D = \times^D \mathbb{X} = \{x = (\xi^1, \dots, \xi^D); \xi^i \in \mathbb{X}, 1 \leq i \leq D\}$ – декартово произведение D копий множества $\mathbb{X} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$;

Будем также использовать мультииндексные обозначения:

$i = (i_1, \dots, i_D) \in \mathbb{Z}^D, i_\mu \in \mathbb{Z}, 1 \leq \mu \leq D$;

$|i| = |i_1| + \dots + |i_D| \in \mathbb{Z}_+$ для $i \in \mathbb{Z}^D$;

$x^i = (x^1)^{i_1} \dots (x^D)^{i_D} \in \mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$, где $x = (x^1, \dots, x^D) \in \mathbb{F}^D$,

$i = (i_1, \dots, i_D) \in \mathbb{Z}_+^D, (x^\mu)^{i_\mu}$ – компонента $x^\mu \in \mathbb{F}$ в степени $i_\mu \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq \mu \leq D$.

1.1. Язык категорий

Согласно Ю. И. Манину [23], “язык категорий воплощает ‘социологический’ подход к математическому объекту: группа или пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, но как член сообщества себе подобных”.

В нашем курсе этот язык будет естественным языком, связывающим внешне разнородные объекты и конструкции, позволяющим давать ясные содержательные определения в сложных ситуациях.

1.1.1. Категории. Категория $\mathcal{K}$ задана, если

- ★ определено множество (точнее, класс) $\text{Ob } \mathcal{K}$ *объектов* категории $\mathcal{K}$;
- ★ для каждой пары $A, B \in \text{Ob } \mathcal{K}$ определено множество

$$\text{Mor}(A, B)$$

морфизмов из A в B , причем пересечение

$$\text{Mor}(A, B) \cap \text{Mor}(C, D) = \emptyset$$

при $(A, B) \neq (C, D)$, $A, \dots, D \in \text{Ob } \mathcal{K}$;

- ★ для каждой тройки $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{K}$ определен *закон композиции*, т.е. отображение $\text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$, $f \in \text{Mor}(A, B), g \in \text{Mor}(B, C) \mapsto g \circ f \in \text{Mor}(A, C)$;
- ★ выполнены аксиомы:
 - (а) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, для всех $h \in \text{Mor}(A, B), g \in \text{Mor}(B, C), f \in \text{Mor}(C, D)$ (ассоциативность);
 - (б) для каждого $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$ существует морфизм

$$\text{id}_A \in \text{Mor}(A, A)$$

такой, что

$$\text{id}_A \circ f = f, \quad g \circ \text{id}_A = g$$

для всех $f \in \text{Mor}(B, A), g \in \text{Mor}(A, B)$ (тождественный морфизм).

Объединение $\bigcup_{A, B \in \text{Ob } \mathcal{K}} \text{Mor}(A, B)$ всех морфизмов категории $\mathcal{K}$ обозначается $\text{Mor } \mathcal{K}$. Если надо уточнить, что речь идет о морфизмах именно категории $\mathcal{K}$, будем писать $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ вместо $\text{Mor}(A, B)$.

При описании категорных конструкций обычно используется наглядная диаграммная запись. Именно, морфизм $f \in \text{Mor}(A, B)$ записывается как стрелка $A \xrightarrow{f} B$, а композиция морфизмов как последовательность стрелок $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Часто морфизм $f \in \text{Mor}(A, B)$ удобно записывать как $f: A \rightarrow B$.

В ряде категорий морфизмы называются *гомоморфизмами* и вместо символа Mor пишут символ Hom . Морфизмы из $\text{Mor}(A, A)$, $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$, называются *эндоморфизмами*, часто вместо $\text{Mor}(A, A)$ пишут $\text{End}(A)$.

Морфизм $f \in \text{Mor}(A, B)$ называется

- ★ *изоморфизмом* (иначе, *биекцией*), если существует такой морфизм $g \in \text{Mor}(B, A)$, что $f \circ g = \text{id}_B$ и $g \circ f = \text{id}_A$; в этом случае g называется *обратным* к f , пишут $g = f^{-1}$; изоморфизмы из $\text{End}(A)$ называются *автоморфизмами*, множество всех таких автоморфизмов обозначают через $\text{Aut}(A)$;
- ★ *мономорфизмом* (иначе, *инъекцией*), если равенство

$$f \circ g_1 = f \circ g_2, \quad \text{где } g_1, g_2 \in \text{Mor}(C, A),$$

возможно лишь при $g_1 = g_2$;

- ★ *эпиморфизмом* (иначе, *сюръекцией*), если равенство

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f, \quad \text{где } h_1, h_2 \in \text{Mor}(B, D),$$

возможно лишь при $h_1 = h_2$.

Объект $X \in \text{Ob } \mathcal{K}$ называется *универсальным отталкивающим объектом* категории $\mathcal{K}$, если для любого $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$ множество $\text{Mor}(X, A)$ состоит ровно из одного элемента. Все универсальные отталкивающие объекты, если таковые существуют в данной категории, изоморфны друг другу. Объект $Y \in \text{Ob } \mathcal{K}$ называется *универсальным притягивающим объектом* категории $\mathcal{K}$, если для любого $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$ множество $\text{Mor}(A, Y)$ состоит ровно из одного элемента. Все универсальные притягивающие объекты, если таковые существуют в данной категории, изоморфны друг другу.

ПРИМЕР 1.1.1. Категория множеств $\mathcal{S}$: $\text{Ob } \mathcal{S}$ – все множества, $\text{Mor}(S, T)$ – все отображения из множества S в множество T . Всякое одноэлементное множество есть универсальный притягивающий объект. Отображение f из множества S в множество T является

- ★ мономорфизмом, если для любых элементов $x, y \in S$, $x \neq y$, следует $f(x) \neq f(y)$;
- ★ эпиморфизмом, если для каждого элемента $u \in T$ существует элемент $x \in S$ такой, что $u = f(x)$;
- ★ изоморфизмом, если f одновременно является и мономорфизмом и эпиморфизмом.

ПРИМЕР 1.1.2. Категория топологических пространств $\mathcal{T}$: $\text{Ob } \mathcal{T}$ – все топологические пространства, $\text{Mor}(S, T)$ – все непрерывные отображения из пространства S в пространство T .

ЗАМЕЧАНИЕ. В категории топологических пространств из того, что данный морфизм является мономорфизмом и эпиморфизмом одновременно, не следует, что он изоморфизм, поскольку обратное отображение, хотя и существует в этом случае, не обязано быть непрерывным.

ПРИМЕР 1.1.3. Категория $\mathcal{S}(M)$ всех подмножеств данного множества M : $\text{Ob } \mathcal{S}(M)$ – множество всех подмножеств множества M , частично упорядоченное по включению, для пары подмножеств $A, B \subset M$ множество морфизмов $\text{Mor}(A, B)$ состоит из одного элемента, если $A \subset B$, и пустое в противном случае.

1.1.2. Полезные конструкции. Дуальная категория $\mathcal{K}^\circ$ к данной категории $\mathcal{K}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\text{Ob } \mathcal{K}^\circ &= \text{Ob } \mathcal{K}, \\ \text{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(A, B) &= \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, A) \quad \text{для всех } A, B \in \text{Ob } \mathcal{K},\end{aligned}$$

закон композиции не меняется. Подробнее, пусть

$$\begin{aligned}f &\in \text{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, A), \\ g &\in \text{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(B, C) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(C, B), \\ A, B, C &\in \text{Ob } \mathcal{K}^\circ = \text{Ob } \mathcal{K},\end{aligned}$$

тогда композиция $f \circ g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(A, C) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(C, A)$. При переходе к дуальной категории универсальный отталкивающий объект переходит в универсальный притягивающий и обратно.

Произведение $\prod \mathcal{K}_i = \prod_{i \in I} \mathcal{K}_i$ семейства категорий $\{\mathcal{K}_i \mid i \in I\}$ определяется следующим образом: объекты этой категории суть семейства объектов

$$\prod A_i = \{A_i \in \text{Ob } \mathcal{K}_i \mid i \in I\},$$

а морфизмы из $\prod A_i$ в $\prod B_i$ суть семейства морфизмов

$$\prod f_i = \{f_i \in \text{Mor}_{\mathcal{K}_i}(A_i, B_i) \mid i \in I\},$$

закон композиции покомпонентный, т.е. $(\prod f_i) \circ (\prod g_i) = \prod (f_i \circ g_i)$.

Категория $\mathcal{K}$ называется *подкатегорией* категории $\mathcal{L}$, если объекты $\text{Ob } \mathcal{K} \subset \text{Ob } \mathcal{L}$, морфизмы $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B) \subset \text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B)$, $A, B \in \text{Ob } \mathcal{K}$, и закон композиции в $\mathcal{K}$ индуцирован из $\mathcal{L}$. Подкатегория $\mathcal{K}$ называется *полной*, если $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B)$ для всех $A, B \in \text{Ob } \mathcal{K}$.

Пусть $\mathcal{K}$ – категория и $S \in \text{Ob } \mathcal{K}$. Категория $\mathcal{K}_S$ *объектов над S* определяется следующим образом: объекты этой категории суть морфизмы $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, S)$, $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$, а морфизмы из объекта $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, S)$ в объект $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, S)$, суть морфизмы $h \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ такие, что $g \circ h = f$. Другими словами, объекты построенной только что категории $\mathcal{K}_S$ суть стрелки $A \xrightarrow{f} S$, а равенство $g \circ h = f$ записывается как коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & S & \end{array}$$

1.1.3. Произведение и сумма семейства объектов.

Пусть I – некоторое множество.

Пусть дана категория $\mathcal{K}$ и семейство ее объектов

$$\{X^i \mid i \in I\} \subset \text{Ob } \mathcal{K}.$$

Зададим категорию $\mathcal{K}^I$ следующим образом: объекты категории $\mathcal{K}^I$ суть семейства морфизмов $\{A \xrightarrow{f^i} X^i \mid i \in I\}$, $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$, а морфизмы из объекта $\{A \xrightarrow{f^i} X^i\}$ в объект $\{B \xrightarrow{g^i} X^i\}$, $A, B \in \text{Ob } \mathcal{K}$, суть морфизмы $A \xrightarrow{h} B$ категории $\mathcal{K}$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ & \searrow f^i & \swarrow g^i \\ & X^i & \end{array}$$

Если в категории $\mathcal{K}^I$ существует универсальный притягивающий объект $\{X \xrightarrow{\pi^i} X^i\}$, то объект $X \in \text{Ob } \mathcal{K}$ называется *произведением* семейства $\{X^i \mid i \in I\}$, причем обычно вместо X пишут $\prod_{i \in I} X^i$, а морфизмы $\pi^i \in \text{Mor}(X, X^i)$, $i \in I$, называются *каноническими проекциями* из $\prod X^i$ в X^i . По определению в этом

случае для всякого семейства $\{A \xrightarrow{f^i} X^i\}$ существует единственный морфизм $A \xrightarrow{f} \prod X^i$ категории $\mathcal{K}$ такой, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \prod X^i \\ & \searrow f^i & \swarrow \pi^i \\ & X^i & \end{array}$$

ПРИМЕР 1.1.4. Пусть $\mathcal{S}$ – категория множеств и $\{X^i \mid i \in I\}$ – семейство ее объектов (т.е. некоторое семейство множеств). Категория $\mathcal{S}^I$ состоит из объектов

$$\{A \xrightarrow{f^i} X^i\} = \{A \xrightarrow{f^i} X^i \mid i \in I\},$$

где A – произвольное множество, f^i – отображение из A в X^i , а морфизмы из объекта $\{A \xrightarrow{f^i} X^i\}$ в объект $\{B \xrightarrow{g^i} X^i\}$ суть отображения $A \xrightarrow{h} B$ такие, что для всякого $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ & \searrow f^i & \swarrow g^i \\ & X^i & \end{array}$$

В $\mathcal{S}^I$ существует универсальный притягивающий объект

$$\{\times X^k \xrightarrow{\pi^i} X^i\},$$

который называется *декартовым произведением* семейства $\{X^i \mid i \in I\}$. Множество $\times X^k = \times_{k \in I} X^k$ состоит из всех элементов (семейств) вида $x = (x^k) = (x^k \in X^k \mid k \in I)$, а канонические проекции $\pi^i: \times X^k \rightarrow X^i$ действуют по правилу $x \mapsto \pi^i(x) = x^i$, $i \in I$, для всех $x = (x^k) \in \times X^k$. Универсальность этой конструкции состоит в том, что для всякого семейства отображений $\{A \xrightarrow{f^i} X^i\}$ существует единственное отображение $f: A \rightarrow \times X^k$ такое, что для всякого $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \times X^k \\ & \searrow f^i & \swarrow \pi^i \\ & X^i & \end{array}$$

Отображение f действует по правилу $a \mapsto x = f(a)$, $x = (x^i)$, $x^i = f^i(a)$, $i \in I$, для всех $a \in A$.

Пусть дана категория $\mathcal{K}$ и семейство ее объектов

$$\{Y_i \mid i \in I\} \subset \text{Ob } \mathcal{K}.$$

Зададим категорию $\mathcal{K}_I$ следующим образом: объекты категории $\mathcal{K}_I$ суть семейства морфизмов $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A \mid i \in I\}$, $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$, а морфизмы из объекта $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$ в объект $\{Y_i \xrightarrow{g_i} B\}$, $A, B \in \text{Ob } \mathcal{K}$, суть морфизмы $A \xrightarrow{h} B$ категории $\mathcal{K}$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y_i & \\ f_i \swarrow & & \searrow g_i \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Если в категории $\mathcal{K}_I$ существует универсальный отталкивающий объект $\{Y_i \xrightarrow{\iota_i} Y\}$, то объект $Y \in \text{Ob } \mathcal{K}$ называется *суммой* данного семейства $\{Y_i \mid i \in I\}$, причем обычно вместо Y пишут $\sum_{i \in I} Y_i$, а морфизмы $\iota_i \in \text{Mor}(Y_i, Y)$ называются *каноническими инъекциями* слагаемых Y_i в $\sum Y_i$. По определению в этом случае для всякого семейства $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$ существует единственный морфизм $\sum Y_i \xrightarrow{f} A$ категории $\mathcal{K}$ такой, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y_i & \\ \iota_i \swarrow & & \searrow f_i \\ \sum Y_i & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

ПРИМЕР 1.1.5. Пусть $\mathcal{S}$ – категория множеств и

$$\{Y_i \mid i \in I\}$$

– семейство ее объектов. Категория $\mathcal{S}_I$ состоит из объектов $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$, где A – множество, f_i – отображения из Y_i в A , $i \in I$, а морфизмы из объекта $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$ в объект $\{Y_i \xrightarrow{g_i} B\}$

суть отображения $g: A \rightarrow B$ такие, что для всякого $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y_i & \\ f_i \swarrow & & \searrow g_i \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

В $\mathcal{S}_I$ существует универсальный отталкивающий объект

$$\{Y_i \xrightarrow{\iota_i} \bigcup Y_k\},$$

который называется *объединением* семейства множеств $\{Y_i \mid i \in I\}$. Множество

$$\bigcup Y_k = \bigcup_{k \in I} Y_k$$

состоит из всех элементов вида $x = x_k \in Y_k$, $k \in I$, а канонические инъекции $\iota_i: Y_i \rightarrow \bigcup Y_k$ суть естественные вложения подмножества в множество, $Y_i \subset \bigcup Y_k$, $i \in I$. Универсальность этой конструкции состоит в том, что для всякого семейства отображений $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$ существует единственное отображение $f: \bigcup Y_k \rightarrow A$ такое, что для всякого $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y_i & \\ \iota_i \swarrow & & \searrow f_i \\ \bigcup Y_k & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Отображение f действует по правилу $x \mapsto f(x) = f_i(x_i)$ для каждого $x = x_i \in Y_i \subset \bigcup Y_k$, $i \in I$.

В ряде категорий вместо терминов произведение и сумма используют термины *прямое произведение* и *прямая сумма*, а вместо символов $\prod$ и $\sum$ используют символы $\times$ и $\oplus$.

1.1.4. Функторы. Ковариантный функтор F из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$ есть правило, которое каждому объекту $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$ ставит в соответствие объект $F(A) \in \text{Ob } \mathcal{L}$ и каждому морфизму $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ ставит в соответствие морфизм

$$F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A), F(B)),$$

причем справедливо равенство

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow F \\ F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) & \xrightarrow{F(g)} & F(C) \end{array}$$

для всех $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{K}$ и $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$.

Контравариантный функтор F из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$ есть правило, которое каждому объекту $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$ ставит в соответствие объект $F(A) \in \text{Ob } \mathcal{L}$ и каждому морфизму $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ ставит в соответствие морфизм

$$F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(F(B), F(A)),$$

причем справедливо равенство

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow F \\ F(A) & \xleftarrow{F(f)} & F(B) & \xleftarrow{F(g)} & F(C) \end{array}$$

для всех $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{K}$ и $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$.

Пусть F и G – функторы из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$. *Естественное преобразование* Φ из F в G есть правило, которое каждому объекту $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$ ставит в соответствие морфизм

$$\Phi(A) \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A), G(A)),$$

причем коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\Phi(A)} & G(A) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(B) & \xrightarrow{\Phi(B)} & G(B)
 \end{array}$$

для всех $A, B \in \text{Ob } \mathcal{K}$, $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$.

Подробнее смотри [23] и [17], а еще подробнее смотри [9], [10], [16], [21] и [22].

1.2. Группы, кольца, модули

1.2.1. Группы. Непустое множество G называется *группой*, если в нем определена групповая операция (обычно записываемая мультипликативно и называемая умножением) $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, причем выполняются аксиомы:

- ★ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ для всех $x, y, z \in G$ (ассоциативность);
- ★ существует элемент *единица* $e = e_G \in G$ такой, что $e \cdot x = x \cdot e$ для всех $x \in G$;
- ★ для каждого $x \in G$ существует *обратный элемент* $x^{-1} \in G$ такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

ПРИМЕР 1.2.1. *Тривиальная группа* есть группа, состоящая из одного единичного элемента e , где $e \cdot e = e = e^{-1}$.

ПРИМЕР 1.2.2. Пусть S – произвольное множество. Множество $\text{Aut}(S)$ всех его автоморфизмов в категории множеств (иначе, *перестановок*) есть группа с композицией в качестве групповой операции

$$(f \circ g)(s) = f(g(s)) \quad \text{для всех } f, g \in \text{Aut}(S), s \in S.$$

Закон ассоциативности очевидно выполняется, единица есть тождественное отображение id_S , а наличие обратного отображения $f^{-1} \in \text{Aut}(S)$ для каждого $f \in \text{Aut}(S)$ входит в определение автоморфизма.

Пусть G и H – группы. Отображение $f: G \rightarrow H$ называется *мультипликативным*, если

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{для всех } x, y \in G$$

(в частности, отсюда следует, что $f(e_G) = e_H$).

Легко проверяется, что таким образом определена категория *групп* $\mathcal{G}$, объекты которой суть группы, а морфизмы – мультипликативные отображения. Морфизмы групп обычно называют *гомоморфизмами*, а вместо символа Mor используют символ Hom . Ниже используется символ Hom , но морфизмы по-прежнему называются морфизмами. Таким образом, множество всех морфизмов (мультипликативных отображений) из группы G в группу H есть $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(G, H)$.

Пусть G и H – группы. Отображение $f: G \rightarrow H$ называется *антимультипликативным* (иначе *антиморфизмом*), если

$$f(x \cdot y) = f(y) \cdot f(x) \quad \text{для всех } x, y \in G$$

(в частности, отсюда также следует, что $f(e_G) = e_H$).

ПРИМЕР 1.2.3. Пусть G – группа. Отображение $G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$, есть антиморфизм, поскольку $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ для всех $x \in G$.

Пусть G – группа. Подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы G , если оно замкнуто относительно групповой операции, индуцированной из G :

- ★ единица $e \in H$ (в частности, множество H не пустое);
- ★ произведение $x \cdot y \in H$ для всех $x, y \in H$;
- ★ обратный элемент $x^{-1} \in H$ для каждого $x \in H$.

В этом случае множество H есть группа с групповой операцией, индуцированной из G , а естественное вложение $H \subset G$ – морфизм групп.

Пусть $f: G \rightarrow H$ – морфизм групп, тогда

- ★ ядро $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}$ – подгруппа группы G , морфизм f инъективный тогда и только тогда, когда $\ker f = e_G$, т.е. когда ядро тривиальное (проверить!);
- ★ образ $\text{im } f = \{y = f(x) \in H \mid x \in G\}$ – подгруппа группы H , морфизм f сюръективный тогда и только тогда, когда $\text{im } f = H$.

Пусть H – подгруппа группы G . Для каждого элемента $a \in G$ подмножество

$$aH = \{x = a \cdot h \mid h \in H\} \subset G$$

называется *левым смежным классом* элемента a в группе G . Правило $h \mapsto a \cdot h$ определяет отображение $l_a: H \rightarrow aH$, которое является изоморфизмом категории множеств. Два левых смежных класса aH и bH , $a, b \in G$, либо совпадают, $aH = bH$ (в этом случае $a^{-1} \cdot b \in H$), либо не пересекаются, $(aH) \cap (bH) = \emptyset$ (проверить!). Следовательно, группа G есть объединение попарно непересекающихся левых смежных классов. Множество всех левых смежных классов группы G по подгруппе H обозначим через $(G/H)_l$ и определим эпиморфизм $\pi_l: G \rightarrow (G/H)_l$ правилом $a \mapsto aH$ для всех $a \in G$.

Аналогичным образом определяются и правые смежные классы Ha , обладающие такими же свойствами.

Пусть H – подгруппа группы G . Для данного элемента $a \in G$ левый смежный класс aH и правый смежный класс Ha отнюдь не обязаны совпадать. Подгруппа H называется *нормальной*, если $aH = Ha$ (или, эквивалентно, $aHa^{-1} = H$) для всех $a \in G$. Подробнее, в этом случае для любых элементов $a \in G$, $h \in H$ существует элемент $g \in H$ такой, что $a \cdot h = g \cdot a$ (очевидно, $g = a \cdot h \cdot a^{-1}$).

Пусть H – нормальная подгруппа группы G . В этом случае левые и правые смежные классы совпадают и называются просто *смежными классами*, для данного элемента $a \in G$ его смежный класс обозначают через $\mathbf{a} = aH = Ha$. Аналогичным образом, $(G/H)_l = (G/H)_r = G/H$. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G/H$, определим смежный класс $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in G/H$ правилом $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a \cdot b)H$. Проверим, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора представителей в своих классах. Пусть $a' \in \mathbf{a}$, $b' \in \mathbf{b}$, тогда $a' = a \cdot h_a$, $b' = b \cdot h_b$ для некоторых $h_a, h_b \in H$, откуда

$$\begin{aligned} (a' \cdot b')H &= \{x = a' \cdot b' \cdot h \mid h \in H\} = \{x = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b \cdot h \mid h \in H\} \\ &= \{x = (a \cdot b) \cdot (g_a \cdot h_b \cdot h) \mid h \in H\} \\ &= \{x = (a \cdot b) \cdot h' \mid h' = g_a \cdot h_b \cdot h \in H\} = (a \cdot b)H, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что по определению нормальной подгруппы существует элемент $g_a \in H$ такой, что $h_a \cdot b = b \cdot g_a$. Легко проверяется, что введенное таким образом умножение в множестве G/H ассоциативно, что смежный класс $\mathbf{e} = H$ является

единицей и что смежный класс $\mathbf{a}^{-1} = a^{-1}H$ обратный к смежному классу $\mathbf{a} = aH$ для всех $a \in G$. Другими словами, на множестве смежных классов G/H определена структура группы. По построению отображение $\pi: G \rightarrow G/H$, $a \mapsto \mathbf{a}$, есть эпиморфизм категории групп ($\text{im } \pi = G/H$), причем $\ker \pi = H$, т.е. определена точная последовательность морфизмов категории групп:

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \xrightarrow{\pi} G/H \rightarrow 1,$$

где 1 – тривиальная группа, состоящая из одной единицы. Точность в члене H означает, что ядро отображения $H \rightarrow G$ тривиальное, т.е. это отображение есть вложение, точность в члене G означает, что ядро отображения π совпадает с подгруппой H , а точность в члене G/H означает, что образ отображения π есть вся группа G/H . Группа G/H называется *факторгруппой* группы G по нормальной подгруппе H , а отображение $\pi: G \rightarrow G/H$ называется канонической проекцией группы G на факторгруппу G/H .

ЗАМЕЧАНИЕ. Тот факт, что ядро морфизма $\pi: G \rightarrow G/H$ есть нормальная подгруппа группы G не является случайным. Действительно, для любого морфизма $f: G \rightarrow F$ из группы G в группу F его ядро $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e_F\}$ есть нормальная подгруппа группы G , поскольку

$$\begin{aligned} f(a \cdot h \cdot a^{-1}) &= f(a) \cdot f(h) \cdot f(a^{-1}) = f(a) \cdot e_F \cdot f(a^{-1}) \\ &= f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(a \cdot a^{-1}) = f(e_G) = e_F \end{aligned}$$

для всех $a \in G$ и $h \in \ker f$.

Пусть G – группа и S – ее подмножество. Множество

$$N_S = \{a \in G \mid aSa^{-1} = S\}, \quad \text{где} \quad aSa^{-1} = \{x = a \cdot s \cdot a^{-1} \mid s \in S\},$$

называется *нормализатором* подмножества S и обладает следующими свойствами:

- ★ N_S есть подгруппа группы G для всякого $S \subset G$;
- ★ если S – подгруппа группы G , то $S \subset N_S$ и является нормальной подгруппой группы N_S , более того, N_S – наибольшая подгруппа в G , для которой S – нормальная подгруппа;
- ★ если S – нормальная подгруппа группы G , то $N_S = G$.

Далее, множество

$$Z_S = \{z \in G \mid z \cdot s = s \cdot z \text{ для всех } s \in S\}$$

называется *централизатором* подмножества S и обладает следующими свойствами:

- ★ Z_S есть подгруппа группы G для всякого $S \subset G$;
- ★ $Z_{\{s\}} = N_{\{s\}}$, когда $S = \{s\}$ состоит из одного элемента.

В случае $S = G$ централизатор Z_G называется *центром* группы G .

Пусть S – некоторое множество и $\text{Aut}(S)$ – группа его автоморфизмов в категории множеств. *Левым действием* группы G на множестве S называется любой морфизм $L \in \text{Hom}_G(G, \text{Aut}(S))$, $a \mapsto L_a \in \text{Aut}(S)$, используют запись $L_a(s) = a \cdot s$ для всех $a \in G$, $s \in S$. Таким образом,

- ★ $L_{a \cdot b}(s) = (a \cdot b) \cdot s = (L_a \circ L_b)(s) = a \cdot (b \cdot s) = a \cdot b \cdot s$ для всех $a, b \in G$, $s \in S$;
- ★ $L_e(s) = e \cdot s = s$ для всех $s \in S$, где $e = e_G$ – единица группы G ;
- ★ $L_{a^{-1}}(s) = L_a^{-1}(s) = a^{-1} \cdot s$ для всех $a \in G$, $s \in S$.

Правое действие определяется дуальным образом, с заменой морфизма на антиморфизм. Подробнее, правое действие

$$R: G \rightarrow \text{Aut}(S)$$

есть отображение из G в $\text{Aut}(S)$, $a \mapsto R_a$, используют запись $R_a(s) = s \cdot a$, такое, что

- ★ $R_{a \cdot b}(s) = s \cdot (a \cdot b) = (R_b \circ R_a)(s) = (s \cdot a) \cdot b = s \cdot a \cdot b$ для всех $a, b \in G$, $s \in S$;
- ★ $R_e(s) = s \cdot e = s$ для всех $s \in S$;
- ★ $R_{a^{-1}}(s) = R_a^{-1}(s) = s \cdot a^{-1}$ для всех $a \in G$, $s \in S$.

В обоих случаях группа G называется *группой (левых, правых) преобразований множества S* .

Левое действие группы G на множестве S называется *транзитивным*, если для любых точек $r, s \in S$ найдется элемент $a \in G$ такой, что $r = a \cdot s$, *свободным*, если равенство $a \cdot s = s$ для данных $a \in G$, $s \in S$ влечет $a = e$, *эффективным*, если равенство $a \cdot s = s$ для данного $a \in G$ и всех $s \in S$ влечет $a = e$. Аналогичная терминология используется и для правого действия.

ПРИМЕР 1.2.4. Пусть G – группа. *Левый сдвиг*

$$l \in \text{Hom}_G(G, \text{Aut}(G)), \quad a \mapsto l_a,$$

определяется правилом $l_a(x) = a \cdot x$ для всех $a, x \in G$ (напомним, что $\text{Aut}(G)$ – группа автоморфизмов множества G в категории множеств). Это действие, очевидно, свободное и транзитивное. Дуальным образом, *правый сдвиг* $r: G \rightarrow \text{Aut}(G)$, $a \mapsto r_a$, определяется правилом $r_a(x) = x \cdot a$ для всех $a, x \in G$. Кроме того, правило $a \mapsto L_a = r_{a^{-1}}$ задает левое действие, а правило $a \mapsto R_a = l_{a^{-1}}$ – правое действие на G .

ПРИМЕР 1.2.5. Пусть G – группа. Левое действие на G , ассоциированное со сдвигами, есть

$$\text{ad} \in \text{Hom}_G(G, \text{Aut}(G)), \quad a \mapsto \text{ad}(a) = l_a \circ r_{a^{-1}} = r_{a^{-1}} \circ l_a,$$

оно называется *присоединенным действием* или *внутренним автоморфизмом*. В явном виде,

$$\text{ad}(a)(x) = a \cdot x \cdot a^{-1} \quad \text{для всех } a, x \in G.$$

Очевидно, это действие не транзитивное и не свободное, поскольку здесь $a \cdot e \cdot a^{-1} = e$ для всех $a \in G$. Как только что отмечалось, $\text{Aut}(G)$ – группа автоморфизмов множества G в категории множеств, однако в данном случае для каждого элемента $a \in G$ действие $\text{ad}(a)$ есть автоморфизм группы G в категории групп, поскольку

$$\begin{aligned} \text{ad}(a)(x \cdot y) &= a \cdot x \cdot y \cdot a^{-1} = (a \cdot x \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot y \cdot a^{-1}) \\ &= \text{ad}(a)(x) \cdot \text{ad}(a)(y) \quad \text{для всех } x, y \in G. \end{aligned}$$

Пусть группа G действует (слева) на множестве S , $(a, s) \mapsto a \cdot s$ для всех $(a, s) \in G \times S$.

Пусть $s \in S$. Множество $G_s = \{a \in G \mid a \cdot s = s\}$ является подгруппой группы G и называется *группой изотропии* (иначе, *стабильной подгруппой*) элемента s в G . Пусть $r, s \in S$, $r = g \cdot s$ для некоторого $g \in G$, тогда

$$\begin{aligned} gG_s g^{-1} &= g\{a \in G \mid a \cdot s = s\}g^{-1} = \{g \cdot a \cdot g^{-1} \in G \mid a \cdot s = s\} \\ &= \{b \in G \mid g^{-1} \cdot b \cdot g \cdot s = s\} = \{b \in G \mid b \cdot (g \cdot s) = g \cdot s\} \\ &= \{b \in G \mid b \cdot r = r\} = G_r, \end{aligned}$$

таким образом, в этом случае подгруппы G_r и G_s сопряжены и, следовательно, изоморфны, поскольку отображение

$$\text{ad}(g): G_s \rightarrow gG_s g^{-1}$$

является изоморфизмом групп. В частности, если группа G действует на множестве S транзитивно, то все группы изотропии G_s , $s \in S$, сопряжены между собой, а если свободно, то все они тривиальные, т.е. в этом случае $G_s = \{e\}$ для всех $s \in S$.

Пусть $s \in S$. Множество $Gs = \{t = a \cdot s \in S \mid a \in G\}$ называется *орбитой* элемента s . Множество всех орбит в S относительно действия группы G обозначается через S/G . Две орбиты Gr и Gs , $r, s \in S$, либо совпадают, $Gr = Gs$ (в этом случае $r = g \cdot s$ с некоторым $g \in G$), либо не пересекаются, $(Gr) \cap (Gs) = \emptyset$. Следовательно, множество S разбивается в дизъюнктивную сумму орбит. Очевидно, действие группы G на S транзитивно тогда и только тогда, когда множество S/G состоит всего из одной орбиты – самого множества S .

ПРИМЕР 1.2.6. Пусть $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел, обозначим через $\mathbb{R}_{\pm} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ – множество всех положительных/отрицательных чисел. Пусть $G = \mathbb{R}_{+}$ – группа всех положительных чисел по умножению, $S = \mathbb{R}$. Группа G естественным образом действует на множестве S , $(a, x) \mapsto ax$. Пусть $s \in S$, тогда

$$Gs = \begin{cases} \{1\}, & s \neq 0, \\ G, & s = 0; \end{cases} \quad Gs = \begin{cases} \mathbb{R}_{+}, & s > 0, \\ \{0\}, & s = 0, \\ \mathbb{R}_{-}, & s < 0. \end{cases}$$

В частности, $S/G = \{\mathbb{R}_{-}, \{0\}, \mathbb{R}_{+}\}$, $S = \mathbb{R}_{-} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_{+}$.

В случае, когда множество S обладает дополнительной алгебраической структурой, рассматриваются действия, согласованные с этой структурой. Так, пусть S – линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ (например, над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$) и $GL(S, \mathbb{F}) \subset \text{Aut}(S)$ – группа всех его автоморфизмов в категории линейных пространств (т.е. всех обратимых линейных преобразований пространства S). В этом случае левые действия $L \in \text{Hom}_G(G, GL(S, \mathbb{F}))$ называются *представлениями* группы G в линейном пространстве S .

1.2.2. Абелевы группы. Коммутативные группы называются абелевыми. Именно, непустое множество G называется *абелевой группой*, если в нем определена коммутативная групповая операция (обычно записываемая аддитивно и называемая сложением) $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto a + b$, причем выполняются аксиомы:

- ★ $a + b = b + a$ для всех $a, b \in G$ (коммутативность);
- ★ $(a + b) + c = a + (b + c)$ для всех $a, b, c \in G$ (ассоциативность);
- ★ существует *нулевой элемент* $0 = 0_G \in G$ такой, что $a + 0 = a$ для всех $a \in G$;
- ★ для каждого $a \in G$ имеется *противоположный элемент* $-a \in G$ такой, что $a + (-a) = 0$.

Пусть G и H – абелевы группы. Отображение $f: G \rightarrow H$ называется *аддитивным*, если

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \text{для всех } a, b \in G$$

(в частности, отсюда следует, что $f(0_G) = 0_H$).

Легко проверяется, что таким образом определена категория *абелевых групп* $\mathcal{AG}$, объекты которой суть абелевы группы, а морфизмы – аддитивные отображения. Морфизмы абелевых групп обычно называют *гомоморфизмами*, а вместо символа Mor используют символ Hom . Ниже используется символ Hom , но морфизмы по-прежнему называются морфизмами. Таким образом, множество всех морфизмов (аддитивных отображений) из абелевой группы G в абелеву группу H есть $\text{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$.

Простейшая абелева группа есть *нулевая группа*, состоящая из одного нулевого элемента; она является одновременно универсальным отталкивающим и универсальным притягивающим объектом категории $\mathcal{AG}$.

Важная абелева группа есть множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$ со стандартной операцией сложения.

Непустое подмножество $H \subset G$ есть *подгруппа* группы G , если оно замкнуто относительно групповой операции, индуцированной из G . Пусть G – абелева группа и H – ее подгруппа. Элементы $a, b \in G$ называются *эквивалентными относительно H* , пишут $a \sim b$, если разность $a - b \in H$. Класс эквивалентности элемента $a \in G$ есть подмножество $\mathbf{a} = a + H \subset G$. Множество G/H всех таких классов эквивалентности есть абелева группа со сложением, индуцированным из G ,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a + b + H \quad \text{для всех } \mathbf{a} = a + H, \mathbf{b} = b + H \in G/H, a, b \in G.$$

Эта группа называется *факторгруппой* группы G по подгруппе H . Имеется естественный морфизм $\pi: G \rightarrow G/H$, $a \mapsto \mathbf{a}$ для всех $a \in G$.

Для абелевых групп G и H множество морфизмов

$$\text{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$$

есть абелева группа с поточечной групповой операцией

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

для всех $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ и $a \in G$.

Пусть $f: A \rightarrow B$ – морфизм абелевых групп. *Ядро* морфизма f есть абелева группа $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$, а *образ* морфизма f есть абелева группа $\text{im } f = \{b = f(a) \in B \mid a \in A\}$. Очевидно, $\ker f$ – подгруппа в A , а $\text{im } f$ – подгруппа в B . Морфизм $f: A \rightarrow B$ является мономорфизмом, если $\ker f = 0$, и эпиморфизмом, если $\text{im } f = B$. В категории $\mathcal{AG}$ морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он мономорфизм и эпиморфизм одновременно.

1.2.3. Кольца. Абелева группа R называется *кольцом*, если в ней, кроме аддитивной операции – сложения, определена биадитивная операция – *умножение*:

$$R \times R \rightarrow R, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \quad \text{для всех } a, b \in R,$$

так что

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{и} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ \text{для всех } a, b, c \in R.$$

Пусть R и S – кольца. Морфизм абелевых групп $f: R \rightarrow S$ называется *морфизмом колец*, если дополнительно

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \text{для всех } a, b \in R.$$

Легко проверяется, что таким образом определена категория *колец* $\mathcal{R}$, объекты которой суть кольца, а морфизмы – морфизмы колец.

ПРИМЕР 1.2.7. Простейший пример кольца есть *нулевое кольцо*, состоящее из одного нулевого элемента; оно является одновременно универсальным отталкивающим и универсальным притягивающим объектом категории $\mathcal{R}$.

ПРИМЕР 1.2.8. Важные примеры колец – кольца целых чисел $\mathbb{Z}$, рациональных чисел $\mathbb{Q}$, вещественных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$.

ПРИМЕР 1.2.9. Популярный класс колец имеет следующую природу. Пусть X – данное множество, R – данное кольцо. Множество $R^X = \text{Map}(X, R)$ всех отображений из X в R имеет естественную структуру кольца, причем кольцевые операции определяются поточечно:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

для всех $f, g \in R^X$, $x \in X$. Нулем этого кольца является нулевое отображение $0 = 0_{R^X} : X \rightarrow R$, $x \mapsto 0(x) = 0 = 0_R$ для всех $x \in X$.

ПРИМЕР 1.2.10. Другой популярный класс колец строится следующим образом. Пусть G – абелева группа и

$$\text{End}(G) = \text{End}_{\mathcal{AG}}(G)$$

– множество всех ее эндоморфизмов в категории абелевых групп. Множество $\text{End}(G)$ также обладает естественной структурой кольца, причем сложение определяется поточечно, а умножение – композицией отображений, т.е.

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad (f \cdot g)(a) = (f \circ g)(a) = f(g(a))$$

для всех $f, g \in \text{End}(G)$, $a \in G$. Нулем этого кольца является нулевой эндоморфизм $0 = 0_{\text{End}(G)} : G \rightarrow G$, $a \mapsto 0(a) = 0 = 0_G$ для всех $a \in G$.

Кольцо R называется *унитальным*, если в нем имеется элемент *единица* $e = e_R \in R$ такой, что

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \text{для всех } a \in R.$$

Пусть R и S – унитарные кольца. Морфизм колец $f : R \rightarrow S$ называется *морфизмом унитарных колец*, если дополнительно $f(e_R) = e_S$.

Кольцо R называется *ассоциативным*, если

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{для всех } a, b, c \in R.$$

Обычно в ассоциативных кольцах при записи умножения точку опускают, т.е. пишут ab вместо $a \cdot b$.

Кольцо R называется *коммутативным*, если

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{для всех } a, b \in R.$$

Очевидно, кольцо R^X унитарное, ассоциативное, коммутативное, если таковым является кольцо R ; единицей кольца R^X является отображение $e = e_{R^X} : X \rightarrow R$, $x \mapsto e(x) = e_R$ для всех $x \in X$.

Кольцо $\text{End}(G)$ – унитарное и ассоциативное, причем единица этого кольца есть тождественный эндоморфизм

$$e_{\text{End}(G)} = \text{id}_G : G \rightarrow G, \quad a \mapsto \text{id}_G(a) = a \quad \text{для всех } a \in G.$$

Вообще говоря, кольцо $\text{End}(G)$ не коммутативное.

Пусть R – кольцо. Подгруппа S абелевой группы R называется *подкольцом* кольца R , если она является кольцом, с умножением индуцированным из R , т.е. если $a \cdot b \in S$ для всех $a, b \in S$.

ПРИМЕР 1.2.11. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ есть подкольцо кольца вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Левый идеал I кольца R есть подгруппа абелевой группы R такая, что $R \cdot I \subset I$ (т.е. $a \cdot b \in I$ для всех $a \in R$, $b \in I$); в частности I – подкольцо кольца R . Аналогично, *правый идеал* J кольца R есть подгруппа абелевой группы R такая, что $J \cdot R \subset R$. В свою очередь, *двусторонний идеал* H кольца R есть подмножество множества R , которое одновременно является левым и правым идеалом кольца R . Ниже двусторонние идеалы будем называть просто *идеалами*.

ПРИМЕР 1.2.12. Множество четных чисел $2\mathbb{Z}$ есть идеал кольца целых чисел $\mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 1.2.13. Пусть G – абелева группа, S – ее подгруппа, и пусть

$$\text{End}(G \mid S) = \{f \in \text{End}(G) \mid \ker f \supset S\}.$$

Очевидно, $\text{End}(G \mid S)$ – левый идеал кольца $\text{End}(G)$.

ПРИМЕР 1.2.14. Пусть R , S – кольца и $f : R \rightarrow S$ – морфизм колец. Тогда ядро $\ker f = \{a \in R \mid f(a) = 0\}$ – идеал кольца R , в то время как образ $\text{im } f = \{b = f(a) \in S \mid a \in R\}$ – подкольцо кольца S .

Пусть R – кольцо и I – его идеал. В частности, I – подгруппа абелевой группы R , так что определена факторгруппа R/I . Более того, R/I есть кольцо с умножением, индуцированным из R правилом

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b + I \quad \text{для всех } \mathbf{a} = a + I, \mathbf{b} = b + I \in R/I, \quad a, b \in R.$$

Кольцо R/I называется *факторкольцом* кольца R по идеалу I . Имеется естественный морфизм колец $\pi: R \rightarrow R/I, a \mapsto \mathbf{a} = a + I$ для всех $a \in R$.

1.2.4. Модули. Пусть R – ассоциативное кольцо. Абелева группа M называется *левым R -модулем*, иначе *левым модулем над R* , если определено левое действие кольца R на группе M , т.е. задан морфизм колец $\mu: R \rightarrow \text{End}(M)$. Подробнее, в этом случае каждому $a \in R$ ставится в соответствие эндоморфизм абелевых групп $\mu(a): M \rightarrow M, x \mapsto \mu(a)(x) = ax$ (запись $\mu(a)(x)$ сокращают до ax , так что в явном виде морфизм μ не фигурирует), причем выполнены условия

$$a(x + y) = ax + ay, \quad (a + b)x = ax + bx, \quad (ab)x = a(bx)$$

для всех $a, b \in R$ и $x, y \in M$. Если кольцо R унитарное (и по-прежнему ассоциативное), то дополнительно налагают условие $ex = x$ для всех $x \in M$, где e – единица кольца R .

Правые модули над ассоциативным кольцом R определяются заменой левого действия на правое, т.е. морфизма колец – на антиморфизм, другими словами, условие $\mu(ab) = \mu(a) \circ \mu(b)$ заменяется на дуальное условие $\mu(ab) = \mu(b) \circ \mu(a)$. Итак, абелева группа N называется *правым R -модулем*, иначе *правым модулем над R* , если каждой паре $a \in R, x \in N$ поставлен в соответствие элемент $xa \in N$, причем

$$(x + y)a = xa + ya, \quad x(a + b) = xa + xb, \quad x(ab) = (xa)b$$

для всех $a, b \in R, x, y \in N$.

Если ассоциативное кольцо R еще и коммутативное, то понятия левого и правого действия совпадают; как следствие, над коммутативными кольцами совпадают понятия левых и правых модулей. В этом случае используется общий термин *модуль* и левая запись.

Если на абелевой группе P определено и левое, и правое действия ассоциативного кольца R , причем выполнено естественное

условие ассоциативности

$$(ax)b = a(xb) \quad \text{для всех } a, b \in R, x \in P,$$

то P называется *двусторонним R -модулем*.

ПРИМЕР 1.2.15. Всякая абелева группа G является модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, поскольку

$$\begin{aligned} 0x &= 0, \quad 1x = x, \quad 2x = x + x, \quad \dots, \\ (-1)x &= -(1x) = -x, \quad (-2)x = -(2x), \quad \dots \end{aligned}$$

для всех $x \in G$.

ПРИМЕР 1.2.16. Нулевая абелева группа является двусторонним модулем над любым ассоциативным кольцом.

ПРИМЕР 1.2.17. Пусть R – ассоциативное кольцо и I – его левый идеал (в частности, $I = R$). *Левое присоединенное действие* $\text{ad}_l: R \rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}G}(I)$ определяется правилом

$$a \mapsto \text{ad}_l(a): I \rightarrow I, \quad x \mapsto \text{ad}_l(a)(x) = ax \quad \text{для всех } a \in R, x \in I.$$

Таким образом, I можно рассматривать как левый R -модуль. Аналогичным образом, правый идеал J кольца R является правым R -модулем относительно *правого присоединенного действия* $\text{ad}_r: R \rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}G}(J)$,

$$a \mapsto \text{ad}_r(a): J \rightarrow J, \quad x \mapsto \text{ad}_r(a)(x) = xa \quad \text{для всех } a \in R, x \in J.$$

В частности, всякий двусторонний идеал ассоциативного кольца можно рассматривать как двусторонний модуль над этим кольцом.

ПРИМЕР 1.2.18. Всякая абелева группа G является левым модулем над кольцом ее эндоморфизмов $\text{End}_{\mathcal{A}G}(G)$ относительно тождественного действия, $\text{id}: \text{End}_{\mathcal{A}G}(G) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}G}(G)$.

ПРИМЕР 1.2.19. Всякая абелева группа G является *тривиальным модулем* над любым ассоциативным кольцом R относительно тривиального действия

$$ax = 0 \quad \text{для всех } a \in R, x \in G.$$

ПРИМЕР 1.2.20. Пусть I – множество, R – ассоциативное кольцо, M – левый R -модуль. Множество $M^I = \text{Map}(I, M)$ всех отображений из I в M есть левый R -модуль, где сложение задается поточечно,

$$(\phi + \psi)(i) = \phi(i) + \psi(i) \quad \text{для всех } \phi, \psi \in M^I, i \in I,$$

а левое действие кольца R индуцировано его действием в модуле M ,

$$(a\phi)(i) = a\phi(i) \quad \text{для всех } a \in R, \phi \in M^I, i \in I.$$

Важный частный случай есть $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае вместо $M^{\{1, 2, \dots, n\}}$ обычно пишут M^n , а элементы из M^n записывают как столбцы высотой n с компонентами из M .

Ниже мы будем в основном говорить лишь о левых модулях. Однако все рассуждения легко переносятся на правые и двусторонние модули (предлагаю делать это в качестве упражнения).

Пусть R – ассоциативное кольцо и M, N – левые R -модули. Морфизм абелевых групп $f: M \rightarrow N$ называется *морфизмом левых R -модулей*, иначе *R -линейным отображением*, если дополнительно

$$f(ax) = af(x) \quad \text{для всех } a \in R, x \in M.$$

Легко проверяется, что таким образом определена *категория левых модулей* над данным кольцом R . Обозначим эту категорию через $\mathcal{LM}_R$, множество ее объектов обозначим через $\text{Ob } \mathcal{LM}_R$, а множество морфизмов из модуля M в модуль N будем обозначать через $\text{Hom}_{\mathcal{LM}_R}(M, N)$ или, короче, через $\text{Hom}_R(M, N)$.

Итак, каждому ассоциативному кольцу $R \in \mathcal{R}$ поставлена в соответствие категория $\mathcal{LM}_R$ левых модулей над R . Это соответствие функториальное. Именно, пусть $\mathcal{R}_{ass}$ – категория ассоциативных колец (проверить, что такая категория существует). Рассмотрим категорию $\mathcal{LM}$ всех левых модулей. Объекты этой категории суть категории $\mathcal{LM}_R$ левых R -модулей, $R \in \mathcal{R}_{ass}$, морфизмы из объекта $\mathcal{LM}_R$ в объект $\mathcal{LM}_S$ суть ковариантные функторы из категории $\mathcal{LM}_R$ в категорию $\mathcal{LM}_S$. Контравариантный функтор из категории ассоциативных колец $\mathcal{R}_{ass}$ в категорию левых модулей $\mathcal{LM}$ задается следующим образом. Каждому кольцу $R \in \mathcal{R}_{ass}$ ставится в соответствие категория $F(R) = \mathcal{LM}_R$,

а каждому морфизму колец $\phi: R \rightarrow S$ ставится в соответствие функтор $\Phi = F(\phi): \mathcal{LM}_S \rightarrow \mathcal{LM}_R$, действующий по правилу: каждому левому S -модулю M с действием $\mu_S: S \rightarrow \text{End}(M)$ ставится в соответствие R -модуль $\Phi(M) = M$, совпадающий с M как абелева группа, но с действием $\mu_R = \mu_S \circ \phi: R \rightarrow \text{End}(M)$; в свою очередь, каждому S -линейному отображению $h: M \rightarrow N$, $M, N \in \mathcal{LM}_S$, ставится в соответствие R -линейное отображение $\Phi(h): \Phi(M) \rightarrow \Phi(N)$, где $\Phi(h)(x) = h(x)$ для всех $x \in M = \Phi(M)$ (так что $\Phi(h)$ и h совпадают как морфизмы абелевых групп), причем

$$\begin{aligned}\Phi(h)(\mu_R(a)(x)) &= h(\mu_S(\phi(a))(x)) = \mu_S(\phi(a))(h(x)) = \mu_R(a)(h(x)) \\ &= \mu_R(a)(\Phi(h)(x))\end{aligned}$$

для всех $a \in R$ и $x \in M = \Phi(M)$. Легко проверяется, что приведенная конструкция корректна.

Пусть $R \in \mathcal{R}_{ass}$ и $M, N \in \mathcal{LM}_R$. Множество $\text{Hom}_R(M, N)$ всех R -линейных отображений из M в N обладает естественной структурой абелевой группы, сложение определяется поточечно

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{для всех } f, g \in \text{Hom}_R(M, N), x \in M.$$

В частности, для любого семейства $\{f_i \in \text{Hom}_R(M, N) \mid i \in I\}$, где I – конечное множество, определена его сумма

$$\sum f_i = \sum_{i \in I} f_i \in \text{Hom}_R(M, N), \quad \left(\sum f_i\right)(x) = \sum f_i(x), \quad x \in M.$$

Более того, поточечное правило определяет сумму $\sum f_i$ и для бесконечного множества I , при условии, что для всякого $x \in M$ образ $f_i(x) \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $i \in I$.

Пусть $R \in \mathcal{R}_{ass}$ и $M \in \mathcal{LM}_R$. Абелева группа

$$\text{End}_R(M) = \text{Hom}_R(M, M)$$

обладает естественной структурой унитарного ассоциативного кольца относительно композиции эндоморфизмов

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{для всех } f, g \in \text{End}_R(M), x \in M.$$

Пусть $R \in \mathcal{R}_{ass}$ и $M \in \mathcal{LM}_R$. Подгруппа S абелевой группы M называется *подмодулем* модуля M , если S является левым R -модулем относительно действия, индуцированного из M , т.е. если $ax \in S$ для всех $a \in R$ и $x \in S$.

ПРИМЕР 1.2.21. Нулевая подгруппа 0 и сам модуль M являются тривиальными подмодулями модуля M .

ПРИМЕР 1.2.22. Рассмотрим ассоциативное кольцо R как левый R -модуль относительно левого присоединенного действия (см. пример 1.2.17); подмножество $I \subset R$ будет подмодулем модуля R тогда и только тогда, когда I есть идеал кольца R .

ПРИМЕР 1.2.23. Пусть M, N – левые R -модули и $f: M \rightarrow N$ – морфизм левых R -модулей. Тогда ядро $\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ – подмодуль модуля M , а образ $\operatorname{im} f = \{y = f(x) \mid x \in M\}$ – подмодуль модуля N .

ПРИМЕР 1.2.24. Пусть I – множество, R – ассоциативное кольцо, M – левый R -модуль. Пусть $\phi \in M^I$ (см. пример 1.2.20). Множество

$$\operatorname{supp} \phi = \{i \in I \mid \phi(i) \neq 0\}$$

называется *носителем* отображения ϕ . Отображение ϕ называется *конечным*, если $\operatorname{supp} \phi$ – конечное множество (состоит из конечного числа элементов). Множество M_{fin}^I всех конечных отображений из M^I является подмодулем левого R -модуля M^I .

ПРИМЕР 1.2.25. Пусть M – левый R -модуль и S – подмножество множества M . Множество $R\text{-hull}\{S\}$ всех конечных R -линейных комбинаций вида $\sum_i a_i x_i$, где $a_i \in R$, $x_i \in S$, есть минимальный подмодуль модуля M , содержащий S , называемый *подмодулем, порожденным подмножеством S* .

ПРИМЕР 1.2.26. Пусть M – левый R -модуль и $\{N_i \subset M \mid i \in I\}$ – семейство его подмодулей. Теоретико-множественное пересечение $\bigcap_{i \in I} N_i$ есть подмодуль модуля M , называемый *пересечением семейства подмодулей $\{N_i \subset M \mid i \in I\}$* . В свою очередь, теоретико-множественное объединение $\bigcup_{i \in I} N_i$ не обладает структурой подмодуля, однако порождает подмодуль

$$\sum_{i \in I} N_i = R\text{-hull}\{\bigcup_{i \in I} N_i\},$$

называемый *суммой семейства подмодулей $\{N_i \subset M \mid i \in I\}$* . Эта сумма называется *прямой*, если всякий элемент $x \in \sum_{i \in I} N_i$ имеет единственное представление $x = \sum_{i \in I} x_i$, где лишь конечное слагаемых $x_i \in N_i$ ненулевые, в этом случае вместо $\sum_{i \in I} N_i$ пишут $\bigoplus_{i \in I} N_i$.

Пусть R – ассоциативное кольцо, M – левый R -модуль и S – его подмодуль. В частности, S – подгруппа абелевой группы M , так что определена факторгруппа M/S . Легко проверяется, что на M/S определено левое действие кольца R , индуцированное из M ,

$$\begin{aligned}\mu: R \rightarrow \text{End}(M/S), \quad a \mapsto \mu(a): M/S \rightarrow M/S, \\ \mathbf{x} = x + S \mapsto \mu(a)(\mathbf{x}) = \mu(a)(x) + S\end{aligned}$$

(короче, $a \cdot (x + S) = ax + S$) для всех $a \in R$ и $x \in M$. Левый R -модуль M/S называется *фактормодулем* модуля M . Имеется канонический морфизм левых R -модулей $\pi: M \rightarrow M/S$, действующий по правилу

$$\pi(x) = \mathbf{x} = x + S \quad \text{для всех } x \in M.$$

Очевидно, ядро $\ker \pi = S$, а образ $\text{im } \pi = M/S$. Более того, морфизм π обладает следующим свойством универсальности. Рассмотрим категорию, объекты которой суть морфизмы левых R -модулей $M \xrightarrow{f} N$ такие, что $\ker f \supset S$, а морфизмы из объекта $M \xrightarrow{f} N$ в объект $M \xrightarrow{g} P$ суть морфизмы левых R -модулей $N \xrightarrow{h} P$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ N & \xrightarrow{h} & P \end{array}$$

Легко проверяется, что морфизм $M \xrightarrow{\pi} M/S$ является универсальным отталкивающим объектом этой категории, т.е. для любого морфизма $M \xrightarrow{f} N$ такого, что $\ker f \supset S$, существует единственный морфизм $M/S \xrightarrow{\mathbf{f}} N$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ M/S & \xrightarrow{\mathbf{f}} & N \end{array}$$

Очевидно морфизм $\mathbf{f}$ действует по правилу

$$\mathbf{x} = x + S \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) \quad \text{для всех } x \in M.$$

Рассмотрим важный частный случай. Пусть S – подмодуль левого R -модуля M , T – подмодуль левого R -модуля N , $f: M \rightarrow N$ – морфизм левых R -модулей такой, что $f(S) \subset T$. Зададим морфизм левых R -модулей $f': M \rightarrow N/T$ правилом

$$x \mapsto f'(x) = f(x) + T \quad \text{для всех } x \in M.$$

Очевидно, $f'(S) = 0$, так что определен фактоморфизм

$$\mathbf{f}: M/S \rightarrow N/T,$$

действующий по правилу

$$\mathbf{x} = x + S \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) + T \quad \text{для всех } x \in M.$$

Его ядро

$$\ker \mathbf{f} = \{\mathbf{x} \in M/S \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\} = \{x + S \mid f(x) \in T\} = f^{-1}(T)/S,$$

где $f^{-1}(T) = f^{-1}(\text{im } f \cap T)$ – прообраз подмодуля T , а образ

$$\begin{aligned} \text{im } \mathbf{f} &= \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in M/S\} = \{f(x) + T \mid x \in M\} \\ &= \{f(x) + \text{im } f \cap T \mid x \in M\} = \text{im } f / (\text{im } f \cap T), \end{aligned}$$

напомним, что $\text{im } f = f(M)$. В частности, $\mathbf{f}$ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $f(M) = N$ и $f(S) = T$.

Последовательность морфизмов левых R -модулей

$$\dots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

называется *точной в члене M_n* , если $\text{im } f_{n-1} = \ker f_n$, эта последовательность называется *точной*, если она точная во всех своих членах.

ПРИМЕР 1.2.27. Фактормодуль M/S левого R -модуля M по подмодулю S полностью описывается точной последовательностью

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/S \longrightarrow 0,$$

где стрелки $0 \rightarrow$ и $\rightarrow 0$ – универсальные морфизмы категории левых R -модулей, $S \rightarrow M$ – естественное вложение, $M \xrightarrow{\pi} M/S$ – канонический морфизм, точность в члене S означает, что вложение имеет тривиальное ядро, точность в члене M означает, что $\ker \pi = S$, точность в члене M/S означает, что $\operatorname{im} \pi = M/S$.

ПРИМЕР 1.2.28. Для всякого морфизма $f: M \rightarrow N$ левых R -модулей определена точная последовательность левых R -модулей

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{im} f \longrightarrow 0,$$

где стрелки $0 \rightarrow$ и $\rightarrow 0$ – универсальные морфизмы категории левых R -модулей, $\ker f \longrightarrow M$ – естественное вложение, $N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{im} f$ – канонический морфизм, точность в члене $\ker f$ означает, что вложение имеет тривиальное ядро, точность в члене M означает, что $\ker \pi = \ker f$, точность в члене $N/\operatorname{im} f$ означает, что $\operatorname{im} \pi = N/\operatorname{im} f$.

$$\ker \pi = \ker f,$$

точность в члене $N/\operatorname{im} f$ означает, что $\operatorname{im} \pi = N/\operatorname{im} f$.

$$\operatorname{im} \pi = N/\operatorname{im} f.$$

Учитывая последний факт, фактормодуль $N/\operatorname{im} f$ часто называют *коядром* морфизма f .

В качестве упражнения по диаграммной технике, с максимальной подробностью докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 1.2.1. Пусть коммутативная диаграмма левых R -модулей

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

ацикличная, т.е. все ее строки и столбцы точные. Тогда существует единственный морфизм левых R -модулей $\nu: N \rightarrow Z$ такой, что дополненная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

также коммутативная и ацикличная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего поясним, что точность столбцов означает, что λ , μ (и ν) – изоморфизмы, точность верхней строки в члене L означает, что f – мономорфизм ($\ker f = 0$), точность в члене M означает, что $\operatorname{im} f = \ker g$, а точность в члене N означает, что g – эпиморфизм ($\operatorname{im} g = N$), для нижней строки – аналогично.

Приступим к доказательству.

Морфизм $\nu: N \rightarrow Z$, построим следующим образом: каждому $n \in N$ поставим в соответствие $z = \nu(n) = (v \circ \mu)(m) \in Z$, где $m \in M$ такой, что $g(m) = n$ (g – эпиморфизм).

Проверим корректность этого определения, т.е. его независимость от выбора $m \in M$. Пусть $m, m' \in M$ такие, что

$$g(m') = g(m) = n,$$

тогда $g(m' - m) = 0$ и $m' - m = f(l)$, $l \in L$ ($\operatorname{im} f = \ker g$), т.е. $m' = m + f(l)$, и, значит,

$$z' = (v \circ \mu)(m') = (v \circ \mu)(m) + (v \circ \mu \circ f)(l) = z + 0 = z,$$

поскольку $(v \circ \mu \circ f)(l) = (v \circ u \circ \lambda)(l) = 0$ ($v \circ u = 0$).

Проверим, что ν – морфизм левых R -модулей. Пусть

$$n = a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2, \quad a_i \in R, \quad n_i \in N, \quad i = 1, 2.$$

Выберем $m_i \in M$ так, чтобы $n_i = g(m_i)$, и положим

$$m = a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2,$$

тогда

$$\begin{aligned} \nu(a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2) &= (v \circ \mu)(a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2) \\ &= a_1 \cdot (v \circ \mu)(m_1) + a_2 \cdot (v \circ \mu)(m_2) \\ &= a_1 \cdot \nu(n_1) + a_2 \cdot \nu(n_2). \end{aligned}$$

По построению $\nu(n) = (v \circ \mu)(m)$ для всех $m \in M$ таких, что $g(m) = n \in Z$, т.е. $(v \circ \mu)(m) = (\nu \circ g)(m)$ для всех $m \in M$, т.е. $v \circ \mu = \nu \circ g$, и, значит, новый квадрат

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & N \\ \mu \downarrow & & \downarrow \nu \\ Y & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

коммутативный.

Покажем, что ν – мономорфизм, т.е. что $\ker \nu = 0$. Пусть $n \in N$, $\nu(n) = 0$, т.е. $(v \circ \mu)(m) = 0$, где $g(m) = n$. Тогда $\mu(m) = u(x)$ для некоторого $x = \lambda(l) \in X$, $l \in L$ ($\ker v = \text{im } u$, а λ – изоморфизм). Итак, $\mu(m) = (u \circ \lambda)(l)$, откуда

$$m = (\mu^{-1} \circ u \circ \lambda)(l) = f(l)$$

(μ – изоморфизм, $\mu \circ f = u \circ \lambda$) и, значит, $n = g(m) = (g \circ f)(l) = 0$ ($g \circ f = 0$).

Покажем, что ν – эпиморфизм. Пусть $z \in Z$, выберем $y = \mu(m) \in Y$, $m \in M$, такое, что $z = v(y) = (v \circ \mu)(m)$ (v – эпиморфизм, μ – изоморфизм). По построению $z = \nu(n)$ для $n = g(m) \in N$.

Проверим, что изоморфизм ν единственный. Пусть $\nu' : N \rightarrow Z$ другой изоморфизм, для которого пополненная диаграмма коммутативная и ацикличная. Пусть $n \in N$ и $m \in M$, $n = g(m)$, тогда $\nu(n) = (v \circ \mu)(m) = (\nu' \circ g)(m) = \nu'(n)$ (по условию $v \circ \mu = \nu' \circ g$).

Лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное доказательство наглядно демонстрирует, что диаграммная техника простая, но довольно кропотливая. Ее суть в разбиении доказательства на однотипные элементарные кусочки.

СЛЕДСТВИЕ 1.2.1. Если последовательность левых R -модулей

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

точная, то с точностью до изоморфизма $N = M/\operatorname{im} f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо предъявить изоморфизм

$$\nu: N \rightarrow M/\operatorname{im} f.$$

Для этого следует рассмотреть коммутативную ациклическую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \operatorname{id}_L & & \downarrow \operatorname{id}_M & & & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/\operatorname{im} f & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

и воспользоваться доказанной выше леммой.

1.2.5. Прямое произведение и прямая сумма семейства модулей. Пусть R – ассоциативное кольцо. В категории $\mathcal{LM}_R$ левых R -модулей определены прямые произведения и прямые суммы произвольных семейств.

Действительно, пусть дано семейство левых R -модулей

$$\{M_i \mid i \in I\}.$$

Определим левый R -модуль $\times M_i = \times_{i \in I} M_i$ как множество всех семейств $x = (x_i) = \{x_i \in M_i \mid i \in I\}$ с покомпонентными модульными операциями:

$$\begin{aligned} (x_i) + (y_i) &= (x_i + y_i), & a \cdot (x_i) &= (a \cdot x_i) \\ \text{для всех } (x_i), (y_i) &\in \times M_i, & a &\in R. \end{aligned}$$

Канонические проекции $\pi_k: \times M_i \rightarrow M_k$, $k \in I$, зададим правилом $(x_i) \mapsto \pi_k(x_i) = x_k$ для всех $(x_i) \in \times M_i$. Построенная таким образом пара $\{\times M_i, \{\pi_k \mid k \in I\}\}$ и есть прямое произведение семейства $\{M_i \mid i \in I\}$. Действительно, пусть дано семейство $\{N \xrightarrow{f_i} M_i \mid i \in I\}$ морфизмов левых R -модулей. Определим отображение $f: N \rightarrow \times M_i$ правилом $y \mapsto f(y) = (x_i) = (f_i(y))$ для всех $y \in N$. Легко проверяется, что это отображение есть морфизм левых R -модулей, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & \times M_i \\ & \searrow f_k & \swarrow \pi_k \\ & M_k & \end{array}$$

коммутативная для всех $k \in I$ и что морфизм f единственный с таким свойством.

Пусть $x = (x_i) \in \times M_i$. Множество $\text{supp } x = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ называется *носителем* элемента x . Элемент $x \in \times M_i$ называется *конечным*, если $\text{supp } x$ – конечное множество.

Определим левый R -модуль $\bigoplus M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i$ как подмодуль модуля $\times M_i$, состоящий из всех его конечных элементов, так что

$$\bigoplus M_i = \{(x_i) \in \times M_i \mid \text{лишь конечное число } x_i \neq 0\}.$$

Канонические инъекции $\iota_k: M_k \rightarrow \bigoplus M_i$ зададим правилом $\iota_k(x_k) = x$, где $k \in I$, $x_k \in M_k$, $x = (\delta_i^k x_k)$, δ_i^k – символ Кронекера, так что семейство x имеет k -ю компоненту x_k , а остальные – нулевые. Построенная так пара $\{\bigoplus M_i, \{\iota_k \mid k \in I\}\}$ и есть прямая сумма семейства $\{M_i \mid i \in I\}$. Действительно, пусть дано семейство $\{M_i \xrightarrow{g_i} N \mid i \in I\}$ морфизмов левых R -модулей. Определим отображение $g: \bigoplus M_i \rightarrow N$ следующим правилом: $x \mapsto y = g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x_i)$ для всех $x = (x_i) \in \bigoplus M_i$ (сумма определена, поскольку лишь конечное число $x_i \neq 0$). Легко проверяется, что это отображение есть морфизм левых R -модулей, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M_k & \\ \iota_k \swarrow & & \searrow g_k \\ \bigoplus M_i & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

коммутативна для всех $k \in I$ и что морфизм g единственный с таким свойством.

Отождествляя модули M_i с их образами $\text{im } \iota_i$ в $\bigoplus M_i$, приходим к более привычной записи элементов прямой суммы $x = \sum x_i$, где лишь конечное число слагаемых $x_i \in M_i$ ненулевые, $i \in I$.

По построению $\bigoplus M_i \subset \times M_i$, т.е. R -модуль $\bigoplus M_i$ есть подмодуль R -модуля $\times M_i$, причем эти модули совпадают, если семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ конечное. Но даже в конечном случае прямое произведение и прямая сумма – это разные объекты, поскольку прямое произведение характеризуется своими проекциями $\{\times M_i \xrightarrow{\pi_k} M_k \mid k \in I\}$, а прямая сумма – инъекциями $\{M_k \xrightarrow{\iota_k} \bigoplus M_i \mid k \in I\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.1. *R -линейные отображения*

$$\text{pr}_k = \iota_k \circ \pi_k: \bigoplus M_i \rightarrow \bigoplus M_i, \quad k \in I,$$

образуют полный набор ортогональных проекторов, т.е.

$$\text{pr}_l \circ \text{pr}_k = \begin{cases} \text{pr}_k, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad \text{для всех } k, l \in I, \quad \sum_{k \in I} \text{pr}_k = \text{id}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первого утверждения следует заметить, что композиции

$$\pi_l \circ \iota_k = \begin{cases} \text{id}_{M_k}, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad \text{для всех } k, l \in I,$$

а при доказательстве второго – учесть, что для всякого $x \in \bigoplus M_i$ образ $\text{pr}_k(x) \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $k \in I$.

Прямое произведение и прямая сумма обладают функториальными свойствами. Именно, для данного множества индексов I и ассоциативного кольца R категория $\mathcal{LM}_R^I$ определяется как категория, объекты которой суть семейства $\{M_i\} = \{M_i \mid i \in I\}$ левых R -модулей, а морфизмы из объекта $\{M_i\}$ в объект $\{N_i\}$ суть семейства $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ морфизмов левых R -модулей, композиция – покомпонентная,

$$\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\}.$$

Ковариантный функтор $\times$ из категории $\mathcal{LM}_R^I$ в категорию $\mathcal{LM}_R$ задается правилами:

$$\{M_i\} \mapsto \times M_i, \quad \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} \mapsto \times M_i \xrightarrow{\times f_i} \times N_i,$$

где $(\times f_i)(x) = y$, $y = (y_i)$, $y_i = f_i(x_i)$, для всех $x = (x_i)$, $i \in I$.

Ковариантный функтор $\oplus$ из категории $\mathcal{LM}_R^I$ в категорию $\mathcal{LM}_R$ задается аналогичными правилами:

$$\{M_i\} \mapsto \oplus M_i, \quad \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} \mapsto \oplus M_i \xrightarrow{\oplus f_i} \oplus N_i,$$

где $(\oplus f_i)(x) = y$, $y = \sum f_i(x_i)$ для всех $x = \sum x_i \in \oplus M_i$.

1.2.6. Проективные и индуктивные пределы семейств модулей. Множество I называется *частично упорядоченным*, если для некоторых пар $i, j \in I$ определено отношение порядка $i \leq j$, удовлетворяющее условиям:

- ★ $i \leq i$ для всех $i \in I$,
- ★ $i \leq k$ для всех $i, j, k \in I$, $i \leq j$, $j \leq k$,
- ★ $i = j$ для всех $i, j \in I$, $i \leq j$, $j \leq i$.

Частично упорядоченное множество I называется *направленностью по возрастанию*, если для любой пары $i, j \in I$ найдется элемент $k \in I$ такой, что $i \leq k$ и $j \leq k$. В частности, в этом случае для всякого конечного подмножества $S \subset I$ существует $k \in I$ такой, что $S \leq k$, т.е. $i \leq k$ для всех $i \in S$. Аналогично, частично упорядоченное множество I называется *направленностью по убыванию*, если для любых элементов $i, j \in I$ найдется элемент $k \in I$ такой, что $k \leq i$ и $k \leq j$. По существу, направленности по возрастанию и убыванию отличаются лишь записью отношения порядка, и мы будем использовать лишь направленности по возрастанию, называя их просто *направленностями*.

ПРИМЕР 1.2.29. Множества $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ с естественным порядком по возрастанию суть наиболее часто используемые направленности.

ПРИМЕР 1.2.30. Пусть S – некоторое множество. Множество всех его подмножеств, частично упорядоченное по естественному вложению есть другой важный пример направленности. Этот пример можно модифицировать, рассматривая не все подмножества из S , а лишь избранные, с подходящими свойствами. Следует только проверять выполнение второго условия.

Пусть R – ассоциативное кольцо, I – направленность. Семейство левых R -модулей $\{M_i \mid i \in I\}$ называем *проективно направленным* (иначе, *обратно направленным*), если для любых $i, j \in I$, $i \leq j$, определено R -линейное отображение $M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j$, причем выполнены условия:

- ★ $\phi_{ii} = \text{id}$ для всех $i \in I$,
- ★ $\phi_{ik} = \phi_{ij} \circ \phi_{jk}$ для всех $i, j, k \in I$, $i \leq j \leq k$.

Проективно направленные семейства обозначаются через

$$\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j\}$$

или, подробнее, через

$$\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j \mid i, j \in I, i \leq j\}.$$

Пусть $\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j\}$ – проективно направленное семейство левых R -модулей. Рассмотрим категорию, объекты которой суть семейства R -линейных отображений $\{F \xrightarrow{f_i} M_i \mid i \in I\}$ такие, что для любых $i, j \in I$, $i \leq j$, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ M_i & \xleftarrow{\phi_{ij}} & M_j \end{array}$$

а морфизмы из объекта $\{F \xrightarrow{f_i} M_i\}$ в объект $\{G \xrightarrow{g_i} M_i\}$ суть R -линейные отображения $h: F \rightarrow G$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{h} & G \\ f_i \searrow & & \swarrow g_i \\ & M_i & \end{array}$$

В построенной категории есть универсальный притягивающий объект $\{\varprojlim M_i \xrightarrow{\pi_k} M_k \mid k \in I\}$, называемый *проективным пределом* (иначе, *обратным пределом*) семейства $\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j\}$.

Именно, левый R -модуль $\varprojlim M_i$ есть подмодуль левого R -модуля $\times M_i$, состоящий из всех элементов $(x_i) \in \times M_i$ таких, что $\phi_{ij}(x_j) = x_i$ для всех $i, j \in I, i \leq j$. В свою очередь, канонические проекции $\pi_k: \varprojlim M_i \rightarrow M_k$ суть сужения одноименных проекций $\pi_k: \times M_i \rightarrow M_k, k \in I$. Покажем, что для всякого объекта $\{F \xrightarrow{f_i} M_i\}$ существует единственный морфизм $f: F \rightarrow \varprojlim M_i$ такой, что для всех $k \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \varprojlim M_i \\ & \searrow f_k & \swarrow \pi_k \\ & M_k & \end{array}$$

Определим требуемый морфизм правилом

$$f(y) = (x_i), \quad \text{где } x_i = f_i(y), \quad \text{для всех } y \in F, i \in I.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(x_j) &= \phi_{ij}(f_j(y)) = (\phi_{ij} \circ f_j)(y) = f_i(y) = x_i \\ &\text{для всех } i, j \in I, i \leq j, \end{aligned}$$

что и требовалось. Единственность морфизма f с требуемыми свойствами очевидна.

Отметим, что канонические проекции $\pi_k: \varprojlim M_i \rightarrow M_k, k \in I$, характеризуются следующими свойствами:

- ★ $\pi_i = \phi_{ij} \circ \pi_j$ для всех $i, j \in I, i \leq j$,
- ★ для данного $x \in \varprojlim M_i$ имеем $x = 0$ тогда и только тогда, когда $\pi_i(x) = 0$ для всех $i \in I$.

ПРИМЕР 1.2.31. Проективная последовательность

$$\{M_{i-1} \xleftarrow{\phi_i} M_i \mid i \in \mathbb{Z}\},$$

графически

$$\dots \longleftarrow M_{i-1} \xleftarrow{\phi_i} M_i \xleftarrow{\phi_{i+1}} M_{i+1} \longleftarrow \dots,$$

левых R -модулей M_i и R -линейных отображений $\phi_i: M_i \rightarrow M_{i-1}, i \in \mathbb{Z}$, по сути есть проективное семейство

$$\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j \mid i, j \in \mathbb{Z}, i \leq j\},$$

где $\phi_{ii} = \text{id}, i \in \mathbb{Z}, \phi_{ij} = \phi_{i+1} \circ \dots \circ \phi_j, i < j$.

Дуальным образом, пусть R – ассоциативное кольцо, I – направленность. Семейство левых R -модулей $\{M_i \mid i \in I\}$ называем *индуктивно направленным* (иначе, *прямо направленным*), если для любых $i, j \in I$, $i \leq j$, определено R -линейное отображение $M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j$, причем выполнены условия:

- ★ $\phi_{ii} = \text{id}$ для всех $i \in I$,
- ★ $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$ для всех $i, j, k \in I$, $i \leq j \leq k$.

Индуктивно направленные семейства обозначаются через

$$\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j\}$$

или, подробнее, через

$$\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j \mid i, j \in I, i \leq j\}.$$

Пусть $\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j\}$ – индуктивно направленное семейство левых R -модулей. Рассмотрим категорию, объекты которой суть семейства R -линейных отображений $\{M_i \xrightarrow{f_i} F \mid i \in I\}$, F – левый R -модуль, такие, что для любых $i, j \in I$, $i \leq j$, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\phi_{ij}} & M_j \\ & \searrow f_i & \swarrow f_j \\ & F & \end{array}$$

а морфизмы из объекта $\{M_i \xrightarrow{f_i} F\}$ в объект $\{M_i \xrightarrow{g_i} G\}$ суть R -линейные отображения $h: F \rightarrow G$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M_i & \\ f_i \swarrow & & \searrow g_i \\ F & \xrightarrow{h} & G \end{array}$$

В построенной категории есть универсальный отталкивающий объект $\{M_k \xrightarrow{\iota_i} \varinjlim M_i \mid k \in I\}$, называемый *индуктивным пределом* направленного семейства $\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j\}$. Левый R -модуль

$\varinjlim M_i$ строится следующим образом. Сначала отметим, что для всякого $x = \sum_i x_i \in \bigoplus M_i$ носитель $\text{supp } x = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ конечный, следовательно, существует индекс $k \in I$ такой, что $\text{supp } x \leq k$ и, значит, определена сумма $\sum_i \phi_{ik}(x_i) \in M_k$. Легко проверяется, что множество

$$N = \left\{ x = \sum x_i \in \bigoplus M_i \mid \sum \phi_{ik}(x_i) = 0 \text{ для некоторого } k \in I \right\}$$

есть подмодуль левого A -модуля $\bigoplus M_i$. Положим

$$\varinjlim M_i = \bigoplus M_i / N,$$

канонические морфизмы $\psi_k: M_k \rightarrow \varinjlim M_i$, $k \in I$, определим как композиции $\psi_k = \pi \circ \iota_k$. Напомним, что прямая сумма есть объект $\{M_k \xrightarrow{\iota_k} \bigoplus M_i\}$, а фактормодуль $\bigoplus M_i / N$ характеризуется точной последовательностью

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \bigoplus M_i \xrightarrow{\pi} \bigoplus M_i / N \longrightarrow 0.$$

Проверим, что так построенный объект есть универсальный отталкивающий. Пусть дан объект $\{M_i \xrightarrow{f_i} F\}$. В силу универсальности прямой суммы $\bigoplus M_i$ существует R -линейное отображение $f': \bigoplus M_i \rightarrow F$, $f_i = f' \circ \iota_i$, для всех $i \in I$, действующее по правилу $f'(x) = \sum_i f_i(x_i)$ для всех $x = \sum_i x_i \in \bigoplus M_i$. Пусть $x = \sum_i x_i \in N$, тогда

$$f'(x) = \sum_i f_i(x_i) = \sum_i (f_k \circ \phi_{ik})(x_i) = \sum_i f_k(\phi_{ik}(x_i)) = 0$$

для некоторого $k \in I$. Таким образом, $N \subset \ker f'$ и, значит, определен фактоморфизм $f: \varinjlim M_i \rightarrow F$. Легко проверяется, что так построенное R -линейное отображение f искомое, т.е. для любого $k \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M_k & \\ \psi_k \swarrow & & \searrow f_k \\ \varinjlim M_i & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

и что R -линейное отображение с такими свойствами единственное.

Отметим, что канонические морфизмы $\psi_k: M_k \rightarrow \varinjlim M_i$, $k \in I$, характеризуются следующими свойствами:

- ★ $\psi_i = \psi_j \circ \phi_{ij}$ для всех $i, j \in I$, $i \leq j$,
- ★ $\psi_i(x_i) = \psi_j(x_j)$ для данных $x_i \in M_i$, $x_j \in M_j$, $i, j \in I$, тогда и только тогда, когда $\phi_{ik}(x_i) = \phi_{jk}(x_j)$ для некоторого $k \in I$, $i \leq k$, $j \leq k$,
- ★ $\bigcup_i \text{im } \psi_i = \varinjlim M_i$, напомним, что $\text{im } \psi_i = \psi_i(M_i)$.

ПРИМЕР 1.2.32. Индуктивная последовательность

$$\{M_i \xrightarrow{\phi_i} M_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}\},$$

графически

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\phi_i} M_{i+1} \longrightarrow \dots,$$

левых R -модулей M_i и R -линейных отображений $\phi_i: M_i \rightarrow M_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, по сути есть индуктивное семейство

$$\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j \mid i, j \in \mathbb{Z}, i \leq j\},$$

где $\phi_{ii} = \text{id}$, $i \in \mathbb{Z}$, $\phi_{ij} = \phi_{j-1} \circ \dots \circ \phi_i$, $i < j$.

1.2.7. Свободные модули. Пусть I – множество, R – унитарное ассоциативное кольцо. рассмотрим категорию, объекты которой суть отображения $\phi \in M^I$, $M \in \text{Ob } \mathcal{LM}_R$ (см. пример 1.2.20), а морфизмы из объекта $\phi \in M^I$ в объект $\psi \in N^I$, $M, N \in \text{Ob } \mathcal{LM}_R$, суть морфизмы $h \in \text{Hom}_R(M, N)$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ \phi \swarrow & & \searrow \psi \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

В этой категории есть универсальный отталкивающий объект. Именно, положим $R\langle I \rangle = R_{\text{fn}}^I \in \text{Ob } \mathcal{LM}_R$ (см. пример 1.2.24) и определим каноническое отображение $\delta = \delta_I: I \rightarrow R\langle I \rangle$ правилом

$$i \mapsto \delta_i, \quad \text{где} \quad \delta_i(k) = \begin{cases} e, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \quad \text{для всех } i, k \in I,$$

поясним, что $e = e_R$ – единица кольца R . Проверим, что δ – универсальный отталкивающий элемент рассматриваемой категории. Заметим сначала, что отображение δ инъективное, определяет вложение множества I в множество $R\langle I \rangle$, причем всякий элемент $\zeta \in R\langle I \rangle$ имеет однозначное представление $\zeta = \sum_{i \in I} \zeta(i) \delta_i$ (напомним, что отображение ζ конечное). Пусть теперь $\phi \in M^I$, определим отображение $\phi_*: R\langle I \rangle \rightarrow M$ правилом

$$\zeta \mapsto \phi_*(\zeta) = \sum_{i \in I} \zeta(i) \phi(i) \quad \text{для всех} \quad \zeta = \sum_{i \in I} \zeta(i) \delta_i \in R\langle I \rangle.$$

Легко проверяется, что ϕ_* – морфизм левых R -модулей, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ \delta \swarrow & & \searrow \phi \\ R\langle I \rangle & \xrightarrow{\phi_*} & M \end{array}$$

коммутативна и что морфизм ϕ_* единственный с таким свойством.

Обычно универсальный элемент $I \xrightarrow{\delta} R\langle I \rangle$ называют *каноническим свободным левым R -модулем*, порожденным множеством I . Левый R -модуль M называют *свободным левым R -модулем*, порожденным множеством I , если существует изоморфизм левых R -модулей $f: R\langle I \rangle \rightarrow M$, при этом образ $B = \text{im}(f \circ \delta) \subset M$ называют *базисом модуля M* . Универсальность базиса B в том, что всякий элемент $x \in M$ имеет однозначное представление $x = \sum_{i \in I} \xi^i \cdot e_i$, где лишь конечное число коэффициентов $\xi^i = \xi^i(x) \in R$ ненулевые, базисные элементы $e_i = f(\delta_i) \in B$, и в том, что для того чтобы задать морфизм левых R -модулей из M в произвольный левый R -модуль N , достаточно определить его на базисе B и дальше продолжить на весь M по R -линейности. Число элементов (конечное или бесконечное) базиса B называется *размерностью* свободного левого R -модуля M .

ПРИМЕР 1.2.33. Само кольцо R , рассматриваемое как левый R -модуль относительно левого присоединенного действия (см. пример 1.2.17), является свободным с базисом, состоящим из одного элемента e – единицы кольца R . В более общей ситуации, $I = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, левый R -модуль R^n (см. пример 1.2.20) также свободный с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$, где e_k – столбец, у которого

на k -м месте стоит единица $e \in R$, а на остальных местах – нули, $1 \leq k \leq n$. Таким образом левый R -модуль R^I – свободный для любого конечного множества I . Если же множество I бесконечное, то свободным является левый R -модуль R_{fin}^I , а модуль R^I может и не быть свободным.

Канонические свободные модули обладают следующим функториальным свойством. Пусть $\chi: I \rightarrow J$ – отображение множества I в множество J . Положим $\delta_\chi = (\delta_J \circ \chi)_*: R\langle I \rangle \rightarrow R\langle J \rangle$, тогда получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\delta_I} & R\langle I \rangle \\ \chi \downarrow & \searrow \delta_J \circ \chi & \downarrow \delta_\chi \\ J & \xrightarrow{\delta_J} & R\langle J \rangle \end{array}$$

Легко проверяется, что правила $I \mapsto \delta_I$, $\chi \mapsto \delta_\chi$ определяют ковариантный функтор из категории множеств в категорию левых R -модулей.

Не все левые R -модули свободные, однако имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.2. *Каждый левый R -модуль есть фактормодуль свободного левого R -модуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть M – левый R -модуль. Возьмем M в качестве базисного множества, и пусть $M \xrightarrow{\delta} R\langle M \rangle$ – соответствующий канонический свободный модуль. Тождественное отображение $M \xrightarrow{\text{id}} M$ порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & M & & & & \\ & \swarrow \delta & & \searrow \text{id} & & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker f & \longrightarrow & R\langle M \rangle & \xrightarrow{\text{id}_*} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

где id_* – единственный морфизм левых R -модулей, отвечающий тождественному отображению id . По построению нижняя строка точная, так что $M = R\langle M \rangle / \ker f$ в силу следствия 1.2.1.

1.2.8. Тензорное произведение семейства модулей.

Пусть R – унитарное ассоциативное коммутативное кольцо.

Пусть $\{M_i \mid i \in I\}$ – семейство R -модулей и $\times M_i$ – его прямое произведение. Для каждого $k \in I$ обозначим через M^k подмодуль модуля $\times M_i$, состоящий из всех элементов $x = (x_i) \in \times M_i$, у которых компонента $x_k = 0$, и будем считать модуль M_k канонически вложенным в прямое произведение $\times M_i$. В этих обозначениях $\times M_i = M^k \oplus M_k$ для всех $k \in I$.

Пусть $f: \times M_i \rightarrow N$ – отображение прямого произведения $\times M_i$ в R -модуль N . Пусть $k \in I$. Для каждого $x^k \in M^k$ определим отображение $f_{x^k}: M_k \rightarrow N$ правилом $f_{x^k}(y_k) = f(x^k + y_k)$, $y_k \in M_k$. Отображение f называется R -линейным по k -й переменной, если отображение f_{x^k} R -линейное для всех $x^k \in M^k$, и R -полилинейным, если оно R -линейное по каждой переменной. Иначе говоря, отображение $f: \times M_i \rightarrow N$ есть R -полилинейное, если

$$f(x^k + (ay_k + bz_k)) = af(x^k + y_k) + bf(x^k + z_k)$$

для всех $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$. Обратим внимание, что корректное определение R -полилинейности возможно лишь для коммутативного кольца R .

В категории, объекты которой суть R -полилинейные отображения из $\times M_i$ в R -модули, а морфизмы из объекта $\times M_i \xrightarrow{f} N$ в объект $\times M_i \xrightarrow{g} P$ суть R -линейные отображения $N \xrightarrow{\phi} P$ из R -модуля N в R -модуль P , для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \times M_i & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ N & \xrightarrow{\phi} & P \end{array}$$

существует универсальный отталкивающий объект, называемый *тензорным произведением семейства* $\{M_i \mid i \in I\}$. Действительно, пусть $R\langle \times M_i \rangle$ – свободный R -модуль, порожденный множеством $\times M_i$. Обозначим через J подмодуль модуля $R\langle \times M_i \rangle$, порожденный всеми элементами вида

$$(x^k + (ay_k + bz_k)) - a(x^k + y_k) - b(x^k + z_k)$$

с произвольными $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$, и рассмотрим фактормодуль $\otimes M_i = R\langle \times M_i \rangle / J$. Последовательность

отображений

$$0 \longrightarrow \times M_i \xrightarrow{\delta} R\langle \times M_i \rangle \xrightarrow{\pi} \bigotimes M_i \longrightarrow 0$$

определяет R -полилинейное отображение

$$\varkappa = \pi \circ \delta: \times M_i \rightarrow \bigotimes M_i,$$

поскольку

$$\begin{aligned} \varkappa(x^k + (ay_k + bz_k)) &= (x^k + (ay_k + bz_k)) + J \\ &= a(x^k + y_k) + b(x^k + z_k) \\ &\quad + [(x^k + (ay_k + bz_k)) - a(x^k + y_k) - b(x^k + z_k)] + J \\ &= (a(x^k + y_k) + J) + (b(x^k + z_k) + J) \\ &= a((x^k + y_k) + J) + b((x^k + z_k) + J) \\ &= a\varkappa(x^k + y_k) + b\varkappa(x^k + z_k) \end{aligned}$$

для всех $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$. Для данного R -полилинейного отображения $f: \times M_i \rightarrow N$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow J \rightarrow R\langle \times M_i \rangle & \xrightarrow{\pi} & \bigotimes M_i & \rightarrow & 0 \\ & \delta \uparrow & \searrow f_* & \downarrow \mathbf{f} & \\ & \times M_i & \xrightarrow{f} & N & \end{array}$$

где R -линейное факторотображение $\mathbf{f}$ действует по следующему правилу: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_*(x)$, $\mathbf{x} = x + J \in \bigotimes M_i$, R -линейное отображение f_* определено в силу универсальности R -модуля $R\langle \times M_i \rangle$, причем $f_*(x) = 0$ для любого $x \in J$ в силу R -полилинейности исходного отображения f . Действительно,

$$\begin{aligned} f_*((x^k + (ay_k + bz_k)) - a(x^k + y_k) - b(x^k + z_k)) \\ = f(x^k + (ay_k + bz_k)) - af(x^k + y_k) - bf(x^k + z_k) = 0 \end{aligned}$$

для всех $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$, так что $f_* = 0$ на J , поскольку такие элементы порождают подмодуль J .

Таким образом, объект $\times M_i \xrightarrow{\varkappa} \bigotimes M_i$ обладает необходимой универсальностью и является тензорным произведением семейства $\{M_i \mid i \in I\}$. Обычно полагают $\varkappa((x_i)) = \bigotimes x_i$ для всякого $(x_i) \in \times M_i$, причем полилинейность отображения $\varkappa$ сводится к равенствам

$$\bigotimes (x^k + (ay_k + bz_k))_i = a \cdot (\bigotimes (x^k + y_k)_i) + b \cdot (\bigotimes (x^k + z_k)_i)$$

для всех $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$.

ПРИМЕР 1.2.34. Для тензорного произведения $M \otimes N$ пары R -модулей имеем

$$\begin{aligned} (a'x' + a''x'') \otimes y &= a'(x' \otimes y) + a''(x'' \otimes y), \\ x \otimes (a'y' + a''y'') &= a'(x \otimes y') + a''(x \otimes y'') \end{aligned}$$

для всех $a', a'' \in R$, $x, x', x'' \in M$, $y, y', y'' \in N$.

ПРИМЕР 1.2.35. Пусть R^m, R^n – R -модули, $m, n \in \mathbb{N}$, (см. пример 1.2.33). Элементы тензорного произведения

$$R^m \otimes R^n = R^{m \times n}$$

суть прямоугольные $(m \times n)$ -матрицы с элементами из кольца R . Это свободный R -модуль с базисом $\{e_{ik} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$, где e_{ik} – матрица, у которой на пересечении i -й строки и k -го столбца стоит единица $e \in R$, а на остальных местах – нули. Отметим, кстати, что прямое произведение $R^m \times R^n = R^{m+n}$.

ПРИМЕР 1.2.36. Предыдущий пример имеет очевидное обобщение. Именно, пусть M – конечномерный свободный R -модуль с базисом $\{e_1, \dots, e_m\}$ и N – такой же модуль с базисом $\{g_1, \dots, g_n\}$. Тогда их тензорное произведение $M \otimes N$ есть конечномерный свободный R -модуль с базисом $\{e_i \otimes g_k \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$.

По построению каждое R -линейное отображение $h: \bigotimes M_i \rightarrow N$ порождается единственным R -полилинейным отображением $f: \times M_i \rightarrow N$, именно $h = \mathbf{f}$ для $f = h \circ \varkappa$, так что R -линейные отображения из $\bigotimes M_i$ в данный R -модуль отождествляются с R -полилинейными отображениями из $\times M_i$ в этот модуль.

Следующие два предложения справедливы для произвольного семейства модулей, но ради простоты изложения приводятся для конечных семейств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.3 (ассоциативность тензорного произведения). Для всякой тройки R -модулей $\{M_1, M_2, M_3\}$ существуют единственные изоморфизмы

$$M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \simeq \bigotimes_i^3 M_i \simeq (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3$$

такие, что $x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3) \mapsto \bigotimes_{i=1}^3 x_i \mapsto (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3$ для всех $x_i \in M_i$, $i = 1, 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $x_1 \in M_1$ определено R -билинейное отображение $f_{x_1}: M_2 \times M_3 \rightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$ правилом

$$(x_2, x_3) \mapsto x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \quad \text{для всех } x_i \in M_i, i = 2, 3,$$

и в силу универсальности тензорного произведения определено R -линейное отображение

$$f_{x_1}: M_2 \otimes M_3 \rightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes M_3,$$

$$x_2 \otimes x_3 \mapsto x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \quad \text{для всех } x_i \in M_i, i = 2, 3.$$

Следовательно, определено R -билинейное отображение

$$f: M_1 \times (M_2 \otimes M_3) \rightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$$

правилом

$$(x_1, \mathbf{y}) \mapsto f_{x_1}(\mathbf{y}) \quad \text{для всех } x_1 \in M_1, \mathbf{y} \in M_2 \otimes M_3,$$

и в силу универсальности тензорного произведения определено R -линейное отображение $\mathbf{f}: M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \rightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$, обладающее требуемым свойством

$$x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3) \mapsto x_1 \otimes x_2 \otimes x_3, \quad x_i \in M_i, i = 1, 2, 3.$$

Легко проверяется, что этот морфизм является изоморфизмом. Единственность такого морфизма следует из того факта, что элементы вида $x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)$ порождают модуль $M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$.

Аналогичным образом строится и второй изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку тензорное произведение, как любой универсальный объект, определено с точностью до изоморфизма, можно считать, что

$$M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) = M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 = (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3.$$

Некоторые авторы, однако, называют тензорным произведением семейства $\{M_i \mid i \in I\}$ именно модуль $\bigotimes M_i$, построенный выше, и в этом случае имеет место установленный в предложении 1.2.3 изоморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.4. Пусть $\{M_1, \dots, M_n\}$ – семейство R -модулей и σ – подстановка $\{1, \dots, n\} \mapsto \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$. Тогда существует единственный изоморфизм

$$M_1 \otimes \dots \otimes M_n \simeq M_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes M_{\sigma(n)},$$

такой, что

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}$$

для всех $x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. R -полилинейное отображение

$$f_\sigma: M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow M_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes M_{\sigma(n)},$$

заданное правилом

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)} \quad \text{для всех } x_i \in M_i, 1 \leq i \leq n,$$

в силу универсальности тензорного произведения определяет R -линейное отображение $\mathbf{f}_\sigma: M_1 \otimes \dots \otimes M_n \rightarrow M_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes M_{\sigma(n)}$ с требуемым свойством. Поскольку всякая подстановка индексов обратима, это изоморфизм. Единственность очевидна.

Тензорное произведение, как и прямая сумма и прямое произведение, обладает функториальными свойствами. Именно, пусть $\mathcal{LM}_R^I$ – введенная на с. 39 категория для данного ассоциативного кольца R и множества индексов I . Ковариантный функтор $\bigotimes$ из категории $\mathcal{LM}_R^I$ в категорию $\mathcal{LM}_R$ задается правилами:

$$\{M_i\} \mapsto \bigotimes M_i, \quad \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} \mapsto \bigotimes M_i \xrightarrow{\bigotimes f_i} \bigotimes N_i,$$

где $\bigotimes f_i$ – R -линейное отображение, порожденное R -полилинейным отображением

$$f = \varkappa \circ (\times f_i): \times M_i \rightarrow \bigotimes N_i,$$

$\varkappa: \times N_i \rightarrow \bigotimes N_i$ – каноническое R -полилинейное отображение.

1.2.9. Дуальность. Пусть R – ассоциативное кольцо.

Пусть M, N – левые R -модули, $\text{Hom}_R(M, N)$ – множество всех R -линейных отображений из M в N

$$f(ax) = af(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \text{Hom}_R(M, N), \quad a \in R, \quad x \in M.$$

Как было отмечено выше, $\text{Hom}_R(M, N)$ есть абелева группа с поточечным сложением

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{для всех} \quad f, g \in \text{Hom}_R(M, N), \quad x \in M,$$

однако какой-либо естественной структурой R -модуля в общем случае группа $\text{Hom}_R(M, N)$ не обладает.

Аналогичным образом, пусть M, N – правые R -модули, $\text{Hom}_R(M, N)$ – множество всех R -линейных отображений из M в N

$$f(xa) = f(x)a \quad \text{для всех} \quad f \in \text{Hom}_R(M, N), \quad a \in R, \quad x \in M.$$

Опять, $\text{Hom}_R(M, N)$ есть абелева группа с поточечным сложением, не обладающая естественной структурой R -модуля.

Пусть теперь M – левый, а N – правый R -модули, $\text{Hom}_R(M, N)$ – множество всех R -линейных отображений из M в N

$$f(ax) = f(x)a \quad \text{для всех} \quad f \in \text{Hom}_R(M, N), \quad a \in R, \quad x \in M.$$

Множество $\text{Hom}_R(M, N)$ по-прежнему является абелевой группой с поточечным сложением, более того, оно обладает естественной структурой правого R -модуля. Действительно, для каждой пары $f \in \text{Hom}_R(M, N)$, $a \in R$ определим аддитивное отображение $fa: M \rightarrow N$ поточечно

$$(fa)(x) = f(ax) \quad \text{для всех} \quad x \in M,$$

тогда

$$(fa)(bx) = f(abx) = f(x)(ab) = (f(x)a)b = (f(ax))b = (fa)(x)b$$

для всех $b \in R$, $x \in M$, так что $fa \in \text{Hom}_R(M, N)$.

Аналогичным образом, пусть M – правый, а N – левый R -модули, $\text{Hom}_R(M, N)$ – множество всех R -линейных отображений из M в N

$$f(xa) = af(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \text{Hom}_R(M, N), \quad a \in R, \quad x \in M.$$

Здесь абелева группа $\text{Hom}_R(M, N)$ обладает естественной структурой левого R -модуля с поточечным умножением

$$(af)(x) = f(xa) \quad \text{для всех } f \in \text{Hom}_R(M, N), a \in R, x \in M.$$

Наиболее полезны два частных случая.

Пусть R – ассоциативное коммутативное кольцо. Левые и правые модули отличаются только формой записи, так что для любых R -модулей M и N множество $\text{Hom}_R(M, N)$ всех R -линейных отображений из M в N есть R -модуль с поточечным умножением

$$(af)(x) = f(ax) \quad \text{для всех } f \in \text{Hom}_R(M, N), a \in R, x \in M$$

(используется левая запись).

Пусть R – ассоциативное кольцо (возможно, некоммутативное). Пусть M – левый R -модуль. Рассматривая R как правый R -модуль с правым присоединенным действием, наделяем абелеву группу $M^* = \text{Hom}_R(M, R)$ структурой правого R -модуля с поточечным умножением

$$(\phi a)(x) = \phi(ax) = \phi(x)a \quad \text{для всех } \phi \in M^*, a \in R, x \in M.$$

Правый R -модуль M^* называется *дуальным* (иначе, *сопряженным*) *модулем* к левому R -модулю M . Заметим, что иногда для $\phi \in M^*$ и $x \in M$ вместо $\phi(x)$ пишут $\langle \phi, x \rangle$. Для каждого левого R -линейного отображения $f: M \rightarrow N$, где M, N – левые R -модули, *дуальное* (иначе, *сопряженное*) правое R -линейное отображение $f^*: N^* \rightarrow M^*$ определено правилом $f^*(\phi) = \phi \circ f$ для всех $\phi \in N^*$. Очевидно, композиция $g \circ f: M \rightarrow P$, где $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow P$, переходит в композицию $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*: P^* \rightarrow M^*$, а тождественное отображение $\text{id}_M: M \rightarrow M$ переходит в тождественное отображение $\text{id}_{M^*}: M^* \rightarrow M^*$,

$$(\text{id}_M)^*(\phi) = \phi \circ \text{id}_M = \phi \quad \text{для всех } \phi \in M^*.$$

Таким образом, правило $M \mapsto M^*$, где M – левый R -модуль, $f \mapsto f^*$, где $f \in \text{Hom}_R(M, N)$, определяет контравариантный *функтор дуальности*, отображающий категорию левых R -модулей в категорию правых R -модулей.

1.2.10. Градуировка. Говорят, что абелева группа G *градуирована абелевой группой* Γ (иначе, Γ -*градуирована*), если

$$G = \bigoplus G_\gamma = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$$

для некоторого семейства абелевых групп $\{G_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ (поясним, что абелевы группы суть $\mathbb{Z}$ -модули, так что для них определены прямые суммы, прямые и тензорные произведения и так далее). В этом случае слагаемые G_γ называются *однородными степенями* γ (иначе, γ -*однородными*) компонентами группы G . Пусть $G = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, $H = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$ — две Γ -градуированные абелевы группы, морфизм $f \in \text{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ называется *однородным степеню* γ (иначе, γ -*однородным*), $\gamma \in \Gamma$, если $f(a) \in H_{\alpha+\gamma}$ для всех $a \in G_\alpha \subset G$, $\alpha \in \Gamma$. Каждый морфизм $f \in \text{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ разлагается на γ -однородные компоненты (другими словами, Γ -градуируется). Именно, для всякой пары $\alpha, \gamma \in \Gamma$ положим $f_{\gamma, \alpha} = \text{pr}_{\alpha+\gamma} \circ f \circ \iota_\alpha: G_\alpha \rightarrow H$ (см. предложение 1.2.1), тогда в силу универсальности суммы для любого $\gamma \in \Gamma$ существует единственный морфизм $f_\gamma: G \rightarrow H$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_\gamma} & H \\ & \swarrow \iota_\alpha \quad \searrow f_{\gamma, \alpha} & \\ & G_\alpha & \end{array}$$

для всех $\alpha \in \Gamma$. Легко проверяется, что морфизмы f_γ суть γ -однородные, корректно определена сумма $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma$ и $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma = f$ (в случае конечной градуирующей группы Γ проблем с определением $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma$ вообще нет, поскольку $\text{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ есть абелева группа, а если группа Γ бесконечная, то для всякого $x \in G$ образ $f_\gamma(x) \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $\gamma \in \Gamma$).

Таким образом, для каждой абелевой группы Γ определена категория $\mathcal{AG}_\Gamma$, объекты которой суть Γ -градуированные абелевы группы, а морфизмы суть Γ -градуированные аддитивные отображения, причем $\mathcal{AG}_\Gamma$ есть полная подкатегория категории $\mathcal{AG}$. Отметим, что по группе Γ можно построить еще одну категорию, объекты которой суть Γ -градуированные абелевы группы, а морфизмы суть 0-однородные (иначе, *однородные*) морфизмы Γ -градуированных абелевых групп. В приложениях используются обе возможности.

ПРИМЕР 1.2.37. Каждая абелева группа G тривиально градуирована любой абелевой группой Γ , $G = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, где $G_0 = G$, $G_\gamma = 0$ при $\gamma \neq 0$.

ПРИМЕР 1.2.38. Наиболее часто в качестве градуирующей группы используется группа целых чисел $\mathbb{Z}$. В этом случае,

$G = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} G_n$. Очень часто $G_n = 0$ для $n < 0$, так что фактически $G = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} G_n$, и в этом случае группа G называется $\mathbb{Z}_+$ -градуированной.

ПРИМЕР 1.2.39. Более детальная градуировка получается, если градуировать группой

$$\mathbb{Z}^D = \times^D \mathbb{Z} = \{n = (\nu^1, \dots, \nu^D) \mid \nu^i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq d\}, \quad D \in \mathbb{N}.$$

ПРИМЕР 1.2.40. Весьма популярная градуирующая группа есть факторгруппа $\mathbf{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Именно, абелева группа G $\mathbf{Z}_2$ -градуирована, если $G = G_0 \oplus G_1$, где классы эквивалентности $\mathbf{0} = 0 + 2\mathbb{Z}$, $\mathbf{1} = 1 + 2\mathbb{Z}$, G_0 и G_1 – четная и нечетная подгруппы соответственно. В теоретической физике $\mathbf{Z}_2$ -градуированные объекты обычно называют *суперобъектами*, а $\mathbf{Z}_2$ -градуированные теории – *супертеориями*.

Пусть Γ – абелева группа. Говорят, что кольцо R *градуировано абелевой группой Γ* (другими словами, Γ -градуировано), если оно Γ -градуировано как абелева группа, $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$, для некоторого семейства абелевых групп $\{R_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и произведение $a \cdot b \in R_{\alpha+\beta}$ для любых $a \in R_\alpha$, $b \in R_\beta$ (т.е. $R_\alpha \cdot R_\beta \subset R_{\alpha+\beta}$), $\alpha, \beta \in \Gamma$. Пусть $R = \bigoplus R_\gamma$, $S = \bigoplus S_\gamma$ – два Γ -градуированных кольца, и пусть $f = \sum f_\gamma: R \rightarrow S$ – морфизм абелевых групп, Γ -градуированный семейством однородных морфизмов $\{f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Легко проверяется, что γ -однородная компонента f_γ может быть ненулевым кольцевым морфизмом лишь при $\gamma = 0$. Учитывая этот факт, морфизм f называется *морфизмом Γ -градуированных колец*, если он *однородный* (точнее, 0 -однородный), т.е. $f(a) \in S_\alpha$ для всех $a \in R_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$. Таким образом, определена категория Γ -градуированных колец $\mathcal{R}_\Gamma$, объекты которой суть Γ -градуированные кольца, а морфизмы – морфизмы Γ -градуированных колец.

Пусть Γ – абелева группа, $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$ – ассоциативное Γ -градуированное кольцо. Говорят, что левый R -модуль M *градуирован абелевой группой Γ* (другими словами, Γ -градуирован), если он Γ -градуирован как абелева группа, $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ для некоторого семейства абелевых групп $\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и произведение $a \cdot x \in M_{\alpha+\beta}$ для всех $a \in R_\alpha$, $x \in M_\beta$, $\alpha, \beta \in \Gamma$. Пусть $M = \bigoplus M_\gamma$, $N = \bigoplus N_\gamma$ – два Γ -градуированных левых R -модуля, R -линейное отображение $f: M \rightarrow N$ называется *однородным степени γ* (иначе, γ -однородным), $\gamma \in \Gamma$, если $f(x) \in M_{\alpha+\gamma}$ для всех $x \in M_\alpha$,

$\alpha \in \Gamma$. Всякое R -линейное отображение $f: M \rightarrow N$ разлагается на однородные компоненты (другими словами, Γ -градуируется). Именно, представление $f = \sum f_\gamma$ строится по тем же правилам, что и в категории Γ -градуированных абелевых групп, следует лишь проверить, что аддитивные отображения f_γ в данном случае R -линейные.

Таким образом, определена категория Γ -градуированных левых R -модулей, объекты которой суть Γ -градуированные левые R -модули, а морфизмы суть Γ -градуированные R -линейные отображения, причем эта категория есть полная подкатегория категории левых R -модулей.

Подмодуль $N \subset M$, где $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ есть Γ -градуированный левый R -модуль, называется Γ -градуированным, если

$$N = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} N_\gamma,$$

причем $N_\gamma = N \cap M_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Пусть R – Γ -градуированное унитарное ассоциативное коммутативное кольцо. Тензорное произведение $\bigotimes M_i$ всякого семейства $\{M_i \mid i \in I\}$ Γ -градуированных R -модулей,

$$M_i = \bigoplus_{\gamma_i \in \Gamma} M_{i, \gamma_i},$$

обладает естественной Γ -градуировкой. Действительно,

$$\begin{aligned} \bigotimes M_i &= \bigotimes_{i \in I} \left(\bigoplus_{\gamma_i \in \Gamma} M_{i, \gamma_i} \right) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \left(\bigotimes M_i \right)_\gamma, \\ \left(\bigotimes M_i \right)_\gamma &= \bigoplus_{\sum_{i \in I} \gamma_i = \gamma} \left(\bigotimes M_{i, \gamma_i} \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.2.41. Для пары модулей

$$M = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha, \quad N = \bigoplus_{\beta \in \Gamma} N_\beta$$

имеем

$$M \otimes N = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (M \otimes N)_\gamma, \quad (M \otimes N)_\gamma = \bigoplus_{\alpha + \beta = \gamma} (M_\alpha \otimes N_\beta).$$

Подробнее смотри, например, [20], [21].

1.3. Линейные пространства

1.3.1. Поля. Пусть R – унитарное кольцо и $a \in R$. Элемент $b \in R$ называется *левым обратным* к a , если $b \cdot a = e$, элемент $c \in R$ называется *правым обратным* к a , если $a \cdot c = e$, элемент $a^{-1} \in R$ называется *обратным* к a , если он и левый, и правый обратный к a , т.е. если $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$. В последнем случае элемент a является обратным к a^{-1} . Унитарное кольцо, в котором $e \neq 0$ и всякий ненулевой элемент имеет обратный, называется *кольцом с делением* или *телом*. Ассоциативное коммутативное кольцо с делением называется *полем*. Подчеркнем, что всякое поле содержит, по крайней мере два элемента, а именно 0 и e . Говорят, что поле $\mathbb{F}$ имеет *характеристику ноль*, если $n\lambda \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$. Основные поля, используемые в математической физике, суть поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, другие важные поля – поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$, где p – простое число. Все эти поля имеют нулевую характеристику. Из полей с ненулевой характеристикой отметим поле $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Отметим, что в приложениях поля ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и им подобные) как правило не градуируются, точнее наделяются тривиальной градуировкой (см. пример 1.2.37).

1.3.2. Линейные пространства. Пусть $\mathbb{F}$ поле. Всякий $\mathbb{F}$ -модуль называется *$\mathbb{F}$ -линейным пространством* (иначе, *линейным пространством над $\mathbb{F}$* , используется также термин *векторное пространство*).

Очевидно, определена категория $\mathbb{F}$ -линейных пространств $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, объекты которой суть $\mathbb{F}$ -линейные пространства, а морфизмы суть $\mathbb{F}$ -линейные отображения.

Простейшее линейное пространство есть нулевое пространство, оно является одновременно универсальным отталкивающим и притягивающим объектом в категории $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$. Простейшее ненулевое линейное пространство есть поле $\mathbb{F}$.

Хотя линейные пространства – это модули специального вида, они заслуживают индивидуального рассмотрения, поскольку являются возможно самыми популярными объектами математической физики. С чисто математической точки зрения они также играют особую роль в силу следующего их свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.1. *Всякое ненулевое линейное пространство свободное, т.е. обладает базисом.*

Доказательство этого утверждения опирается на лемму Цорна (см., например, [20]). В частности, оно неконструктивное, для многих бесконечномерных пространств в явном виде базис неизвестен.

Нулевое пространство базиса не имеет, поле $\mathbb{F}$ как линейное пространство – одномерное, в качестве базиса можно взять любой ненулевой элемент, например единицу $e \in \mathbb{F}$.

В категории линейных пространств $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ определены все конструкции и справедливы все результаты, установленные в категории левых R -модулей, такие как прямые произведения и суммы, тензорные произведения и так далее.

Линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ градуируются как модули над кольцом $\mathbb{F}$, с учетом того факта, что кольцо $\mathbb{F}$ тривиально градуировано.

1.3.3. Топологические линейные пространства. Практически все линейные пространства, используемые в математической физике, являются топологическими, сочетая алгебраические и аналитические свойства. Это позволяет привлекать в математическую физику, наряду с алгебраическим аппаратом, методы анализа, включая функциональный анализ. Поскольку теория топологических линейных пространств безгранична и требует специального рассмотрения, я ограничусь здесь основными определениями, с целью фиксации терминологии.

Множество X называется *топологическим пространством*, если в нем выделено семейство подмножеств $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$, называемых *открытыми*, удовлетворяющее условиям:

- ★ пустое подмножество $\emptyset \in \mathcal{T}$,
- ★ само множество $X \in \mathcal{T}$,
- ★ объединение $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ для любого семейства $\{U_i \in \mathcal{T} \mid i \in I\}$,
- ★ пересечение $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ для любого конечного семейства $\{U_i \in \mathcal{T} \mid i \in I\}$.

Пусть X, Y – топологические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если

$$\text{прообраз } f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \in \mathcal{T}_X \text{ для любого } V \in \mathcal{T}_Y.$$

Определена категория *топологических пространств*, объекты которой суть топологические пространства, а морфизмы – непрерывные отображения.

Пусть X – топологическое пространство. Подмножество $S \subset X$ называется *окрестностью точки* $x \in X$, если существует $U \in \mathcal{T}$ такое, что $x \in U \subset S$. Говорят, что последовательность $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset X$ *сходится*, если существует $x \in X$ такое, что для любой окрестности S точки x существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $x_i \in S$ для всех $i > N$. В этом случае элемент x называется *пределом* последовательности $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, пишут $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ и говорят, что последовательность $\{x_i\}$ *сходится к* x .

Пусть $\mathbb{F}$ – фиксированное поле. Множество L называется *топологическим линейным пространством над $\mathbb{F}$* , если оно наделено структурами топологического и линейного пространства над $\mathbb{F}$ одновременно, причем эти структуры согласованы, т.е. сложение $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \in L \times L$, и умножение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, $(\lambda, x) \in \mathbb{F} \times L$, непрерывны. Определена категория *топологических линейных пространств* $TL\mathcal{S}_{\mathbb{F}}$, объекты которой суть топологические линейные пространства, а морфизмы – непрерывные линейные отображения.

Важное преимущество топологических линейных пространств перед просто линейными в том, что в топологических пространствах можно рассматривать не только конечные линейные комбинации, но и сходящиеся ряды. Подробнее, пусть L – топологическое линейное пространство. Ряд $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ с членами $x_i \in L$ называется *сходящимся*, если сходится его последовательность частичных сумм $\{\sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $\sigma_n = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i$. В этом случае говорят, что ряд $\sum x_i$ сходится к $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \in L$, или что сумма ряда $\sum x_i$ равна σ , и пишут $\sum x_i = \sigma$.

Возможность рассматривать суммы счетного числа слагаемых приводит к понятию топологического базиса. Вопрос этот достаточно сложный, и я изложу его в простейшей интерпретации. Именно, последовательность $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset L$ называется *топологическим базисом* топологического линейного пространства L , если для всякого $x \in L$ существует единственная последовательность коэффициентов $\{\lambda_i \in \mathbb{F} \mid i \in \mathbb{N}\}$ такая, что $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i$. Таким образом, у всякого топологического линейного пространства, кроме алгебраического базиса, всегда существующего, но, возможно, неконструктивного, может существовать и топологический базис. Отметим, что вопрос о существовании топологического базиса для для важных классов топологических пространств до конца не изучен, что побуждает использовать альтернативные подходы к базису и развивать теории, не исполь-

зующие понятия базиса (см., например, [26], [11]). Топологических проблем не возникает, если линейное пространство *конечномерное*, т.е. если его алгебраический базис конечный, поскольку в этом случае единственная разумная топология – евклидова, а все линейные отображения из одного конечномерного пространства в другое конечномерное пространство – непрерывные. Более того, как известно из курса линейной алгебры, все линейные пространства одинаковой размерности $n \in \mathbb{N}$ изоморфны друг другу и каноническому арифметическому пространству $\mathbb{F}^n$, состоящему из столбцов высотой n с элементами из поля $\mathbb{F}$. В свою очередь, линейные отображения из $\mathbb{F}^n$ в $\mathbb{F}^m$ суть прямоугольные матрицы размер $m \times n$ с элементами из $\mathbb{F}$.

В категории топологических линейных пространств $TLS_{\mathbb{F}}$ всякий изоморфизм является одновременно и мономорфизмом, и эпиморфизмом, обратное в общем случае неверно, поскольку обратное отображение, хотя оно определено и линейно, не обязано быть непрерывным.

В категории топологических линейных пространств $TLS_{\mathbb{F}}$ определены прямое произведение, прямая сумма и тензорное произведение произвольного семейства $\{L_i \mid i \in I\} \subset \text{Ob } TLS_{\mathbb{F}}$, причем теми же правилами, что и в категории линейных пространств $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$. При этом, прямое произведение $\times L_i$ наделяется слабой топологией, в которой все проекции π_i непрерывные, а прямая сумма $\bigoplus L_i$ наделяется сильнейшей топологией, в которой все инъекции ι_i непрерывные. Вложение $\bigoplus L_i \subset \times L_i$ всегда непрерывное, а если семейство $\{L_i \mid i \in I\}$ конечное, то $\bigoplus L_i = \times L_i$ как топологические линейные пространства. При построении категории, характеризующей тензорное произведение возникает вопрос о непрерывности полилинейных отображений $f: \times L_i \rightarrow M$, $M \in \text{Ob } TLS_{\mathbb{F}}$. Имеются две основные возможности: (а) полилинейное отображение f непрерывно в категории топологических пространств $\mathcal{T}$ (f непрерывно по совокупности переменных), в этом случае каждое из линейных отображений $f_{x^k}: L_k \rightarrow M$, $x^k \in L^k$, непрерывно; (б) для всякого $x^k \in L^k$ линейное отображение $f_{x^k}: L_k \rightarrow M$ непрерывно (f непрерывно по каждой переменной в отдельности), в этом случае полилинейное отображение f не обязано быть непрерывным по совокупности переменных (хотя есть широкий класс топологических линейных пространств, так называемых *ядерных пространств*, где это имеет место, см., например, [25]), [31], [32]. Имеются и другие

возможности, см., например, [26], [3], [31], [32]. Пусть выбрано конкретное определение полилинейной непрерывности. Топологическое тензорное произведение (как универсальный объект соответствующей топологической категории) получают из алгебраического $\{\otimes L_i, \varkappa\}$, наделяя линейное пространство $\otimes L_i$ сильнейшей топологией, при которой полилинейное отображение $\varkappa$ непрерывно (в выбранном смысле). Полученное таким образом топологическое линейное пространство $\otimes L_i$ (сохраняется старое обозначение), как правило, неполное, что неудобно в приложениях, и его еще приходится пополнять. Пополненное пространство обычно обозначается через $\widehat{\otimes} L_i$. Ситуация существенно упрощается, если алгебраическое тензорное произведение удастся вложить в подходящее топологическое линейное пространство и затем в качестве топологического тензорного произведения использовать замыкание алгебраического тензорного произведения в топологии объемлющего пространства.

ПРИМЕР 1.3.1. Пусть $\mathcal{C}(T)$ – банахово линейное пространство всех непрерывных функций на отрезке $T = [0, 1]$ с нормой

$$\|\phi\| = \max_{t \in T} |\phi(t)|, \quad \phi \in \mathcal{C}(T).$$

Алгебраический тензорный квадрат

$$\otimes^2 \mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T) \otimes \mathcal{C}(T)$$

состоит из всех функций на квадрате $T^2 = T \times T$ вида

$$f(s, t) = \sum_{\alpha=0}^n \phi_{\alpha}(s) \psi_{\alpha}(t), \quad \phi_{\alpha}, \psi_{\alpha} \in \mathcal{C}(T), \quad s, t \in T, \quad n = n(f).$$

Очевидно, $\otimes^2 \mathcal{C}(T)$ плотно вкладывается в банахово пространство $\mathcal{C}(T^2)$ всех непрерывных функций двух переменных на квадрате T^2 . Его замыкание $\widehat{\otimes}^2 \mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T^2)$ можно рассматривать как топологический квадрат банахова пространства $\mathcal{C}(T)$. В качестве упражнения предлагается подумать об универсальности такого тензорного произведения.

Топологических трудностей не возникает при построении тензорных произведений конечномерных линейных пространств.

ПРИМЕР 1.3.2. Пусть M и N – два конечномерных линейных пространства с базисами $\{a_1, \dots, a_m\} \subset M$ и $\{b_1, \dots, b_n\} \subset N$

соответственно. Тогда их тензорное произведение (алгебраическое и топологическое) есть линейное пространство $M \otimes N$ с базисом $\{a_i \otimes b_k \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$. В частности, $\dim(M \otimes N) = \dim M \cdot \dim N = mn$.

Подробнее смотри, например, [20], [26], [11], [25].

1.4. Алгебры

1.4.1. Алгебры. Алгебры над линейными пространствами определяются точно так же, как кольца над абелевыми группами.

Пусть $\mathbb{F}$ – фиксированное поле. Линейное пространство A над полем $\mathbb{F}$ называется $\mathbb{F}$ -алгеброй (иначе, алгеброй над полем $\mathbb{F}$), если в нем определена $\mathbb{F}$ -билинейная операция – *умножение*

$$A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \quad \text{для всех } a, b \in A,$$

так что

$$\begin{aligned} \star \quad a \cdot (\lambda \cdot b + \mu \cdot c) &= \lambda \cdot (a \cdot b) + \mu \cdot (a \cdot c), \\ \star \quad (\lambda \cdot a + \mu \cdot b) \cdot c &= \lambda \cdot (a \cdot c) + \mu \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

для всех $a, b, c \in A$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Определена категория алгебр $\mathcal{AL} = \mathcal{AL}_{\mathbb{F}}$, объекты которой суть алгебры (над $\mathbb{F}$), а морфизмы из алгебры A в алгебру B – линейные (подробнее, $\mathbb{F}$ -линейные) отображения $f: A \rightarrow B$ такие, что $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ для всех $a, b \in A$.

По определению умножение $\cdot$ есть билинейная операция в линейном пространстве $A \in \text{Ob } \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, поэтому согласно универсальному свойству тензорного произведения существует единственное линейное отображение $\mu = \mu_A: A \otimes A \rightarrow A$ такое, что $a \cdot b = \mu(a \otimes b)$ для всех $a, b \in A$. Преимущество такого определения в том, что мы остаемся в категории линейных пространств над $\mathbb{F}$ и можем использовать все ее возможности. Так линейное отображение $f: A \rightarrow B$, где A и B – алгебры, является морфизмом алгебр, если $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$, т.е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\mu_A} & A \\ f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ B \otimes B & \xrightarrow{\mu_B} & B \end{array}$$

Алгебра A называется *унитальной*, если в ней есть элемент *единица* $e = e_A \in A$ такой, что $a \cdot e = e \cdot a = a$ для всех $a \in A$. Другими словами, существует линейное отображение $\varepsilon = \varepsilon_A: \mathbb{F} \rightarrow A$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F} \otimes A & = & A & = & A \otimes \mathbb{F} \\ \varepsilon \otimes \text{id} \downarrow & & \parallel & & \downarrow \text{id} \otimes \varepsilon \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A & \xleftarrow{\mu} & A \otimes A \end{array}$$

Конечно, $\varepsilon(1) = e$ для единицы $1 \in \mathbb{F}$ (поясним, что $\text{id} = \text{id}_A$ – тождественное отображение в A , и обратим внимание, что $\mathbb{F} \otimes L = L = L \otimes \mathbb{F}$ для любого линейного пространства L над $\mathbb{F}$). Морфизм f из унитарной алгебры A в унитарную алгебру B называется *унитарным*, если $f(e_A) = f(e_B)$, т.е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{\varepsilon_A} & A \\ \parallel & & \downarrow f \\ \mathbb{F} & \xrightarrow{\varepsilon_B} & B \end{array}$$

Требование унитарности алгебры A во многих ситуациях несущественно, поскольку всякая неунитарная алгебра имеет *унитарное расширение*. Действительно, пусть алгебра A не имеет единицы. Обозначим через $\hat{A} = \mathbb{F} \oplus_{\mathbb{F}} A$ прямую сумму двух линейных пространств над $\mathbb{F}$ с элементами $(\lambda, a) = \lambda e + a$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in A$, где $e = (1, 0) \in \hat{A}$, $a = (0, a) \in \hat{A}$, и покомпонентными линейными операциями

$$\alpha(\lambda e + a) + \beta(\mu e + b) = (\alpha\lambda + \beta\mu)e + (\alpha a + \beta b)$$

для всех $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a, b \in A$. Введем в линейном пространстве $\hat{A}$ умножение таким образом, чтобы элемент e стал единицей, а алгебра A стала подалгеброй алгебры $\hat{A}$. Именно, положим

$$(\lambda e + a) \cdot (\mu e + b) = (\lambda\mu)e + (\mu a + \lambda b + a \cdot b)$$

$$\text{для всех } \lambda, \mu \in \mathbb{F}, a, b \in A.$$

Легко проверяется, что при таком определении все аксиомы умножения и наши пожелания выполнены. Таким образом, $\hat{A}$ есть унитарное расширение алгебры A .

Алгебра A называется *коммутативной*, если

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{для всех } a, b \in A.$$

На языке диаграмм это означает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\sigma} & A \otimes A \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & A & \end{array}$$

где перестановка σ задается правилом $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$ для всех $a, b \in A$. Алгебра A называется *ассоциативной*, если

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{для всех } a, b, c \in A.$$

На языке диаграмм это означает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & A \otimes A & & \\ & \nearrow \mu \otimes \text{id} & & \searrow \mu & \\ A \otimes A \otimes A & & & & A \\ & \searrow \text{id} \otimes \mu & & \nearrow \mu & \\ & & A \otimes A & & \end{array}$$

В случае ассоциативного умножения вместо $a \cdot b$ обычно пишут ab .

Алгебра A называется *алгеброй Ли*, если справедливы равенства

- ★ $a \cdot b + b \cdot a = 0$ для всех $a, b \in A$ (антикоммутативность),
- ★ $a \cdot (b \cdot c) + b \cdot (c \cdot a) + c \cdot (a \cdot b) = 0$ для всех $a, b, c \in A$ (тождество Якоби).

В алгебрах Ли вместо $a \cdot b$ обычно пишут $[a, b]$ и операцию умножения называют *скобкой Ли*.

Линейное подпространство $B \subset A$ называется *подалгеброй* алгебры A , если оно замкнуто относительно умножения, т.е.

$$a \cdot b \in B \quad \text{для всех } a, b \in B.$$

Линейное подпространство $J \subset A$ называется *левым* (*правым*) *идеалом* алгебры A , если

$$a \cdot b \in J \quad (b \cdot a \in J) \quad \text{для всех } a \in A, b \in J.$$

Линейное подпространство J называется *идеалом* (подробнее, *двусторонним идеалом*) алгебры A , если J есть левый и правый идеал одновременно. Подмножество

$$\text{сеп } A = \{a \in A \mid a \cdot b = b \cdot a \text{ для всех } b \in A\}$$

называется *центром* алгебры A , а подмножество

$$\text{анн } A = \{a \in A \mid a \cdot b = b \cdot a = 0 \text{ для всех } b \in A\} \subset \text{сеп } A$$

называется *аннулятором* алгебры A . Ясно, что $\text{сеп } A$ – подалгебра алгебры A , а $\text{анн } A$ – ее идеал. Если A – алгебра Ли, то $\text{сеп } A = \text{анн } A$.

Пусть B – линейное подпространство алгебры A , так что определено линейное факторпространство A/B . Если B – идеал алгебры A , то A/B – алгебра, где умножение индуцировано из A , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b + B \in A/B$ для всех $\mathbf{a} = a + B$, $\mathbf{b} = b + B \in A/B$.

Для всякого $f \in \text{Hom}_{\mathcal{AL}}(A, B)$ ядро $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ есть идеал алгебры A , а образ $\text{им } f = \{b = f(a) \in B \mid a \in A\}$ есть подалгебра алгебры B .

Алгебра A называется *топологической*, если A – топологическое линейное пространство и умножение непрерывно, причем имеется две основных возможности: (а) умножение раздельно непрерывно (т.е. непрерывно по каждому сомножителю при фиксированном другом), (б) умножение совместно непрерывно (т.е. непрерывно как отображение топологического пространства $A \times A$ в топологическое пространство A). В приложениях используются обе возможности, хотя как правило предполагается, что умножение раздельно непрерывно. Морфизм топологической алгебры A в топологическую алгебру B называется *непрерывным*, если он непрерывен как отображение топологического пространства A в топологическое пространство B . Таким образом, определена категория *топологических алгебр* $\mathcal{TAL} = \mathcal{TAL}_{\mathbb{F}}$ (см., например, [24]).

ПРИМЕР 1.4.1. Поле $\mathbb{F}$ есть простейшая нетривиальная алгебра, причем унитарная ассоциативная и коммутативная.

ПРИМЕР 1.4.2. Множество $\mathbf{M}(D, \mathbb{F})$ всех квадратных матриц порядка D с элементами из $\mathbb{F}$ есть унитарная ассоциативная алгебра с обычными алгебраическими операциями.

ПРИМЕР 1.4.3. Множество $\mathfrak{sl}(D, \mathbb{F}) = \{a \in \mathbf{M}(D, \mathbb{F}) \mid \text{tr}(a) = 0\}$ всех матриц из $\mathbf{M}(D, \mathbb{F})$ с нулевым следом ($\text{tr}(a)$ – след матрицы a) есть алгебра Ли над $\mathbb{F}$ с коммутатором $[a, b] = ab - ba$ для $a, b \in \mathfrak{sl}(D, \mathbb{F})$ в качестве скобки.

ПРИМЕР 1.4.4. Множество $\mathfrak{u}(D, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{M}(D, \mathbb{C}) \mid a^+ = -a\}$ всех косоэрмитовых матриц из $\mathbf{M}(D, \mathbb{C})$ ($a^+ = \bar{a}'$ – эрмитово сопряжение, где черта “ $-$ ” – комплексное сопряжение, штрих “ $'$ ” – транспонирование) есть алгебра Ли над $\mathbb{R}$ с коммутатором в качестве скобки Ли.

ПРИМЕР 1.4.5. Пусть S – множество, A – алгебра, тогда множество A^S всех отображений из S в A есть алгебра с поточечными алгебраическими операциями

$$(\lambda\phi + \mu\psi)(s) = \lambda\phi(s) + \mu\psi(s), \quad (\phi \cdot \psi)(s) = \phi(s) \cdot \psi(s)$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\phi, \psi \in A^S$, $s \in S$. Алгебра A^S наследует свойства алгебры A такие, как унитарность, ассоциативность, коммутативность, Ли (скобка Ли переходит в скобку Ли).

1.4.2. Стандартные конструкции. Пусть $\mathbb{F}$ – поле. При переходе из категории $\mathbb{F}$ -линейных пространств (как $\mathbb{F}$ -модулей) в категорию алгебр над полем $\mathbb{F}$ многие конструкции сохраняются, с заменой $\mathbb{F}$ -линейных отображений (т.е. морфизмов категории $\mathbb{F}$ -линейных пространств) на морфизмы категории алгебр над $\mathbb{F}$.

Прямые произведения и прямые суммы. Прямое произведение $\times A_i = \times_{i \in I} A_i$ семейства алгебр $\{A_i \mid i \in I\}$ есть его прямое произведение как семейства линейных пространств, с покомпонентным умножением, $(a_i) \cdot (b_i) = (a_i \cdot b_i)$, $(a_i), (b_i) \in \times A_i$, а для данного семейства морфизмов алгебр $\{B \xrightarrow{f_i} A_i\}$ морфизм $B \xrightarrow{f} \times A_i$ действует по правилу $f(x) = (a_i = f_i(x))$ для всех $x \in B$. Аналогичным образом, прямая сумма $\oplus A_i = \oplus_{i \in I} A_i$ семейства алгебр $\{A_i \mid i \in I\}$ есть его прямая сумма как семейства линейных пространств, с покомпонентным умножением, $(a_i) \cdot (b_i) = (a_i \cdot b_i)$ для всех $(a_i), (b_i) \in \oplus A_i$. Для данного семейства морфизмов алгебр $\{A_i \xrightarrow{f_i} B\}$ морфизм $\oplus A_i \xrightarrow{f} B$ действует по правилу $f((a_i)) = \sum_{i \in I} f_i(a_i)$ для всех $(a_i) \in \oplus A_i$. Заметим, что прямая сумма $\oplus_{i \in I} A_i$ есть идеал прямого произведения $\times_{i \in I} A_i$, причем собственный, если семейство $\{A_i \mid i \in I\}$ бесконечное.

Тензорные произведения. Тензорное произведение семейства алгебр $\{A_i \mid i \in I\}$ с умножениями $\mu_i: A_i \otimes A_i \rightarrow A_i$, $i \in I$, определяется как тензорное произведение $\bigotimes A_i = \bigotimes_{i \in I} A_i$ соответствующих линейных пространств, снабженное умножением $\mu_\otimes: (\bigotimes_{i \in I} A_i) \otimes (\bigotimes_{i \in I} A_i) \rightarrow \bigotimes_{i \in I} A_i$ таким, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (\bigotimes_{i \in I} A_i) \otimes (\bigotimes_{i \in I} A_i) & \xrightarrow{\mu_\otimes} & \bigotimes_{i \in I} A_i \\ & \searrow \sigma \quad \nearrow \bigotimes \mu_i & \\ & \bigotimes_{i \in I} (A_i \otimes A_i) & \end{array}$$

т.е. $\mu_\otimes = (\bigotimes \mu_i) \circ \sigma$, где перестановка σ – линейное отображение задаваемое правилом $\sigma((\bigotimes_{i \in I} a_i) \otimes (\bigotimes_{i \in I} b_i)) = \bigotimes_{i \in I} (a_i \otimes b_i)$ для всех $(a_i), (b_i) \in \times A_i$. Можно проверить, что умножение в $\bigotimes A_i$ задается правилом

$$(\bigotimes_{i \in I} a_i) \cdot (\bigotimes_{i \in I} b_i) = \bigotimes_{i \in I} (a_i \cdot b_i) \quad \text{для всех } (a_i), (b_i) \in \times A_i.$$

В категории алгебр тензорное произведение сохраняет те же свойства, что и в категории линейных пространств, разумеется, с естественными модификациями. Предлагается рассмотреть их в качестве упражнения.

Присоединенная алгебра Ли. Пусть A – алгебра. Для каждой пары элементов $a, b \in A$ определен коммутатор

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \in A.$$

Условие антикоммутативности скобки Ли, очевидно, выполняется. Тожество Якоби также будет выполняться, если алгебра A ассоциативная. Таким образом, для каждой ассоциативной алгебры A определена *присоединенная алгебра Ли* $\text{as}A$, которая совпадает с A как линейное пространство, а в качестве скобки Ли берется коммутатор.

ПРИМЕР 1.4.6. Пусть L – линейное пространство и $\text{End}_{\mathbb{F}}(L)$ – линейное пространство всех его эндоморфизмов. Взяв в качестве умножения композицию эндоморфизмов $(\mu(f \otimes g) = f \circ g$ для всех $f, g \in \text{End}_{\mathbb{F}}(L)$), превратим $\text{End}_{\mathbb{F}}(L)$ в унитарную ассоциативную алгебру с тождественным отображением в качестве

единицы. Ее присоединенная $\mathfrak{gl}(L) = \text{as End}_{\mathbb{F}}(L)$ есть алгебра Ли всех эндоморфизмов (иногда говорят *линейных преобразований*) линейного пространства L .

1.4.3. Градуировка. Пусть Γ – абелева группа. Говорят, что алгебра A *градуирована абелевой группой* Γ (другими словами, Γ -градуирована), если она Γ -градуирована как линейное пространство, $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$, для некоторого семейства линейных пространств $\{A_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$ и произведение $a \cdot b \in A_{\alpha+\beta}$ для любых $a \in A_{\alpha}$, $b \in A_{\beta}$ (т.е. $A_{\alpha} \cdot A_{\beta} \subset A_{\alpha+\beta}$), $\alpha, \beta \in \Gamma$. Пусть $A = \bigoplus A_{\gamma}$, $B = \bigoplus B_{\gamma}$ – две Γ -градуированные алгебры, и пусть $f = \sum f_{\gamma}: A \rightarrow B$ – линейное отображение, Γ -градуированное семейством линейных отображений $\{f_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$. Легко проверяется, что γ -однородная компонента f_{γ} может быть ненулевым морфизмом алгебр лишь при $\gamma = 0$. Учитывая этот факт, морфизм f называется *морфизмом Γ -градуированных алгебр*, если он *однородный* (точнее, 0-однородный). Таким образом, определена категория Γ -градуированных алгебр $\mathcal{AL}_{\mathbb{F}, \Gamma}$, объекты которой суть Γ -градуированные алгебры, а морфизмы – морфизмы Γ -градуированных алгебр. Благодаря наличию градуировки в категории $\mathcal{AL}_{\mathbb{F}, \Gamma}$ появляются новые возможности.

Назовем *градуирующим множителем*, ассоциированным с градуировкой Γ , всякое отображение $\chi = \chi_{\Gamma}: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{F}$ такое, что

$$\star \chi(\alpha, \beta)\chi(\beta, \alpha) = 1 \quad \text{для всех } \alpha, \beta \in \Gamma,$$

$$\star \chi(\alpha + \beta, \gamma) = \chi(\alpha, \gamma)\chi(\beta, \gamma) \quad \text{для всех } \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$$

(проверить, что в этом случае и $\chi(\alpha, \beta + \gamma) = \chi(\alpha, \beta)\chi(\alpha, \gamma)$).

ПРИМЕР 1.4.7. Для тривиальной градуировки $\Gamma = 0$ есть только одна возможность $\chi(0, 0) = 1$.

ПРИМЕР 1.4.8. Для популярной градуировки $\Gamma = \mathbb{Z}$ есть две возможности

$$\chi(m, n) = 1 \quad \text{для всех } m, n \in \mathbb{Z},$$

$$\chi(m, n) = (-1)^{mn} \quad \text{для всех } m, n \in \mathbb{Z}.$$

ПРИМЕР 1.4.9. Для градуировки $\Gamma = \mathbb{Z}^D$, $D \in \mathbb{N}$, градуирующие множители имеют вид

$$\chi(m, n) = \prod_{1 \leq \alpha, \beta \leq D} (q_{\alpha\beta})^{\mu_{\alpha}\nu_{\beta}} \quad \text{для всех } m, n \in \mathbb{Z}^D,$$

где $D \times D$ -матрица $q = \|q_{\alpha\beta}\|$, $q_{\alpha\beta} \in \mathbb{F}$, такая, что $q_{\alpha\beta}q_{\beta\alpha} = 1$, $1 \leq \alpha, \beta \leq D$ (поясним, что $m = (\mu_1, \dots, \mu_D)$, $n = (\nu_1, \dots, \nu_D)$).

ПРИМЕР 1.4.10. Для градуировки $\Gamma = \mathbf{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ опять есть две возможности

$$\begin{aligned} \chi(\alpha, \beta) &= 1 && \text{для всех } \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_2, \\ \chi(\alpha, \beta) &= (-1)^{\alpha\beta} && \text{для всех } \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_2, \end{aligned}$$

поясним что $\alpha = \alpha + 2\mathbb{Z}$, $\beta = \beta + 2\mathbb{Z}$, $\alpha, \beta = 0, 1$, так что $\alpha\beta = \alpha\beta + 2\mathbb{Z}$ и выражение $(-1)^{\alpha\beta}$ корректно определено.

Пусть Γ – абелева группа и χ – градуирующий множитель. Для Γ -градуированной алгебры $A = \bigoplus A_\gamma$ градуированный коммутатор определяется правилом

$$[a, b]_\chi = a \cdot b - \chi(\alpha, \beta)b \cdot a \quad \text{для всех } a \in A_\alpha, b \in A_\beta, \alpha, \beta \in \Gamma,$$

очевидно, в этом случае $[a, b]_\chi \in A_{\alpha+\beta}$. Легко проверяются следующие свойства градуированного коммутатора:

$$\star [a, b]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, a]_\chi = 0,$$

$\star$ если алгебра A ассоциативная, то

$$\chi(\gamma, \alpha)[a, [b, c]_\chi]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, [c, a]_\chi]_\chi + \chi(\beta, \gamma)[c, [a, b]_\chi]_\chi = 0$$

для всех $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$. Первое свойство называется *градуированной антикоммутативностью*, а второе – *градуированным тождеством Якоби*. Алгебра A называется *градуированной коммутативной алгеброй*, если $[a, b]_\chi = 0$ для всех $a, b \in A$. Аналогичным образом, градуированным центром градуированной алгебры A называется множество

$$\text{cen}_\chi A = \{a \in A \mid [a, b]_\chi = 0 \text{ для всех } b \in A\}.$$

В соответствии с определением градуированного коммутатора градуированная алгебра A называется *градуированной алгеброй Ли*, если умножение в ней, называемое *градуированной скобкой Ли* и обозначаемое через $[\cdot, \cdot]_\chi$, удовлетворяет приведенным выше равенствам

$$\star [a, b]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, a]_\chi = 0,$$

$$\star \chi(\gamma, \alpha)[a, [b, c]_\chi]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, [c, a]_\chi]_\chi + \chi(\beta, \gamma)[c, [a, b]_\chi]_\chi = 0$$

для всех $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

Пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$, $B = \bigoplus_{\beta \in \Gamma} B_\beta$ – две Γ -градуированные ассоциативные алгебры и $A \otimes B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (A \otimes B)_\gamma$ – их Γ -градуированное тензорное произведение как Γ -градуированных

линейных пространств. Пусть χ – градуирующий множитель, тогда на $A \otimes B$ определена структура градуированной алгебры, с умножением, задаваемым правилом

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = \chi(\beta_1, \alpha_2)((a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2))$$

для всех $a_i \in A_{\alpha_i}$, $b_i \in B_{\beta_i}$, $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, $i = 1, 2$. Благодаря свойствам градуирующего множителя, алгебра $A \otimes B$ ассоциативная. Действительно, с одной стороны,

$$\begin{aligned} & ((a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2)) \cdot (a_3 \otimes b_3) \\ &= \chi(\beta_1, \alpha_2)((a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)) \cdot (a_3 \otimes b_3) \\ &= \chi(\beta_1, \alpha_2) \chi(\beta_1 + \beta_2, \alpha_3)(a_1 a_2 a_3) \otimes (b_1 b_2 b_3) \\ &= \chi(\beta_1, \alpha_2) \chi(\beta_1, \alpha_3) \chi(\beta_2, \alpha_3)(a_1 a_2 a_3) \otimes (b_1 b_2 b_3), \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} & (a_1 \otimes b_1) \cdot ((a_2 \otimes b_2) \cdot (a_3 \otimes b_3)) \\ &= \chi(\beta_2, \alpha_3)(a_1 \otimes b_1) \cdot ((a_2 a_3) \otimes (b_2 b_3)) \\ &= \chi(\beta_2, \alpha_3) \chi(\beta_1, \alpha_2 + \alpha_3)(a_1 a_2 a_3) \otimes (b_1 b_2 b_3) \\ &= \chi(\beta_2, \alpha_3) \chi(\beta_1, \alpha_2) \chi(\beta_1, \alpha_3)(a_1 a_2 a_3) \otimes (b_1 b_2 b_3) \end{aligned}$$

для всех $a_i \in A_{\alpha_i}$, $b_i \in B_{\beta_i}$, $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, $i = 1, 2, 3$. Сравнивая полученные выражения, убеждаемся в ассоциативности Γ -градуированной алгебры $A \otimes B$.

Подробнее смотри, например, [20], [21], [27], [18], [31], [32], [24].

1.5. Модули над алгебрами

Подавляющее число модулей, применяемых в математической физике, фактически являются модулями над алгебрами и, следовательно, заслуживают отдельного рассмотрения. Поскольку алгебры суть кольца специального вида, то и модули над алгебрами – частный случай модулей над кольцами. При этом удобно строить модули над алгебрами, стартуя с линейных пространств, а не с абелевых групп. Итак, абелевы группы заменяем на линейные пространства, а кольца на алгебры.

1.5.1. Модули над алгебрами. Пусть $\mathbb{F}$ – поле и A – ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$. Линейное пространство $M \in \text{Ob } \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$

называется *левым A -модулем* над алгеброй A , если определена билинейная операция – умножение слева на элементы из A ,

$$A \times M \rightarrow M, \quad (a, x) \mapsto ax \quad \text{для всех } a \in A, x \in M,$$

причем выполняются аксиомы:

- ★ $(ab)x = a(bx)$ для всех $a, b \in A, x \in M$;
- ★ $(\lambda a + \mu b)x = \lambda(ax) + \mu(bx)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}, a, b \in A, x \in M$;
- ★ $a(\lambda x + \mu y) = \lambda(ax) + \mu(ay)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}, a \in A, x, y \in M$.

Если алгебра A унитарная, т.е. имеет единицу $e \in A$, то дополнительно налагают условие

$$\star \quad ex = x \quad \text{для всех } x \in M.$$

Унитарность алгебры A во многих случаях не существенна. Действительно, пусть алгебра A не содержит единицы, и пусть $\widehat{A}$ – ее унитарное расширение (см. с. 64). Для любого левого A -модуля M правило

$$(\lambda e + a) \cdot x = \lambda x + ax \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{F}, a \in A, x \in M,$$

определяет на M структуру левого $\widehat{A}$ -модуля. Другими словами, всякий левый A -модуль одновременно является и левым $\widehat{A}$ -модулем.

Пусть M, N – левые A -модули. Линейное отображение $f: M \rightarrow N$ называется *A -линейным отображением*, если

$$f(ax) = af(x) \quad \text{для всех } a \in A, x \in M.$$

Заметим, что и здесь унитарность алгебры A не существенна, поскольку для любого A -линейного отображения $f: M \rightarrow N$ имеем

$$\begin{aligned} f((\lambda e + a)x) &= f(\lambda x + ax) = f(\lambda x) + f(ax) \\ &= \lambda f(x) + af(x) = (\lambda e + a)f(x) \end{aligned}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{F}, a \in A, x \in M$, т.е. отображение f фактически $\widehat{A}$ -линейное.

Таким образом, определена категория $\mathcal{LM}_A$ левых A -модулей, объекты которой – левые A -модули, а морфизмы – A -линейные отображения.

Аналогичным образом, линейное пространство $M \in \text{Ob } \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ называется *правым A -модулем* над алгеброй A , если определена билинейная операция – умножение справа на элементы из A ,

$$M \times A \rightarrow M, \quad (x, a) \mapsto xa \quad \text{для всех } x \in M, a \in A,$$

причем выполняются аксиомы:

- ★ $x(ab) = (xa)b$ для всех $x \in M, a, b \in A$;
- ★ $x(\lambda a + \mu b) = \lambda(xa) + \mu(xb)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}, x \in M, a, b \in A$;
- ★ $(\lambda x + \mu y)a = \lambda(xa) + \mu(ya)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}, x, y \in M, a \in A$.

Если алгебра A унитарная, т.е. имеет единицу $e \in A$, то дополнительно налагают условие

- ★ $xe = x$ для всех $x \in M$.

Пусть M, N – правые A -модули. Линейное отображение $f: M \rightarrow N$ называется A -линейным отображением, если

$$f(xa) = f(x)a \quad \text{для всех } x \in M, a \in A.$$

Таким образом, определена категория $\mathcal{RM}_A$ правых A -модулей, объекты которой – правые A -модули, а морфизмы – A -линейные отображения.

Если алгебра A коммутативная, то обе категории по существу совпадают. В этом случае определена категория A -модулей $\mathcal{M}_A$ и можно использовать обе формы записи. В общем случае все утверждения категории левых модулей имеют естественные аналоги в категории правых модулей. Ниже, если не оговорено противное, будем рассматривать только левые модули, предоставляя читателям правые формулировки в качестве упражнения.

В топологической ситуации, когда A – топологическая алгебра, а M – топологическое линейное пространство, добавляется естественное условие непрерывности билинейных операций, совместной или раздельной. Это определяет категорию топологических левых A -модулей $\mathcal{TLM}_A$ над $\mathbb{F}$, объекты которой суть топологические левые A -модули, а морфизмы – непрерывные A -линейные отображения.

ПРИМЕР 1.5.1. Алгебра A сама есть левый A -модуль с левым присоединенным действием

$$A \times A \rightarrow A, \quad (a, x) \mapsto ax \quad \text{для всех } a, x \in A,$$

и правый A -модуль с правым присоединенным действием

$$A \times A \rightarrow A, \quad (x, a) \mapsto xa \quad \text{для всех } x, a \in A.$$

ПРИМЕР 1.5.2. Пусть M – левый A -модуль, X – линейное пространство. Тогда $M \otimes_{\mathbb{F}} X$ – левый A -модуль с билинейной операцией

$$(a, m \otimes x) \mapsto a(m \otimes x) = (am) \otimes x \quad \text{для всех } a \in A, m \in M, x \in X,$$

значок $\mathbb{F}$ поясняет, что тензорное произведение берется в категории линейных пространств над $\mathbb{F}$.

1.5.2. Стандартные конструкции. Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$.

Подмодули и фактормодули. Пусть M левый A -модуль. Линейное подпространство $S \subset M$ называется *подмодулем* модуля M , если оно замкнуто относительно умножения на элементы из A , т.е. если $ax \in S$ для всех $a \in A, x \in S$ (иначе, $AS \subset S$). В этом случае S – левый A -модуль, определен *фактормодуль* M/S – тоже левый A -модуль с умножением $A \times (M/S) \rightarrow (M/S)$,

$$(a, \mathbf{x}) \mapsto a\mathbf{x} = ax + S \quad \text{для всех } a \in A, \mathbf{x} = x + S \in M/S,$$

и естественное A -линейное отображение $\pi: M \rightarrow M/S$, действующее по правилу $x \mapsto \mathbf{x} = x + S$ для всех $x \in M$.

Для каждого A -линейного отображения $f: M \rightarrow N$ определены ядро $\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ – подмодуль левого A -модуля M , и образ $\operatorname{im} f = \{y = f(x) \in N \mid x \in M\}$ – подмодуль левого A -модуля N , причем имеется точная последовательность A -линейных отображений

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{im} f \longrightarrow 0.$$

Прямые произведения и прямые суммы. Прямые произведения и прямые суммы в категории левых A -модулей существуют и строятся по тем же правилам, что и в категории линейных пространств, с заменой линейных пространств на модули, а линейных отображений – на морфизмы модулей.

Именно, пусть дано семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ левых A -модулей.

Прямое произведение $\times M_i$ есть множество всевозможных семейств $x = (x_i) = (x_i \in M_i \mid i \in I)$ с покомпонентными модульными операциями:

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_i + \mu y_i), \quad ax = (ax_i),$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in A$, $x = (x_i), y = (y_i) \in \times M_i$. Канонические проекции $\pi_k: \times M_i \rightarrow M_k$, $k \in I$, действуют по правилу $x = (x_i) \mapsto \pi_k(x) = x_k$ для всех $x = (x_i) \in \times M_i$ и являются A -линейными отображениями. Для данного семейства $\{M \xrightarrow{f_i} M_i\}$ A -линейных отображений A -линейное отображение $M \xrightarrow{f} \times M_i$ задается правилом $y \mapsto f(y) = (x_i = f_i(y))$ для всех $y \in M$.

Пусть I – множество индексов. Определена категория $\mathcal{LM}_A^I$. Объекты этой категории суть семейства $\{M_i\} = \{M_i \mid i \in I\}$ левых A -модулей, а морфизмы из объекта $\{M_i\}$ в объект $\{N_i\}$ суть семейства A -линейных отображений

$$\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i \mid i \in I\}.$$

Для семейств $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ и $\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\}$ композиция определена покомпонентно

$$\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\},$$

тождественный морфизм есть семейство тождественных отображений $\{M_i \xrightarrow{\text{id}_{M_i}} M_i\}$. Как показано выше, для каждого семейства $\{M_i\}$ определено его прямое произведение $\times M_i$. Далее, для всякого семейства A -линейных отображений $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ определено *прямое произведение* $\times f_i: \times M_i \rightarrow \times N_i$ – A -линейное отображение с покомпонентным действием

$$x = (x_i) \mapsto (\times f_i)(x) = (y_i), \quad y_i = f_i(x_i) \quad \text{для всех } i \in I, x_i \in M_i.$$

Очевидно, прямое произведение семейства тождественных отображений $\{M_i \xrightarrow{\text{id}_{M_i}} M_i\}$ есть $\times \text{id}_{M_i} = \text{id}_{\times M_i}$ – тождественное отображение на прямом произведении $\times M_i$, композиция

$$\begin{aligned} \{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} &= \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\} \mapsto \\ &\mapsto (\times g_i) \circ (\times f_i) = \times (g_i \circ f_i). \end{aligned}$$

Таким образом, определен ковариантный функтор $\times$ из категории $\mathcal{LM}_A^I$ в категорию $\mathcal{LM}_A$.

Аналогичным образом, прямая сумма $\bigoplus M_i$ есть множество всех семейств $x = (x_i) = (x_i \in M_i \mid i \in I) = \sum_{i \in I} x_i$, у которых

лишь конечное число компонент ненулевые, модульные операции – покомпонентные, канонические инъекции $\iota_k: M_k \rightarrow \bigoplus M_i$, $k \in I$, действуют по правилу $x_k \mapsto (\delta_i^k x_k \mid i \in I) = x_k$ для всех $x_k \in M_k \subset \bigoplus M_i$ и являются A -линейными отображениями. Для данного семейства $\{M_i \xrightarrow{f_i} M\}$ A -линейных отображений A -линейное отображение $\bigoplus M_i \xrightarrow{f} M$ задается правилом $x = \sum_{i \in I} x_i \mapsto f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x_i)$ для всех $x \in \bigoplus M_i$.

Опять, $\bigoplus M_i$ есть подмодуль модуля $\times M_i$, причем

$$\bigoplus M_i = \times M_i,$$

если семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ конечное.

Пусть I – множество индексов и $\mathcal{LM}_A^I$ – введенная выше категория. Для каждого семейства $\{M_i\}$ определена его прямая сумма $\bigoplus M_i$. Также, для всякого семейства A -линейных отображений $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ определена его *прямая сумма* $\bigoplus f_i: \bigoplus M_i \rightarrow \bigoplus N_i$ – A -линейное отображение, задаваемое правилом

$$x \mapsto (\bigoplus f_i)(x) = \sum y_i, \quad y_i = f_i(x_i)$$

$$\text{для всех } i \in I, \quad x = \sum x_i \in \bigoplus M_i.$$

Прямая сумма семейства тождественных морфизмов $\{M_i \xrightarrow{\text{id}_{M_i}} M_i\}$ есть $\bigoplus \text{id}_{M_i} = \text{id}_{\bigoplus M_i}$ – тождественный морфизм на прямой сумме $\bigoplus M_i$, композиция

$$\begin{aligned} \{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} &= \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\} \mapsto \\ &\mapsto (\bigoplus g_i) \circ (\bigoplus f_i) = \bigoplus (g_i \circ f_i). \end{aligned}$$

Таким образом, определен ковариантный функтор $\bigoplus$ из категории $\mathcal{LM}_A^I$ в категорию $\mathcal{LM}_A$.

В топологической категории прямое произведение $\times M_i$ наделяется слабой топологией, в которой все проекции непрерывные, а прямая сумма $\bigoplus M_i$ наделяется сильнейшей топологией, в которой все инъекции непрерывные. Вложение $\bigoplus M_i \subset \times M_i$ всегда непрерывное, и $\bigoplus M_i = \times M_i$ как топологические левые A -модули, если семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ конечное.

Свободные модули. Пусть A – унитарная ассоциативная алгебра и S – некоторое множество. Каждому левому A -модулю M поставим в соответствие левый A -модуль M^S всех отображений из S в M с поточечными операциями

$$(\lambda\phi + \mu\psi)(s) = \lambda\phi(s) + \mu\psi(s), \quad (a\phi)(s) = a\phi(s)$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in A$, $\phi, \psi \in M^S$, $s \in S$. Множество M_{fin}^S всех конечных отображений из S в M есть подмодуль модуля M^S (напомним, что отображение мы называем конечным, если его носитель – конечное множество).

Рассмотрим категорию, объекты которой суть отображения $\phi \in M^S$, M – левый A -модуль, а морфизмы из объекта $\phi \in M^S$ в объект $\psi \in N^S$ суть A -линейные отображения $f: M \rightarrow N$ из левого A -модуля M в левый A -модуль N такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \phi \swarrow & & \searrow \psi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Как и следовало ожидать, в этой категории есть универсальный отталкивающий элемент $S \xrightarrow{\delta} A\langle S \rangle$, который называется *свободным левым A -модулем, порожденным множеством S* , и строится по тем же правилам, что и в случае модулей над кольцами (см. с. 45). Опять же, как в случае модулей над кольцами, причем теми же формулами определен ковариантный функтор δ из категории множеств в категорию левых A -модулей.

Левый A -модуль M называется *свободным левым A -модулем с базисом $S \subset M$* , если он изоморфен модулю $A\langle S \rangle$. Универсальность базиса $S \subset M$ в том, что для того чтобы определить A -линейное отображение левого A -модуля M в какой-либо левый A -модуль N , достаточно задать его на базисе S и дальше продолжить на весь M по A -линейности, причем такое продолжение всегда существует и единственное.

Не все левые A -модули свободные, однако имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5.1. *Каждый левый A -модуль есть фактормодуль свободного левого A -модуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – левый A -модуль. Возьмем M в качестве базисного множества, и пусть $(A\langle M \rangle, \delta)$ – соответствующий универсальный объект. Тожественному отображению

$\text{id}: M \rightarrow M$ отвечает следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & M & & & & \\
 & \searrow \delta & & \searrow \text{id} & & & \\
 0 & \longrightarrow & \ker f & \longrightarrow & A\langle M \rangle & \xrightarrow{f} & M \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

где $f = (\text{id})_*$ есть левое A -линейное отображение, порожденное тождественным отображением id . По построению отображение f есть эпиморфизм, так что $M = A\langle M \rangle / \ker f$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для данного модуля следует различать его $\mathbb{F}$ -линейный базис (т.е. его базис как линейного пространства над $\mathbb{F}$) и его A -линейный базис (т.е. его базис как левого A -модуля).

ПРИМЕР 1.5.3. Пусть X – линейное пространство над $\mathbb{F}$ и $\dim_{\mathbb{F}} X$ – его размерность (число элементов базиса). Определен (см. пример 1.5.2) левый A -модуль $M = A \otimes_{\mathbb{F}} X$, его размерность как левого A -модуля есть $\dim_A M = \dim_{\mathbb{F}} X$, а его размерность как линейного пространства над $\mathbb{F}$ есть $\dim_{\mathbb{F}} M = \dim_{\mathbb{F}} A \cdot \dim_{\mathbb{F}} X$.

Тензорные произведения. Пусть A – унитарная ассоциативная коммутативная алгебра.

Тензорные произведения в категории левых A -модулей строятся по тем же правилам, что и в случае левых модулей над кольцами, с очевидными модификациями. Подробнее, пусть $\{M_i \mid i \in I\}$ – семейство левых A -модулей и $\times M_i$ – его прямое произведение. Тензорное произведение $\bigotimes M_i = \bigotimes_{i \in I} M_i$ определяется как универсальный отталкивающий объект $\times M_i \xrightarrow{\pi} \bigotimes M_i$ категории, объекты которой суть A -полилинейные отображения из $\times M_i$ в левые A -модули, а морфизмы из объекта $\times M_i \xrightarrow{f} N$ в объект $\times M_i \xrightarrow{g} P$ суть A -линейные отображения $N \xrightarrow{\phi} P$ из левого A -модуля N в левый A -модуль P , для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & \times M_i & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 N & \xrightarrow{\phi} & P
 \end{array}$$

Как и в категориях модулей над кольцами и линейных пространств, каждое A -линейное отображение $h: \bigotimes M_i \rightarrow N$ порождается единственным A -полилинейным отображением $f: \times M_i \rightarrow N$, именно, $h = \mathbf{f}$ для $f = h \circ \varkappa$, так что A -линейные отображения из $\bigotimes M_i$ в данный левый A -модуль отождествляются с A -полилинейными отображениями из $\times M_i$ в этот модуль.

В категории левых A -модулей сохраняются свойства тензорного произведения, установленные в категориях модулей над кольцами и линейных пространств (ассоциативность, перестановки, тензорные произведения семейств A -линейных отображений, их функториальность). Предлагается сформулировать и доказать соответствующие утверждения в качестве упражнения.

В топологической ситуации возникающие проблемы наследуются из категорий топологических линейных пространств и топологических алгебр, их изучение выходит за рамки данных лекций.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку каждый левый A -модуль одновременно является линейным пространством над $\mathbb{F}$, для данного семейства $\{M_i \mid i \in I\}$ левых A -модулей следует различать его тензорное произведение в категории линейных пространств, обозначим его через $\bigotimes_{\mathbb{F}} M_i$, и его тензорное произведение в категории левых A -модулей, обозначим его через $\bigotimes_A M_i$.

ПРИМЕР 1.5.4. Пусть $A = \mathbb{F}[t]$ – алгебра всех многочленов от одной переменной t с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Тогда его тензорный квадрат в категории линейных пространств есть $A \otimes_{\mathbb{F}} A = \mathbb{F}[s, t]$ – линейное пространство (конечно, и алгебра) всех многочленов от двух переменных s, t с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Далее, пусть $M = A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^m$ – левый A -модуль всех столбцов высотой $m \in \mathbb{N}$ с элементами из A , а $N = A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n$ – аналогичный левый A -модуль всех столбцов высотой $n \in \mathbb{N}$ с элементами из A . Тензорное произведение этих модулей в категории линейных пространств есть

$$M \otimes_{\mathbb{F}} N = (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^m) \otimes_{\mathbb{F}} (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n) = (A \otimes_{\mathbb{F}} A) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F}^m \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n)$$

линейное пространство всех $(m \times n)$ -матриц с элементами из $A \otimes_{\mathbb{F}} A$, тогда как его тензорное произведение в категории левых A -модулей есть

$$M \otimes_A N = (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^m) \otimes_A (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n) = A \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F}^m \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n)$$

левый A -модуль всех $(m \times n)$ -матриц с элементами из A , поскольку тензорный квадрат левого A -модуля A в категории левых A -модулей есть $A \otimes_A A = A$.

1.5.3. Градуировка. Модули над алгебрами градуируются точно так же, как и модули над кольцами. Именно, пусть Γ – абелева группа, $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ – Γ -градуированная ассоциативная алгебра. Говорят, что левый A -модуль M *градуирован абелевой группой* Γ (другими словами, Γ -градуирован), если он Γ -градуирован как линейное пространство, $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$, для некоторого семейства линейных пространств $\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и произведение $ax \in M_{\alpha+\beta}$ для всех $a \in A_\alpha$, $x \in M_\beta$, $\alpha, \beta \in \Gamma$. Далее, пусть, $M = \bigoplus M_\gamma$, $N = \bigoplus N_\gamma$ – два Γ -градуированных левых A -модуля, A -линейное отображение $f: M \rightarrow N$ называется γ -однородным, $\gamma \in \Gamma$, если образ $f(x) \in M_{\alpha+\gamma}$ для всех $x \in M_\alpha \subset M$, $\alpha \in \Gamma$. Всякое A -линейное отображение $f: M \rightarrow N$ разлагается на однородные компоненты (другими словами, Γ -градуируется).

Таким образом, определена категория Γ -градуированных левых A -модулей, объектами которой суть Γ -градуированные левые A -модули, а морфизмы суть Γ -градуированные A -линейные отображения, причем эта категория есть полная подкатегория категории левых A -модулей.

Подмодуль $N \subset M$, где $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ есть Γ -градуированный левый A -модуль, называется Γ -градуированным, если $N = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} N_\gamma$, причем $N_\gamma = N \cap M_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Пусть A – унитарная ассоциативная коммутативная алгебра. Тензорное произведение $\bigotimes M_i$ всякого семейства $\{M_i \mid i \in I\}$ Γ -градуированных A -модулей, $M_i = \bigoplus_{\gamma_i \in \Gamma} M_{i, \gamma_i}$, обладает естественной Γ -градуировкой. Именно,

$$\begin{aligned} \bigotimes M_i &= \bigotimes_{i \in I} \left(\bigoplus_{\gamma_i \in \Gamma} M_{i, \gamma_i} \right) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \left(\bigotimes M_i \right)_\gamma, \\ \left(\bigotimes M_i \right)_\gamma &= \bigoplus_{\sum_{i \in I} \gamma_i = \gamma} \left(\bigotimes M_{i, \gamma_i} \right). \end{aligned}$$

Как и в градуированных алгебрах, в градуированных модулях появляются новые возможности. Действительно, пусть Γ – абелева группа, χ – градуирующий множитель, $A = \bigoplus A_\gamma$ – унитарная ассоциативная Γ -градуированная алгебра. Оставив без изменений определение Γ -градуированного левого A -модуля, в определении Γ -градуированного правого A -модуля M аксиому правой ассоциативности $x(ab) = (xa)b$ (см. с. 73) заменим на аксиому Γ -градуированной правой ассоциативности

$$\star \quad x(ab) = \chi(\alpha, \beta)(xa)b \quad \text{для всех } x \in M, a \in A_\alpha, b \in A_\beta.$$

Такое определение корректно, поскольку в силу свойств градуирующего множителя

$$x(abc) = \chi(\alpha, \beta)\chi(\alpha, \gamma)\chi(\beta, \gamma)((xa)b)c$$

для всех $x \in M$, $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, независимо от порядка вычислений. Далее, если алгебра A – градуированная коммутативная (см. с. 70), то

$$x(ab) = \chi(\alpha, \beta)x(ba) = \chi(\alpha, \beta)\chi(\beta, \alpha)(xb)a = (xb)a$$

для всех $x \in M$, $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, так что в этом случае правое и левое действие фактически совпадают (с точностью до записи), и говорят что задан Γ -градуированный модуль.

Пусть Γ – абелева группа, χ – градуирующий множитель, $A = \bigoplus A_\gamma$ – унитарная ассоциативная Γ -градуированная коммутативная алгебра. Пусть $M = \bigoplus M_\gamma$, $N = \bigoplus N_\gamma$ – пара Γ -градуированных A -модулей. Билинейное отображение $f: M \times N \rightarrow P$, где $P = \bigoplus P_\gamma$ – Γ -градуированный A -модуль, называется *градуированным A -билинейным*, если

$$\begin{aligned} f(ax, y) &= af(x, y) && \text{для всех } a \in A, x \in M, y \in N, \\ f(x, ay) &= \chi(\alpha, \beta)af(x, y), && \text{для всех } x \in M_\alpha, a \in A_\beta, y \in N, \\ &&& \alpha, \beta \in \Gamma. \end{aligned}$$

это определение корректно, поскольку в силу свойств градуирующего множителя χ и градуированной коммутативности алгебры A

$$\begin{aligned} f(ax, by) &= \chi(\beta, \gamma)(ab)f(x, y) \\ \text{для всех } a &\in A_\alpha, x \in M_\beta, b \in A_\gamma, y \in N, \end{aligned}$$

независимо от порядка вычислений.

В категории, объекты которой суть Γ -градуированные A -билинейные отображения из $M \times N = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (M_\gamma \times N_\gamma)$ в Γ -градуированные A -модули, а морфизмы из объекта $M \times N \xrightarrow{f} X$ в объект $M \times N \xrightarrow{g} Y$ суть A -линейные отображения $X \xrightarrow{h} Y$ из модуля $X = \bigoplus X_\gamma$ в модуль $Y = \bigoplus Y_\gamma$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M \times N & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

существует универсальный отталкивающий объект

$$M \times N \xrightarrow{\chi} M \otimes N,$$

называемый *Γ -градуированным тензорным произведением* пары модулей M, N . Строится это тензорное произведение так же, как и в неградуированной категории, с очевидными модификациями.

ЗАМЕЧАНИЕ. Γ -градуированное тензорное произведение над A можно определить и для произвольного линейно упорядоченного семейства Γ -градуированных A -модулей.

1.5.4. Тензорная алгебра модуля. Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – унитарная ассоциативная коммутативная алгебра над $\mathbb{F}$, M – A -модуль. Положим

$$T^n(M) = \bigotimes^n M = \begin{cases} M \otimes \cdots \otimes M \text{ (} n \text{ сомножителей)}, & n \in \mathbb{N}, \\ A, & n = 0. \end{cases}$$

(Здесь и ниже тензорное произведение берется в категории A -модулей.) Прямая сумма $T(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} T^n(M)$ A -модулей $T^n(M)$ по определению есть A -модуль. Она имеет дополнительную структуру унитарной ассоциативной $\mathbb{Z}_+$ -градуированной алгебры с умножением, задаваемым правилами

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q = x_1 \otimes \cdots \otimes y_q$$

для всех $p, q \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, y_q \in M$ (поясним, что $A \otimes M = M = M \otimes A$). Эта алгебра называется *тензорной алгеброй A -модуля M* .

Пусть дано A -линейное отображение $f: M \rightarrow N$ A -модуля M в A -модуль N , тогда правило

$$\begin{aligned} e &\mapsto e, \quad e \in A, \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_n &\mapsto f(x_1) \otimes \cdots \otimes f(x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in M, \end{aligned}$$

задает $\mathbb{Z}_+$ -градуированный морфизм $T(f): T(M) \rightarrow T(N)$, причем композиция $f \circ g$ переходит в композицию $T(f) \circ T(g)$. Другими словами, определен ковариантный функтор из категории A -модулей в категорию $\mathbb{Z}_+$ -градуированных алгебр.

Пусть M – A -модуль и $T(M)$ – его $\mathbb{Z}_+$ -градуированная тензорная алгебра. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определена *симметрическая группа* $\mathfrak{S}_n$, т.е. группа всех подстановок σ ,

$$\{1, \dots, n\} \mapsto \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\},$$

а для каждой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ определен знак $\text{sign } \sigma \in \{-1, +1\}$. Действие симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, $n \in \mathbb{N}$, на A -модуле $T^n(M)$, $x \mapsto \sigma(x)$, $\sigma \in \mathfrak{S}$, $x \in T^n(M)$, задается правилом

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \quad \text{для всех } x_1, \dots, x_n \in M.$$

На $T^0(M) = A$ группа $\mathfrak{S}_0 = \{\text{id}\}$ действует тривиально. В частности, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ определено A -линейное отображение

$$\pi_+^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma: T^n(M) \rightarrow T^n(M).$$

Его образ

$$S^n(M) = \text{im } \pi_+^n = \{x \in T^n(M) \mid \sigma(x) = x \text{ для всех } \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Легко проверяется, что $\pi_+^n \circ \pi_+^n = \pi_+^n$, т.е. π_+^n – проектор. Определена точная последовательность A -модулей

$$0 \longrightarrow \ker \pi_+^n \longrightarrow T^n(M) \xrightarrow{\pi_+^n} S^n(M) \longrightarrow 0,$$

так что $S^n(M) = T^n(M)/\ker \pi_+^n$. Положим $S(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} S^n(M)$ и превратим $S(M)$ в $\mathbb{Z}_+$ -градуированную унитарную ассоциативную коммутативную алгебру, задав умножение

$$\odot: S(M) \times S(M) \rightarrow S(M)$$

правилом

$$(x, y) \mapsto x \odot y = \pi_+^{m+n}(x \otimes y) \quad \text{для всех } x \in S^m(M), y \in S^n(M).$$

Далее, положим $\pi_+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \pi_+^n: T(M) \rightarrow S(M)$ (так что $\pi_+|_{T^n(M)} = \pi_+^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$), тогда π_+ – морфизм алгебр, его ядро $\ker \pi_+ = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \ker \pi_+^n$ – идеал алгебры $T(M)$ и алгебра $S(M) = T(M)/\ker \pi_+$. Алгебра $S(M)$ называется *симметрической алгеброй A -модуля M* . Заметим, что $S(M)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\chi = 1$.

Аналогичным образом, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ определено A -линейное отображение

$$\pi_-^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } \sigma \cdot \sigma: T^n(M) \rightarrow T^n(M).$$

Его образ

$$\Lambda^n(M) = \text{im } \pi_-^n = \{x \in T^n(M) \mid \sigma(x) = \text{sign } \sigma \cdot x \text{ для всех } \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

В частности, $\pi_-^n \circ \pi_-^n = \pi_-^n$, т.е. π_-^n – проектор. Определена точная последовательность A -модулей

$$0 \longrightarrow \ker \pi_-^n \longrightarrow T^n(M) \xrightarrow{\pi_-^n} \Lambda^n(M) \longrightarrow 0,$$

так что $\Lambda^n(M) = T^n(M) / \ker \pi_-^n$. Положим $\Lambda(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \Lambda^n(M)$ и превратим $\Lambda(M)$ в $\mathbb{Z}_+$ -градуированную унитарную ассоциативную алгебру, задав умножение

$$\wedge : \Lambda(M) \times \Lambda(M) \rightarrow \Lambda(M)$$

правилом

$$(x, y) \mapsto x \wedge y = \pi_-^{m+n}(x \otimes y) \quad \text{для всех } x \in \Lambda^m(M), y \in \Lambda^n(M).$$

Далее, положим $\pi_- = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \pi_-^n : T(M) \rightarrow \Lambda(M)$ (так что $\pi_-|_{T^n(M)} = \pi_-^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$), тогда π_- – морфизм алгебр, его ядро $\ker \pi_- = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \ker \pi_-^n$ – идеал алгебры $T(M)$ и алгебра $\Lambda(M) = T(M) / \ker \pi_-$. Алгебра $\Lambda(M)$ называется *внешней алгеброй A -модуля M* . Заметим, что

$$y \wedge x = (-1)^{nm} x \wedge y \quad \text{для всех } y \in \Lambda^n(M), x \in \Lambda^m(M),$$

так что $\Lambda(M)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\chi(m, n) = (-1)^{mn}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

В качестве упражнения полезно поразмышлять об универсальных свойствах введенных алгебр.

1.5.5. Ли модули. Вспомним, что левый модуль M над ассоциативной алгеброй A задавался морфизмом из алгебры A в алгебру $\text{End}_{\mathbb{F}}(M)$ эндоморфизмов $\mathbb{F}$ -линейного пространства M . Но у алгебры $\text{End}_{\mathbb{F}}(M)$ есть присоединенная алгебра Ли $\mathfrak{gl}(M)$ (см. пример 1.4.6), что позволяет определить модули над алгебрами Ли.

Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – алгебра Ли над $\mathbb{F}$. $\mathbb{F}$ -линейное пространство M называется *Ли модулем над A* , если определено действие алгебры Ли A линейном пространстве M , т.е. задан морфизм алгебр Ли $\lambda : A \rightarrow \mathfrak{gl}(M)$. Подробнее, в этом случае каждому $a \in A$ ставится в соответствие эндоморфизм линейных пространств $\lambda(a) : M \rightarrow M$, $x \mapsto \lambda(a)(x) = [a, x]$ (запись $\lambda(a)(x)$ сокращаем до $[a, x]$, хотя такое сокращение и не является общепринятым, но весьма наглядное), причем выполнены условия

- ★ $[a, \alpha x + \beta y] = \alpha[a, x] + \beta[a, y],$
- ★ $[\alpha a + \beta b, x] = \alpha[a, x] + \beta[b, x],$
- ★ $[[a, b], x] = [a, [b, x]] - [b, [a, x]]$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $a, b \in A$, $x, y \in M$. Последнее условие в стандартных обозначениях имеет вид $\lambda([a, d]) = [\lambda(a), \lambda(b)]$, его можно также рассматривать как тождество Якоби для Ли модулей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Часто вместо термина *Ли модуль* используют термин *представление алгебры Ли в линейном пространстве*.

ПРИМЕР 1.5.5. Всякое линейное пространство L есть тривиальный Ли модуль над любой алгеброй Ли A , где $[a, x] = 0$ для всех $a \in A$ и $x \in L$.

ПРИМЕР 1.5.6. Всякая алгебра Ли A есть Ли модуль над A относительно присоединенного действия

$$a \mapsto \text{ad}(a) \in \mathfrak{gl}(A), \quad x \mapsto \text{ad}(a)(x) = [a, x] \quad \text{для всех } a \in A, x \in A.$$

Корректность такого определения следует из тождества Якоби.

ПРИМЕР 1.5.7. Пусть A – алгебра Ли, L – линейное пространство над $\mathbb{F}$. Тензорное произведение $A \otimes L = A \otimes_{\mathbb{F}} L$ (в категории $\mathbb{F}$ -линейных пространств) является Ли модулем над A относительно действия

$$a \mapsto \lambda(a) \in \mathfrak{gl}(A \otimes L), \quad b \otimes x \mapsto [a, b] \otimes x \quad \text{для всех } a, b \in A, x \in L.$$

Иначе говоря, $\lambda(a) = \text{ad}(a) \otimes \text{id}_L$ для всех $a \in A$.

Пусть M, N – Ли модули над алгеброй Ли A . Линейное отображение $f: M \rightarrow N$ называется *морфизмом Ли модулей*, если

$$f([a, x]) = [a, f(x)] \quad \text{для всех } a \in A, x \in M.$$

Таким образом, для каждой алгебры Ли A определена категория Ли модулей над A . Можно проверить, что это соответствие функториальное.

Подробнее смотри, например, [20], [21], [27], [18].

1.6. Гомологии

1.6.1. Дифференциальные модули. Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – унитарная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$ и C – левый A -модуль. Эндоморфизм $\partial \in \text{End}_A(C)$ (т.е. A -линейное отображение из C в C) называется *граничным оператором* (иначе, *дифференциалом*), если композиция $\partial \circ \partial = 0$ (т.е. $\text{im } \partial \subset \ker \partial$). В этом случае пара $\{C, \partial\}$ называется *дифференциальным левым A -модулем*, элементы модуля C называются *цепями*, элементы ядра $\ker \partial = \{x \in C \mid \partial(x) = 0\} = Z(C)$ называются *циклами*, элементы образа $\text{im } \partial = \{y = \partial(x) \mid x \in C\} = B(C)$ называются *границами*. Левый A -модуль *гомологий* дифференциального модуля $\{C, \partial\}$ определяется как фактормодуль (иначе, *производный модуль*)

$$\begin{aligned} H(C) &= H(C, \partial) = \ker \partial / \text{im } \partial \\ &= \{x \in C \mid \partial(x) = 0\} / \{y = \partial(x) \mid x \in C\}, \end{aligned}$$

его элементы суть *гомологии*, т.е. классы эквивалентности

$$x = x + \text{im } \partial, \quad x \in C.$$

Пусть $\{C, \partial_C\}, \{K, \partial_K\}$ – дифференциальные левые A -модули. A -линейное отображение $f: C \rightarrow K$ называется *морфизмом дифференциальных модулей*, если $\partial_K \circ f = f \circ \partial_C$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\partial_C} & C \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ K & \xrightarrow{\partial_K} & K \end{array}$$

Таким образом, определена категория $\mathcal{LDM}_A$ дифференциальных левых A -модулей, объекты которой суть дифференциальные левые A -модули, а морфизмы – морфизмы дифференциальных модулей.

Аналогичным образом определяется категория правых дифференциальных A -модулей и категория дифференциальных A -модулей для коммутативной алгебры A . В топологической ситуации дифференциалы и морфизмы предполагаются непрерывными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.1. Пусть $f: C \rightarrow K$ – морфизм дифференциальных модулей. Тогда

$$f(\ker \partial_C) \subset \ker \partial_K, \quad f(\operatorname{im} \partial_C) \subset \operatorname{im} \partial_K.$$

В частности, определено факторотображение $\mathbf{f}: H(C) \rightarrow H(K)$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} = x + \operatorname{im} \partial_C \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) + \operatorname{im} \partial_K \quad \text{для всех } x \in \ker \partial_C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямыми вычислениями, с помощью определяющего равенства $\partial_K \circ f = f \circ \partial_C$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\{C, \partial_C\}$, $\{K, \partial_K\}$ – дифференциальные левые A -модули. Для того чтобы A -линейное отображение $f: C \rightarrow K$ допускало факторотображение $\mathbf{f}: H(C) \rightarrow H(K)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f(\ker \partial_C) \subset \ker \partial_K, \quad f(\operatorname{im} \partial_C) \subset \operatorname{im} \partial_K.$$

Согласно приведенному выше предложению достаточным условием для этого является условие $\partial_K \circ f = f \circ \partial_C$, но существуют и другие достаточные условия. Например, условие $\partial_K \circ f + f \circ \partial_C = 0$ также достаточное. Мы воспользуемся этим фактом ниже, при изучении бидифференциальных модулей и бикомплексов.

A -линейное отображение $s: C \rightarrow K$ называется *гомотопией*, связывающей морфизмы дифференциальных модулей $f, g: C \rightarrow K$, если справедлива *гомотопическая формула*

$$\partial_K \circ s + s \circ \partial_C = f - g.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.2. Пусть $f, g: C \rightarrow K$ – морфизмы дифференциальных модулей и $s: C \rightarrow K$ – связывающая их гомотопия. Тогда факторотображения $\mathbf{f}, \mathbf{g}: H(C) \rightarrow H(K)$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть класс

$$\mathbf{x} = x + \operatorname{im} \partial_C \in H(C),$$

где $x \in \ker \partial_C$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) + \operatorname{im} \partial_K$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = g(x) + \operatorname{im} \partial_K$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= f(x) - g(x) + \operatorname{im} \partial_K = (f - g)(x) + \operatorname{im} \partial_K \\ &= (\partial_K \circ s + s \circ \partial_C)(x) + \operatorname{im} \partial_K \\ &= \partial_K(s(x)) + s(\partial_C(x)) + \operatorname{im} \partial_K \\ &= \operatorname{im} \partial_K = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

поскольку $\partial_K(s(x)) \in \operatorname{im} \partial_K$, а $s(\partial_C(x)) = 0$.

1.6.2. Комплексы. В приложениях часто встречаются случаи, когда дифференциальный модуль $\{C, \partial\}$ градуирован абелевой группой Γ :

$$C = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma, \quad \partial = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \partial_\gamma, \quad \partial_\gamma: C_\gamma \rightarrow C_{\gamma+\varepsilon} \text{ для всех } \gamma \in \Gamma$$

(алгебра A тривиально градуирована, $A_0 = A$, $A_\gamma = 0$ при $\gamma \neq 0$), т.е. дифференциал ∂ – однородный степени ε , $\varepsilon \in \Gamma$. (В этом случае условие $\partial \circ \partial = 0$ принимает вид $\partial_{\gamma+\varepsilon} \circ \partial_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$.) В наиболее популярной ситуации $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\varepsilon = \pm 1$, градуированный дифференциальный модуль называется *комплексом*, иногда *цепным комплексом* при $\varepsilon = -1$ и *коцепным комплексом* при $\varepsilon = +1$. Рассмотрим подробно случай $\varepsilon = -1$.

Пусть левый A -модуль C градуирован (точнее, $\mathbb{Z}$ -градуирован), а дифференциал ∂ – однородный степени -1 . Иначе говоря, $C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$, $\partial = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \partial_n$, где A -линейные отображения $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$, причем $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, т.е. $\text{im } \partial_n \subset \ker \partial_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае говорят, что задан *комплекс*

$$\{C_n, \partial_n\} = \{C_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

левых A -модулей, и записывают его в виде последовательности

$$\dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+2}} \dots,$$

в которой композиция любых двух последовательных стрелок равна нулю. В этом случае производный модуль также $\mathbb{Z}$ -градуируется,

$$H(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(C), \quad H_n(C) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

элементы модулей C_n называются *n -мерными цепями*, элементы ядер

$$\ker \partial_n = \{x_n \in C_n \mid \partial_n(x_n) = 0\} = Z_n(C)$$

называются *n -мерными циклами*, элементы образов

$$\text{im } \partial_{n+1} = \{y_n = \partial_{n+1}(x_{n+1}) \mid x_{n+1} \in C_{n+1}\} = B_n(C)$$

называются *n -мерными границами*, а элементы фактормодулей $H_n(C)$ называются *n -мерными гомологиями*.

Пусть $\{C_n, (\partial_C)_n\}, \{K_n, (\partial_K)_n\}$ – комплексы левых A -модулей. A -линейное отображение

$$f = \bigoplus f_n: C = \bigoplus C_n \rightarrow K = \bigoplus K_n, \quad f_n: C_n \rightarrow K_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

называется *морфизмом комплексов левых A -модулей*, если справедливы равенства $(\partial_K)_n \circ f_n = f_{n-1} \circ (\partial_C)_n$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xleftarrow{(\partial_C)_{n-1}} & C_{n-1} & \xleftarrow{(\partial_C)_n} & C_n & \xleftarrow{(\partial_C)_{n+1}} & C_{n+1} \xleftarrow{(\partial_C)_{n+2}} \dots \\ & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} \\ \dots & \xleftarrow{(\partial_K)_{n-1}} & K_{n-1} & \xleftarrow{(\partial_K)_n} & K_n & \xleftarrow{(\partial_K)_{n+1}} & K_{n+1} \xleftarrow{(\partial_K)_{n+2}} \dots \end{array}$$

Итак, определена категория $\mathcal{L}CM_A$ комплексов левых A -модулей, объекты которой суть комплексы левых A -модулей, а морфизмы – морфизмы комплексов левых A -модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.3. Пусть

$$f = \bigoplus f_n: C = \bigoplus C_n \rightarrow K = \bigoplus K_n$$

– морфизм комплексов левых A -модулей. Тогда

$$f_n(\ker(\partial_C)_n) \subset \ker(\partial_K)_n, \quad f_n(\operatorname{im}(\partial_C)_{n+1}) \subset \operatorname{im}(\partial_K)_{n+1}.$$

В частности, определено факторотображение

$$\mathbf{f} = \bigoplus \mathbf{f}_n: H(C) = \bigoplus H_n(C) \rightarrow H(K) = \bigoplus H_n(K),$$

действующее по правилу

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n = x_n + \operatorname{im}(\partial_C)_{n+1} &\mapsto \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n) = f_n(x_n) + \operatorname{im}(\partial_K)_{n+1}, \\ x_n &\in \ker(\partial_C)_n. \end{aligned}$$

Пусть $f = \bigoplus f_n$, $g = \bigoplus g_n: C = \bigoplus C_n \rightarrow K = \bigoplus K_n$ – морфизмы комплексов левых A -модулей. A -линейное отображение

$$s = \bigoplus s_n: C = \bigoplus C_n \rightarrow K = \bigoplus K_n, \quad s_n: C_n \rightarrow K_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

называется *гомотопией, связывающей морфизмы f и g* , если справедливы равенства

$$(\partial_K)_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ (\partial_C)_n = f_n - g_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.4. Пусть

$$f = \bigoplus f_n, \quad g = \bigoplus g_n: \quad C = \bigoplus C_n \rightarrow K = \bigoplus K_n$$

– морфизмы комплексов левых A -модулей и

$$s = \bigoplus s_n: \quad C = \bigoplus C_n \rightarrow K = \bigoplus K_n$$

– связывающая их гомотопия. Тогда факторотображения

$$\mathbf{f} = \bigoplus \mathbf{f}_n, \quad \mathbf{g} = \bigoplus \mathbf{g}_n: \quad H(C) = \bigoplus H_n(C) \rightarrow H(K) = \bigoplus H_n(K)$$

совпадают.

Аналогичным образом определяется категория комплексов правых A -модулей и категория комплексов A -модулей для коммутативной алгебры A . В топологической ситуации дифференциалы и морфизмы предполагаются непрерывными.

Часто встречаются ситуации, когда модули

$$C_n = 0 \quad \text{при} \quad n = -1, -2, \dots,$$

так что $C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n$, $\partial = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \partial_n$ и комплекс имеет вид

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} C_2 \xleftarrow{\partial_3} \dots$$

В этом случае говорят, что комплекс $\{C_n, \partial_n\} = \{C_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ неотрицателен.

1.6.3. Когомологии. Пусть $\{C, \partial\}$ – дифференциальный левый A -модуль и M – правый A -модуль. В этом случае правый A -модуль $C(M) = \text{Hom}_A(C, M)$ имеет естественную структуру дифференциального модуля с дифференциалом

$$d = \partial^*: C(M) \rightarrow C(M),$$

$$\text{где} \quad d(\phi) = \phi \circ \partial: C \rightarrow M \quad \text{для всех} \quad \phi: C \rightarrow M.$$

Легко проверяется, что d есть A -линейное отображение и композиция $d \circ d = 0$. Таким образом, определен дифференциальный правый A -модуль $\{C(M), d\}$. Здесь, дифференциал d называется *кограницным оператором*, элементы модуля $C(M)$ называются *коцепями* (со значениями в M), элементы ядра

$\ker d = \{\phi \in C(M) \mid d(\phi) = 0\}$ называются *коциклами*, элементы образа $\operatorname{im} d = \{\phi = d(\psi) \mid \psi \in C(M)\}$ называются *кограницами*, а элементы фактормодуля (иначе, *производного модуля*) $H(C(M)) = \ker d / \operatorname{im} d$ называются *когомологиями*.

Пусть $\{C(M), d_C\}$, $\{K(N), d_K\}$ – дифференциальные правые A -модули. Морфизм из $\{C(M), d_C\}$ в $\{K(N), d_K\}$ есть A -линейное отображение $F: C(M) \rightarrow K(N)$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C(M) & \xrightarrow{d_C} & C(M) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ K(N) & \xrightarrow{d_K} & K(N) \end{array} \quad \text{т.е.} \quad F \circ d_C = d_K \circ F.$$

Выделим морфизмы специального вида. Именно, пусть

$$f \in \operatorname{Hom}_A(K, C), \quad g \in \operatorname{Hom}_A(M, N).$$

Определим отображение $F \in \operatorname{Hom}_A(C(M), K(N))$ правилом $\phi \mapsto F(\phi) = g \circ \phi \circ f$ для всех $\phi \in C(M)$. Легко проверяется, что F будет морфизмом из $\{C(M), d_C\}$ в $\{K(N), d_K\}$, если f есть морфизм из $\{K, \partial_K\}$ в $\{C, \partial_C\}$.

Пусть $\{C_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ – комплекс левых A -модулей и M – правый A -модуль. Положим здесь $C^n(M) = \operatorname{Hom}_A(C_n, M)$, $C(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n(M)$, $d^n = (\partial_{n+1})^* \in \operatorname{Hom}_A(C^n(M), C^{n+1}(M))$, где $d^n(\phi^n) = \phi^n \circ \partial_{n+1}$ для всех $\phi^n \in C^n(M)$, $d = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} d^n$. Легко проверяется, что $d^{n+1} \circ d^n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, так что определен комплекс $\{C^n(M), d^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ правых A -модулей, который наглядно записывается как последовательность

$$\dots \xrightarrow{d^{n-2}} C^{n-1}(M) \xrightarrow{d^{n-1}} C^n(M) \xrightarrow{d^n} C^{n+1}(M) \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

В этом случае когомологии тоже градуируются,

$$\begin{aligned} H(C(M)) &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n(C(M)), \\ H^n(C(M)) &= \ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

причем элементы из $C^n(M)$ называются *n -мерными коцепями*, элементы из

$$\ker d^n = \{\phi^n \in C^n(M) \mid d^n(\phi^n) = 0\}$$

называются n -мерными коциклами, элементы из

$$\operatorname{im} d^{n-1} = \{\phi^n = d^{n-1}(\psi^{n-1}) \mid \psi^{n-1} \in C^{n-1}(M)\}$$

называются n -мерными кограницами, а элементы фактормодулей $H^n(C(M))$ называются n -мерными когомологиями.

Пусть $\{C^n(M), d_C^n\}$ и $\{K^n(N), d_K^n\}$ – комплексы правых A -модулей. Морфизм из $\{C^n(M), d_C^n\}$ в $\{K^n(N), d_K^n\}$ есть A -линейное отображение

$$F = \bigoplus F^n: C(M) \rightarrow K(N), \quad F^n: C^n(M) \rightarrow K^n(N), \quad n \in \mathbb{Z},$$

такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_C^{n-2}} & C^{n-1}(M) & \xrightarrow{d_C^{n-1}} & C^n(M) & \xrightarrow{d_C^n} & C^{n+1}(M) \xrightarrow{d_C^{n+1}} \dots \\ & & \downarrow F^{n-1} & & \downarrow F^n & & \downarrow F^{n+1} \\ \dots & \xrightarrow{d_K^{n-2}} & K^{n-1}(N) & \xrightarrow{d_K^{n-1}} & K^n(N) & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1}(N) \xrightarrow{d_K^{n+1}} \dots \end{array}$$

иначе, $d_K^n \circ F^n = F^{n+1} \circ d_C^n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Выделим морфизмы специального вида. Именно, пусть

$$f_n \in \operatorname{Hom}_A(K_n, C_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad g \in \operatorname{Hom}_A(M, N).$$

Отображение $F = \bigoplus F^n \in \operatorname{Hom}_A(C(M), K(N))$, действующее по правилу

$$\phi^n \mapsto F^n(\phi^n) = g \circ \phi^n \circ f_n \quad \text{для всех} \quad \phi^n \in C^n(M), \quad n \in \mathbb{Z},$$

будет морфизмом из $\{C^n(M), d_C^n\}$ в $\{K^n(N), d_K^n\}$, если для каждого $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $(\partial_K)_n \circ f_n = f_{n-1} \circ (\partial_C)_n$, т.е. если $f = \bigoplus f_n$ есть морфизм из $\{K_n, (\partial_K)_n\}$ в $\{C_n, (\partial_C)_n\}$.

Пусть $F = \bigoplus F^n$, $G = \bigoplus G^n$ – морфизмы из $\{C^n(M), d_C^n\}$ в $\{K^n(N), d_K^n\}$. Отображение $S = \bigoplus S^n \in \operatorname{Hom}_A(C(M), K(N))$, $S^n: C^n(M) \rightarrow K^{n-1}(N)$, $n \in \mathbb{Z}$, называется *гомотопией*, связывающей морфизмы F и G , если справедлива *гомотопическая формула*

$$d_K^{n-1} \circ S^n + S^{n+1} \circ d_C^n = F^n - G^n \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

С такими определениями, для комплексов $\{C^n(M), d^n\}$ справедливы все результаты, доказанные выше для комплексов $\{C_n, \partial_n\}$, с очевидными модификациями.

Часто встречаются ситуации, когда модули

$$C_n = 0 \quad \text{при} \quad n = -1, -2, \dots,$$

так что $C(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} C^n(M)$, $d = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} d^n$ и комплекс имеет вид

$$0 \longrightarrow C^0(M) \xrightarrow{d^0} C^1(M) \xrightarrow{d^1} C^2(M) \xrightarrow{d^2} \dots$$

Обычно в этом случае говорят, что комплекс $\{C^n(M), d^n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ неотрицателен.

1.6.4. Бикомплексы. Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – унитарная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$. Пусть C – левый A -модуль, на котором определены два граничных оператора $\partial': C \rightarrow C$ и $\partial'': C \rightarrow C$, причем $\partial' \circ \partial' = \partial'' \circ \partial'' = 0$. В этом случае определены два дифференциальных левых A -модуля $\{C, \partial'\}$ и $\{C, \partial''\}$ с производными модулями

$$H(C, \partial') = \ker \partial' / \operatorname{im} \partial' \quad \text{и} \quad H(C, \partial'') = \ker \partial'' / \operatorname{im} \partial''.$$

Если граничные операторы ∂' и ∂'' *совместные*, т.е.

$$\partial' \circ \partial'' + \partial'' \circ \partial' = 0,$$

то эндоморфизм $\partial = \partial' + \partial'': C \rightarrow C$ также является граничным оператором, поскольку

$$\begin{aligned} \partial \circ \partial &= (\partial' + \partial'') \circ (\partial' + \partial'') \\ &= \partial' \circ \partial' + (\partial' \circ \partial'' + \partial'' \circ \partial') + \partial'' \circ \partial'' = 0, \end{aligned}$$

и, значит, определен дифференциальный модуль $\{C, \partial\}$ с производным модулем $H(C, \partial) = \ker \partial / \operatorname{im} \partial$. В этом случае говорят, что задан *бидифференциальный левый A -модуль* $\{C, \partial', \partial''\}$.

В силу условия совместности

$$\partial''(\ker \partial') \subset \ker \partial' \quad \text{и} \quad \partial''(\operatorname{im} \partial') \subset \operatorname{im} \partial',$$

так что определено факторотображение $\partial'': H(C, \partial') \rightarrow H(C, \partial')$. Очевидно, $\partial'' \circ \partial'' = 0$, так что определен дифференциальный левый A -модуль $\{H(C, \partial'), \partial''\}$ с производным модулем $H(H(C, \partial'), \partial'')$.

Аналогичным образом определяются дифференциальный левый A -модуль $\{H(C, \partial''), \partial'\}$ и его производный модуль $H(H(C, \partial''), \partial')$.

Пусть $\{C, \partial'_C, \partial''_C\}$, $\{K, \partial'_K, \partial''_K\}$ – бидифференциальные левые A -модули. A -линейное отображение $f: C \rightarrow K$ называется морфизмом бидифференциальных модулей, если $\partial'_K \circ f = f \circ \partial'_C$ и $\partial''_K \circ f = f \circ \partial''_C$. Таким образом, определена категория бидифференциальных левых A -модулей. В частности, в этом случае определены факторотображения

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' &: H(C, \partial'_C) \rightarrow H(K, \partial'_K), \\ \mathbf{f}'' &: H(C, \partial''_C) \rightarrow H(K, \partial''_K), \\ \mathbf{f} &: H(C, \partial_C) \rightarrow H(K, \partial_K). \end{aligned}$$

Пусть теперь модуль C биградуированный (т.е. $\mathbb{Z}^2$ -градуированный), $C = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} C_{mn}$, граничный оператор ∂' – однородный бистепени $(-1, 0)$, а граничный оператор ∂'' – однородный бистепени $(0, -1)$, так что

$$\begin{aligned} \partial' &= \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} \partial'_{mn}, & \partial'_{mn} &: C_{mn} \rightarrow C_{m-1,n}, \\ \partial'' &= \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} \partial''_{mn}, & \partial''_{mn} &: C_{mn} \rightarrow C_{m,n-1}, \end{aligned}$$

причем выполнены условия

$$\partial'_{m-1,n} \circ \partial'_{mn} = \partial'_{m,n-1} \circ \partial''_{mn} + \partial''_{m-1,n} \circ \partial'_{mn} = \partial''_{m,n-1} \circ \partial''_{mn} = 0$$

для всех $m, n \in \mathbb{Z}$. Тогда бидифференциальный модуль $\{C, \partial', \partial''\}$ биградуируется в бикомплекс $\{C_{mn}, \partial'_{mn}, \partial''_{mn} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, записываемый в виде антикоммутативной диаграммы рис. 1.1, где для краткости опущены индексы у граничных операторов ∂'_{mn} и ∂''_{mn} . Заметим, что антикоммутативность диаграммы есть графическое выражение условия совместности

$$\partial'_{m,n-1} \circ \partial''_{mn} + \partial''_{m-1,n} \circ \partial'_{mn} = 0.$$

Такая графическая запись позволяет называть операторы ∂''_{mn} горизонтальными, а операторы ∂'_{mn} вертикальными.

Дифференциальные модули $\{C, \partial'\}$, $\{C, \partial''\}$, $\{C, \partial\}$ и их производные модули $H(C, \partial')$, $H(C, \partial'')$, $H(C, \partial)$ тоже градуируются. Именно,

$$\begin{aligned} \{C, \partial'\} &= \{C_{m*}, \partial'_{m*} \mid m \in \mathbb{Z}\} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \{C_{mn}, \partial'_{mn} \mid m \in \mathbb{Z}\}, \\ H(C, \partial') &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H_{m*}(C, \partial'), \quad H_{mn}(C, \partial') = \ker \partial'_{mn} / \operatorname{im} \partial'_{m+1,n}, \\ H_{m*}(C, \partial') &= \ker \partial'_{m*} / \operatorname{im} \partial'_{m+1,*} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_{mn}(C, \partial'), \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & \\
\cdots & \xleftarrow{\partial''} C_{m+1,n-1} & \xleftarrow{\partial''} & C_{m+1,n} & \xleftarrow{\partial''} & C_{m+1,n+1} & \xleftarrow{\partial''} \cdots \\
& \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & \\
\cdots & \xleftarrow{\partial''} C_{m,n-1} & \xleftarrow{\partial''} & C_{m,n} & \xleftarrow{\partial''} & C_{m,n+1} & \xleftarrow{\partial''} \cdots \\
& \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & \\
\cdots & \xleftarrow{\partial''} C_{m-1,n-1} & \xleftarrow{\partial''} & C_{m-1,n} & \xleftarrow{\partial''} & C_{m-1,n+1} & \xleftarrow{\partial''} \cdots \\
& \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Рис. 1.1. Бикомплекс

$$\{C, \partial''\} = \{C_{*n}, \partial''_{*n} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \{C_{mn}, \partial''_{mn} \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$H(C, \partial'') = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_{*n}(C, \partial''),$$

$$H_{mn}(C, \partial'') = \ker \partial''_{mn} / \operatorname{im} \partial''_{m,n+1},$$

$$H_{*n}(C, \partial'') = \ker \partial''_{*n} / \operatorname{im} \partial''_{*,n+1} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H_{mn}(C, \partial''),$$

$$\{C, \partial\} = \{C_p, \partial_p \mid p \in \mathbb{Z}\},$$

$$C_p = \bigoplus_{m+n=p} C_{mn}, \quad \partial_p = \bigoplus_{m+n=p} \partial_{mn},$$

$$H(C, \partial) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(C, \partial), \quad H_p(C, \partial) = \ker \partial_p / \operatorname{im} \partial_{p+1},$$

где $\partial_{mn} = \partial'_{mn} + \partial''_{mn}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

В силу условий совместности $\partial'_{m,n-1} \circ \partial''_{mn} + \partial''_{m-1,n} \circ \partial'_{mn} = 0$, имеем

$$\partial''_{mn}(\ker \partial'_{mn}) \subset \ker \partial'_{m,n-1} \quad \text{и} \quad \partial''_{mn}(\operatorname{im} \partial'_{m+1,n}) \subset \operatorname{im} \partial'_{m+1,n-1},$$

так что определены факторотображения

$$\partial''_{mn}: H_{mn}(C, \partial') \rightarrow H_{m,n-1}(C, \partial'), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $\partial''_{m,n-1} \circ \partial''_{mn} = 0$ и, значит, определен комплекс

$$\{H_{*n}(C, \partial'), \partial''_{*n} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \{H_{mn}(C, \partial'), \partial''_{mn} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

и его производный модуль

$$\begin{aligned} H(H(C, \partial'), \partial'') &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(H(C, \partial'), \partial'') \\ &= \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} H_n(H_{m*}(C, \partial'), \partial''_{m*}), \end{aligned}$$

где

$$H_n(H_{m*}(C, \partial'), \partial''_{m*}) = \ker \partial''_{mn} / \operatorname{im} \partial''_{m,n+1}.$$

Аналогичным образом определяются комплекс

$$\{H_{m*}(C, \partial''), \partial'_{m*} \mid m \in \mathbb{Z}\} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \{H_{mn}(C, \partial''), \partial'_{mn} \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

и его производный модуль

$$\begin{aligned} H(H(C, \partial''), \partial') &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H_m(H(C, \partial''), \partial') \\ &= \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} H_m(H_{*n}(C, \partial''), \partial'_{*n}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \partial'_{mn}: H_{mn}(C, \partial'') &\rightarrow H_{m-1,n}(C, \partial''), \\ H_m(H_{*n}(C, \partial''), \partial'_{*n}) &= \ker \partial'_{mn} / \operatorname{im} \partial'_{m+1,n}. \end{aligned}$$

Пусть $\{C_{mn}, (\partial'_C)_{mn}, (\partial''_C)_{mn}\}$, $\{K_{mn}, (\partial'_K)_{mn}, (\partial''_K)_{mn}\}$ – бикомплексы. A -линейное отображение

$$\begin{aligned} f &= \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} f_{mn}: C = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} C_{mn} \rightarrow K = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} K_{mn}, \\ f_{mn}: C_{mn} &\rightarrow K_{mn}, \end{aligned}$$

называется *морфизмом бикомплексов*, если

$$(\partial'_K)_{mn} \circ f_{mn} = f_{m-1,n} \circ (\partial'_C)_{mn}, \quad (\partial''_K)_{mn} \circ f_{mn} = f_{m,n-1} \circ (\partial''_C)_{mn}$$

для всех $m, n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, определена категория бикомплексов. В частности, в этом случае определены факторотображения

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' &= \bigoplus_{mn \in \mathbb{Z}} \mathbf{f}'_{mn}, & \mathbf{f}'_{mn}: H_{mn}(C, \partial'_C) &\rightarrow H_{mn}(C, \partial'_K), \\ \mathbf{f}'' &= \bigoplus_{mn \in \mathbb{Z}} \mathbf{f}''_{mn}, & \mathbf{f}''_{mn}: H_{mn}(C, \partial''_C) &\rightarrow H_{mn}(K, \partial''_K), \\ \mathbf{f} &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{f}_p, & \mathbf{f}_p: H_p(C, \partial_C) &\rightarrow H_p(K, \partial_K). \end{aligned}$$

Аналогичным образом обстоят дела и в случае когомологий с заменой левого A -модуля C на правый A -модуль

$$C(M) = \text{Hom}_A(C, M),$$

граничных операторов $\partial', \partial'': C \rightarrow C$ на дифференциалы

$$\begin{aligned} d', d'': C(M) &\rightarrow C(M), \\ d'(\phi) &= \phi \circ \partial', \quad d''(\phi) = \phi \circ \partial'' \quad \text{для всех } \phi \in C(M). \end{aligned}$$

Условие совместности $\partial' \circ \partial'' + \partial'' \circ \partial' = 0$ в этом случае принимает вид $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$, поскольку

$$(d' \circ d'' + d'' \circ d')(\phi) = \phi \circ (\partial'' \circ \partial' + \partial' \circ \partial'') = 0 \quad \text{для всех } \phi \in C(M).$$

Итак, определен бидифференциальный правый A -модуль

$$\{C(M), d', d''\}.$$

В частности, определены дифференциальный модуль

$$\{C(M), d'\}$$

с производным $H(C(M), d')$, дифференциальный модуль

$$\{C(M), d''\}$$

с производным $H(C(M), d'')$ и дифференциальный модуль

$$\{C(M), d\}$$

с производным $H(C(M), d)$, где $d = d' + d''$.

Далее, определены фактордифференциалы

$$\begin{aligned} \mathbf{d}' &: H(C(M), d') \rightarrow H(C(M), d'), \\ \mathbf{d}'' &: H(C(M), d'') \rightarrow H(C(M), d''), \end{aligned}$$

дифференциальные модули

$$\{H(C(M), d'), \mathbf{d}'\}, \quad \{H(C(M), d''), \mathbf{d}''\}$$

и их производные модули

$$H(H(C(M), d'), \mathbf{d}'), \quad H(H(C(M), d''), \mathbf{d}'').$$

В биградуированной ситуации

$$C = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} C^{mn},$$

$$C(M) = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} C^{mn}(M), \quad C^{mn}(M) = \text{Hom}_A(C^{mn}, M),$$

дифференциал d' – однородный бистепени $(1, 0)$, а дифференциал d'' – однородный бистепени $(0, 1)$, так что

$$d' = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} (d')^{mn}, \quad (d')^{mn}: C^{mn}(M) \rightarrow C^{m+1,n}(M),$$

$$d'' = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} (d'')^{mn}, \quad (d'')^{mn}: C^{mn}(M) \rightarrow C^{m,n+1}(M).$$

В результате получаем бикомплекс

$$\{C^{mn}(M), (d')^{mn}, (d'')^{mn} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

с антикоммутирующей диаграммой рис. 1.2. Дифференциальные модули $\{C(M), d'\}$, $\{C(M), d''\}$, $\{C(M), d\}$ и их производные градуируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \{C(M), d'\} &= \{C^{m*}(M), (d')^{m*} \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \{C^{mn}(M), (d')^{mn} \mid m \in \mathbb{Z}\}, \\ H(C(M), d') &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^{m*}(C(M), d'), \\ H^{m*}(C(M), d') &= \ker(d')^{m*} / \text{im}(d')^{m-1,*} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{mn}(C(M), d'), \\ H^{mn}(C(M), d') &= \ker(d')^{mn} / \text{im}(d')^{m-1,n}, \\ \{C(M), d''\} &= \{C^{*n}(M), (d'')^{*n} \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \{C^{mn}(M), (d'')^{mn} \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ H(C(M), d'') &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{*n}(C(M), d''), \\ H^{*n}(C(M), d'') &= \ker(d'')^{*n} / \text{im}(d'')^{*,n-1} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^{mn}(C(M), d''), \\ H^{mn}(C(M), d'') &= \ker(d'')^{mn} / \text{im}(d'')^{m,n-1}, \\ \{C(M), d\} &= \{C^p, d^p \mid p \in \mathbb{Z}\}, \\ C^p(M) &= \bigoplus_{m+n=p} C^{mn}(M), \quad d^p = \bigoplus_{m+n=p} d^{mn}, \\ H(C(M), d) &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^p(C(M), d), \\ H^p(C(M), d) &= \ker d^p / \text{im } d^{p-1}, \end{aligned}$$

где $d^{mn} = (d')^{mn} + (d'')^{mn}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Рис. 1.2. Бикомплекс

Фактордифференциалы

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{d}'')^{mn} &: H^{mn}(C(M), d') \rightarrow H^{m,n+1}(C(M), d'), \\
 (\mathbf{d}')^{mn} &: H^{mn}(C(M), d'') \rightarrow H^{m+1,n}(C(M), d''),
 \end{aligned}$$

определяют комплексы

$$\begin{aligned}
 &\{H^{*n}(C(M), d'), (\mathbf{d}'')^{*n} \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \{H^{mn}(C(M), d'), (\mathbf{d}'')^{mn} \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\
 &\{H^{m*}(C(M), d''), (\mathbf{d}')^{m*} \mid m \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \{H^{mn}(C(M), d''), (\mathbf{d}')^{mn} \mid m \in \mathbb{Z}\},
 \end{aligned}$$

с производными модулями

$$\begin{aligned}
 H(H(C(M), d'), \mathbf{d}'') &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n(H(C(M), d'), \mathbf{d}'') \\
 &= \bigoplus_{m, n \in \mathbb{Z}} H^n(H^{m*}(C(M), d'), (\mathbf{d}'')^{m*}), \\
 H(H(C(M), d''), \mathbf{d}') &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^m(H(C(M), d''), \mathbf{d}') \\
 &= \bigoplus_{m, n \in \mathbb{Z}} H^m(H^{*n}(C(M), d''), (\mathbf{d}')^{*n}).
 \end{aligned}$$

Отметим, что на практике часто встречаются случаи, когда модули $C_{mn} = 0$ при $m < 0$ и/или $n < 0$.

Подробное изложение см., например, в [16], [21], [10], [8].

1.7. Спектральные последовательности

В этой секции всюду, если не оговорено противное, $\mathbb{F}$ – поле, A – унитарная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$, термин *модуль* означает *левый A -модуль*.

1.7.1. Модули с фильтрацией. Пусть C – модуль. *Убывающей фильтрацией* модуля C называется последовательность его подмодулей $\{C^p; p \in \mathbb{Z}\}$ такая, что

$$\dots \supset C^{p-1} \supset C^p \supset C^{p+1} \supset \dots, \quad \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} C^p = C.$$

Дуальным образом определяется возрастающая фильтрация. Здесь мы ограничимся убывающими фильтрациями и будем называть *модулем с фильтрацией* любой модуль с определенной на нем убывающей фильтрацией.

Пусть $C = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} C^p$, $K = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} K^p$ – модули с фильтрацией. A -линейное отображение $f: C \rightarrow K$ называется *морфизмом модулей с фильтрацией*, если $f(C^p) \subset K^p$ для всех $p \in \mathbb{Z}$. Таким образом, определена категория модулей с фильтрацией.

Пусть $C = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} C^p$ – модуль с фильтрацией. *Градуированным модулем, связанным с модулем C* называют модуль

$$G(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} G_n(C), \quad \text{где } G_n(C) = C^n / C^{n+1} \text{ – фактормодули,}$$

с естественной градуировкой. (Здесь и далее в этом разделе термин *градуированный* означает $\mathbb{Z}$ -градуированный.)

С другой стороны, пусть $C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$ есть градуированный модуль. Зададим на C фильтрацию подмодулями

$$C^p = \bigoplus_{n \geq p} C_n,$$

тогда градуированный модуль $G(C) \simeq C$.

Пусть на модуле C одновременно определены градуировка и фильтрация, т.е. $C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} C^p$. Говорят, что градуировка и фильтрация *совместимы*, если

$$C^p = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C^p \cap C_n \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z},$$

т.е. если подмодули C^p разлагаются на однородные компоненты. В этом случае C называется *градуированным модулем с фильтрацией*. Также, говорят, что фильтрация *регулярна*, если для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существует $P(n) \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$C^p \cap C_n = 0 \quad \text{для всех } p \geq P(n).$$

1.7.2. Спектральная последовательность дифференциального модуля с фильтрацией. Пусть на модуле C определены дифференциал $d: C \rightarrow C$, $d \circ d = 0$, и фильтрация $C = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} C^p$. Говорят, что дифференциал и фильтрация *совместимы*, если $dC^p \subset C^p$ для всех $p \in \mathbb{Z}$. В этом случае пара $\{C, d\} = \{C = \bigcup C^p, d\}$ называется *дифференциальным модулем с фильтрацией*. Пусть $\{C, d_C\}$, $\{K, d_K\}$ – два дифференциальных модуля с фильтрацией. Морфизм модулей $f: C \rightarrow K$ называется *морфизмом дифференциальных модулей с фильтрацией*, если f есть одновременно и морфизм дифференциальных модулей, и морфизм модулей с фильтрацией, т.е. если $d_K \circ f = f \circ d_C$ и $f(C^p) \subset K^p$ для всех $p \in \mathbb{Z}$. Таким образом, определена категория дифференциальных модулей с фильтрацией.

Пусть $\{C, d\}$ – дифференциальный модуль с фильтрацией, $C^{-\infty} = C$, $C^{\infty} = 0$. Ниже нам понадобятся следующие модули:

$$Z(C) = \ker d = \{x \in C \mid dx = 0\} \text{ – циклы модуля } \{C, d\},$$

$$B(C) = \operatorname{im} d = dC = \{x = dy \mid y \in C\} \text{ – границы модуля } \{C, d\},$$

$$H(C) = Z(C)/B(C) \text{ – гомологии модуля } \{C, d\},$$

$$Z(C^p) = \ker d^p = \{x \in C^p \mid dx = 0\} \text{ – циклы модуля } \{C^p, d^p\},$$

$$B(C^p) = \operatorname{im} d^p = dC^p = \{x = dy \in C^p \mid y \in C^p\}$$

$$\text{– границы модуля } \{C^p, d^p\},$$

$$H(C^p) = Z(C^p)/B(C^p) \text{ – гомологии модуля } \{C^p, d^p\},$$

где $d^p = d|_{C^p}: C^p \rightarrow C^p$ – сужение дифференциала $d: C \rightarrow C$ на $C^p \subset C$, $p \in \mathbb{Z}$.

Для $p \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ положим

$$Z_r^p = Z(C^p \bmod C^{p+r}) = \{x \in C^p \mid dx \in C^{p+r}\},$$

$$B_r^p = C^p \cap dC^{p-r} = \{x = dy \in C^p \mid y \in C^{p-r}\},$$

в частности,

$$B_r^p = dZ_r^{p-r} = \{x = dy \mid y \in Z_r^p\}, \quad \text{для всех } p, r \in \mathbb{Z},$$

$$Z_r^p = C^p, \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}, r \leq 0,$$

$$B_r^p = dC^{p-r} = \{x = dy \mid y \in C^{p-r}\}, \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}, r \leq 0,$$

$$Z_\infty^p = Z(C^p), \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z},$$

$$B_\infty^p = C^p \cap dC = \{x = dy \in C^p \mid y \in C\}, \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $Z_r^p \supset Z_{r+1}^p \supset Z_\infty^p$ для всех $p, r \in \mathbb{Z}$. Также справедлива следующая

ЛЕММА 1.7.1. *Для каждого $p \in \mathbb{Z}$ модули B_r^p , $r \in \mathbb{Z}$, образуют возрастающую фильтрацию модуля B_∞^p , т.е.*

$$B_r^p \subset B_{r+1}^p \quad \text{для всех } r \in \mathbb{Z}, \quad \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} B_r^p = B_\infty^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма есть прямое следствие того, что модули C^s , $s \in \mathbb{Z}$, образуют убывающую фильтрацию модуля C . Подробнее, с одной стороны

$$B_r^p = C^p \cap dC^{p-r} \subset C^p \cap dC^{p-r-1} = B_{r+1}^p \subset C^p \cap C = B_\infty^p,$$

так что $\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} B_r^p \subset B_\infty^p$. С другой стороны, пусть $x \in B_\infty^p$, т.е. $x = dy \in C^p$, $y \in C$. Поскольку $C = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} C^s$, найдется индекс $s \in \mathbb{Z}$ такой, что $y \in C^s$. Положим $r = p - s$, тогда получим $x = dy \in C^p$, $y \in C^{p-r}$, т.е. $x \in B_r^p$, и, значит, $B_\infty^p \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} B_r^p$, что и требовалось.

По построению

$$Z_r^p \supset B_{r-1}^p \text{ и } Z_r^p \supset Z_{r-1}^{p+1} \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

так что определены фактормодули

$$E_r^p = Z_r^p / (B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}), \quad p \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

которые объединяются в $\mathbb{Z}$ -градуированные модули

$$E_r = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_r^p, \quad r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Построенные таким образом модули образуют последовательность

$$\{E_r \mid r \in \mathbb{Z}\},$$

которая называется *спектральной последовательностью дифференциального модуля с фильтрацией* $\{C = \bigcup C^p, d\}$.

В частности, при $r \leq 0$ имеем

$$Z_r^p = C^p, \quad B_{r-1}^p = dC^{p-r+1} \subset C^{p+1} = Z_{r-1}^{p+1},$$

так что

$$E_r^p = C^p / C^{p+1} \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}, r \leq 0.$$

При $r = 1$ имеем

$$B_0^p = dC^p, \quad Z_0^{p+1} = C^{p+1},$$

так что

$$E_1^p = Z_1^p / (dC^p + C^{p+1}) = \{x \in C^p \mid dx \in C^{p+1}\} / (dC^p + C^{p+1})$$

для всех $p \in \mathbb{Z}$, и так далее. В пределе получим

$$E_\infty^p = Z_\infty^p / (B_\infty^p + Z_\infty^{p+1}) = Z(C^p) / (B(C^p) + Z(C^{p+1})),$$

для всех $p \in \mathbb{Z}$.

Для каждого $r \in \mathbb{Z}$ определим эндоморфизм

$$d_r = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} d_r^p \in \text{End}_A(E_r), \quad d_r^p: E_r^p \rightarrow E_r^{p+r}, \quad p \in \mathbb{Z},$$

подробнее,

$$E_r^p = Z_r^p / (B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}) \xrightarrow{d_r^p} E_r^{p+r} = Z_r^{p+r} / (B_{r-1}^{p+r} + Z_{r-1}^{p+r+1}),$$

правилом

$$[x]_r^p = x + (B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}) \mapsto d_r^p[x]_r^p = [dx]_r^{p+r} = dx + (B_{r-1}^{p+r} + Z_{r-1}^{p+r+1})$$

для всех $x \in Z_r^p$. Это определение корректно, поскольку по построению

$$dZ_r^p \subset Z_r^{p+r}, \quad dB_{r-1}^p = 0, \quad dZ_{r-1}^{p+1} = B_{r-1}^{p+r}.$$

Очевидно, композиция $d_r^{p+r} \circ d_r^p = 0$ для всех $p, r \in \mathbb{Z}$, так что для каждого $r \in \mathbb{Z}$ определен $\mathbb{Z}$ -градуированный дифференциальный модуль $\{E_r, d_r\}$ с r -однородным дифференциалом d_r .

ТЕОРЕМА 1. Для каждого $r \in \mathbb{Z}$ производный модуль $H(E_r)$ совпадает с модулем E_{r+1} , подробнее,

$$\ker d_r^p / \operatorname{im} d_r^{p-r} = E_{r+1}^p \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хотя доказательство одинаковое для всех $r \in \mathbb{Z}$, для наглядности сначала рассмотрим простые случаи. Пусть $r < 0$, $p \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$E_r^p = C^p / C^{p+1} = E_{r+1}^p, \quad E_r^{p+r} = C^{p+r} / C^{p+r+1}$$

и для всякого $x \in C^p$

$$d_r^p(x + C^{p+1}) = dx + C^{p+r+1} = 0,$$

поскольку

$$dx \in C^p \subset C^{p+r+1} \quad \text{при } r < 0,$$

откуда $\ker d_r^p = E_r^p$, $\operatorname{im} d_r^{p-r} = 0$ и, следовательно,

$$\ker d_r^p / \operatorname{im} d_r^{p-r} = E_r^p = E_{r+1}^p \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}, \quad r < 0.$$

Другой простой случай $r = 0$. Здесь для $p \in \mathbb{Z}$ имеем

$$E_0^p = C^p / C^{p+1}, \quad E_1^p = Z_1^p / (dC^p + C^{p+1})$$

и для любого $x \in C^p$

$$d_0^p(x + C^{p+1}) = dx + C^{p+1},$$

откуда

$$\operatorname{im} d_0^p = dC^p + C^{p+1}, \quad \ker d_0^p = Z_1^p,$$

и, значит,

$$\ker d_0^p / \operatorname{im} d_0^p = Z_1^p / (dC^p + C^{p+1}) = E_1^p \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим теперь общий случай $p, r \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что доказательство по сути есть игра с фактормодулями и суммами подмодулей, не слишком популярная среди неспециалистов, рассуждения проведем максимально подробно. Итак,

$$E_r^p = \frac{Z_r^p}{dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}}, \quad E_r^{p+r} = \frac{Z_r^{p+r}}{dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1}},$$

$$E_{r+1}^p = \frac{Z_{r+1}^p}{dZ_r^{p-r} + Z_r^{p+1}}.$$

Для всякого $x \in Z_r^p$ имеем $d_r^p[x]_r^p = dx + (dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1})$, так что $d_r^p[x]_r^p = 0$ тогда и только тогда, когда $dx = dy + z$, $y \in Z_{r-1}^{p+1}$, $z \in Z_{r-1}^{p+r+1}$. Положим $u = x - y$, тогда $u \in (C^p + C^{p+1}) = C^p$, $du = z \in C^{p+r+1}$, т.е. $u \in Z_{r+1}^p$, и, значит, $x = u + y \in Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}$. Отсюда

$$\ker d_r^p = (Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}) / (dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}).$$

Аналогичным образом,

$$\operatorname{im} d_r^{p-r} = (dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1}) / (dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}),$$

где мы учли, что $dZ_{r-1}^{p-r+1} \subset dZ_r^{p-r}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \ker d_r^p / \operatorname{im} d_r^{p-r} &= \frac{Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}}{dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}} \Big/ \frac{dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1}}{dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}} \\ &= \frac{Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}}{dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1} + dZ_r^{p-r}} = \frac{Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}}{Z_{r-1}^{p+1} + dZ_r^{p-r}} \\ &= \frac{Z_{r+1}^p}{Z_{r+1}^p \cap (dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1})} = \frac{Z_{r+1}^p}{dZ_r^{p-r} + Z_{r+1}^p \cap Z_{r-1}^{p+1}} \\ &= Z_{r+1}^p / (dZ_r^{p-r} + Z_{r+1}^p) = E_{r+1}^p, \end{aligned}$$

где мы учли, что

$$Z_{r-1}^{p-r+1} \subset Z_r^{p-r}, \quad dZ_r^{p-r} \subset Z_{r+1}^p, \quad Z_{r+1}^p \cap Z_{r-1}^{p+1} = Z_{r+1}^{p+1}.$$

ПРИМЕР 1.7.1. Пусть $\{C, d\}$ – комплекс,

$$C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n, \quad d = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} d_n, \quad d_n : C_n \rightarrow C_{n+1}.$$

Ниже следует отличать дифференциал $d_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$ от дифференциала $d_r : E_r \rightarrow E_r$. Зададим на модуле C фильтрацию подмодулями $C^p = \bigoplus_{n \geq p} C_n$, $p \in \mathbb{Z}$, тогда $dC^p \subset C^{p+1} \subset C^p$, поскольку

$$dC^p = \bigoplus_{n \geq p} d_n C_n \subset \bigoplus_{n \geq p} C_{n+1} = \bigoplus_{n \geq p+1} C_n = C^{p+1}.$$

В частности, определен дифференциальный модуль с фильтрацией. Вычислим его спектральную последовательность. Пусть $p, r \in \mathbb{Z}$. По определению

$$Z_r^p = \{x \in C^p \mid dx \in C^{p+r}\}, \quad Z_{r-1}^{p+1} = \{x \in C^{p+1} \mid dx \in C^{p+r}\},$$

так что

$$Z_r^p / Z_{r-1}^{p+1} = \{x \in C_p \mid dx \in C^{p+r} \cap C_{p+1}\} = \begin{cases} C_p, & r \leq 1, \\ Z(C_p), & r \geq 2, \end{cases}$$

где $Z(C_p) = \ker d_p = \{x \in C_p \mid dx = 0\}$ и было учтено, что

$$C^{p+r} \cap C_{p+1} = \begin{cases} C_{p+1}, & r \leq 1, \\ 0, & r \geq 2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$E_r^p = \frac{Z_r^p}{B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}} = \begin{cases} C_p / (C_p \cap B_{r-1}^p), & r \leq 1 \\ Z(C_p) / (C_p \cap B_{r-1}^p), & r \geq 2. \end{cases}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} C_p \cap B_{r-1}^p &= C_p \cap C^p \cap dC^{p-r+1} \\ &= d(C^{p-r+1} \cap C_{p-1}) = \begin{cases} 0, & r \leq 1, \\ dC_{p-1}, & r \geq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

так что

$$E_r^p = \begin{cases} C_p, & r \leq 1, \\ H_p(C), & r \geq 2, \end{cases}$$

коротко,

$$E_r = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_r^p = \begin{cases} C, & r \leq 1, \\ H(C) & r \geq 2, \end{cases}$$

где $H_p(C) = \ker d_p / \operatorname{im} d_{p-1} = Z(C_p) / B(C_p)$, $H(C) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(C)$.

Аналогичным образом проверяем, что для всех $p, r \in \mathbb{Z}$,

$$d_r^p = \begin{cases} 0, & r \neq 1, \\ d_p, & r = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\ker d_r^p / \operatorname{im} d_r^{p-r} = \begin{cases} C_p, & r \leq 0, \\ H_p(C), & r \geq 1, \end{cases} = E_{r+1}^p,$$

в согласии с теоремой 1. И наконец,

$$\begin{aligned} E_\infty^p &= Z_\infty^p / (B_\infty^p + Z_\infty^{p+1}) = Z(C_p) / (C_p \cap dC) \\ &= Z(C_p) / B(C_p) = H_p(C). \end{aligned}$$

Пусть $p \in \mathbb{Z}$. По построению

$$C^p \subset C, \quad Z(C^p) \subset Z(C), \quad B(C^p) \subset B(C),$$

так что определен морфизм

$$j^p: H(C^p) \rightarrow H(C), \quad x + dC^p \mapsto x + dC, \quad \text{для всех } x \in Z(C^p).$$

Его образ

$$\text{im } j^p = H(C)^p = \frac{Z(C^p) + dC}{dC} = \frac{Z(C^p)}{C^p \cap dC} = \frac{Z_\infty^p}{B_\infty^p}.$$

Вложения $C^p \supset C^{p+1}$ влекут вложения $H(C)^p \supset H(C)^{p+1}$, так что определены модуль с фильтрацией $H(C) = \bigcup H(C)^p$ (другими словами, фильтрация модуля C индуцирует фильтрацию производного модуля $H(C)$). В частности, определен градуированный модуль

$$G(H(C)) = \bigoplus G^p(H(C)),$$

где

$$G^p(H(C)) = H(C)^p / H(C)^{p+1}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство $E_\infty = G(H(C))$, или, подробнее,*

$$E_\infty^p = G(H(C))^p \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $p \in \mathbb{Z}$, тогда

$$\frac{H(C)^p}{H(C)^{p+1}} = \frac{Z_\infty^p}{B_\infty^p} \bigg/ \frac{Z_\infty^{p+1}}{B_\infty^{p+1}} = \frac{Z_\infty^p}{B_\infty^p + Z_\infty^{p+1} + B_\infty^{p+1}} = \frac{Z_\infty^p}{B_\infty^p + Z_\infty^{p+1}} = E_\infty^p,$$

где мы учли, что $Z_\infty^{p+1} \subset Z_\infty^p$, $B_\infty^{p+1} \subset B_\infty^p$.

1.7.3. Специальные случаи.

Градуировка. Пусть $\{C, d\}$ – дифференциальный модуль с фильтрацией, причем модуль C снабжен градуировкой, совместимой с фильтрацией, а дифференциал d – однородный степени $+1$ (говорят, что $\{C, d\}$ – комплекс с фильтрацией), так что для всех $p, q \in \mathbb{Z}$ имеем

$$C = \bigcup C^p = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C_q, \quad dC^p \subset C^p, \quad d = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} d_q, \quad d_q: C_q \rightarrow C_{q+1}.$$

В такой ситуации члены E_r , $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, биградуируются. Именно, пусть $p, q \in \mathbb{Z}$, тогда

$$\begin{aligned} C^{pq} &= C^p \cap C_{p+q}, \quad C^p = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^{pq}, \quad dC^{pq} \subset C^{p,q+1}, \\ Z_r^{pq} &= Z_r^p \cap C_{p+q} = \{x \in C^{pq} \mid dx \in C^{p+r,q-r+1}\}, \\ Z_r^p &= \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} Z_r^{pq}, \quad dZ_r^{pq} = C^{p+r,q-r+1} \cap dC^{pq} = B_r^{p+r,q-r+1}, \\ B_r^{pq} &= B_r^p \cap C_{p+q} = C^{pq} \cap dC^{p-r,q+r-1} \\ &= \{x = dy \in C^{pq} \mid y \in C^{p-r,q+r-1}\}, \\ B_r^p &= \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} B_r^{pq}, \quad dB_r^{pq} = 0, \\ E_r^{pq} &= Z_r^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}), \quad E_r^p = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} E_r^{pq}. \\ d_r^p &= \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} d_r^{pq}, \quad d_r^{pq}: E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}, \text{ для всех } p, q \in \mathbb{Z}, \\ E_{r+1}^{pq} &= \ker d_r^{pq} / \operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1}. \end{aligned}$$

Доказательство этих равенств осуществляется прямой проверкой и является хорошим упражнением по технике работы с фактормодулями и суммами подмодулей. Доказательство последнего равенства использует теорему 1.

В частности,

$$E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) \quad \text{для всех } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $Z_r^{pq} \supset Z_{r+1}^{pq} \supset Z_\infty^{pq}$ для всех $p, q, r \in \mathbb{Z}$, а лемма 1.7.1 имеет

СЛЕДСТВИЕ 1.7.1. Для каждой пары $p, q \in \mathbb{Z}$ модули B_r^{pq} , $r \in \mathbb{Z}$, образуют возрастающую фильтрацию модуля B_∞^{pq} , т.е.

$$B_r^{pq} \subset B_{r+1}^{pq} \quad \text{для всех } r \in \mathbb{Z}, \quad \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} B_r^{pq} = B_\infty^{pq}.$$

По построению модуль $H(C)$ имеет фильтрацию

$$H(C) = \bigcup H(C)^p$$

(см. с. 107) и градуировку

$$H(C) = \bigoplus H_q(C)$$

(см. с. 88). Очевидно, они совместимы. Для $p, q \in \mathbb{Z}$, положим

$$H_q(C)^p = H_q(C) \cap H(C)^p = \{x + C^p \cap C_q \cap dC \mid x \in C^p \cap C_q, dx = 0\},$$

тогда

$$E_{\infty}^{pq} = H_{p+q}(C)^p / H_{p+q}(C)^{p+1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} H_{p+q}(C)^p &= \{x + C^{pq} \cap dC \mid x \in C^{pq}, dx = 0\} = Z_{\infty}^{pq} / B_{\infty}^{pq}, \\ H_{p+q}(C)^{p+1} &= \{x + C^{p+1, q-1} \cap dC \mid x \in C^{p+1, q-1}, dx = 0\} \\ &= Z_{\infty}^{p+1, q-1} / B_{\infty}^{p+1, q-1}, \\ H_{p+q}(C)^p / H_{p+q}(C)^{p+1} &= \frac{Z_{\infty}^{pq}}{B_{\infty}^{pq}} \bigg/ \frac{Z_{\infty}^{p+1, q-1}}{B_{\infty}^{p+1, q-1}} \\ &= \frac{Z_{\infty}^{pq}}{B_{\infty}^{pq} + Z_{\infty}^{p+1, q-1} + B_{\infty}^{p+1, q-1}} = \frac{Z_{\infty}^{pq}}{B_{\infty}^{pq} + Z_{\infty}^{p+1, q-1}} = E_{\infty}^{pq}, \end{aligned}$$

где мы учли, что $Z_{\infty}^{p+1, q-1} \subset Z_{\infty}^{pq}$ и $B_{\infty}^{p+1, q-1} \subset B_{\infty}^{pq}$.

Регулярная фильтрация. Пусть в условиях предыдущего пункта фильтрация комплекса $\{C, d\}$ регулярная, т.е. для всякого индекса $q \in \mathbb{Z}$ существует номер $P(q) \in \mathbb{Z}$ такой, что $C^p \cap C_q = 0$ для всех $p \geq P(q)$.

Пусть $p, q \in \mathbb{Z}$, тогда $Z_r^{pq} = Z_{\infty}^{pq}$ при $r \geq R = P(p+q+1) - p$, поскольку

$$Z_r^{pq} = \{x \in C^{pq} \mid dx \in C^{p+r, q-r+1}\},$$

а $C^{p+r, q-r+1} = C^{p+r} \cap C_{p+q+1} = 0$ при любых $p+r \geq P(p+q+1)$. Более того, и дифференциал $d_r^{pq} = 0$ при $r \geq R$, поскольку в этом случае $d_r^{pq}: E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1} = Z_r^{p+r, q-r+1} / (\dots)$, а $Z_r^{p+r, q-r+1} \subset C^{p+r, q-r+1} = 0$. Отсюда с помощью теоремы 1 выводим, что $E_{r+1}^{pq} = E_r^{pq} / \text{im } d_r^{p-r, q+r-1}$, т.е. имеется точная последовательность модулей

$$0 \longrightarrow \text{im } d_r^{p-r, q+r-1} \longrightarrow E_r^{pq} \xrightarrow{\pi_r^{pq}} E_{r+1}^{pq} \longrightarrow 0, \quad r \geq R,$$

где π_r^{pq} – каноническая проекция модуля на фактормодуль. Таким образом, для каждой пары $p, q \in \mathbb{Z}$ определена индуктивная последовательность модулей

$$E_R^{pq} \xrightarrow{\pi_R^{pq}} E_{R+1}^{pq} \xrightarrow{\pi_{R+1}^{pq}} \dots \xrightarrow{\pi_{r-1}^{pq}} E_r^{pq} \xrightarrow{\pi_r^{pq}} E_{r+1}^{pq} \xrightarrow{\pi_{r+1}^{pq}} \dots,$$

или коротко $\{E_r^{pq} \xrightarrow{\pi_r^{pq}} E_{r+1}^{pq} \mid r \geq R\}$.

ТЕОРЕМА 3. В указанных выше условиях для всякой пары $p, q \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$\varinjlim E_r^{pq} = E_{\infty}^{pq}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по построению модуль $\varinjlim E_r^{pq}$ характеризуется точностью последовательности

$$0 \longrightarrow N^{pq} \longrightarrow \bigoplus_{r \geq R} E_r^{pq} \xrightarrow{\pi^{pq}} \varinjlim E_r^{pq} \longrightarrow 0,$$

где

$$N^{pq} = \{ \mathbf{x} = \sum_r \mathbf{x}_r \in \bigoplus E_r^{pq} \mid \sum_r \pi_{rs}^{pq}(\mathbf{x}_r) = 0 \text{ для некоторого } s \},$$

а π^{pq} – каноническая проекция модуля на фактормодуль (поясним, что $\pi_{rs}^{pq} = \pi_{s-1}^{pq} \circ \dots \circ \pi_r^{pq}$, см. пример 1.2.32).

Далее, по определению модуль $E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1})$, тогда как при $r \geq R$ модуль $E_r^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1})$, поскольку модуль $Z_{r-1}^{p+1, q-1} = Z_\infty^{p+1, q-1}$ при

$$r-1 \geq P((p+1) + (q-1) + 1) - (p+1) = R-1,$$

т.е. при $r \geq R$. Для каждого $r \geq R$ определим эпиморфизм $\pi_{r\infty}^{pq} : E_r^{pq} \rightarrow E_\infty^{pq}$ правилом

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r = x + (B_{r-1}^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}) &\mapsto \mathbf{x}_\infty = x + (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}), \\ \text{для всех } x \in Z_\infty^{pq}, \end{aligned}$$

напомним, что $B_{r-1}^{pq} \subset B_\infty^{pq}$. В силу универсальности прямой суммы определен эпиморфизм $\pi_\infty^{pq} : \bigoplus_{r \geq R} E_r^{pq} \rightarrow E_\infty^{pq}$, действующий по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_\infty = \sum \pi_{r\infty}^{pq}(\mathbf{x}_r) \quad \text{для всех } \mathbf{x} = \sum \mathbf{x}_r \in \bigoplus E_r^{pq},$$

причем для всех $s \geq R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & E_s^{pq} & \\ \iota_s^{pq} \swarrow & & \searrow \pi_{s\infty}^{pq} \\ \bigoplus_{r \geq R} E_r^{pq} & \xrightarrow{\pi_\infty^{pq}} & E_\infty^{pq} \end{array}$$

где ι_s^{pq} – канонические инъекции. В частности, определена вторая точная последовательность модулей

$$0 \longrightarrow N_\infty^{pq} \longrightarrow \bigoplus_{r \geq R} E_r^{pq} \xrightarrow{\pi_\infty^{pq}} E_\infty^{pq} \longrightarrow 0,$$

где $N_\infty^{pq} = \{ \mathbf{x} \in \bigoplus E_r^{pq} \mid \pi_\infty^{pq}(\mathbf{x}) = 0 \}$.

В силу леммы 1.2.1 теорема будет доказана, если мы покажем, что $N^{pq} = N_{\infty}^{pq}$. Итак, пусть

$$\mathbf{x} = \sum \mathbf{x}_r \in \bigoplus E_r^{pq}, \quad \text{где } \mathbf{x}_r = x_r + (B_{r-1}^{pq} + Z_{\infty}^{p+1, q-1}), \quad x_r \in Z_{\infty}^{pq}.$$

Пусть $s \geq \sup \mathbf{x}$, тогда

$$\sum \pi_{rs}^{pq}(\mathbf{x}_r) = x + (B_{s-1}^{pq} + Z_{\infty}^{p+1, q-1}), \quad \text{где } x = \sum x_r \in Z_{\infty}^{pq},$$

так что $\sum \pi_{rs}^{pq}(\mathbf{x}_r) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y + z$, для некоторых $y \in B_{s-1}^{pq}$, $z \in Z_{\infty}^{p+1, q-1}$. С другой стороны,

$$\pi_{\infty}^{pq}(\mathbf{x}) = \sum \pi_{r\infty}^{pq}(\mathbf{x}_r) = x + (B_{\infty}^{pq} + Z_{\infty}^{p+1, q-1}), \quad \text{где } x = \sum x_r \in Z_{\infty}^{pq},$$

так что $\pi_{\infty}^{pq}(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y + z$ для некоторых $y \in B_{\infty}^{pq}$, $z \in Z_{\infty}^{p+1, q-1}$. Но, согласно следствию 1.7.1, $B_{\infty}^{pq} = \bigcup B_r^{pq}$, и, значит, найдется индекс $s \geq R$ такой, что фактически $y \in B_{s-1}^{pq}$. Сравнивая полученные выражения, приходим к выводу, что $N^{pq} = N_{\infty}^{pq}$, что и требовалось.

Неотрицательная фильтрация. Пусть $\{C, d\}$ – дифференциальный модуль с фильтрацией. Фильтрация $C = \bigcup C^p$ называется *неотрицательной*, если $C^0 = C$ (а значит, и $C^p = C$ для всех $p \leq 0$). В этом случае

$$E_r^p = 0 \quad \text{для всех } p < 0, \quad r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Действительно, при $r \in \mathbb{Z}$ модуль

$$Z_{r-1}^{p+1} = \{x \in C^{p+1} = C^p = C \mid dx \in C^{p+r}\} = Z_r^p,$$

так что $E_r^p = Z_r^p / (B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}) = 0$, а при $r = \infty$ модуль

$$Z_{\infty}^{p+1} = \{x \in C^{p+1} = C^p = C \mid dx = 0\} = Z_{\infty}^p,$$

и опять $E_{\infty}^p = Z_{\infty}^p / (B_{\infty}^p + Z_{\infty}^{p+1}) = 0$.

Фильтрация, подчиненная градуировке. Пусть $\{C, d\}$ – комплекс с фильтрацией. Фильтрация $C = \bigcup C^p$ называется *подчиненной* градуировке $C = \bigoplus C_q$, если $C^p \cap C_q = 0$ при $p \geq q + 1$ (в частности, фильтрация регулярная). Здесь

$$E_r^{pq} = 0 \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}, \quad q < 0, \quad r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Действительно, в этом случае $C^{pq} = C^p \cap C_{p+q} = 0$, а значит, и $Z_r^{pq} = 0$, а следовательно, и $E_r^{pq} = 0$.

Градуировка, обрезающая фильтрацию.

Пусть $\{C, d\}$ – комплекс с фильтрацией. Будем говорить, что градуировка $C = \bigoplus C_q$ обрезает фильтрацию $C = \bigcup C^p$, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$C^p \cap C_q = C^{q-N} \cap C_q \quad \text{для всех } p \leq q - N.$$

В этом случае

$$C^{pq} = C^p \cap C_{p+q} = C^{p+q-N} \cap C_{p+q} \quad \text{для всех } q \geq N,$$

так что для всех $q > N$ имеем $C^{p+1, q-1} = C^{p+q-N} \cap C_{p+q} = C^{pq}$, откуда

$$\begin{aligned} Z_{r-1}^{p+1, q-1} &= \{x \in C^{p+1, q-1} \mid dx \in C^{p+r, q-r+1}\} \\ &= \{x \in C^{p, q} \mid dx \in C^{p+r, q-r+1}\} = Z_r^{pq} \end{aligned}$$

и, значит,

$$E_r^{pq} = Z_r^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) = 0 \quad \text{для всех } p, r \in \mathbb{Z}, q > N.$$

Аналогичным образом проверяется, что $Z_\infty^{p+1, q-1} = Z_\infty^{pq}$ для всех $q > N$, так что и

$$E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}) = 0 \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}, q > N.$$

Неотрицательная градуировка.

Пусть $\{C, d\}$ – комплекс с фильтрацией, причем однородные компоненты $C_q = 0$ при $q < 0$, так что $C = \bigoplus_{q \geq 0} C_q$. Тогда

$$C^{pq} = C^p \cap C_{p+q} = 0 \quad \text{для всех } p, q \in \mathbb{Z}, p + q < 0,$$

откуда $Z_r^{pq} = 0$, а значит, и члены спектральной последовательности $E_r^{pq} = 0$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}, p + q < 0, r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Спектральные последовательности бикомплекса.

Пусть $\{C, d', d''\}$ – бикомплекс, где (ср. с рис. 1.2)

$$\begin{aligned} C &= \bigoplus_{m, n \in \mathbb{Z}} C_{mn}, & d' \circ d' &= d' \circ d'' + d'' \circ d' = d'' \circ d'' = 0, \\ d' &= \bigoplus_{m, n \in \mathbb{Z}} d'_{mn}, & d'_{mn} &: C_{mn} \rightarrow C_{m+1, n}, \\ d'' &= \bigoplus_{m, n \in \mathbb{Z}} d''_{mn}, & d''_{mn} &: C_{mn} \rightarrow C_{m, n+1}, \end{aligned}$$

напомним, что модули C_{mn} называются однородными бистепени (m, n) , вертикальные дифференциалы d' – однородными бистепени $(1, 0)$, а горизонтальные дифференциалы d'' – однородными бистепени $(0, 1)$.

Положим

$$C_q = \bigoplus_{m+n=q} C_{mn}, \quad d_q = \bigoplus_{m+n=q} (d'_{mn} + d''_{mn}), \quad q \in \mathbb{Z},$$

тогда $C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C_q$, $d_q: C_q \rightarrow C_{q+1}$ и $d_{q+1} \circ d_q = 0$, так что получим комплекс $\{C, d\}$, где модули C_q – однородные степени q , дифференциал d – однородный степени $+1$. В модуле C можно ввести две различные фильтрации. Первая, *вертикальная*, определяется правилом

$$\begin{aligned} {}'C^p &= \bigoplus_{\substack{m \geq p \\ n \in \mathbb{Z}}} C_{mn}, & {}'C^p \supset {}'C^{p+1}, & d({}'C^p) \subset {}'C^p, \quad p \in \mathbb{Z}, \\ C &= \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} {}'C^p, \end{aligned}$$

и задает комплекс с фильтрацией $\{C, d\}$ со спектральной последовательностью $'E_r^p$, дифференциалами $'d_r$ и предельным членом $'E_\infty^p$, $p, r \in \mathbb{Z}$. Вторая, *горизонтальная*, определяется правилом

$$\begin{aligned} {}''C^p &= \bigoplus_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \geq p}} C_{mn}, & {}''C^p \supset {}''C^{p+1}, & d({}''C^p) \subset {}''C^p, \quad p \in \mathbb{Z}, \\ C &= \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} {}''C^p \end{aligned}$$

и задает комплекс с фильтрацией $\{C, d\}$ со спектральной последовательностью $''E_r^p$, дифференциалами $''d_r$ и предельным членом $''E_\infty^p$, $p, r \in \mathbb{Z}$.

В приложениях часто встречается случай, когда бикомплекс $\{C, d', d''\}$ неотрицательный, т.е. компоненты $C_{mn} = 0$ при $(m, n) \notin \mathbb{Z}_+^2$, так что фактически $C = \bigoplus_{m, n \geq 0} C_{mn}$. Здесь

$$C_q = \bigoplus_{\substack{m, n \geq 0 \\ m+n=q}} C_{mn} = \bigoplus_{0 \leq n \leq q} C_{q-n, n}, \quad q \in \mathbb{Z},$$

в частности, $C_q = 0$ при $q < 0$, т.е. полная градуировка $C = \bigoplus_{q \geq 0} C_q$ неотрицательная. Далее,

$$'C^p = \bigoplus_{\substack{m, n \geq 0 \\ m \geq p}} C_{mn} = \bigoplus_{\substack{m \geq \max\{0, p\} \\ n \geq 0}} C_{mn}, \quad p \in \mathbb{Z},$$

в частности, $'C^p = C$ при $p \leq 0$, т.е. вертикальная фильтрация неотрицательная и, следовательно, члены спектральной последовательности $'E_r^p = 0$ при $p < 0$, $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Кроме того,

$$'C^p \cap C_q = \bigoplus_{\substack{0 \leq n \leq q \\ p \leq m = q-n}} C_{q-n, n} = \bigoplus_{0 \leq n \leq \min\{q-p, q\}} C_{q-n, n},$$

в частности, $'C^p \cap C_q = 0$ при $p \geq q + 1$, т.е. вертикальная фильтрация подчинена полной градуировке и, следовательно, члены спектральной последовательности $'E_r^{pq} = 0$ при $q < 0$, $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Таким образом, в этом случае спектральная последовательность $'E_r$ также неотрицательно биградуированная,

$$'E_r = \bigoplus_{p,q \geq 0} 'E_r^{pq} \quad \text{для всех } r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Аналогичным образом, в этом случае и

$$''E_r = \bigoplus_{p,q \geq 0} ''E_r^{pq} \quad \text{для всех } r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Предположим дополнительно, что $C_{mn} = 0$ при $n > N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$, так что

$$C = \bigoplus_{m \geq 0, 0 \leq n \leq N} C_{mn}.$$

В такой ситуации

$$'C^p \cap C_q = \bigoplus_{0 \leq n \leq \min\{q-p, q, N\}} C_{q-n, n}.$$

Пусть $p \leq q - N$, тогда $q - p \geq N$, так что

$$'C^p \cap C_q = \bigoplus_{0 \leq n \leq \min\{q, N\}} C_{q-n, n} = 'C^{q-N} \cap C_q.$$

Другими словами, полная градуировка $C = \bigoplus_{q \geq 0} C_q$ обрезает фильтрацию $C = \bigcup_{p \geq 0} 'C^p$, следовательно,

$$'E_r^{pq} = 0 \quad \text{для всех } p \in \mathbb{Z}, q > N, r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

и, значит, в этом случае

$$'E_r = \bigoplus_{p \geq 0, 0 \leq q \leq N} 'E_r^{pq} \quad \text{для всех } r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

в согласии с биградуировкой модуля C .

Подробнее смотри [8], [16], [9], [21], [4].

Глава 2. Элементы дифференциальной геометрии

2.1. Гладкие многообразия

2.1.1. Категория гладких многообразий. Пусть M – отделимое топологическое пространство (напомним, что топологическое пространство называется *отделимым*, иначе *хаусдорфовым*, если любые две его различные точки обладают непересекающимися окрестностями). Пара $\{U, \phi\} = \{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$, где U – открытое подмножество пространства M , называется *картой* на M , если ϕ – гомеоморфизм (т.е. взаимно однозначное непрерывное в обе стороны отображение) открытого множества U на образ $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$. В этом случае каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие точка $\phi(p) = (\phi^1(p), \dots, \phi^m(p)) \in \mathbb{R}^m$, причем множество U называется *координатной окрестностью*, а компоненты $x^\mu = \phi^\mu(p) \in \mathbb{R}$, $1 \leq \mu \leq m$, называются *локальными координатами* точки p .

Карты $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ и $\{V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m\}$ на M называются *согласованными*, если композиция $\psi \circ \phi^{-1}$ – гладкое (т.е. класса $\mathcal{C}^\infty$) отображение образа $\phi(U \cap V)$ на образ $\psi(U \cap V)$, а композиция $\phi \circ \psi^{-1}$ – гладкое отображение образа $\psi(U \cap V)$ на образ $\phi(U \cap V)$, причем якобианы перехода от координат $x = (x^1, \dots, x^m) \in \phi(U \cap V)$ к координатам $y = (y^1, \dots, y^m) \in \psi(U \cap V)$ и обратно всюду ненулевые. Семейство карт $\{U_i, \phi_i\} = \{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$ называется *атласом* на M , если $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ и все карты из $\{U_i, \phi_i\}$ попарно согласованы. Карта $\{U, \phi\}$ называется *согласованной* с атласом $\{U_i, \phi_i\}$, если она согласована со всеми картами из $\{U_i, \phi_i\}$. Атлас $\{U_i, \phi_i\}$ называется *максимальным* иначе *гладкой структурой* на M , если он содержит все согласованные с ним карты. Очевидно, всякий атлас можно дополнить до максимального, включив в него все согласованные с ним карты. Отделимое топологическое пространство M вместе с фиксированным максимальным атласом $\{U_i, \phi_i\}$ называется *гладким многообразием*, а общее для

всех карт натуральное число m называется *размерностью* многообразия M , пишут $m = \dim M$.

Функция $f: M \rightarrow \mathbb{F}$ на гладком многообразии M со значениями в поле $\mathbb{F}$ называется *гладкой* (иначе, класса $\mathcal{C}^\infty$), если композиция $f \circ \phi_i^{-1}$ гладкая на $\phi_i(U_i)$ для любой карты из атласа $\{U_i, \phi_i\}$, задающего многообразие M . Множество $\mathcal{C}^\infty(M)$ всех гладких функций на данном гладком многообразии M является алгеброй с поточечными операциями

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $x \in M$. Очевидно, алгебра $\mathcal{C}^\infty(M)$ унитарная ассоциативная и коммутативная.

Пусть M – гладкое многообразие с атласом $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$, а N – гладкое многообразие с атласом $\{V_k \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{R}^n \mid k \in K\}$. Непрерывное отображение $\Phi: M \rightarrow N$ называется *гладким* (иначе, класса $\mathcal{C}^\infty$), если композиции $\psi_k \circ \Phi \circ \phi_i^{-1}$ – гладкие отображения из открытого множества $U_i \cap \Phi^{-1}(V_k) \subset \mathbb{R}^m$ в открытое множество $\psi_k(V_k) \subset \mathbb{R}^n$ для всех индексов $i \in I$ и $k \in K$ таких, что пересечение $U_i \cap \Phi^{-1}(V_k) \neq \emptyset$. Эквивалентное определение: непрерывное отображение $\Phi: M \rightarrow N$ называется *гладким*, если композиция $f \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ для любой $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$.

Пусть Φ – гладкое отображение из гладкого m -мерного многообразия M в гладкое n -мерное многообразие N . Тогда для каждой точки $p \in M$ существуют

- ★ карта $\{U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{R}^m\}$ на M , $p \in U$,
- ★ карта $\{V \xrightarrow{\psi} \psi(V) \subset \mathbb{R}^n\}$ на N , $\Phi(U) \subset V$,

такие, что

- ★ $y = \tilde{\Phi}(x)$ – гладкое отображение из $\phi(U)$ в $\psi(V)$, где $\tilde{\Phi} = \psi \circ \Phi \circ \phi^{-1}$.

Таким образом, определена *категория гладких многообразий*, объекты которой – гладкие многообразия, а морфизмы – гладкие отображения.

Каждое гладкое отображение $\Phi: M \rightarrow N$ порождает морфизм алгебр $\Phi^*: \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ правилом

$$g \mapsto f = \Phi^*(g) = g \circ \Phi \quad \text{для всех } g \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

2.1.2. Прямые произведения. Пусть M – гладкое многообразие с атласом $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$, а N – гладкое многообразие с атласом $\{V_k \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{R}^n \mid k \in K\}$. Декартово произведение $M \times N$ топологических пространств M и N обладает естественной структурой гладкого многообразия, задаваемой атласом

$$\{U_i \times V_k \xrightarrow{\phi_i \times \psi_k} \mathbb{R}^{m+n} \mid (i, k) \in I \times K\}$$

(поясним, что отображение $\phi_i \times \psi_k$ точку $(x, y) \in U_i \times V_k$ переводит в точку $(\phi_i(x), \psi_k(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$). Топологическое пространство $M \times N$, снабженное такой гладкой структурой называется *прямым произведением* многообразий M и N .

2.1.3. Подмногообразия. Пусть M – топологическое пространство и $S \subset M$. В этом случае на подмножестве S индуцирована топология правилом: подмножество $V \subset S$ открыто в S тогда и только тогда, когда $V = S \cap U$ для некоторого подмножества $U \subset M$, открытого в M . Очевидно, индуцированная топология в S отделимая, если исходная топология в M отделимая.

Пусть теперь M – гладкое m -мерное многообразие и $S \subset M$ – его подмножество, наделенное индуцированной топологией. Для $1 \leq s < m$ будем представлять евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ как прямое произведение евклидовых пространств $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$, так что каждая точка $x \in \mathbb{R}^m$ будет записываться как $x = (y, z)$, $y \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^{m-s}$. Пусть существуют $s \in \mathbb{Z}$, $1 \leq s < m$, и атлас $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$ на M такие, что

- ★ $V_i = S \cap U_i = \{q \in U_i \mid \phi_i(q) = (y, z) \in \phi_i(U_i), z = 0\}$ для всех $i \in I$ таких, что $V_i \neq \emptyset$,
- ★ семейство $\{V_i \xrightarrow{\psi_i} \mathbb{R}^s \mid i \in I, V_i \neq \emptyset\}$ является атласом для S , где $\psi_i = \pi_s \circ \phi_i|_{V_i}$, проекция $\pi_s: \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \rightarrow \mathbb{R}^s$, $(y, z) \mapsto y$, а отображение $\phi_i|_{V_i}$ – сужение отображения ϕ_i на V_i .

Множество S , наделенное индуцированной таким образом s -мерной гладкой структурой, называется *гладким подмногообразием* многообразия M .

Еще один класс подмногообразий получается следующим образом. Пусть M – гладкое многообразие и W – его открытое подмножество. В этом случае W – отделимое топологическое пространство и всякая карта $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$, $V = W \cap U \neq \emptyset$, определяет на W карту $\{V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m\}$, где $\psi = \phi|_V$. В частности,

на W определена гладкая m -мерная структура, индуцированная из M , и множество W , наделенное этой структурой, есть гладкое многообразие, называемое *открытым подмногообразием* многообразия M .

2.2. Расслоения

2.2.1. Категория гладких расслоений. Гладким расслоением с типичным слоем F называется всякая тройка $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$, где F , E и B – гладкие многообразия, а π – гладкое отображение из E на B , удовлетворяющая условию *локальной тривиальности*: у каждой точки $b \in B$ существует открытая окрестность $U \subset B$ такая, что

★ имеется изоморфизм (гладких многообразий)

$$\chi: \pi^{-1}(U) \simeq U \times F,$$

★ композиция $\pi \circ \chi^{-1}: U \times F \rightarrow U$ есть проекция на первый сомножитель, $(u, f) \mapsto u$ для всех $u \in U$, $f \in F$.

Многообразие E называется *пространством расслоения*, многообразие B называется *базой расслоения*, а отображение π – *проекцией*. Для каждой точки $b \in B$ прообраз $\pi^{-1}(b)$, называемый *слоем над b* , есть подмногообразие в E , изоморфное многообразию F . Обратим внимание, что по построению, $E = \bigcup_{b \in B} \pi^{-1}(b)$, т.е. многообразие E расслоено на слои, изоморфные типичному слою F .

ПРИМЕР 2.2.1 (тривиальное расслоение). Пусть B , F – гладкие многообразия, $B \times F$ – их прямое произведение, $\pi: B \times F \rightarrow B$ – проекция на первый сомножитель, $(b, v) \mapsto \pi(b, v) = b$ для всех $b \in B$ и $v \in F$. Тогда тройка $\{B \times F \xrightarrow{\pi} B\}$ есть тривиальное гладкое расслоение с типичным слоем F , пространством расслоения $E = B \times F$, базой B и проекцией π . Слой над точкой $b \in B$ есть $\pi^{-1}(b) = \{b\} \times F$.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F , причем $\dim B = m$, $\dim F = s$, $\dim E = m + s$. Тогда для каждой точки $p \in E$ существуют

- ★ карта $\{U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{R}^m\}$ на B , $\pi(p) \in U$,
- ★ карта $\{V \xrightarrow{\psi} \psi(V) \subset \mathbb{R}^s\}$ на F ,

★ изоморфизм $\chi: \pi^{-1}(U) \simeq U \times F$, $q \mapsto \chi(q) = (u, v)$,

такие, что

- ★ $\{\chi^{-1}(U \times V) \xrightarrow{\varrho} \phi(U) \times \phi(V) \subset \mathbb{R}^{m+s}\}$ – карта на E , где
 $\varrho = (\phi \times \psi) \circ \chi$, $q \mapsto \varrho(q) = z = (x, y)$, $x = \phi(u) \in \mathbb{R}^m$,
 $y = \psi(v) \in \mathbb{R}^s$,
 ★ $\tilde{\pi} = \phi \circ \pi \circ \varrho^{-1}: \phi(U) \times \psi(V) \rightarrow \phi(U)$, $z = (x, y) \mapsto x$.

Морфизм из расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ с типичным слоем F в расслоение $\{H \xrightarrow{\lambda} C\}$ с типичным слоем G , по определению, есть пара гладких отображений $\Phi: E \rightarrow H$, $\varphi: B \rightarrow C$ такая, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & H \\ \pi \downarrow & & \downarrow \lambda \\ B & \xrightarrow{\varphi} & C \end{array}$$

(другими словами, сужение $\Phi|_{\pi^{-1}(q)}: \pi^{-1}(q) \rightarrow \lambda^{-1}(\varphi(q))$ есть гладкое отображение из гладкого многообразия $\pi^{-1}(q) \simeq F$ в гладкое многообразие $\lambda^{-1}(\varphi(q)) \simeq G$ для всех $q \in B$).

ПРИМЕР 2.2.2. Морфизм из тривиального расслоения

$$\{B \times F \xrightarrow{\pi} B\}$$

в тривиальное расслоение

$$\{C \times G \xrightarrow{\lambda} C\}$$

задается произвольной парой гладких отображений $\varphi: B \rightarrow C$, $s: F \rightarrow G$, отображение

$$\Phi = \varphi \times s: E = B \times F \rightarrow H = C \times G.$$

Таким образом, определена категория гладких расслоений, объекты которой суть гладкие расслоения, а морфизмы – определенные выше морфизмы гладких расслоений.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F , и пусть S – подмногообразие многообразия E , а G – подмногообразие многообразия F . Более того, пусть у каждой точки $q \in B$

существует открытая окрестность $U \subset B$ такая, что прообраз $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$, а сужение прообраза $\pi^{-1}(U) \cap S \simeq U \times G$. Пусть $\iota: S \rightarrow E$ – каноническая инъекция подмногообразия S в многообразие E (гладкое отображение!). Положим $\pi_S = \pi|_S = \pi \circ \iota: S \rightarrow B$ – сужение проекции π с E на S . В этом случае тройка $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ является гладким расслоением с типичным слоем G , которое называется *подрасслоением* расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. По построению коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota} & E \\ \pi_S \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\text{id}} & B \end{array}$$

т.е. пара $\iota: S \rightarrow E$, $\text{id}: B \rightarrow B$ является морфизмом из расслоения $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ в расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$, причем структура подрасслоения на S однозначно определена этим свойством.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F , и пусть $\varphi: A \rightarrow B$ – морфизм гладких многообразий. Можно проверить, что

- ★ множество $A \times_B E = \{(a, e) \in A \times E \mid \varphi(a) = \pi(e)\}$ есть гладкое многообразие, подмногообразие многообразия $A \times E$,
- ★ проекция на первый сомножитель $\pi_A: A \times_B E \rightarrow A$, $(a, e) \mapsto a$, есть гладкое отображение,
- ★ тройка $\{A \times_B E \xrightarrow{\pi_A} A\}$ – гладкое расслоение с тем же типичным слоем F ,
- ★ отображение $\varphi_*: A \times_B E \rightarrow E$, $(a, e) \mapsto e$, гладкое,
- ★ пара $\varphi_*: A \times_B E \rightarrow E$, $\varphi: A \rightarrow B$, есть морфизм гладких расслоений.

В силу этих свойств тройка $\{A \times_B E, \pi_A, \varphi_*\}$ называется *обратным образом* расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ относительно отображения $\varphi: A \rightarrow B$. Обратный образ обладает следующим свойством универсальности. Для всякого морфизма $\Phi: X \rightarrow E$, $\varphi: A \rightarrow B$ из расслоения $X \xrightarrow{\lambda} A$ в расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ существует единственное гладкое отображение $\mu: X \rightarrow A \times_B E$, действующее по правилу $x \mapsto (\lambda(x), \Phi(x))$, для которого следующая диаграмма

коммутативна

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F . Гладкое отображение $B \xrightarrow{\sigma} E$ называется *сечением* (иногда, *глобальным сечением*) этого расслоения, если композиция $\pi \circ \sigma = \text{id}_B$. По определению для каждой точки $q \in B$ образ $\sigma(q) \in \pi^{-1}(q)$. Множество всех сечений расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ будем обозначать через $\mathcal{F}(\pi)$. Аналогичным образом, гладкое отображение $U \xrightarrow{\sigma} E$, где U – открытое подмножество многообразия B , называется *локальным сечением* расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$, если композиция $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$.

ПРИМЕР 2.2.3. Сечения тривиального расслоения

$$\{B \times F \xrightarrow{\pi} B\}$$

суть гладкие отображения $s: B \rightarrow F$, отображения

$$\sigma: B \rightarrow E = B \times F$$

действуют по правилу: $q \mapsto \sigma(q) = (q, s(q))$ для всех $q \in B$.

Сечение χ расслоения $\{H \xrightarrow{\lambda} C\}$ называется *согласованным* с сечением σ расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ относительно морфизма расслоений $\{E \xrightarrow{\Phi} H, B \xrightarrow{\varphi} C\}$, если коммутативна диаграмма

В приложениях стандартный слой часто обладает дополнительной алгебраической структурой, например структурой векторного или аффинного пространства или структурой алгебры Ли.

2.2.2. Векторные расслоения. Пусть F – векторное пространство. (Термины *векторное пространство* и *линейное пространство* обычно употребляются как синонимы, но в контексте расслоений термин линейное пространство применяется лишь к одномерным векторным пространствам.) Расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ с типичным слоем F называется *векторным расслоением*, если каждый слой $\pi^{-1}(q)$, $q \in B$, наделен структурой векторного пространства, изоморфного F , причем изоморфизм здесь есть изоморфизм категории линейных пространств. Соответственно, морфизм $\Phi: E \rightarrow H$, $\varphi: B \rightarrow C$ из векторного расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ с типичным слоем F в векторное расслоение $\{H \xrightarrow{\lambda} C\}$ с типичным слоем G называется *морфизмом векторных расслоений*, если, дополнительно, сужение $\Phi|_{\pi^{-1}(q)}: \pi^{-1}(q) \rightarrow \lambda^{-1}(\varphi(q))$ есть линейное отображение из векторного пространства $\pi^{-1}(q) \simeq F$ в векторное пространство $\lambda^{-1}(\varphi(q)) \simeq G$ для всех $q \in B$. Таким образом, в категории гладких расслоений определена подкатегория векторных расслоений. Сечения векторных расслоений обычно называют *векторными полями*.

Наличие алгебраической структуры в слоях приводит к соответствующей алгебраической структуре в множестве сечений. Именно, пусть F – векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Тогда множество $\mathcal{F}(\pi)$ всех гладких сечений векторного расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ с типичным слоем F есть модуль над алгеброй $\mathcal{C}^\infty(B)$ с поточечными операциями

$$(\alpha \cdot \sigma + \beta \cdot \chi)(q) = \alpha \cdot \sigma(q) + \beta \cdot \chi(q), \quad (f \cdot \sigma)(q) = f(q) \cdot \sigma(q)$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\sigma, \chi \in \mathcal{F}(\pi)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(B)$, $q \in B$.

Векторные подрасслоения определяются как и гладкие подрасслоения, с естественными модификациями. Ради полноты изложения приведем точную формулировку. Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – векторное расслоение с типичным слоем F , и пусть S – подмногообразие многообразия E , а G – подпространство векторного пространства F . Более того, пусть у каждой точки $q \in B$ существует открытая окрестность $U \subset B$ такая, что прообраз $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$,

а сужение прообраза $\pi^{-1}(U) \cap S \simeq U \times G$. Пусть $\iota: S \rightarrow E$ – каноническая инъекция подмногообразия S в многообразие E . Положим $\pi_S = \pi \circ \iota: S \rightarrow B$ – сужение проекции π с E на S . Тройка $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ является гладким расслоением с типичным слоем G , которое называется *векторным подрасслоением* расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. В этом случае коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota} & E \\ \pi_S \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\text{id}} & B \end{array}$$

т.е. пара $\iota: S \rightarrow E$, $\text{id}: B \rightarrow B$ является морфизмом из векторного расслоения $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ в векторное расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$, причем структура подрасслоения на S однозначно определена этим свойством. Отождествление слоя $\pi_S^{-1}(q)$ с его каноническим образом $\iota(\pi_S^{-1}(q)) \subset \pi^{-1}(q)$ позволяет считать, что для всех $q \in B$ векторное пространство $\pi_S^{-1}(q)$ есть подпространство пространства $\pi^{-1}(q)$.

Отметим, что $\mathcal{C}^\infty(B)$ -модуль $\mathcal{F}(\pi_S)$ сечений подрасслоения $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ есть подмодуль $\mathcal{C}^\infty(B)$ -модуля $\mathcal{F}(\pi)$ сечений расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$.

Обратный образ в категории векторных расслоений определяются теми же правилами, что и в случае гладких расслоений.

2.3. Касательные и кокасательные поля

2.3.1. Гладкие функции, подробнее. Пусть M – гладкое многообразие. Пусть $\mathcal{C}^\infty(M)$ – алгебра всех гладких функций на M , наделенная естественной топологией равномерной сходимости вместе с частными производными всех порядков на компактных подмножествах из M . *Носитель* $\text{supp}(f)$ функции $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ определяется как наименьшее замкнутое подмножество из M , вне которого $f = 0$ (другими словами, $\text{supp}(f)$ есть замыкание множества точек $q \in M$ для которых $f(q) \neq 0$). Будем считать, что топологическое пространство M достаточно хорошее (например, *нормальное*, см. [30]), так что множество $\mathcal{C}^\infty(M)$ достаточно большое. В частности, будем предполагать, что для

любых компакта K и открытого подмножества U , $K \subset U \subset M$, существует функция $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ такая, что $\varphi = 1$ на K , $\varphi = 0$ вне U . Также будем считать, что для каждого открытого покрытия пространства M существует гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию.

Алгебра $\mathcal{C}^\infty(M)$ есть алгебра всех глобально определенных гладких функций на многообразии M . Наряду с ней для каждого открытого подмножества $U \subset M$ (открытого подмногообразия!) имеется алгебра $\mathcal{C}^\infty(U)$ – алгебра всех локально определенных гладких функций на M . Очевидно, $\mathcal{C}^\infty(U)$ есть $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль для любого открытого $U \subset M$. Далее, для каждой пары открытых подмножеств $V \subset U \subset M$ определено сужение

$$\varrho_V^U: \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V), \quad f \mapsto \varrho_V^U(f) = f|_V,$$

морфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей, причем выполняются стандартные аксиомы

- ★ $\varrho_U^U = \text{id}$ для любого открытого $U \subset M$
- ★ $\varrho_W^V \circ \varrho_V^U = \varrho_W^U$ для любых открытых $W \subset V \subset U \subset M$.

Для точки $p \in M$ обозначим через $\mathcal{U}(p) = \{U \in M \mid p \in U\}$ семейство всех ее открытых окрестностей. Множество $\mathcal{U}(p)$ частично упорядочено по включению $V \subset U$. Более того, оно является направленностью по убыванию (см. с. 40), поскольку для любых $U, V \in \mathcal{U}(p)$ пересечение $U \cap V \in \mathcal{U}(p)$. Рассмотрим семейство $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей

$$\{\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{\varrho_V^U} \mathcal{C}^\infty(V) \mid U, V \in \mathcal{U}(p), U \supset V\}$$

В силу приведенных выше свойств сужений оно будет индуктивно направленным (подчеркнем, что семейство $\mathcal{U}(p)$ – направленность по убыванию), его индуктивный предел обозначается через

$$\mathcal{C}^\infty(p) = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathcal{C}^\infty(U)$$

и называется множеством *ростков* гладких функций в точке $p \in M$. Подробнее, в объединении $\bigcup_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathcal{C}^\infty(U)$ функции $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ и $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $U, V \in \mathcal{U}(p)$, считаются эквивалентными, если сужения $f|_W = g|_W$ для некоторого $W \in \mathcal{U}(p)$, $W \subset U \cap V$. По определению росток $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(p)$ есть класс эквивалентности

некоторой функции $f \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}(p)} C^\infty(U)$. Отметим, что у каждого ростка $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ есть *глобальный* представитель $f \in C^\infty(M)$ (короче, пересечение $\mathbf{f} \cap C^\infty(M) \neq \emptyset$ для всякого $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$, доказать это!). Совсем упрощая ситуацию, говорят, что функция f гладкая в точке p , если она гладкая в некоторой окрестности этой точки. Построенный таким образом $C^\infty(M)$ -модуль $C^\infty(p)$ есть унитарная ассоциативная коммутативная алгебра со следующими операциями: пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)$, выберем $f \in \mathbf{f}$, $f \in C^\infty(U)$, $g \in \mathbf{g}$, $g \in C^\infty(V)$, $U, V \in \mathcal{U}(p)$, и определим $\alpha \cdot \mathbf{f} + \beta \cdot \mathbf{g}$ как класс эквивалентности функции $\alpha \cdot f|_W + \beta \cdot g|_W \in C^\infty(W)$, а $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ как класс эквивалентности функции $f|_W \cdot g|_W \in C^\infty(W)$, где $W = U \cap V \in \mathcal{U}(p)$.

2.3.2. Дифференцирования. Непрерывное линейное отображение $\xi: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ (эндоморфизм категории векторных топологических пространств) называется *дифференцированием* алгебры $C^\infty(M)$, если оно удовлетворяет *правилу Лейбница*

$$\xi(f \cdot g) = \xi(f) \cdot g + f \cdot \xi(g) \quad \text{для всех } f, g \in C^\infty(M).$$

Обозначим через $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(C^\infty(M))$ множество всех дифференцирований алгебры $C^\infty(M)$. Очевидно, $\mathfrak{D}(M)$ – линейное пространство над $\mathbb{F}$. Более того, $\mathfrak{D}(M)$ – модуль над алгеброй $C^\infty(M)$, где $(\varphi \cdot \xi)(f) = \varphi \cdot \xi(f)$ для всех $\varphi, f \in C^\infty(M)$, $\xi \in \mathfrak{D}(M)$, поскольку

$$\begin{aligned} (\varphi \cdot \xi)(f \cdot g) &= \varphi \cdot (\xi(f \cdot g)) = \varphi \cdot (\xi(f) \cdot g + f \cdot \xi(g)) \\ &= \varphi \cdot \xi(f) \cdot g + f \cdot \varphi \cdot \xi(g) = (\varphi \cdot \xi)(f) \cdot g + f \cdot (\varphi \cdot \xi)(g) \end{aligned}$$

для всех $f, g \in C^\infty(M)$. Другая важная алгебраическая структура на линейном пространстве $\mathfrak{D}(M)$ есть структура алгебры Ли с коммутатором в качестве скобки Ли

$$[\xi, \eta] = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi \quad \text{для всех } \xi, \eta \in \mathfrak{D}(M).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} [\xi, \eta](f \cdot g) &= \xi(\eta(f) \cdot g + f \cdot \eta(g)) - \eta(\xi(f) \cdot g + f \cdot \xi(g)) \\ &= (\xi(\eta(f)) \cdot g + \eta(f) \cdot \xi(g) + \xi(f) \cdot \eta(g) + f \cdot \xi(\eta(g))) \\ &\quad - (\eta(\xi(f)) \cdot g + \xi(f) \cdot \eta(g) + \eta(f) \cdot \xi(g) + f \cdot \eta(\xi(g))) \\ &= ([\xi, \eta](f)) \cdot g + f \cdot ([\xi, \eta](g)) \quad \text{для всех } f, g \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Обратим внимание, что композиция двух дифференцирований не является дифференцированием.

Отметим, что $\xi(1) = 0$ для любого дифференцирования $\xi \in \mathfrak{D}(M)$, где $1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $1(p) = 1$ для всех $p \in M$, поскольку

$$\xi(1) = \xi(1 \cdot 1) = \xi(1) \cdot 1 + 1 \cdot \xi(1) = 2\xi(1).$$

2.3.3. Локальность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.1. *Каждое дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ есть локальный эндоморфизм пространства $\mathcal{C}^\infty(M)$, т.е.*

$$\text{supp}(\xi(f)) \subset \text{supp}(f) \quad \text{для всех } f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \mathfrak{D}(M)$. Пусть $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ и $p \notin \text{supp}(f)$. Найдется функция $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ такая, что $\varphi(p) = 0$ и $\varphi = 1$ на $\text{supp}(\xi)$. Тогда

$$\xi(f)(p) = \xi(\varphi \cdot f)(p) = \xi(\varphi)(p) \cdot f(p) + \varphi(p) \cdot \xi(f)(p) = 0$$

и, значит,

$$\text{supp}(\xi(f)) \subset \text{supp}(f)$$

в силу произвольности точки $p \notin \text{supp}(f)$.

Для каждого открытого $U \subset M$ определено множество $\mathfrak{D}(U)$ дифференцирований алгебры $\mathcal{C}^\infty(U)$ со структурой $\mathcal{C}^\infty(U)$ -модуля (и в частности, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуля) и алгебры Ли.

Пусть $\{U, \phi\} = \{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M ,

$$q \mapsto \phi(q) = x, \quad \phi(q) = (\phi^1(q), \dots, \phi^m(q)), \quad x = (x^1, \dots, x^m).$$

Для упрощения записи будем писать $f(x)$ вместо $(f \circ \phi^{-1})(x)$ и $\xi(f)(x)$ вместо $(\xi(f) \circ \phi^{-1})(x)$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ и $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ (так что следует отличать точку $q \in U$ от координатного столбца $x \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$, а функции $f(q), \xi(f)(q) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ от функций $f(x), \xi(f)(x) \in \mathcal{C}^\infty(\phi(U))$).

Пусть $\xi \in \mathfrak{D}(U)$, положим

$$z^\mu(x) = \xi(\phi^\mu)(x) \in \mathcal{C}^\infty(\phi(U)), \quad 1 \leq \mu \leq m, \quad x \in \phi(U),$$

где $\phi^\mu = \phi^\mu(q) = x^\mu \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Тогда с помощью правила Лейбница для каждого монома $x^i = (x^1)^{i_1} \dots (x^m)^{i_m}$, где $x^\mu = \phi^\mu(q)$,

$1 \leq \mu \leq m$, и мультииндекс $i = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, получим

$$\begin{aligned}\xi(x^i)(x) &= \sum_{1 \leq \mu \leq m} z^\mu(x) i_\mu (x^1)^{i_1} \dots (x^\mu)^{i_\mu - 1} \dots (x^m)^{i_m} \\ &= \sum_{1 \leq \mu \leq m} z^\mu(x) \partial_{x^\mu} x^i \quad \text{для всех } x = \phi(q) \in \phi(U),\end{aligned}$$

где $\partial_{x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ — частные производные по переменной x^μ , $1 \leq \mu \leq m$. По линейности получаем

$$\xi(P(x))(x) = \sum_{1 \leq \mu \leq m} z^\mu(x) \partial_{x^\mu} P(x) \quad \text{для любого многочлена } P(x).$$

В силу непрерывности отображения $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ и плотности многочленов в алгебре $\mathcal{C}^\infty(\phi(U))$ отсюда следует, что

$$\xi(f)(x) = \sum_{1 \leq \mu \leq m} z^\mu(x) \partial_{x^\mu} f(x) \quad \text{для всех } f \in \mathcal{C}^\infty(U), x \in \phi(U).$$

Эти рассуждения приводят к следующим двум утверждениям.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.2. *Для каждого открытого множества $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^m$ множество $\mathfrak{D}(\mathcal{O})$ состоит из всех однородных дифференциальных операторов первого порядка вида*

$$\xi = \sum_{1 \leq \mu \leq m} z^\mu \partial_{x^\mu} = z \cdot \partial_x,$$

где

$$z = (z^1, \dots, z^m) \in \times^m \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}), \quad \partial_x = (\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}) \in \times^m \mathfrak{D}(\mathcal{O}),$$

так что, в частности, $\mathfrak{D}(\mathcal{O})$ есть свободный m -мерный $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ -модуль с базисом $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}\} \subset \mathfrak{D}(\mathcal{O})$. Скобка Ли в алгебре Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{O})$ вычисляется по правилу $[\xi, \eta] = \varrho$, где

$$\begin{aligned}\varrho &= r \cdot \partial_x, \quad r^\mu = [\xi, \eta]^\mu = \xi(y^\mu) - \eta(z^\mu), \quad 1 \leq \mu \leq m, \\ &\text{для всех } \xi = z \cdot \partial_x, \quad \eta = y \cdot \partial_x \in \mathfrak{D}(\mathcal{O}).\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По существу, описание множества $\mathfrak{D}(\mathcal{O})$ следует из предшествующих построений, а алгебраическая часть легко проверяется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.3. Для каждой карты

$$\{U, \phi\}, \quad q \mapsto \phi(q) = (\phi^1, \dots, \phi^m),$$

гладкого многообразия M правило

$$\xi \mapsto \sum_{1 \leq \mu \leq m} z^\mu \partial_{x^\mu}, \quad z^\mu = \xi(\phi^\mu) \circ \phi^{-1}, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

задает изоморфизм алгебр Ли

$$\mathfrak{D}(U) \simeq \mathfrak{D}(\phi(U)).$$

Кроме того, множество $\mathfrak{D}(U)$ есть свободный m -мерный $\mathcal{C}^\infty(U)$ -модуль с базисом $\{\partial_1, \dots, \partial_m\} \subset \mathfrak{D}(U)$, где положено $\partial_\mu f = \partial_{x^\mu}(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi$ для всех $1 \leq \mu \leq m$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Скобка Ли

$$[\xi, \eta] = \varrho \in \mathfrak{D}(U)$$

дифференцирований $\xi = \sum z^\mu \partial_\mu, \eta = \sum y^\mu \partial_\mu \in \mathfrak{D}(U)$ вычисляется по правилу

$$\varrho = \sum r^\mu \partial_\mu, \quad \text{где} \quad r^\mu = [\xi, \eta]^\mu = \xi(y^\mu) - \eta(z^\mu), \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять надо проверить только алгебраическую часть утверждения, что предлагается проделать в качестве полезного упражнения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Глобально $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль $\mathfrak{D}(M)$ может и не быть свободным, поскольку базисные дифференцирования $\partial_1, \dots, \partial_m$ определены лишь в локальных картах.

Для каждой пары открытых подмножеств $V \subset U \subset M$ определим сужение

$$r_V^U: \mathfrak{D}(U) \rightarrow \mathfrak{D}(V), \quad \xi \mapsto r_V^U(\xi) = \xi|_V$$

следующим образом. Пусть функция $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Для произвольной точки $p \in V$, выберем окрестность $W \in \mathcal{U}(p)$ с компактным замыканием $\bar{W} \subset V$ и функцию $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ такую, что $\text{supp}(\phi) \subset V$ и $\phi|_W = 1$. Тогда $\phi \cdot f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ и $(\phi \cdot f)|_W = f|_W$. Положим $(\xi|_V)(f)(p) = \xi(\phi \cdot f)(p)$. С помощью предложения 2.3.1 легко проверяется, что значение $\xi(\phi \cdot f)(p) \in \mathbb{F}$ не зависит от

выбора окрестности W и вспомогательной функции ϕ , и что построенная таким образом функция $(\xi|_V)(f)$ на V гладкая, т.е. $(\xi|_V)(f) \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Также легко проверяется, что r_V^U – морфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей и что

- ★ $r_U^U = \text{id}$ для любого открытого $U \subset M$
- ★ $r_W^U \circ r_V^U = r_W^U$ для любых открытых $W \subset V \subset U \subset M$.

В частности, для каждой точки $p \in M$ семейство $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей

$$\{\mathfrak{D}(U) \xrightarrow{r_V^U} \mathfrak{D}(V) \mid U, V \in \mathcal{U}(p), U \supset V\}$$

индуктивно направленное, его индуктивный предел обозначается через

$$\mathfrak{D}(p) = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathfrak{D}(U)$$

и называется множеством *ростков* дифференцирований в точке p . Подробнее, в объединении $\bigcup_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathfrak{D}(U)$ дифференцирования $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ и $\eta \in \mathfrak{D}(V)$, $U, V \in \mathcal{U}(p)$, считаются эквивалентными, если совпадают сужения $\xi|_W = \eta|_W$ для некоторого $W \in \mathcal{U}(p)$, $W \subset U \cap V$. По определению росток $\xi \in \mathfrak{D}(p)$ есть класс эквивалентности некоторого дифференцирования $\xi \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathfrak{D}(U)$. Опять, у каждого ростка $\xi \in \mathfrak{D}(p)$ есть *глобальный* представитель $\xi \in \xi \cap \mathfrak{D}(M)$. Множество $\mathfrak{D}(p)$ наследует из объединения $\bigcup_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathfrak{D}(U)$ структуры $\mathcal{C}^\infty(p)$ -модуля и алгебры Ли. Легко проверяется (проделать это!), что для любых ростков $\xi \in \mathfrak{D}(p)$ и $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(p)$ определено действие $\xi(\mathbf{f}) = \eta$ правилом $\eta = \xi(f)$, где $\xi \in \xi \cap \mathfrak{D}(M)$, $f \in \mathbf{f} \cap \mathcal{C}^\infty(M)$ – произвольные глобальные представители соответствующих ростков. Более того, это правило осуществляет изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{D}(p)$ и алгебры Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{C}^\infty(p)$.

2.3.4. Касательное расслоение. Всюду в этом разделе поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Касательный вектор X_p в точке $p \in M$ есть непрерывный линейный функционал на $\mathcal{C}^\infty(p)$ ($X_p \in (\mathcal{C}^\infty(p))^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(p), \mathbb{R})$), удовлетворяющий остаточному правилу Лейбница

$$X_p(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{g}_p) = X_p(\mathbf{f}_p) \cdot \mathbf{g}_p(p) + \mathbf{f}_p(p) \cdot X_p(\mathbf{g}_p) \quad \text{для всех } \mathbf{f}_p, \mathbf{g}_p \in \mathcal{C}^\infty(p),$$

(заметим, что для каждого ростка $\mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p)$ величина $\mathbf{f}_p(p)$ определена как общее значение в точке p всех представителей $f \in \mathbf{f}_p$). Множество всех касательных векторов в точке $p \in M$ обозначается через $T_p M$.

ПРИМЕР 2.3.1. Пусть $\gamma: I \rightarrow M$ – гладкая кривая на M , где интервал $I \subset \mathbb{R}$. Касательный вектор $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$, $t \in I$, определяется равенством

$$\dot{\gamma}(t)(\mathbf{f}_{\gamma(t)}) = \left. \frac{d}{d\tau} f(\gamma(\tau)) \right|_{\tau=t} \quad \text{для всех } \mathbf{f}_{\gamma(t)} \in \mathcal{C}^\infty(\gamma(t)), f \in \mathbf{f}_{\gamma(t)}.$$

С помощью предложения 2.3.1 легко проверить, что каждое дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ для каждой точки $p \in M$ определяет касательный вектор $X_p = \widehat{\xi}_p \in T_pM$ по правилу

$$X_p(\mathbf{f}_p) = \xi(f)(p) \quad \text{для всех } \mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p),$$

где $f \in \mathbf{f}_p \cap \mathcal{C}^\infty(M)$ – произвольный глобальный представитель ростка $\mathbf{f}_p$. Более того, если два дифференцирования $\xi, \eta \in \mathfrak{D}(M)$, совпадают в некоторой окрестности точки $p \in M$, т.е. $\xi|_W = \eta|_W$, для некоторого $W \in \mathcal{U}(p)$, то соответствующие касательные векторы тоже совпадают, т.е. $\widehat{\xi}_p = \widehat{\eta}_p$. Отсюда следует, что каждый росток $\xi_p \in \mathfrak{D}(p)$, $p \in M$, порождает касательный вектор $X_p = \widehat{\xi}_p \in T_pM$ по правилу

$$X_p(\mathbf{f}_p) = \xi_p(\mathbf{f}_p)(p) \quad \text{для всех } \mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p).$$

Можно доказать и обратное, что каждый касательный вектор порождается некоторым ростком дифференцирования (фактически, это будет следовать из дальнейших построений).

Легко проверяется, что множество T_pM есть подпространство векторного пространства $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(p), \mathbb{R})$. Векторное пространство T_pM называется *касательным пространством* в точке $p \in M$.

Положим $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ и определим проекцию $\pi: TM \rightarrow M$ правилом

$$X_p \mapsto \pi(X_p) = p \quad \text{для всех } X_p \in TM,$$

так что для всякой точки $p \in M$ слой $\pi^{-1}(p) = T_pM$ есть векторное пространство.

Определим на множестве TM гладкую структуру, используя локальные карты гладкого многообразия M .

Обратимся к отображению $TM \xrightarrow{\pi} M$. Пусть $\pi^{-1}(p) = T_pM$ – слой над точкой $p \in M$ и $\{U, \phi\}$ – карта на M , причем

$U \in \mathcal{U}(p)$. Пусть вектор $X_p \in T_p M$. Каждый класс эквивалентности $\mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p)$ имеет представитель $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, так что здесь $X_p(\mathbf{f}_p) = X_p(f)$, а остаточное правило Лейбница имеет вид

$$X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g) \quad \text{для всех } f, g \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Слегка модифицировав рассуждения, проведенные выше для дифференцирований, приходим к выводу, что

$$X_p(\mathbf{f}_p) = \sum_{1 \leq \mu \leq m} z_p^\mu \cdot (\partial_{p,\mu} \mathbf{f}_p) = (z_p \cdot \partial_p)(\mathbf{f}_p) \quad \text{для всех } \mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p),$$

где

$$\begin{aligned} z_p &= (z_p^1, \dots, z_p^m) \in \times^m \mathbb{R} = \mathbb{R}^m, \\ \partial_p &= (\partial_{p,1}, \dots, \partial_{p,m}) \in \times^m T_p M, \end{aligned}$$

компоненты $z_p^\mu = X_p(\phi^\mu)$, $\partial_{p,\mu} \mathbf{f}_p$ — частные производные по x^μ представителя $f \in \mathbf{f}_p$, $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\phi(U))$, вычисленные в точке $x = \phi(p)$ (очевидно, результат вычислений не зависит от выбора представителя), $1 \leq \mu \leq m$.

Эти рассуждения приводят к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.4. *Для каждой точки $p \in M$ касательное пространство $T_p M$ имеет структуру вещественного m -мерного пространства, причем каждая карта $\{U, \phi\}$, $U \in \mathcal{U}(p)$, задает базис*

$$\partial_p = \{\partial_{p,1}, \dots, \partial_{p,m}\} \subset T_p M,$$

а разложение по этому базису имеет вид

$$X_p = \sum_{1 \leq \mu \leq m} z_p^\mu \partial_{p,\mu} = z_p \cdot \partial_p, \quad z_p^\mu = X_p(\phi^\mu), \quad \text{для всех } X_p \in T_p M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По существу следует лишь еще раз проверить корректность приведенных выше построений, что полезно проделать в качестве упражнения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что каждый слой $T_p M$, будучи конечномерным векторным пространством, обладает естественной евклидовой топологией.

Каждой паре $(\{U, \phi\}, \mathcal{O})$, где $\{U, \phi\} = \{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ карта на M , $\mathcal{O}$ — открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^m$,

поставим в соответствие множество $\{X_p \in TM \mid p \in U, X_p \in \mathcal{O}\}$, где запись $X_p \in \mathcal{O}$ означает, что в разложении $X_p = z_p \cdot \partial_p$ компонентный вектор $z_p \in \mathcal{O}$. Приняв эти множества в качестве базиса, определим на множестве TM отделимую топологию.

Каждой карте $\{U, \phi\}$ многообразия M поставим в соответствие карту $\{\widehat{U}, \widehat{\phi}\}$ на топологическом пространстве TM , где открытое множество $\widehat{U} = \pi^{-1}(U)$, а непрерывное отображение $\widehat{\phi}: \widehat{U} \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ определено правилом

$$X_p \mapsto \widehat{\phi}(X_p) = (\phi(p), z_p) \quad \text{для всех } X_p \in \widehat{U},$$

где z_p – компонентный вектор касательного вектора X_p в базисе $\partial_p \subset T_p M$.

Проверим, что если карты $\{U, \phi\}$ и $\{V, \psi\}$, $U \cap V \neq \emptyset$, гладко согласованы на M , то индуцированные карты $\{\widehat{U}, \widehat{\phi}\}$ и $\{\widehat{V}, \widehat{\psi}\}$ гладко согласованы на TM . Итак, пусть

$$X_p \in \widehat{U} \cap \widehat{V} = \pi^{-1}(U \cap V) \neq \emptyset.$$

Тогда

$$\widehat{\phi}(X_p) = (\phi(p), z_p^\phi) \quad \text{и} \quad \widehat{\psi}(X_p) = (\psi(p), z_p^\psi)$$

(индексы ϕ, ψ указывают в каких координатах вычислен компонентный вектор). Здесь

$$y = \psi(p) = \psi(\phi^{-1}(x)) = y(x) \quad \text{и} \quad x = \phi(p) = \phi(\psi^{-1}(y)) = x(y)$$

суть гладкие функции согласно определению согласованных карт на M . В свою очередь, имеем два представления

$$X_p = z_p^\phi \cdot \partial_p^\phi = z_p^\psi \cdot \partial_p^\psi,$$

где z_p^ϕ, z_p^ψ – компонентные векторы касательного вектора X_p в соответствующих картах. Согласно правилам замены переменных

$$\begin{aligned} \partial_{p,\mu}^\phi &= \partial_{y^\mu}|_p = \sum_{1 \leq \nu \leq m} \partial_{x^\mu} y^\nu|_p \cdot \partial_{y^\nu}|_p = \sum_{1 \leq \nu \leq m} \partial_{x^\mu} y^\nu|_p \cdot \partial_{p,\nu}^\psi, \\ 1 &\leq \mu \leq m, \end{aligned}$$

или

$$\partial_p^\phi = \|\partial_x y|_p\| \cdot \partial_p^\psi, \quad \text{откуда} \quad z_p^\psi = \|\partial_x y|_p\| \cdot z_p^\phi,$$

где $\|\partial_x y|_p\|$ – матрица Якоби перехода от переменных $(x^1, \dots, x^m)$ к переменным $(y^1, \dots, y^m)$. Она имеет гладкие коэффициенты и ее детерминант (якобиан) $\det\|\partial_x y|_p\| \neq 0$ по определению согласованных карт на M . Аналогичным образом,

$$\partial_p^\psi = \|\partial_y x|_p\| \cdot \partial_p^\phi, \quad \text{откуда} \quad z_p^\phi = \|\partial_y x|_p\| \cdot z_p^\psi,$$

где $\|\partial_y x|_p\|$ – матрица Якоби перехода от переменных $(y^1, \dots, y^m)$ к переменным $(x^1, \dots, x^m)$. В частности, отсюда следует, что карты $\{\widehat{U}, \widehat{\phi}\}$ и $\{\widehat{V}, \widehat{\psi}\}$ гладко согласованы на TM .

Подведем итоги. На отделимом топологическом пространстве TM определена гладкая структура, превращающая его в гладкое многообразие. Легко проверяется, что проекция $\pi: TM \rightarrow M$ есть гладкое сюръективное отображение. Имеет место локальная тривиализация: каждой карте $\{U, \phi\}$ на многообразии M поставлена в соответствие карта $\{\widehat{U}, \widehat{\phi}\}$ на многообразии TM , осуществляющая изоморфизм открытого множества $\widehat{U} = \pi^{-1}(U)$ на прямое произведение $U \times \mathbb{R}^m$. Другими словами, построено гладкое расслоение $TM = \{TM \xrightarrow{\pi} M\}$ с типичным слоем $\mathbb{R}^m$. Более того, для каждой точки $p \in M$ слой $\pi^{-1}(p) = T_p M$ есть вещественное m -мерное векторное пространство, очевидно изоморфное в категории линейных пространств пространству $\mathbb{R}^m$. Следовательно, *расслоение TM есть векторное расслоение с типичным слоем $\mathbb{R}^m$* . Оно называется *касательным расслоением гладкого многообразия M* .

Гладкие сечения расслоения TM называются *касательными векторными полями* на многообразии M . Множество всех касательных векторных полей на многообразии M обозначается через $\mathfrak{T}(M)$. Как множество сечений векторного расслоения оно является модулем над алгеброй $\mathcal{C}^\infty(M)$.

По построению каждое дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ порождает касательное векторное поле $X \in \mathfrak{T}(M)$, $X: M \rightarrow TM$, по правилу

$$p \mapsto X_p \in T_p M, \quad X_p(\mathbf{f}_p) = \xi(f)(p) \quad \text{для всех } p \in M, \quad \mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p),$$

где $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ – представитель ростка $\mathbf{f}_p$. Легко проверяется (следует проделать это в качестве упражнения), что фактически это правило определяет изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей, причем обратный морфизм $\mathfrak{T}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$, $X \mapsto \xi$, задается правилом

$$\xi(f)(p) = X_p(\mathbf{f}_p) \quad \text{для всех } f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad p \in M,$$

где $\mathbf{f}_p \in C^\infty(p)$ есть росток функции f в точке p , а $X_p = X(p) \in T_p M$ есть значение сечения X в той же точке p .

Таким образом, установлено следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.5. *Имеется естественный изоморфизм $C^\infty(M)$ -модулей*

$$\tau: \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{T}(M), \quad \xi \mapsto X = \tau(\xi),$$

где $X_p(\mathbf{f}_p) = \xi(f)(p)$ для всех $p \in M$ и $\mathbf{f}_p \in C^\infty(p)$, $f \in C^\infty(M)$ – представитель ростка $\mathbf{f}_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ. По построению $C^\infty(M)$ -модуль $\mathfrak{D}(M)$ обладает дополнительной структурой алгебры Ли. Установленный только что изоморфизм переносит эту структуру на $C^\infty(M)$ -модуль $\mathfrak{T}(M)$. Именно,

$$[X, Y] = \tau([\tau^{-1}(X), \tau^{-1}(Y)]) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{T}(M).$$

Более того, на практике можно считать, что дифференцирования и касательные поля это различные описания одного и того же объекта.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Согласно предложению 2.3.3 $C^\infty(U)$ -модуль $\mathfrak{D}(U)$ свободный с базисом $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$, каждое дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ однозначно записывается в виде

$$\xi = \sum z^\mu \cdot \partial_\mu, \quad z^\mu = \xi(\phi^\mu) \in C^\infty(U), \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

С другой стороны, каждое локальное сечение $X \in \mathfrak{T}(U)$, $X: U \rightarrow TU$, имеет вид $p \mapsto X_p \in T_p U$, где

$$X_p = \sum z_p^\mu \cdot \partial_{p,\mu}, \quad z_p^\mu \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

$\{\partial_{p,1}, \dots, \partial_{p,m}\}$ – базисы в $T_p U$ (см. предложение 2.3.4). Следовательно, $C^\infty(U)$ -модуль $\mathfrak{T}(U)$ также свободный с базисом $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$, где

$$\sigma_\mu: U \rightarrow TU, \quad p \mapsto \partial_{p,\mu}, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

сечение $X \in \mathfrak{T}(U)$ однозначно записывается в виде

$$X = \sum z^\mu \cdot \sigma_\mu, \quad z^\mu \in C^\infty(U), \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

Таким образом, изоморфизм $\tau: \mathfrak{D}(U) \simeq \mathfrak{T}(U)$ сводится к отождествлению базиса $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ с базисом $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ (если точно, то к правилу $\tau(\partial_\mu) = \sigma_\mu$, $1 \leq \mu \leq m$).

Пусть $\xi \in \mathfrak{D}(U)$, где U – открытое подмножество многообразия M . Говорят, что $\xi = 0$ на открытом подмножестве $V \subset U$, если выполняется одно (а значит, и остальные) из следующих эквивалентных условий:

- * $\xi(f) = 0$ для любой $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $\text{supp}(f) \subset V$;
- * $\xi|_V = 0$;
- * $X|_V = 0$, где $X = \tau(\xi)$ – касательное векторное поле, порожденное дифференцированием ξ .

Соответственно, *носитель* дифференцирования $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ определяется как наименьшее замкнутое множество $\text{supp}(\xi) \subset U$, вне которого $\xi = 0$.

Пусть M, N – гладкие многообразия. Каждое гладкое отображение $\Phi: M \rightarrow N$ индуцирует морфизм алгебр

$$\Phi^*: \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \quad g \mapsto f = \Phi^*(g) = g \circ \Phi.$$

Этот морфизм для каждой пары точек $p \in M$, $q = \Phi(p) \in N$, определяет морфизм алгебр (для простоты используем то же самое обозначение)

$$\Phi^*: \mathcal{C}^\infty(q) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(p), \quad \mathbf{g}_q \mapsto \mathbf{f}_p = \Phi^*(\mathbf{g}_q)$$

(поясним, что росток $\mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p)$ есть класс эквивалентности функции $f = g \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$, где $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ есть произвольный представитель ростка $\mathbf{g}_q \in \mathcal{C}^\infty(q)$, $V \in \mathcal{U}(q)$, $U = \Phi^{-1}(V) \in \mathcal{U}(p)$). В свою очередь, это позволяет определить *касательное отображение*

$$\Phi_*: TM \rightarrow TN, \quad X_p \mapsto Y_q = \Phi_*(X_p) = X_p \circ \Phi^*,$$

подробнее, касательный вектор $X_p \in T_p M$ отображается в касательный вектор $Y_q \in T_q N$, $p \in M$, $q = \Phi(p) \in N$, где $Y_q(\mathbf{g}_q) = X_p(\Phi^*(\mathbf{g}_q))$ для всех $\mathbf{g}_q \in \mathcal{C}^\infty(q)$. В качестве упражнения, предлагается проверить, что такое отображение гладкое и что пара $M \xrightarrow{\Phi} N$, $TM \xrightarrow{\Phi_*} TN$ есть морфизм из касательного расслоения $TM \xrightarrow{\pi_M} M$ в касательное расслоение $TN \xrightarrow{\pi_N} N$. Следует также проверить, что таким образом определен ковариантный функтор из категории гладких многообразий в категорию векторных расслоений.

Пусть $\Phi: M \rightarrow N$ – гладкое отображение гладкого m -мерного многообразия M в гладкое n -мерное многообразие N , и пусть $\Phi_*: TM \rightarrow TN$ – его касательное отображение. Пусть вектор $X_p \in T_p M$, тогда его образ $Y_q = \Phi_*(X_p) \in T_q N$, $q = \Phi(p)$. Как было сказано выше для точки $p \in M$ существуют

- ★ карта $\{U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{R}^m\}$ на M , $p \in U$,
- ★ карта $\{V \xrightarrow{\psi} \psi(V) \subset \mathbb{R}^n\}$ на N , $\Phi(U) \subset V$,

такие, что

- ★ $y = \tilde{\Phi}(x)$ – гладкое отображение из $\phi(U)$ в $\psi(V)$, где $\tilde{\Phi} = \psi \circ \Phi \circ \phi^{-1}$.

Как было показано, карты $\{U, \phi\}$ и $\{V, \psi\}$ индуцируют карты $\{\hat{U}, \hat{\phi}\}$ и $\{\hat{V}, \hat{\psi}\}$ на касательных многообразиях, причем

- ★ $X_p \in \hat{U}$, $X_p = z_p \cdot \partial_p^\phi$, где $z_p \in \mathbb{R}^m$, а $\{\partial_{p,1}^\phi, \dots, \partial_{p,m}^\phi\}$ – базис в $T_p M$,
- ★ $Y_q \in \hat{V}$, $Y_q = u_q \cdot \partial_q^\psi$, где $u_q \in \mathbb{R}^n$, а $\{\partial_{q,1}^\psi, \dots, \partial_{q,n}^\psi\}$ – базис в $T_q N$.

По определению

$$Y_q(\mathbf{g}_q) = \sum_{1 \leq \nu \leq n} u_p^\nu \cdot \partial_{q,\nu}^\psi(\mathbf{g}_q) = X_p(\mathbf{f}_p) = \sum_{1 \leq \mu \leq m} z_p^\mu \cdot \partial_{p,\mu}^\phi(\mathbf{f}_p)$$

для всякого ростка $\mathbf{g}_q \in C^\infty(q)$, где $\mathbf{f}_p(x) = \mathbf{g}_q(y)|_{y=\tilde{\Phi}(x)}$. Следовательно,

$$\partial_{p,\mu}^\phi(\mathbf{f}_p) = \sum_{1 \leq \nu \leq n} \partial_{y^\nu} \mathbf{g}_q|_q \cdot \partial_{x^\mu} y^\nu|_p = \sum_{1 \leq \nu \leq n} (\partial_{x^\mu} \tilde{\Phi}^\nu|_p) \cdot \partial_{q,\nu}^\psi(\mathbf{g}_q),$$

откуда получаем формулу для касательного отображения в локальных координатах

$$u_q^\nu = \sum_{1 \leq \mu \leq m} (\partial_{x^\mu} \tilde{\Phi}^\nu|_p) \cdot z_p^\mu, \quad 1 \leq \nu \leq n.$$

Гладкое отображение $\Phi: M \rightarrow N$ в общем случае не приводит к какому-либо отображению модулей сечений $\mathfrak{T}(M) \rightarrow \mathfrak{T}(N)$. Можно лишь говорить, что два сечения $X \in \mathfrak{T}(M)$ и $Y \in \mathfrak{T}(N)$

Φ -согласованы, пишут $X \sim_{\Phi} Y$, если следующая диаграмма коммутативная

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\Phi_*} & TN \\ X \uparrow & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{\Phi} & N \end{array}$$

т.е. если $\Phi_* \circ X = Y \circ \Phi$ или, подробнее, $\Phi_*(X_p) = Y_q$ для всех $p \in M, q = \Phi(p) \in N$. Изоморфизмы $\mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{T}(M), \mathfrak{D}(N) \simeq \mathfrak{T}(N)$ переносят это понятие на дифференцирования. Именно, говорят что дифференцирования $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ и $\eta \in \mathfrak{D}(N)$ Φ -согласованы, пишут опять $\xi \sim_{\Phi} \eta$, если следующая диаграмма коммутативная

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\infty}(M) & \xleftarrow{\Phi^*} & \mathcal{C}^{\infty}(N) \\ \xi \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathcal{C}^{\infty}(M) & \xleftarrow{\Phi^*} & \mathcal{C}^{\infty}(N) \end{array}$$

т.е. если $\xi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \eta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.6. Пусть $\xi_i \in \mathfrak{D}(M), \eta_i \in \mathfrak{D}(N)$, причем $\xi_i \sim_{\Phi} \eta_i$, для $i = 1, 2$. Тогда коммутаторы $[\xi_1, \xi_2] \sim_{\Phi} [\eta_1, \eta_2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} (\xi_1 \circ \xi_2) \circ \Phi^* &= \xi_1 \circ (\xi_2 \circ \Phi^*) = \xi_1 \circ (\Phi^* \circ \eta_2) = (\xi_1 \circ \Phi^*) \circ \eta_2 \\ &= (\Phi^* \circ \eta_1) \circ \eta_2 = \Phi^* \circ (\eta_1 \circ \eta_2) \end{aligned}$$

и, значит, коммутаторы $[\xi_1, \xi_2]$ и $[\eta_1, \eta_2]$ Φ -согласованы.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1. Пусть $X_i \in \mathfrak{T}(M), Y_i \in \mathfrak{T}(N)$, причем $X_i \sim_{\Phi} Y_i$, для $i = 1, 2$. Тогда скобки Ли $[X_1, X_2] \sim_{\Phi} [Y_1, Y_2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно воспользоваться изоморфизмами $\mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{T}(M), \mathfrak{D}(N) \simeq \mathfrak{T}(N)$.

Пусть $\Phi: M \simeq N$ диффеоморфизм (изоморфизм категории гладких многообразий) и $\Phi^{-1}: N \simeq M$ — обратное отображение. Тогда правило Φ -согласования по каждому сечению $X \in \mathfrak{T}(M)$ однозначно определяет сечение $Y \in \mathfrak{T}(N)$ формулой

$$Y = \Phi_* \circ X \circ \Phi^{-1}.$$

Другими словами, в этом случае определен изоморфизм линейных пространств

$$\Phi_*: \mathfrak{T}(M) \simeq \mathfrak{T}(N), \quad X \mapsto Y = \Phi_*(X) = \Phi_* \circ X \circ \Phi^{-1},$$

так что

$$Y_q = \Phi_*(X_p) \quad \text{для всех} \quad q \in N, \quad p = \Phi^{-1}(q).$$

Изоморфизмы $\tau_M: \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{T}(M)$ и $\tau_N: \mathfrak{D}(N) \simeq \mathfrak{T}(N)$ переносят это правило на дифференцирования. Именно, каждое $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ отображается в $\eta = \tau_N^{-1}(\Phi_*(\tau_M(\xi))) \in \mathfrak{D}(N)$. Легко проверяется, что здесь $\eta = (\Phi^*)^{-1} \circ \xi \circ \Phi^*$ (обратим внимание, что $(\Phi^*)^{-1} = (\Phi^{-1})^*$). Таким образом, определен изоморфизм линейных пространств

$$\Phi_*: \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{D}(N), \quad \xi \mapsto \eta = \Phi_*(\xi) = (\Phi^*)^{-1} \circ \xi \circ \Phi^*$$

(ради простоты обозначений, мы используем один и тот же символ в родственных ситуациях).

Суммируем установленные результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.7. Пусть $\Phi: M \simeq N$ – диффеоморфизм. Тогда определены изоморфизмы алгебр Ли:

$$\star \quad \Phi_*: \mathfrak{T}(M) \simeq \mathfrak{T}(N), \quad X \mapsto Y = \Phi_*(X) = \Phi_* \circ X \circ \Phi^{-1};$$

$$\star \quad \Phi_*: \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{D}(N), \quad \xi \mapsto \eta = \Phi_*(\xi) = (\Phi^*)^{-1} \circ \xi \circ \Phi^*.$$

Пусть S и M – гладкие многообразия с касательными расслоениями $TS \xrightarrow{\pi_S} S$ и $TM \xrightarrow{\pi_M} M$. Пусть $\Phi: S \rightarrow M$ – гладкое отображение. Обозначим через $\{T_S M, \pi_S^0, \varphi\}$ обратный образ расслоения $TM \xrightarrow{\pi_M} M$ относительно отображения $\Phi: S \rightarrow M$ (см. с. 120, здесь положено $T_S M = S \times_M TM$, $\pi_S^0 = \pi_S$, $\varphi = \Phi_*$, индекс 0 добавлен для удобства). По построению $T_S M \xrightarrow{\pi_S^0} S$ есть векторное расслоение над S , причем существует единственное гладкое

отображение $\Phi_*^0: TS \rightarrow T_S M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 TS & \xrightarrow{\Phi_*} & TM \\
 \pi_S \downarrow & \searrow \Phi_*^0 & \nearrow \varphi \\
 & T_S M & \\
 \downarrow \pi_S^0 & \nearrow \pi_S^0 & \downarrow \pi_M \\
 S & \xrightarrow{\Phi} & M
 \end{array}$$

Учитывая большое количество стрелок этой диаграммы, выпишем правила по которым они действуют:

- ★ $\Phi: S \rightarrow M, p \mapsto q = \Phi(p)$,
- ★ $\pi_S: TS \rightarrow S, X_p \mapsto p$,
- ★ $\pi_M: TM \rightarrow M, Y_q \mapsto q$,
- ★ $\Phi_*: TS \rightarrow TM, X_p \mapsto Y_q = \Phi_*(X_p), q = \Phi(p)$,
- ★ $T_S M = \{(p, Y_q) \in S \times TM \mid q = \Phi(p)\}$,
- ★ $\pi_S^0: T_S M \rightarrow S, (p, Y_q) \mapsto p$,
- ★ $\varphi: T_S M \rightarrow TM, (p, Y_q) \mapsto Y_q$,
- ★ $\Phi_*^0: TS \rightarrow T_S M, X_p \mapsto (p, Y_q), Y_q = \Phi_*(X_p), q = \Phi(p)$.

Важный частный случай – многообразие S есть подмногообразие многообразия M . Здесь

- ★ $\Phi = \iota: S \rightarrow M$ – каноническое вложение, $p \mapsto p$ для всех $p \in S$,
- ★ $\Phi_* = \iota_*: TS \rightarrow TM, X_p \mapsto Y_p = X_p$, тоже каноническое вложение, так что можно считать, что $T_p S \subset T_p M$ для всех $p \in S$,
- ★ $T_S M = \{(p, Y_p) \in S \times TM\} = \{Y_p \in TM \mid p \in S\} = \bigcup_{p \in S} T_p M$,
- ★ $\pi_S^0: T_S M \rightarrow S, Y_p \mapsto p$,
- ★ $\varphi: T_S M \rightarrow TM, Y_p \mapsto Y_p$,
- ★ $\Phi_*^0 = \iota_*^0: TS \rightarrow T_S M, X_p \mapsto X_p$.

2.3.5. Кокасательное расслоение.

Пусть M – гладкое m -мерное многообразие, $TM \xrightarrow{\pi} M$ – его касательное расслоение. Для каждой точки $p \in M$ касательное векторное пространство $T_p M$ имеет дуальное (иначе, сопряженное или двойственное) m -мерное векторное пространство $T_p^* M = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p M, \mathbb{R})$, которое

называется *кокасательным пространством* в точке p . Элементы кокасательного пространства T_p^*M называются *кокасательными векторами*. Положим $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ и определим проекцию $\pi: T^*M \rightarrow M$ правилом

$$\omega_p \mapsto \pi(\omega_p) = p \quad \text{для всех } \omega_p \in T^*M.$$

Как и в случае касательного расслоения, определим на множестве T^*M гладкую структуру, используя локальные карты гладкого многообразия M . Пусть $\{U, \phi\} = \{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Для каждой точки $p \in U$ касательное пространство T_pM имеет базис $\partial_p = (\partial_{p,1}, \dots, \partial_{p,m})$, а дуальное кокасательное пространство T_p^*M имеет дуальный базис

$$d_p = (d_p^1, \dots, d_p^m), \quad d_p^\mu(\partial_{p,\nu}) = \delta_\nu^\mu, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m.$$

Соответственно, каждый кокасательный вектор $\omega_p \in T_p^*M$ имеет разложение

$$\omega_p = \sum_{1 \leq \mu \leq m} u_{p,\mu} d_p^\mu = u_p \cdot d_p, \quad u_{p,\mu} = \omega_p(\partial_{p,\mu}) \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

Каждой паре $(\{U, \phi\}, \mathcal{O})$, где $\{U, \phi\}$ – карта на M , $\mathcal{O}$ – открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, поставим в соответствие множество $\{\omega_p \in T^*M \mid p \in U, \omega_p \in \mathcal{O}\}$, где запись $\omega_p \in \mathcal{O}$ означает, что в разложении $\omega_p = u_p \cdot d_p$ компонентный ковектор $u_p = (u_{p,1}, \dots, u_{p,m}) \in \mathcal{O}$. Приняв эти множества в качестве базиса, определим на T^*M отделимую топологию.

Каждой карте $\{U, \phi\}$ многообразия M поставим в соответствие карту $\{\tilde{U}, \tilde{\phi}\}$ на топологическом пространстве T^*M , где открытое множество $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$, а непрерывное отображение $\tilde{\phi}: \tilde{U} \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ определено правилом

$$\omega_p \mapsto \tilde{\phi}(\omega_p) = (\phi(p), u_p) \quad \text{для всех } \omega_p \in \tilde{U},$$

где u_p – компонентный ковектор кокасательного вектора ω_p в базисе d_p . Проверим, что если карты $\{U, \phi\}$ и $\{V, \psi\}$, $U \cap V \neq \emptyset$, гладко согласованы на M , то индуцированные карты $\{\tilde{U}, \tilde{\phi}\}$ и $\{\tilde{V}, \tilde{\psi}\}$ гладко согласованы на T^*M . Итак, пусть

$$\omega_p \in \tilde{U} \cap \tilde{V} = \pi^{-1}(U \cap V) \neq \emptyset,$$

тогда

$$\tilde{\phi}(\omega_p) = (\phi(p), u_p^\phi) \quad \text{и} \quad \tilde{\psi}(\omega_p) = (\psi(p), u_p^\psi)$$

(индексы ϕ, ψ указывают, в каких координатах вычислен компонентный ковектор). Учитывая проведенные выше рассуждения для касательного расслоения, надо лишь выяснить, как преобразуются компонентные ковекторы. Имеем два представления

$$\begin{aligned} \omega_p &= u_p^\phi \cdot d_p^\phi = u_p^\psi d_p^\psi, \\ u_p^\phi &= (u_{p,1}^\phi, \dots, u_{p,m}^\phi), \quad u_p^\psi = (u_{p,1}^\psi, \dots, u_{p,m}^\psi) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Здесь

$$u_{p,\mu}^\phi = \omega_p(\partial_{p,\mu}^\phi) = \sum_{1 \leq \nu \leq m} \partial_{x^\mu} y^\nu|_p \cdot \omega_p(\partial_{p,\nu}^\psi) = \sum_{1 \leq \nu \leq m} \partial_{x^\mu} y^\nu|_p \cdot u_{p,\nu}^\psi,$$

откуда $u_p^\phi = \|\partial_x y|_p\| \cdot u_p^\psi$. Аналогичным образом выводим, что $u_p^\psi = \|\partial_y x|_p\| \cdot u_p^\phi$. Как и в случае касательного расслоения, отсюда следует, что карты $\{\tilde{U}, \tilde{\phi}\}$ и $\{\tilde{V}, \tilde{\psi}\}$ гладко согласованы на T^*M .

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим внимание, что в отличие от компонентных векторов (см. с. 132), компонентные ковекторы преобразуются с помощью обратных матриц Якоби.

Подведем итоги. На отдельном топологическом пространстве T^*M определена гладкая структура, превращающая его в гладкое многообразие. Легко проверяется, что проекция $\pi: T^*M \rightarrow M$ есть гладкое сюръективное отображение. Имеет место локальная тривиализация: каждой карте $\{U, \phi\}$ на многообразии M поставлена в соответствие карта $\{\tilde{U}, \tilde{\phi}\}$ на многообразии T^*M , осуществляющая изоморфизм открытого множества $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ на прямое произведение $U \times \mathbb{R}^m$. Другими словами, построено гладкое расслоение $T^*M = \{T^*M \xrightarrow{\pi} M\}$ с типичным слоем $\mathbb{R}^m$. Более того, для каждой точки $p \in M$ слой $\pi^{-1}(p) = T_p^*M$ есть вещественное m -мерное векторное пространство, очевидно изоморфное в категории линейных пространств пространству $\mathbb{R}^m$. Следовательно, *расслоение T^*M есть векторное расслоение с типичным слоем $\mathbb{R}^m$* . Оно называется *кокасательным расслоением гладкого многообразия M* . По построению векторное расслоение T^*M – *послойно дуальное* к векторному расслоению TM , т.е. слой T_p^*M есть векторное пространство, дуальное к векторному пространству слою T_pM для каждой точки $p \in M$.

Гладкие сечения расслоения T^*M называются *кокасательными векторными полями* на многообразии M . Множество всех кокасательных векторных полей на многообразии M обозначается через $\mathfrak{T}^*(M)$. Как множество сечений векторного расслоения оно является модулем над алгеброй $C^\infty(M)$.

Далее, $C^\infty(M)$ -модуль $\mathfrak{D}(M)$ имеет дуальный $C^\infty(M)$ -модуль

$$\Omega^1(M) = (\mathfrak{D}(M))^* = \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{D}(M), C^\infty(M))$$

– модуль дифференциальных 1-форм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.8. *Каждая 1-форма $\omega \in \Omega^1(M)$ есть локальное отображение, т.е.*

$$\text{supp}(\omega(\xi)) \subset \text{supp}(\xi) \quad \text{для всех } \xi \in \mathfrak{D}(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ и $p \notin \text{supp}(\xi)$. Тогда найдется функция $\varphi \in C^\infty(M)$ такая, что $\varphi(p) = 0$ и $\varphi = 1$ на $\text{supp}(\xi)$, откуда

$$\omega(\xi)(p) = \omega(\varphi \cdot \xi)(p) = \varphi(p) \cdot \omega(\xi)(p) = 0.$$

Каждой 1-форме $\omega \in \Omega^1(M)$ поставим в соответствие кокасательное поле $\tilde{\omega} \in \mathfrak{T}^*(M)$ по правилу

$$p \mapsto \tilde{\omega}_p \in T_p^*M, \quad \tilde{\omega}_p(X_p) = \omega(\xi)(p) \quad \text{для всех } p \in M, \quad X_p \in T_pM,$$

где дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ такое, что $X_p = \hat{\xi}_p$ (другими словами, $\xi \in \xi_p \cap \mathfrak{D}(M)$ – глобальный представитель роста дифференцирований ξ_p). В силу предложения 2.3.8 это правило корректное. Более того, это правило осуществляет изоморфизм $C^\infty(M)$ -модулей $\Omega^1(M)$ и $\mathfrak{T}^*(M)$, причем обратное отображение $\mathfrak{T}^*(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ задается правилом

$$\sigma \mapsto \omega, \quad \omega(\xi)(p) = \sigma_p(\hat{\xi}_p) \quad \text{для всех } \sigma \in \mathfrak{T}^*(M), \quad \xi \in \mathfrak{D}(M), \quad p \in M,$$

где $\sigma_p \in T_p^*M$ – значение сечения σ в точке p , $\hat{\xi}_p$ – касательный вектор в точке p , порожденный дифференцированием ξ . Гладкость возникающих здесь функций и сечений следует проверять локально, т.е. в соответствующих картах.

Наконец, $C^\infty(M)$ -модуль $\mathfrak{T}(M)$ также имеет дуальный $C^\infty(M)$ -модуль

$$(\mathfrak{T}(M))^* = \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{T}(M), C^\infty(M)),$$

очевидно изоморфный $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулю $\mathfrak{T}^*(M)$, изоморфизм задается поточечно: каждому кокасательному векторному полю $\sigma \in \mathfrak{T}^*(M)$ ставится в соответствие сечение $\tilde{\sigma} \in (\mathfrak{T}(M))^*$, где

$$\tilde{\sigma}(X)(p) = \sigma_p(X_p) \quad \text{для всех } X \in \mathfrak{T}(M), p \in M,$$

$\sigma_p \in T_p^*M$ – значение сечения σ в точке p , $X_p \in T_pM$ – значение сечения X в точке p .

Таким образом, установлено следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.9. *Имеются естественные изоморфизмы $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей*

$$\Omega^1(M) \simeq \mathfrak{T}^*(M) \simeq (\mathfrak{T}(M))^*.$$

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Согласно предложению 2.3.3 $\mathcal{C}^\infty(U)$ -модуль $\mathfrak{D}(U)$ – свободный с базисом $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$. Следовательно, дуальный $\mathcal{C}^\infty(U)$ -модуль $\Omega^1(U)$ тоже свободный с дуальным базисом

$$\{d^1, \dots, d^m\}, \quad d^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m,$$

каждая 1-форма $\omega \in \Omega^1(U)$ однозначно записывается в виде

$$\omega = \sum \omega_\mu \cdot d^\mu, \quad \omega_\mu \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

С другой стороны, каждое локальное сечение

$$\omega \in \mathfrak{T}^*(U), \quad \omega: U \rightarrow T^*U,$$

имеет вид $p \mapsto \omega_p \in T_p^*U$, где

$$\omega_p = \sum \omega_{p,\mu} \cdot d_p^\mu, \quad \omega_{p,\mu} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

$\{d_p^1, \dots, d_p^m\}$ – базисы в T_p^*U , $p \in U$. Следовательно, $\mathcal{C}^\infty(U)$ -модуль $\mathfrak{T}^*(U)$ тоже свободный с базисом $\{\sigma^1, \dots, \sigma^m\}$, где

$$\sigma^\mu: U \rightarrow T^*U, \quad p \mapsto d_p^\mu, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

сечение $\omega \in \mathfrak{T}^*(U)$ однозначно записывается в виде

$$\omega = \sum \omega_\mu \cdot \sigma^\mu, \quad \omega_\mu \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

Наконец, $\mathcal{C}^\infty(U)$ -модуль $(\mathfrak{T}(U))^*$, как дуальный к свободному $\mathcal{C}^\infty(U)$ -модулю $\mathfrak{T}(U)$, также свободный с базисом

$$\{s^1, \dots, s^m\}, \quad s^\mu(\sigma_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m,$$

дуальным к базису $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ модуля $\mathfrak{T}(U)$, так что каждый элемент $\omega \in (\mathfrak{T}(U))^*$ имеет однозначное представление

$$\omega = \sum \omega_\mu \cdot s^\mu, \quad \omega_\mu \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

В таких обозначениях изоморфизмы $\Omega^1(U) \simeq \mathfrak{T}^*(U) \simeq (\mathfrak{T}(U))^*$ сводятся к отождествлению базисов $\{d^1, \dots, d^m\}$, $\{\sigma^1, \dots, \sigma^m\}$ и $\{s^1, \dots, s^m\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На практике $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модули $\Omega^1(M)$, $\mathfrak{T}^*(M)$ и $(\mathfrak{T}(M))^*$ обычно отождествляют, считая их различными описаниями одного и того же объекта.

Пусть M, N – гладкие многообразия, $\Phi: M \rightarrow N$ – гладкое отображение (см. с. 135). *Кокасательное отображение*

$$\Phi^*: \mathfrak{T}^*(N) \rightarrow \mathfrak{T}^*(M)$$

задается правилом: сечению $\chi \in \mathfrak{T}^*(N)$ ставится в соответствие сечение $\omega = \Phi^*(\chi) = \chi \circ \Phi_* \in \mathfrak{T}^*(M)$, так что

$$\omega(X)(p) = \chi_q(Y_q) \quad \text{для всех } p \in M, X \in \mathfrak{T}(M),$$

где $q = \Phi(p)$, $Y_q = \Phi_*(X_p)$. Легко проверяется, что эти правила, в частности, определяют контравариантный функтор из категории гладких многообразий в категорию линейных пространств, где каждому гладкому многообразию ставится в соответствие линейное пространство (почему не модуль?) гладких сечений кокасательного расслоения, каждому гладкому отображению – соответствующее кокасательное отображение.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу предложения 2.3.9 кокасательное отображение определено и на 1-формах. Заметим, также что кокасательное отображение $\Phi^*: T^*N \rightarrow T^*M$ в общем случае не определено (сравни с касательным отображением, см. предложение 2.3.7).

2.3.6. Тензорные поля. Пусть M – гладкое многообразие, $\mathfrak{T}(M)$ – модуль гладких сечений касательного расслоения, $\mathfrak{T}^*(M)$ – модуль гладких сечений кокасательного расслоения (здесь и ниже в этом разделе термин “модуль” означает $C^\infty(M)$ -модуль). Обозначим

- ★ $\mathbf{T}_0^0(M) = \mathbf{T}^0(M) = \mathbf{T}_0(M) = C^\infty(M)$ – модуль скалярных полей (гладких функций) на M ,
- ★ $\mathbf{T}^r(M) = \mathbf{T}_0^r(M) = \bigotimes^r \mathfrak{T}(M)$ – модуль контравариантных тензорных полей степени $r \in \mathbb{N}$ на M ,
- ★ $\mathbf{T}_s(M) = \mathbf{T}_s^0(M) = \bigotimes^s \mathfrak{T}^*(M)$ – модуль ковариантных тензорных полей степени $s \in \mathbb{N}$ на M ,
- ★ $\mathbf{T}_s^r(M) = \mathbf{T}^r(M) \otimes \mathbf{T}_s(M)$ – модуль тензорных полей бистепени $(r, s) \in \mathbb{Z}_+^2$ на M
- ★ $\mathbf{T}(M) = \bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{T}_s^r(M)$ – тензорная алгебра полей на M

(здесь и ниже в этом разделе, если не указано противное, тензорные произведения и прямая сумма берутся в категории $C^\infty(M)$ -модулей). Поясним, что умножение в тензорной алгебре $\mathbf{T}(M)$ задается правилом

$$(X \otimes \varrho) \cdot (Y \otimes \chi) = (X \otimes Y) \otimes (\varrho \otimes \chi)$$

для всех $X \otimes \varrho \in \mathbf{T}_q^p(M)$, $Y \otimes \chi \in \mathbf{T}_s^r$,

так что здесь $(X \otimes \varrho) \cdot (Y \otimes \chi) \in \mathbf{T}_{q+s}^{p+r}(M)$.

Тензорные поля на многообразии M можно определить и другим эквивалентным образом, с помощью послыного тензорного произведения касательного и кокасательного расслоений. Именно, для всех $r, s \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$T_s^r M = \bigcup_{p \in M} (T_s^r)_p M, \quad (T_s^r)_p M = (\bigotimes^r T_p M) \otimes (\bigotimes^s T_p^* M),$$

где тензорные произведения берутся в категории векторных пространств. Подобно тому, как это было сделано в случае касательного и кокасательного расслоений, снабдим множество $T_s^r M$ структурой векторного расслоения $T_s^r M \xrightarrow{\pi} M$ и определим тензорные поля бистепени (r, s) как гладкие сечения этого расслоения. Можно показать, что построенный таким образом модуль сечений будет изоморфен (в категории $C^\infty(M)$ -модулей) введенному выше модулю $\mathbf{T}_s^r(M)$.

2.4. Дифференциальные формы

2.4.1. Внешняя алгебра дифференцирований. Пусть M – гладкое m -мерное многообразие.

Пусть $\wedge \mathfrak{D}(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} \wedge^p \mathfrak{D}(M)$ – внешняя алгебра $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуля $\mathfrak{D}(M)$, где

$$\wedge^p \mathfrak{D}(M) = \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M), & p = 0, \\ \underbrace{\mathfrak{D}(M) \wedge \cdots \wedge \mathfrak{D}(M)}_{p \text{ сомножителей}}, & p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(тензорное произведение берется в категории $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей, ради краткости здесь и ниже пишем $\wedge$ вместо $\wedge_{\mathcal{C}^\infty(M)}$).

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Согласно предложению 2.3.3 модуль $\mathfrak{D}(U)$ свободный с базисом $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$. Следовательно, для каждого $p \in \mathbb{N}$ модуль $\wedge^p \mathfrak{D}(U)$ также свободный с базисом

$$\{\partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p} \mid 1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m\},$$

каждый элемент $V \in \wedge^p \mathfrak{D}(U)$ имеет однозначное представление

$$V = \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} V^{\mu_1 \cdots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p}, \quad V^{\mu_1 \cdots \mu_p} \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

На практике удобнее использовать другое, альтернированное (иначе, косое), представление

$$V = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} V^{\mu_1 \cdots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p},$$

где коэффициенты $V^{\mu_1 \cdots \mu_p}$ кососимметрично продолжены на все значения индексов,

$$V^{\sigma(\mu_1 \cdots \mu_p)} = \text{sign } \sigma \cdot V^{\mu_1 \cdots \mu_p} \quad \text{для всех } \sigma \in \Sigma_p, \quad 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и ниже $\sigma(\mu_1 \dots \mu_p) = (\mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(p)})$.

Умножение во внешней алгебре $\wedge \mathfrak{D}(U)$ задается правилом

$$(\partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p}) \wedge (\partial_{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_{p+q}}) = \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_{p+q}}$$

для всех $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq \mu_1, \dots, \mu_{p+q} \leq m$, так что

$$V \wedge W = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_{p+q} \leq m} (V \wedge W)^{\mu_1 \cdots \mu_{p+q}} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_{p+q}}$$

для всех

$$\begin{aligned} V &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_p \leq m} V^{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_p} \in \wedge^p \mathfrak{D}(U), \\ W &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_q \leq m} W^{\mu_1 \dots \mu_q} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_q} \in \wedge^q \mathfrak{D}(U), \end{aligned}$$

где

$$(V \wedge W)^{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}^{p,q}} \text{sign } \sigma \cdot V^{\sigma(\mu_1 \dots \mu_p)} W^{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}},$$

альтернированная сумма берется по всем перестановкам σ натуральных чисел $1, \dots, p+q$, перемещающим хотя бы одно число из группы $1, \dots, p$ в группу $p+1, \dots, p+q$.

Аналогичным образом определяется внешняя алгебра

$$\wedge \mathfrak{T}(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} \wedge^p \mathfrak{T}(M)$$

$C^\infty(M)$ -модулей $\mathfrak{T}(M)$, причем изоморфизм $\tau: \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{T}(M)$ (см. предложение 2.3.5) распространяется и на внешние алгебры:

$$\tau: \wedge^p \mathfrak{D}(M) \simeq \wedge^p \mathfrak{T}(M), \quad \tau(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p) = \tau(\xi_1) \wedge \dots \wedge \tau(\xi_p), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Этот изоморфизм $C^\infty(M)$ -модулей позволяет переносить все результаты, установленные для внешней алгебры дифференцирования на внешнюю алгебру касательных полей, и обратно, практически отождествляя их.

Пусть $\Phi: M \rightarrow N$ – гладкое отображение из гладкого многообразия M в гладкое многообразие N . Касательное отображение $\Phi_*: TM \rightarrow TN$ (см. с. 135) индуцирует линейное отображение

$$\begin{aligned} \Phi_*: \wedge^p TM &\rightarrow \wedge^p TN, \\ \Phi_*(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p) &= \Phi_*(\xi_1) \wedge \dots \wedge \Phi_*(\xi_p), \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \Phi_*(V \wedge W) &= \Phi_*(V) \wedge \Phi_*(W) \\ \text{для всех } V &\in \wedge^p TM, \quad W \in \wedge^q TM, \quad p, q \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

На алгебре $\wedge \mathfrak{D}(M)$ определены следующие естественные операции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.1. Для каждой 1-формы $\omega \in \Omega^1(M)$ существует единственное косое дифференцирование (иначе, антидифференцирование) ι_ω внешней алгебры $\wedge \mathfrak{D}(M)$ такое, что

- ★ $\iota_\omega \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge^p \mathfrak{D}(M), \wedge^{p-1} \mathfrak{D}(M))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$,
- ★ $\iota_\omega(f) = 0$ для всех $f \in \wedge^0 \mathfrak{D}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$,
- ★ $\iota_\omega(X) = \omega(X)$ для всех $X \in \wedge^1 \mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M)$.

Именно,

$$\iota_\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) = \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^{i-1} \omega(X_i) \cdot X_1 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \wedge X_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и всюду ниже значок $\check{}$ означает, что соответствующий аргумент пропущен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Термин *косое дифференцирование* означает, что

$$\iota_\omega(V \wedge W) = \iota_\omega(V) \wedge W + (-1)^p V \wedge \iota_\omega(W)$$

для всех $\omega \in \Omega^1(M)$, $V \in \wedge^p \mathfrak{D}(M)$, $W \in \wedge^q \mathfrak{D}(M)$, $p, q \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предлагается проделать в качестве упражнения.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Пусть

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu \leq m} \omega_\mu \cdot d^\mu \in \Omega^1(U),$$

$V = \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} V^{\mu_1 \cdots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p} \in \wedge^p \mathfrak{D}(U)$, $p \in \mathbb{N}$, тогда

$$\iota_\omega(V) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_{p-1} \leq m} (\iota_\omega V)^{\mu_1 \cdots \mu_{p-1}} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_{p-1}},$$

где

$$(\iota_\omega V)^{\mu_1 \cdots \mu_{p-1}} = \sum_{1 \leq \mu \leq m} \omega_\mu V^{\mu \mu_1 \cdots \mu_{p-1}}.$$

Очевидно, в силу кососимметрии

$$\iota_\omega \circ \iota_\chi + \iota_\chi \circ \iota_\omega = 0 \quad \text{для всех } \omega, \chi \in \Omega^1(M),$$

в частности,

$$\iota_\omega \circ \iota_\omega = 0 \quad \text{для всех } \omega \in \Omega^1(M).$$

Таким образом, для каждой 1-формы $\omega \in \Omega^1(M)$ определен комплекс $\{\wedge^p \mathfrak{D}(M), \iota_\omega^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_\omega^p = \iota_\omega|_{\wedge^p \mathfrak{D}(M)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.2. Пусть $\omega \in \Omega^1(M)$, $D \in \mathfrak{D}(M)$, определим эндоморфизм $h_D \in \text{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge \mathfrak{D}(M))$ правилом

$$h_D(V) = D \wedge V \quad \text{для всех } V \in \wedge^p \mathfrak{D}(M), \quad p \in \mathbb{Z}_+$$

(в частности, $h_D(f) = f \cdot D$ для всех $f \in \wedge^0 \mathfrak{D}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$), тогда

$$\iota_\omega \circ h_D + h_D \circ \iota_\omega = \omega(D) \cdot \text{id}_{\wedge \mathfrak{D}(M)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $V \in \wedge^p \mathfrak{D}(M)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} (\iota_\omega \circ h_D)(V) &= \iota_\omega(D \wedge V) = \iota_\omega(D) \wedge V - D \wedge \iota_\omega(V) \\ &= \omega(D) \cdot V - D \wedge \iota_\omega(V), \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$(h_D \circ \iota_\omega)(V) = h_D(\iota_\omega(V)) = D \wedge \iota_\omega(V).$$

Складывая полученные равенства, убеждаемся в справедливости доказываемой формулы.

СЛЕДСТВИЕ 2.4.1. Пусть для данной $\omega \in \Omega^1(M)$ существует $D \in \mathfrak{D}(M)$ такое, что $\omega(D) = 1$ (где $1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$), тогда комплекс $\{\wedge \mathfrak{D}(M), \iota_\omega\}$ ациклический, т.е. все его гомологии нулевые,

$$H_p(\wedge \mathfrak{D}(M), \iota_\omega) = \ker \iota^p / \text{im } \iota^{p+1} = 0, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.3. Присоединенное действие

$$\text{as}: \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(M)),$$

$$D \mapsto \text{as}(D): \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M), \quad X \mapsto D(X) = [D, X],$$

для всех $D, X \in \mathfrak{D}(M)$, определяет единственный морфизм алгебр Ли

$$L: \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(\wedge \mathfrak{D}(M))$$

такой, что для каждого $D \in \mathfrak{D}(M)$

- * $L_D \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\wedge^p \mathfrak{D}(M))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$,
- * $L_D(f) = D(f)$ для всех $f \in \wedge^0 \mathfrak{D}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$,
- * $L_D(X) = [D, X]$ для всех $X \in \wedge^1 \mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M)$.

Именно,

$$\begin{aligned} L_D(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) &= \sum_{1 \leq i \leq p} X_1 \wedge \cdots \wedge [D, X_i] \wedge \cdots \wedge X_p \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^{i-1} [D, X_i] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \check{X}_i \cdots \wedge X_p \end{aligned}$$

для всех $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{D}(M)$.

Доказательство этого и ряда других утверждений этого раздела опускаем, поскольку они доказаны в более общей форме в следующем выпуске моих лекций.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Пусть

$$\begin{aligned} D &= \sum_{1 \leq \mu \leq m} D^\mu \cdot \partial_\mu \in \mathfrak{D}(U), \\ V &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} V^{\mu_1 \cdots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p} \in \wedge^p \mathfrak{D}(U), \end{aligned}$$

тогда

$$L_D(V) = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} (L_D V)^{\mu_1 \cdots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p},$$

где

$$(L_D V)^{\mu_1 \cdots \mu_p} = D(V^{\mu_1 \cdots \mu_p}) + \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^i \sum_{1 \leq \mu \leq m} (\partial_\mu D^{\mu_i}) \cdot V^{\mu \mu_1 \cdots \check{\mu}_i \cdots \mu_p}.$$

2.4.2. Комплекс де Рама $\{\Omega(M), d\}$. Пусть M – гладкое m -мерное многообразие.

Определен $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль

$$\Omega(M) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge \mathfrak{D}(M), \mathcal{C}^\infty(M)) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} \Omega^p(M),$$

дуальный к $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулю $\wedge \mathfrak{D}(M)$, где

$$\Omega^p(M) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge^p \mathfrak{D}(M), \mathcal{C}^\infty(M)) = (\wedge^p \mathfrak{D}(M))^*, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

в частности, $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ (проверить).

Согласно предложению 2.3.5 можно отождествить $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модули $\mathfrak{D}(M)$ и $\mathfrak{T}(M)$ и считать, что

$$\Omega^p(M) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge^p \mathfrak{T}(M), \mathcal{C}^\infty(M)) \quad \text{для всех } p \in \mathbb{N}$$

(ср. с предложением 2.3.9).

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Как было отмечено выше, для каждого $p \in \mathbb{N}$ модуль $\wedge^p \mathfrak{D}(U)$ свободный. Следовательно, дуальный модуль $\Omega^p(U)$ тоже свободный, обладает дуальным базисом

$$\{d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \mid 1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m\},$$

где $d^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$, каждый элемент $\omega \in \Omega^p(U)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p}, \end{aligned}$$

где

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} = \omega(\partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p}) \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

(сравни с аналогичными представлениями в модуле $\wedge^p \mathfrak{D}(U)$). В частности,

$$\begin{aligned} \omega(V) &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot V^{\mu_1 \dots \mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot V^{\mu_1 \dots \mu_p} \in \mathcal{C}^\infty(U) \end{aligned}$$

для всех

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U), \\ V &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} V^{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p} \in \wedge^p \mathfrak{D}(U). \end{aligned}$$

Модуль $\Omega(M)$ обладает дополнительной структурой – структурой ассоциативной алгебры с умножением, задаваемым правилом

$$\begin{aligned} &(\omega \wedge \chi)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{p+q}) \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \text{sign } \sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \\ &\quad \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p+q)}) \\ &= \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}^{p,q}} \text{sign } \sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \\ &\quad \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $\chi \in \Omega^q(M)$, $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{D}(M)$, где в первом случае альтернированная сумма берется по всем перестановкам σ индексов $1, \dots, p+q$, а во втором случае – лишь по перестановкам σ , перемещающим хотя бы один индекс из группы $1, \dots, p$ в группу $p+1, \dots, p+q$. По построению

$$\omega \wedge \chi = (-1)^{pq} \chi \wedge \omega \quad \text{для всех } \omega \in \Omega^p(M), \chi \in \Omega^q(M),$$

так что $\Omega(M)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\Gamma(p, q) = (-1)^{pq}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$ (см. раздел 1.5.4).

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Тогда для базисных элементов имеем

$$(d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_p}) \wedge (d^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge d^{\mu_{p+q}}) = d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_{p+q}} \\ \text{для всех } p, q \in \mathbb{N},$$

так что

$$\omega \wedge \chi = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_{p+q} \leq m} (\omega \wedge \chi)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} \cdot d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_{p+q}},$$

для всех

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U), \\ \chi = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_q \leq m} \chi_{\mu_1 \dots \mu_q} \cdot d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_q} \in \Omega^q(U),$$

где

$$(\omega \wedge \chi)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}^{p,q}} \text{sign } \sigma \cdot \omega_{\sigma(\mu_1 \dots \mu_p)} \chi_{\sigma(\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q})},$$

альтернированная сумма берется по всем перестановкам σ натуральных чисел $1, \dots, p+q$, перемещающим хотя бы одно число из группы $1, \dots, p$ в группу $p+1, \dots, p+q$ (сравни с умножением в алгебре $\wedge \mathfrak{D}(M)$).

Пусть $\Phi: M \rightarrow N$ – гладкое отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N , $\Phi_*: \wedge^p TM \rightarrow \wedge^p TN$ – его касательное отображение, $p \in \mathbb{N}$. Кокасательное отображение $\Phi^*: \mathfrak{T}^*(N) \rightarrow \mathfrak{T}^*(M)$ (см. с. 144) индуцирует одноименное линейное отображение

$$\Phi^*: \Omega(N) \rightarrow \Omega(M), \quad \chi \mapsto \omega = \Phi^*(\chi) = \chi \circ \Phi_*,$$

так что

$$\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)(a) = \chi_b(Y_{1,b} \wedge \cdots \wedge Y_{p,b})$$

для всех $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{T}(M)$, $p \in \mathbb{N}$, $a \in M$,

где $b = \Phi(a)$, $Y_{1,b} = \Phi_*(X_{1,a}), \dots, Y_{p,b} = \Phi_*(X_{p,a}) \in T_b N$, и мы отождествляем дифференцирования и касательные поля, дифференциальные формы и кокасательные поля. Очевидно,

$$\Phi^*(\chi \wedge \varrho) = \Phi^*(\chi) \wedge \Phi^*(\varrho)$$

для всех $\chi \in \Omega^p(N)$, $\varrho \in \Omega^q(N)$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$,

другими словами, отображение Φ^* есть морфизм внешних алгебр.

На алгебре $\Omega(M)$ определены следующие естественные операции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.4. Для каждого $D \in \mathfrak{D}(M)$ существует единственное косое дифференцирование ι_D алгебры $\Omega(M)$ такое, что

- * $\iota_D \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Omega^p(M), \Omega^{p-1}(M))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$,
- * $\iota_D(f) = 0$ для всех $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$,
- * $\iota_D(\omega) = \omega(D)$ для всех $\omega \in \Omega^1(M)$.

Именно,

$$(\iota_D \omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{p-1}) = p \cdot \omega(D \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_{p-1})$$

для всех $X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{D}(M)$.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Пусть

$$D = \sum_{1 \leq \mu \leq m} D^\mu \cdot \partial_\mu \in \mathfrak{D}(U),$$

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U),$$

тогда

$$\iota_D(\omega) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_{p-1} \leq m} (\iota_D \omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_{p-1}},$$

где

$$(\iota_D \omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} = \sum_{1 \leq \mu \leq m} D^\mu \cdot \omega_{\mu \mu_1 \dots \mu_{p-1}}.$$

Очевидно, в силу кососимметрии

$$\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0 \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{D}(M),$$

в частности,

$$\iota_D \circ \iota_D = 0 \quad \text{для всех } D \in \mathfrak{D}(M).$$

Таким образом, для каждого дифференцирования $D \in \mathfrak{D}(M)$ определен комплекс $\{\Omega^p(M), \iota_D^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_D^p = \iota_D|_{\Omega^p(M)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.5. Пусть $D \in \mathfrak{D}(M)$, $\omega \in \Omega^1(M)$, определенным эндоморфизм $h_\omega \in \text{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Omega(M))$ правилом

$$h_\omega(\chi) = \omega \wedge \chi \quad \text{для всех } \chi \in \Omega^p(M), p \in \mathbb{Z}_+$$

(в частности, $h_\omega(f) = f \cdot \omega$ для всех $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$), тогда

$$\iota_D \circ h_\omega + h_\omega \circ \iota_D = \omega(D) \cdot \text{id}_{\Omega(M)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предлагается провести самостоятельно.

СЛЕДСТВИЕ 2.4.2. Пусть для данного $D \in \mathfrak{D}(M)$ существует $\omega \in \Omega^1(M)$ такая, что $\omega(D) = 1$, тогда комплекс $\{\Omega(M), \iota_D\}$ ациклический.

В алгебре $\Omega(M)$ определено также действие L (производная Ли), аналогичное одноименному действию в алгебре $\wedge \mathfrak{D}(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.6. Присоединенное действие

$$\text{as}: \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(M)),$$

$$D \mapsto \text{as}(D): \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M), \quad X \mapsto D(X) = [D, X],$$

для всех $D, X \in \mathfrak{D}(M)$, определяет единственный морфизм алгебр Ли $L: \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(\Omega(M))$ такой, что для каждого $D \in \mathfrak{D}(M)$

- ★ $L_D \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\Omega^p(M))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$,
- ★ $L_D(f) = D(f)$ для всех $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$,
- ★ $D(\omega(X)) = (L_D(\omega))(X) + \omega(L_D(X))$ для всех $\omega \in \Omega^1(M)$, $X \in \mathfrak{D}(M)$.

Именно,

$$L_D(\omega) = D \circ \omega - \omega \circ L_D \quad \text{для всех } \omega \in \Omega^p(M), p \in \mathbb{N},$$

так что

$$\begin{aligned} L_D(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) &= D(\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)) \\ &- \sum_{1 \leq i \leq p} \omega(X_1 \wedge \cdots [D, X_i] \cdots \wedge X_p) \\ &\text{для всех } X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{D}(M). \end{aligned}$$

Корректность этого определения, т.е. справедливость равенства

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]} \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{D}(M),$$

в более общей ситуации доказана в следующем выпуске моих лекций.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Пусть

$$\begin{aligned} D &= \sum_{1 \leq \mu \leq m} D^\mu \cdot \partial_\mu \in \mathfrak{D}(U), \\ \omega &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U), \end{aligned}$$

тогда

$$L_D(\omega) = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} (L_D \omega)_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p},$$

где

$$(L_D \omega)_{\mu_1 \dots \mu_p} = D(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}) + \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq \mu \leq m} (\partial_{\mu_i} D^\mu) \cdot \omega_{\mu \mu_1 \dots \check{\mu}_i \dots \mu_p}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.7. Для любых $X, Y \in \mathfrak{D}(M)$ справедливо равенство

$$[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X, Y]}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.8. Имеется единственное косое дифференцирование d алгебры $\Omega(M)$ (обычно называемое внешним дифференциалом) такое, что

- ★ $d \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^p(M), \Omega^{p+1}(M))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$,
- ★ $d \circ \iota_D + \iota_D \circ d = L_D$ для всех $D \in \mathfrak{D}(M)$.

Именно,

$$\begin{aligned} d\omega(X_0 \wedge \cdots \wedge X_p) &= \frac{1}{p+1} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq p} (-1)^i X_i(\omega(X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \wedge X_p)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \check{X}_j \cdots \wedge X_p) \right\} \end{aligned}$$

для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $X_0, \dots, X_p \in \mathfrak{D}(M)$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

В частности,

- ★ $df(X) = X(f)$ для всех $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{D}(M)$,
- ★ $d\omega(X \wedge Y) = \frac{1}{2}\{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\}$ для всех $\omega \in \Omega^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{D}(M)$,
- ★ $d\omega(X \wedge Y \wedge Z) = \frac{1}{3}\{(X(\omega(Y \wedge Z)) + c.p.) - (\omega([X, Y] \wedge Z) + c.p.)\}$ для всех $\omega \in \Omega^2(M)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{D}(M)$, где *c.p.* – циклическая перестановка переменных X, Y, Z .

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенная выше формула для внешнего дифференциала обладает тем преимуществом, что она глобальная, не нуждается в локальных картах. Однако она не всегда удобна, поскольку состоит из двух слагаемых ($\sum_i \dots$ и $\sum_{i < j} \dots$), каждое из которых в отдельности не является формой, поскольку не $C^\infty(M)$ -линейно (хотя и $\mathbb{R}$ -линейно).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.9. *Справедливо равенство*

$$d \circ L_D - L_D \circ d = 0 \quad \text{для всех } D \in \mathfrak{D}(M).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.10. *Справедливо равенство*

$$d \circ d = 0.$$

Итак, определен комплекс $\{\Omega(M), d\} = \{\Omega^p(M), d^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, называемый *комплексом де Рама*, где

$$d^p = d|_{\Omega^p(M)}: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M).$$

Здесь используется следующая терминология:

- ★ элементы модуля $\Omega^p(M)$ называются p -формами (подробнее, дифференциальными p -формами),
- ★ элементы ядра $\ker d^p = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid d(\omega) = 0\}$ называются замкнутыми p -формами,
- ★ элементы образа $\operatorname{im} d^{p-1} = \{\omega = d(\phi) \mid \phi \in \Omega^{p-1}(M)\}$ называются точными p -формами,
- ★ элементы факторпространства $H^p(\Omega(M), d) = \ker d^p / \operatorname{im} d^{p-1}$ называются p -мерными когомологиями де Рама.

Пусть

- ★ $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M , $a \mapsto x = \phi(a)$, $x^\mu = \phi^\mu(a)$, для всех $a \in U$, $1 \leq \mu \leq m$;

- ★ $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ – базис в $\mathfrak{D}(U)$, $(\partial_\mu f)(a) = \partial_{x^\mu} f(\phi^{-1}(x))|_{x=\phi(a)}$ для всех $1 \leq \mu \leq m$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$;
- ★ $\{d^1, \dots, d^m\}$ – дуальный базис в $\Omega^1(U)$, $d^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$, и, значит, $d^\mu(X) = X^\mu$ для всех $1 \leq \mu \leq m$, $X = \sum_\nu X^\nu \cdot \partial_\nu \in \mathfrak{D}(U)$.

Для всякой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(U) = \Omega^0(U)$ имеем

$$df = \sum_{1 \leq \mu \leq m} (\partial_\mu f) \cdot d^\mu,$$

так как

$$df(X) = X(f) = \sum_{1 \leq \mu \leq m} X^\mu (\partial_\mu f) = \sum_{1 \leq \mu \leq m} (\partial_\mu f) \cdot d^\mu(X)$$

для всех $X \in \mathfrak{D}(U)$.

Далее, справедливо равенство

$$d(d^\mu) = 0 \quad \text{для всех } 1 \leq \mu \leq m,$$

так как

$$\begin{aligned} d(d^\mu)(X \wedge Y) &= \frac{1}{2} \{X(d^\mu(Y)) - Y(d^\mu(X)) - d^\mu([X, Y])\} \\ &= \frac{1}{2} \{X(Y^\mu) - Y(X^\mu) - [X, Y]^\mu\} = 0 \end{aligned}$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{D}(U)$

(см. предложение 2.3.3).

Более того,

$$d^\mu = d\phi^\mu = dx^\mu \quad \text{для всех } 1 \leq \mu \leq m,$$

так как

$$(d\phi^\mu)(X) = X(\phi^\mu) = \sum_{1 \leq \nu \leq m} X^\nu \cdot (\partial_{x^\nu} x^\mu)|_{x=\phi} = X^\mu = d^\mu(X)$$

для всех $X \in \mathfrak{D}(U)$.

Поскольку внешний дифференциал d есть косое дифференцирование внешней алгебры $\Omega(U)$, отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.11. Для каждого $p \in \mathbb{Z}_+$ и каждой p -формы

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U)$$

справедливо представление

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} d(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}) \wedge d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{1 \leq \mu_0, \dots, \mu_p \leq m} (d\omega)_{\mu_0 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_0} \wedge \dots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^{p+1}(U), \end{aligned}$$

где

$$(d\omega)_{\mu_0 \dots \mu_p} = \sum_{0 \leq i \leq p} (-1)^i \partial_{\mu_i} (\omega_{\mu_0 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_p}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенная выше локальная формула для внешнего дифференциала, хотя и зависит от выбора карты, при вычислениях часто удобнее, чем глобальная бескоординатная формула, поскольку в ней каждое слагаемое и каждый множитель в отдельности являются локальными формами.

Пусть $M = U$ – область в $\mathbb{R}^m$, тогда каждая форма $\omega \in \Omega^p(U)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, имеет вид

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) \cdot dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad x \in U,$$

где мы пишем dx^μ вместо d^μ . Напомним, что область $U \subset \mathbb{R}^m$ называется *звездной*, если $tx \in U$ для всех $0 \leq t \leq 1$ и $x \in U$.

ЛЕММА 2.4.1 (лемма Пуанкаре). Пусть $M = U$ – звездная область в $\mathbb{R}^m$, тогда справедлива гомотопическая формула

$$d \circ h + h \circ d = \text{id} - \varrho,$$

гомотопический оператор $h: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, действует по правилу

$$\begin{aligned} h(f) &= 0 \quad \text{для всех } f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U), \\ \omega &= \frac{1}{p!} \sum \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) \cdot dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \in \Omega^p(U), \quad p \in \mathbb{N}, \\ \mapsto h(\omega) &= \frac{1}{(p-1)!} \sum (h\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}}(x) \cdot dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}} \in \Omega^{p-1}(U), \end{aligned}$$

где

$$(h\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}}(x) = \int_0^1 t^{p-1} \sum_{1 \leq \mu \leq m} x^\mu \omega_{\mu\mu_1 \dots \mu_{p-1}}(tx) dt,$$

а дополнительный оператор $\varrho: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(U)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, действует по правилу

$$\begin{aligned} \varrho(f)(x) &= f(0) \quad \text{для всех } f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U), \\ \varrho(\omega) &= 0 \quad \text{для всех } \omega \in \Omega^p(U), \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Поясним, что здесь $f(0) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ – постоянная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $p = 0$, $f \in \Omega^0(U)$. Тогда

$$\begin{aligned} h(f) &= 0, \quad (d \circ h)(f) = 0, \\ d(f) &= \sum_{\mu} (\partial_{x^\mu} f)(x) \cdot dx^\mu, \quad (df)_\mu(x) = (\partial_{x^\mu} f)(x), \\ (h \circ d)(f) &= \int_0^1 t^0 \sum_{\mu} x^\mu (\partial_{x^\mu} f)(tx) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx) dt = f(x) - f(0), \end{aligned}$$

так что здесь $(d \circ h + h \circ d)(f) = f - \varrho(f)$, как и требуется. Пусть теперь $p \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega^p(U)$. Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} ((d \circ h)(\omega))_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) &= \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^{i-1} \partial_{x^{\mu_i}} ((h\omega)_{\mu_1 \dots \check{\mu}_i \dots \mu_p})(x) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^{i-1} \int_0^1 t^{p-1} \sum_{\mu} \{ \delta_{\mu_i}^\mu \omega_{\mu\mu_1 \dots \check{\mu}_i \dots \mu_p}(tx) \\ &\quad + x^\mu \partial_{x^{\mu_i}} (\omega_{\mu\mu_1 \dots \check{\mu}_i \dots \mu_p}(tx)) \} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ p t^{p-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(tx) \right. \\ &\quad \left. - t^p \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^i \sum_{\mu} x^\mu (\partial_{x^{\mu_i}} \omega_{\mu\mu_1 \dots \check{\mu}_i \dots \mu_p})(tx) \right\} dt, \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned}
 ((h \circ d)\omega)_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) &= \int_0^1 t^p \sum_{\mu} x^{\mu} (d\omega)_{\mu\mu_1 \dots \mu_p}(tx) dt \\
 &= \int_0^1 t^p \sum_{\mu} x^{\mu} \left\{ (\partial_{x^{\mu}} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p})(tx) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^i (\partial_{x^{\mu_i}} \omega_{\mu\mu_1 \dots \check{\mu}_i \dots \mu_p})(tx) \right\} dt \\
 &= \int_0^1 t^p \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(tx) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^i \sum_{\mu} x^{\mu} (\partial_{x^{\mu_i}} \omega_{\mu\mu_1 \dots \check{\mu}_i \dots \mu_p})(tx) \right\} dt.
 \end{aligned}$$

Складывая полученные выражения, получаем

$$\begin{aligned}
 ((d \circ h + h \circ d)\omega)_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) &= \int_0^1 \left\{ p t^{p-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(tx) + t^p \frac{\partial}{\partial t} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(tx) \right\} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t^p \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(tx)) dt = (t^p \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(tx)) \Big|_{t=0}^{t=1} = \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(x),
 \end{aligned}$$

что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 2.4.3. Пусть U – звездная область в $\mathbb{R}^m$, тогда линейные пространства когомологий

$$H^p(\Omega(U), d) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, \\ 0, & p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.4.4. Для любого многообразия M пространства когомологий локально тривиальные, т.е. у каждой точки $s \in M$ существует открытая окрестность $U \subset M$, $s \in U$, такая, что линейные пространства когомологий

$$H^p(\Omega(U), d) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, \\ 0, & p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно выбрать карту $U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m$ на M такую, что $s \in U$, а образ $\phi(U)$ – звездная (например, выпуклая) область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Смысл последнего утверждения в том, что когомологии характеризуют глобальное поведение многообразия, локально все многообразия тривиальные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.12. Пусть $\Phi: M \rightarrow N$ – гладкое отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N и $\Phi^*: \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ – его кокасательное отображение. Справедливо равенство

$$d \circ \Phi^* = \Phi^* \circ d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\chi = g \in \Omega^0(N) = \mathcal{C}^\infty(N)$. Тогда для всех $a \in M$, $b = \Phi(a) \in N$, $X \in \mathfrak{D}(M)$, с одной стороны, имеем

$$(d(\Phi^*g))(X)(a) = X(\Phi^*(g))(a) = \Phi_*(X_a)(\mathbf{g}_b)$$

(напомним, что $\Phi_*(X_a) \in T_bN$), а с другой стороны, имеем

$$(\Phi^*(dg))(X)(a) = (dg)_b(\Phi_*(X_a)) = \Phi_*(X_a)(\mathbf{g}_b),$$

поскольку

$$(dg)_b(Y_b) = (dg)(Y)(b) = Y(g)(b) = Y_b(\mathbf{g}_b)$$

для всех $Y \in \mathfrak{D}(N)$, $b \in N$.

Следовательно, доказываемое равенство справедливо при $p = 0$. Пусть теперь $\chi \in \Omega^p(N)$, $p \in \mathbb{N}$. Поскольку доказываемое равенство носит локальный характер (почему?), без ограничения общности считаем, что многообразие N покрывается одной картой $N \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$ с координатами $y^\nu = \psi^\nu$, $1 \leq \nu \leq n$, так что форма χ записывается в виде (см. с. 157)

$$\chi = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \nu_1, \dots, \nu_p \leq n} \chi_{\nu_1 \dots \nu_p} \cdot d\psi^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\psi^{\nu_p},$$

$$\chi_{\nu_1 \dots \nu_p}, \psi^{\nu_1}, \dots, \psi^{\nu_p} \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

Поскольку d – косое дифференцирование внешней алгебры $\Omega(N)$, а Φ^* – морфизм внешних алгебр (см. с. 153), из этого представления и доказанного равенства для $p = 0$ следует его справедливость в общем случае. Именно,

$$\begin{aligned}
 (\Phi^* \circ d)(\chi) &= \Phi^* \left(\frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \nu_1, \dots, \nu_p \leq n} d\chi_{\nu_1 \dots \nu_p} \wedge d\psi^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\psi^{\nu_p} \right) \\
 &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \nu_1, \dots, \nu_p \leq n} \Phi^*(d\chi_{\nu_1 \dots \nu_p}) \wedge \Phi^*(d\psi^{\nu_1}) \wedge \dots \wedge \Phi^*(d\psi^{\nu_p}) \\
 &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \nu_1, \dots, \nu_p \leq n} d(\Phi^*\chi_{\nu_1 \dots \nu_p}) \wedge d(\Phi^*\psi^{\nu_1}) \wedge \dots \wedge d(\Phi^*\psi^{\nu_p}) \\
 &= d \left(\frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \nu_1, \dots, \nu_p \leq n} (\Phi^*\chi_{\nu_1 \dots \nu_p}) \wedge (\Phi^*\psi^{\nu_1}) \wedge \dots \wedge (\Phi^*\psi^{\nu_p}) \right) \\
 &= (d \circ \Phi^*)(\chi).
 \end{aligned}$$

2.4.3. Векторнозначные дифференциальные формы.

Пусть M – гладкое m -мерное многообразие.

Пусть $\mathcal{K} - \mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль и $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) - \mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль всех его эндоморфизмов, где $(f \cdot L)(v) = f \cdot (L(v))$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $L \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$, $v \in \mathcal{K}$.

Пара $D = (D_M, D_{\mathcal{K}})$, где $D_M \in \mathfrak{D}(M)$, $D_{\mathcal{K}} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$, называется *дифференцированием $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуля $\mathcal{K}$* , если выполняется правило Лейбница

$$D_{\mathcal{K}}(f \cdot v) = D_M(f) \cdot v + f \cdot D_{\mathcal{K}}(v) \quad \text{для всех } f \in \mathcal{C}^\infty(M), v \in \mathcal{K}.$$

Множество $\mathfrak{D}(\mathcal{K})$ всех дифференцирований $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуля $\mathcal{K}$ имеет две алгебраические структуры:

- ★ $\mathfrak{D}(\mathcal{K}) - \mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль, $f \cdot D = (f \cdot D_M, f \cdot D_{\mathcal{K}})$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $D = (D_M, D_{\mathcal{K}}) \in \mathfrak{D}(\mathcal{K})$;
- ★ $\mathfrak{D}(\mathcal{K})$ – алгебра Ли с коммутатором в качестве скобки Ли, $[X, Y] = ([X_M, Y_M], [X_{\mathcal{K}}, Y_{\mathcal{K}}])$ для всех $X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{K})$.

Говорят, отображение $\varkappa: \mathfrak{D}(M) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$, $D \mapsto \varkappa(D)$, определяет действие алгебры Ли $\mathfrak{D}(M)$ на $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуле $\mathcal{K}$, если

- ★ $\varkappa: \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ – морфизм алгебр Ли;
- ★ $\varkappa: \mathfrak{D}(M) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ – морфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей;
- ★ пара $(D, \varkappa(D)) \in \mathfrak{D}(\mathcal{K})$ для любого $D \in \mathfrak{D}(M)$.

ПРИМЕР 2.4.1. Пусть $\mathcal{V}$ – вещественное векторное пространство. Рассмотрим $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V}) = \mathcal{C}^\infty(M) \otimes \mathcal{V}$, где $f \cdot (g \otimes v) = (f \cdot g) \otimes v$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $g \otimes v \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V})$. Элементы модуля $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V})$ суть гладкие отображения из многообразия M в векторное пространство $\mathcal{V}$, снабженное естественной топологией (евклидовой, если пространство $\mathcal{V}$ конечномерное). Каждому $D \in \mathfrak{D}(M)$ поставим в соответствие эндоморфизм $\varkappa(D) \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V}))$, где $\varkappa(D)(f \otimes v) = (D(f)) \otimes v$ для всех $f \otimes v \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V})$. Легко проверяется, что правило $D \mapsto \varkappa(D)$ определяет действие алгебры Ли $\mathfrak{D}(M)$ на $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуле $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V})$. Векторное пространство $\mathcal{V}$ естественным образом вкладывается в $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V})$, $v \mapsto 1 \otimes v$ для всех $v \in \mathcal{V}$, где $1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ – функция, тождественно равная единице. Более того, здесь множество $\mathcal{V}$ порождает $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V})$, т.е. $F = \sum_{1 \leq i \leq N} f^i \cdot v_i$ для всех $F \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V})$, где $N = N(F) \in \mathbb{N}$, $f^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $v_i \in \mathcal{V}$, причем $\varkappa(D)(F) = \sum D(f^i) \cdot v_i$ для всех $D \in \mathfrak{D}(M)$. В частности, если в векторном пространстве $\mathcal{V}$ задан базис $\{e_1, \dots, e_k\}$, $k = \dim \mathcal{V}$, то $F = \sum_{1 \leq i \leq k} f^i \cdot e_i$, $f^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$, и $\varkappa(D)(F) = \sum_{1 \leq i \leq k} D(f^i) \cdot e_i$.

Пусть $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль $\mathcal{K}$ изоморфен $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулю $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V})$, т.е. задан изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей $\varrho: \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{V}) \simeq \mathcal{K}$. Тогда только что определенное действие $\varkappa$ индуцирует действие $\varkappa_{\mathcal{K}}$ алгебры Ли $\mathfrak{D}(M)$ на $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуле $\mathcal{K}$ по формуле

$$\varkappa_{\mathcal{K}}(D) = \varrho \circ \varkappa(D) \circ \varrho^{-1} \quad \text{для всех } D \in \mathfrak{D}(M).$$

В этом случае каждый элемент $F \in \mathcal{K}$ имеет вид

$$F = \sum_{1 \leq i \leq N} f^i \cdot \varrho(v_i),$$

где $N = N(F) \in \mathbb{N}$, $f^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $v_i \in \mathcal{V}$, $\varrho(v_i) \in \mathcal{K}$, так что действие $\varkappa_{\mathcal{K}}(D)(F) = \sum D(f^i) \cdot \varrho(v_i)$ для всех $D \in \mathfrak{D}(M)$. Очевидно, множество $\varrho(\mathcal{V}) \subset \mathcal{K}$ порождает $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль $\mathcal{K}$, причем $\varkappa_{\mathcal{K}}(D)(\varrho(v)) = 0$ для всех $D \in \mathfrak{D}(M)$, $v \in \mathcal{V}$.

Нижее, если не оговорено противное, будем писать D вместо $\varkappa(D)$ для всех $D \in \mathfrak{D}(M)$ и полагать $D(f) = D_M(f)$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ и $D(v) = D_{\mathcal{K}}(v) = \varkappa(D)(v)$ для всех $v \in \mathcal{K}$.

Определим теперь $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль

$$\Omega(M, \mathcal{K}) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge \mathfrak{D}(M), \mathcal{K}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} \Omega^p(M, \mathcal{K}),$$

ПОЛОЖИВ

$$\Omega^p(M, \mathcal{K}) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge^p \mathfrak{D}(M), \mathcal{K}), \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

в частности, $\Omega^0(M, \mathcal{K}) = \mathcal{K}$ (проверить). Элементы модуля $\Omega^p(M, \mathcal{K})$, $p \in \mathbb{Z}_+$, называются *p-формами с коэффициентами в модуле $\mathcal{K}$* или, нестрого, *векторнозначными p-формами*.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M . Модуль $\Omega^p(U, \mathcal{K})$, $p \in \mathbb{N}$, “свободный” с “базисом”

$$\{d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \mid 1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m\},$$

каждый элемент $\omega \in \Omega^p(U, \mathcal{K})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p}, \end{aligned}$$

где

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} = \omega(\partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p}) \in \mathcal{K}.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \omega(V) &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot V^{\mu_1 \dots \mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot V^{\mu_1 \dots \mu_p} \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

для всех

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U, \mathcal{K}), \\ V &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m} V^{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p} \in \wedge^p \mathfrak{D}(U). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь $d^\mu(D) = D^\mu \in \mathcal{C}^\infty(U)$ для всех $1 \leq \mu \leq m$ и всех $D = \sum_{1 \leq \nu \leq m} D^\nu \partial_\nu$, так что элементы

$$d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \notin \Omega^p(U, \mathcal{K})$$

и не являются базисными в обычном смысле. В свою очередь и компоненты $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \notin \mathcal{C}^\infty(M)$. Тем не менее, запись

$$\omega(V) = \sum \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot V^{\mu_1 \dots \mu_p} \in \mathcal{K}$$

корректна и удобна в практических приложениях. В качестве упражнения предлагается подумать об универсальности такой конструкции.

$\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуль $\Omega(M, \mathcal{K})$ фактически обладает более широкой структурой внешнего $\Omega(M)$ -модуля (напомним, $\mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$) с внешним умножением

$$\Omega^p(M) \times \Omega^q(M, \mathcal{K}) \rightarrow \Omega^{p+q}(M, \mathcal{K}), \quad (\omega, \chi) \mapsto \omega \wedge \chi, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$$\begin{aligned} & (\omega \wedge \chi)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p+q}) \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \text{sign } \sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \\ & \quad \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(p+q)}) \\ &= \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}^{p,q}} \text{sign } \sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \\ & \quad \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

для всех $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{D}(M)$ (см. с. 151).

Для каждого дифференцирования $D \in \mathfrak{D}(M)$ определен единственный эндоморфизм $\iota_D \in \text{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Omega(M, \mathcal{K}))$ такой, что

- ★ $\iota_D \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Omega^p(M, \mathcal{K}), \Omega^{p-1}(M, \mathcal{K}))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$;
- ★ $\iota_D(v) = 0$ для всех $v \in \Omega^0(M, \mathcal{K}) = \mathcal{K}$;
- ★ $\iota_D(\omega) = \omega(D)$ для всех $\omega \in \Omega^1(M, \mathcal{K})$;
- ★ $\iota_D(\omega \wedge \chi) = (\iota_D \omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (\iota_D \chi)$ для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $\chi \in \Omega^q(M, \mathcal{K})$.

Именно,

$$(\iota_D \omega)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1}) = p \cdot \omega(D \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1})$$

для всех $X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{D}(M)$.

Очевидно,

$$\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0 \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{D}(M),$$

в частности,

$$\iota_D \circ \iota_D = 0 \quad \text{для всех } D \in \mathfrak{D}(M).$$

Таким образом, для каждого дифференцирования $D \in \mathfrak{D}(M)$ определен комплекс $\{\Omega^p(M, \mathcal{K}), \iota_D^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_D^p = \iota_D|_{\Omega^p(M, \mathcal{K})}$.

Ниже в этом разделе считаем, что алгебра Ли $\mathfrak{D}(M)$ действует в $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуле $\mathcal{K}$. Элементы модуля $\Omega(M, \mathcal{K})$ в этом случае называем дифференциальными формами с коэффициентами в $\mathcal{K}$.

Определен единственный морфизм алгебр Ли

$$L: \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(\Omega(M, \mathcal{K}))$$

такой, что для каждого $D \in \mathfrak{D}(M)$

- ★ $L_D \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\Omega^p(M, \mathcal{K}))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$;
- ★ $L_D(v) = D(v)$ для всех $v \in \Omega^0(M, \mathcal{K}) = \mathcal{K}$;
- ★ $D(\omega(X)) = (L_D(\omega))(X) + \omega(L_D(X))$ для всех $\omega \in \Omega^1(M, \mathcal{K})$, $X \in \mathfrak{D}(M)$;
- ★ $L_D(\omega \wedge \chi) = (L_D\omega) \wedge \chi + \omega \wedge (L_D\chi)$ для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $\chi \in \Omega^q(M, \mathcal{K})$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Именно,

$$L_D(\omega) = D \circ \omega - \omega \circ L_D \quad \text{для всех } \omega \in \Omega^p(M, \mathcal{K}), p \in \mathbb{N},$$

так что

$$\begin{aligned} L_D(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) &= D(\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)) \\ &- \sum_{1 \leq i \leq p} \omega(X_1 \wedge \cdots [D, X_i] \cdots \wedge X_p) \end{aligned}$$

для всех $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{D}(M)$.

По-прежнему, для любых $X, Y \in \mathfrak{D}(M)$ имеем

- ★ $[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}$,
- ★ $[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X, Y]}$.

Определен единственный эндоморфизм $d \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\Omega(M, \mathcal{K}))$ такой, что

- ★ $d \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^p(M, \mathcal{K}), \Omega^{p+1}(M, \mathcal{K}))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$;
- ★ $d(\omega \wedge \chi) = (d\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (d\chi)$ для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $\chi \in \Omega^q(M, \mathcal{K})$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$;
- ★ $d \circ \iota_D + \iota_D \circ d = L_D$ для всех $D \in \mathfrak{D}(M)$.

Именно,

$$d\omega(X_0 \wedge \cdots \wedge X_p) = \frac{1}{p+1} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq p} (-1)^i X_i(\omega(X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \wedge X_p)) \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \check{X}_j \cdots \wedge X_p) \right\}$$

для всех $\omega \in \Omega^p(M, \mathcal{K})$, $X_0, \dots, X_p \in \mathfrak{D}(M)$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

По-прежнему,

$$\star d \circ L_D - L_D \circ d = 0 \text{ для всех } D \in \mathfrak{D}(M, \mathcal{K}).$$

$$\star d \circ d = 0.$$

Итак, если алгебра Ли $\mathfrak{D}(M)$ действует в $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модуле $\mathcal{K}$, то определен комплекс $\{\Omega(M, \mathcal{K}), d\} = \{\Omega^p(M, \mathcal{K}), d^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, называемый *векторнозначным комплексом де Рама*.

2.5. Слоения

2.5.1. Слоения. *Слоение* есть множество с двумя структурами гладкого многообразия, одна из которых слит другую. Подробнее, слоение $\mathbf{X} = (X^m, X^s)$ есть множество X со следующими свойствами.

- ★ На множестве X определена отделимая топология и гладкая структура с атласом $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$, т.е. определено m -мерное гладкое многообразие, которое мы обозначим через X^m (и которое как множество совпадает с X).
- ★ На множестве X определена другая, более сильная, топология и другая гладкая структура с атласом

$$\{S_k \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{R}^s \mid k \in K\},$$

т.е. другое гладкое s -мерное многообразие, которое мы обозначим через X^s (и которое как множество тоже совпадает с X , на практике $1 \leq s < m$).

- ★ Многообразие X^s *слит* многообразие X^m , т.е. для каждой точки $p \in X$ существует карта $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ многообразия X^m , $p \in U$, со следующими свойствами. Представим евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ как прямое произведение

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$, тогда

$$\phi(q) = x = (y, z) \in \phi(U) \text{ для всех } q \in U,$$

$$\text{где } y \in \mathbb{R}^s, z \in \mathbb{R}^{m-s}.$$

Для каждого $c \in \mathbb{R}^{m-s}$ положим

$$\phi(U)|_{z=c} = \{(y, z) \in \phi(U) \mid z = c\}$$

– сечение образа $\phi(U)$ гиперплоскостью $\{z = c\}$. В таких обозначениях требуется, чтобы прообраз $S_c = \phi^{-1}(\phi(U)|_{z=c})$ был открытым подмногообразием (возможно пустым) многообразия X^s , а пара $\{S_c \xrightarrow{\psi_c} \mathbb{R}^s\}$, $S_c \neq \emptyset$, была картой на многообразии X^s , где отображение $\psi_c = \pi_s \circ \phi|_{S_c}$, проекция $\pi_s: \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \rightarrow \mathbb{R}^s$, $(y, z) \mapsto y$, а отображение $\phi|_{S_c}$ – сужение отображения ϕ на S_c .

ПРИМЕР 2.5.1 (тривиальное слоение). Пусть $1 \leq s < m$. Представим евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ как прямое произведение $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$, так что $x = (y, z) \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^{m-s}$. Определим X как множество $\mathbb{R}^m$ без топологии. Многообразие X^m определим как $\mathbb{R}^m$ со стандартной евклидовой топологией и атласом из одной естественной карты $\{X^m \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}^m\}$. Многообразие X^s определим следующим образом. Как множество $X^s = X = \mathbb{R}^m$. Топологию на X^s зададим базисными множествами вида

$$\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^m \mid y \in \mathcal{O}, z = c\},$$

где $\mathcal{O}$ – открытые подмножества из $\mathbb{R}^s$, а $c \in \mathbb{R}^{m-s}$ – фиксированные точки. Атлас на X^s составим из карт $\{S_c \xrightarrow{\psi_c} \mathbb{R}^s \mid c \in \mathbb{R}^{m-s}\}$, где *листья*

$$S_c = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^m \mid y \in \mathbb{R}^s, z = c\},$$

а гомеоморфизмы $\psi_c: S_c \rightarrow \mathbb{R}^s$ действуют по правилу $x = (y, c) \mapsto y$. В качестве упражнения предлагается проверить, что здесь многообразие X^s действительно слоит многообразие X^m .

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим внимание, что здесь многообразие X^s существенно несвязное, состоит из несчетного множества связных компонент S_c , $c \in \mathbb{R}^{m-s}$. Именно так обстоит дело и в общем случае: многообразие X^s состоит из несчетного множества связных компонент, которые называются *листами*.

ПРИМЕР 2.5.2. Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с m -мерным пространством расслоения E , s -мерным типичным слоем F и $(m - s)$ -мерной базой B . По построению через каждую точку $p \in E$ проходит слой $S_{\pi(p)} = \pi^{-1}(\pi(p))$, изоморфный многообразию F и, значит, имеющий структуру s -мерного гладкого многообразия. Очевидно, $S_{\pi(p)} = S_{\pi(q)}$, если $\pi(p) = \pi(q)$, и $S_{\pi(p)} \cap S_{\pi(q)} = \emptyset$, если $\pi(p) \neq \pi(q)$. Введем на множестве E отношение эквивалентности правилом: $p \sim q$, если $\pi(p) = \pi(q)$, и обозначим через $E^s = E/\sim$ множество всех таких классов эквивалентности. Классы эквивалентности естественным образом отождествляются со слоями данного расслоения. Это позволяет определить на E^s структуру гладкого s -мерного многообразия, в которой каждый слой является открытым подмногообразием (этим правилом определяется и топология на E^s). Чтобы проверить, что многообразие E^s слоит многообразие $E^m = E$ следует воспользоваться локальными картами на E , тривиализующими расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. Заметим, что правило $b \mapsto S_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in B$, позволяет также говорить, что многообразие B расслаивает многообразие E и что оно параметризует слои многообразия E^s .

ПРИМЕР 2.5.3. Гладкое отображение $f: E \rightarrow B$ называется *субмерсией* гладкого многообразия E в гладкое многообразие B , если касательное отображение $f_*: TE \rightarrow TB$ послойно сюръективное, т.е. если образ $f_*(T_p E) = T_{f(p)} B$ для всех $p \in E$. Пусть $f: E \rightarrow B$ – субмерсия, где $\dim E = m$, $\dim B = m - s$, из условия, что отображение f есть субмерсия следует, что $0 \leq s \leq m$, мы предполагаем, что $1 \leq s < m$. Каждая точка $p \in E$ порождает слой $S_p = f^{-1}(f(p))$, причем опять $S_p = S_q$, если $f(p) = f(q)$. Можно параметризовать слои точками $b \in B$, полагая $S_b = f^{-1}(b)$, но тогда некоторые слои будут пустыми (если отображение f не сюръективное, т.е. если $\text{im } f \neq B$). Из условия $f_*(T_p E) = T_{f(p)} B$ для всех $p \in E$ следует, что для каждой точки $p \in E$ найдутся карты $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$, $p \in U \subset E$, и $\{V \xrightarrow{\chi} \mathbb{R}^{m-s}\}$, $b = f(p) \in V \subset B$, со следующими свойствами:

- * $f(U) \subset V$;
- * $\phi(q) = x = (y, z) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$ для всех $q \in U$;
- * $\chi(c) = z \in \mathbb{R}^{m-s}$ для всех $c \in V$;
- * $(\chi \circ f \circ \phi^{-1})(y, z) = z \in \chi(V)$ для всех $(y, z) \in \phi(U)$;

$\star \phi(S_c) = \phi(f^{-1}(c)) = \{(y, z) \in \phi(U) \mid z = \chi(c)\}$ для всех $c \in V$ (если, конечно, $S_c \neq \emptyset$).

Отсюда легко выводится, что на множестве E определена структура s -мерного гладкого многообразия E^s , в котором слои $f^{-1}(b)$, $b \in B$, являются открытыми подмногообразиями, и которое слоит исходное многообразие $E = E^m$.

ПРИМЕР 2.5.4. Пусть $y' = f(x, y)$ – обыкновенное дифференциальное уравнение, где $(x, y) \in U$, U – область в $\mathbb{R}^2$, $f(x, y)$ – гладкая функция в U , штрих ' означает производную по x . Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [29]) через каждую точку области U проходит одна и только одна интегральная кривая (решение) данного уравнения, причем в силу гладкой зависимости решения от начальных данных множество U^1 всех интегральных кривых является гладким 1-мерным многообразием, которое слоит гладкое 2-мерное многообразие $U^2 = U$. Другими словами, всякое дифференциальное уравнение указанного вида порождает 1-мерное слоение. Аналогичный результат справедлив и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных ситуация принципиально отличная.

Пусть $\mathbf{X} = (X^m, X^s)$, $\mathbf{Y} = (Y^n, Y^r)$ слоения. Отображение f из множества X в множество Y называется *морфизмом слоений*, если оно одновременно является гладким отображением многообразия X^m в многообразие Y^n и гладким отображением многообразия X^s в многообразие Y^r . В этом случае каждый лист многообразия X^s отображается в соответствующий лист многообразия Y^r .

Таким образом, определена категория слоений.

Аutomорфизмы в категории слоений называются *симметриями*, а группа всех симметрий данного слоения $\mathbf{X} = (X^m, X^s)$ обозначается через $\text{Sym}(\mathbf{X})$.

2.5.2. Распределения. Пусть M – гладкое m -мерное многообразие, TM – его касательное расслоение и $1 \leq s < m$. Гладким s -мерным *распределением* на M называется всякое векторное

подрасслоение $R \xrightarrow{\pi_R} M$ с типичным слоем $\mathbb{R}^s$ касательного расслоения $TM \xrightarrow{\pi} M$. В этом случае коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\iota} & TM \\ & \searrow \pi_R & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

и каждый слой $\pi_R^{-1}(p)$, $p \in M$, отождествляется со своим каноническим образом $\iota(\pi_R^{-1}(p)) \subset T_p M$, т.е. векторное пространство $\pi_R^{-1}(p)$ является подпространством касательного пространства $T_p M$.

Пусть $R \xrightarrow{\pi_R} M$ есть s -мерное распределение на m -мерном многообразии M .

Гладкое отображение $f: X \rightarrow M$ называется *интегралом* распределения $R \xrightarrow{\pi_R} M$, если образ касательного отображения $f_*: TX \rightarrow TM$ лежит в R , иначе, $f_*(T_x X) \subset \pi_R^{-1}(p)$ для всех $x \in X$, $p = f(x)$. В этом случае существует единственное гладкое отображение $\varphi: TX \rightarrow R$ такое, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} TX & & \xrightarrow{f_*} & & M \\ & \searrow \varphi & & \nearrow \iota & \\ & & R & & \\ & & \searrow \pi_R & & \\ X & \xrightarrow{f} & & & M \end{array}$$

Гладкое s -мерное подмногообразие S многообразия M называется *интегральным подмногообразием* распределения $R \xrightarrow{\pi_R} M$, если каноническая инъекция $\iota: S \rightarrow M$ есть интеграл этого распределения, т.е. если для всякой точки $p \in S$ касательное пространство $T_p S = \pi_R^{-1}(p)$.

Распределение $R \xrightarrow{\pi_R} M$ называется *интегрируемым*, если существует слоение $\mathbf{M} = (M^m = M, M^s)$ такое, что листы многообразия M^s суть интегральные многообразия распределения $R \xrightarrow{\pi_R} M$.

ПРИМЕР 2.5.5. Пусть $\mathbf{M} = (M^m, M^s)$ – слоение. Правило, которое каждой точке $p \in M^m$ ставит в соответствие касательное подпространство $R_p = T_p M^s \subset T_p M^m$ определяет на многообразии M^m интегрируемое s -мерное распределение $R \xrightarrow{\pi} M^m$. Для которого листы многообразия M^s и только они являются интегральными многообразиями.

Распределение $R \xrightarrow{\pi_R} M$ называется *инволютивным*, если его гладкие сечения образуют подалгебру Ли алгебры Ли всех касательных полей на многообразии M .

Поясним, что согласно предложению 2.3.5 модуль $\mathfrak{T}(M)$ всех гладких сечений касательного расслоения TM изоморфен модулю дифференцирований $\mathfrak{D}(M)$, модуль $\mathfrak{D}(M)$ имеет также структуру алгебры Ли, которая в силу изоморфизма индуцирует структуру алгебры Ли на модуле сечений $\mathfrak{T}(M)$. По построению модуль $\mathcal{F}(\pi_R)$ всех гладких сечений подрасслоения $R \xrightarrow{\pi_R} M$ является подмодулем модуля $\mathfrak{T}(M)$, но не обязательно подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{T}(M)$. Условие инволютивности и является требованием, чтобы модуль $\mathcal{F}(\pi_R)$ был замкнутым относительно скобки Ли, индуцированной из алгебры Ли $\mathfrak{T}(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.1 (теорема Фробениуса). Пусть M – гладкое m -мерное многообразие, пусть $1 \leq s < m$. Гладкое s -мерное распределение $R \xrightarrow{\pi_R} M$ интегрируемое тогда и только тогда, когда оно инволютивное.

Приведем два полезных критерия инволютивности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.2. Гладкое s -мерное распределение R на M инволютивное тогда и только тогда, когда для каждой точки $q \in M$ имеются открытое $U \subset M$, $q \in U$, и система полей $\{X_1, \dots, X_s\} \subset \mathfrak{T}(U)$ такие, что

- ★ линейная оболочка $\text{span}\{X_{1,p}, \dots, X_{s,p}\} = R_p$ для всех $p \in U$,
- ★ скобка Ли $[X_i, X_j] = \sum_{1 \leq k \leq s} c_{ij}^k \cdot X_k$ для всех $1 \leq i, j \leq s$ и некоторых гладких функций $c_{ij}^k \in C^\infty(U)$.

Для формулировки второго критерия требуется некоторая подготовка.

Будем говорить, что форма $\omega \in \Omega^p(M)$, $p \in \mathbb{N}$, равна нулю на распределении R , и писать $\omega|_R = 0$, если

$$\omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) = 0 \quad \text{для всех} \quad X_1, \dots, X_p \in \mathcal{F}(\pi_R)$$

(мы пользуемся отождествлением модулей $\mathfrak{D}(M)$ и $\mathfrak{T}(M)$, см. с. 150). Множество

$$\mathcal{J}_R(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid \omega|_R = 0, p \in \mathbb{N}\},$$

как легко проверить (сделать это!), является идеалом алгебры $\Omega(M)$. Идеал $\mathcal{J}_R(M)$ будем называть *дифференциально замкнутым*, и писать $d\mathcal{J}_R(M) \subset \mathcal{J}_R(M)$, если $d\omega \in \mathcal{J}_R(M)$ для всех $\omega \in \mathcal{J}_R(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.3. Пусть M – гладкое m -мерное многообразие, пусть $1 \leq s < m$. Гладкое s -мерное распределение R на M инволютивное тогда и только тогда, когда идеал $\mathcal{J}_R(M)$ дифференциально замкнутый.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.4. Гладкое s -мерное распределение R на M инволютивное тогда и только тогда, когда для каждой точки $q \in M$ имеются открытое $U \subset M$, $q \in U$, и система 1-форм $\{\vartheta^1, \dots, \vartheta^{m-s}\} \in \Omega^1(U)$ такие, что

- ★ $\mathcal{J}_R(U) = \{\omega = \sum_{1 \leq i \leq m-s} \chi_i \wedge \vartheta^i \mid \chi_i \in \Omega(U)\},$
- ★ $d\vartheta^i = \sum_{1 \leq j \leq m-s} \chi_j^i \wedge \vartheta^j$ для всех $1 \leq i \leq m-s$ и некоторых 1-форм $\chi_j^i \in \Omega^1(U)$.

Доказательство приведенных критериев интегрируемости можно найти, например, в книгах [27] и [15].

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим внимание, что всякое одномерное ($s=1$) распределение инволютивное и, значит, интегрируемое.

2.6. Группы Ли

2.6.1. Группы Ли. Гладкое многообразие G называется *группой Ли*, если на нем определена структура группы, причем групповые операции являются гладкими отображениями. Подробнее, в этом случае определено гладкое отображение

$$G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \quad \text{для всех } a, b \in G,$$

со следующими свойствами:

- ★ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всех $a, b, c \in G$;
- ★ существует точка $e \in G$ такая, что $e \cdot a = a \cdot e = a$ для всех $a \in G$;

- ★ для каждой точки $a \in G$ существует обратная точка $a^{-1} \in G$ такая, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$, причем отображение $G \rightarrow G$, $a \mapsto a^{-1}$, гладкое.

ПРИМЕР 2.6.1. Множество $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц n -го порядка, $n \in \mathbb{N}$, естественным образом отождествляется с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{n^2}$ и, следовательно, является гладким n^2 -мерным многообразием с атласом из одной карты $\{\text{Mat}(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}^{n^2}\}$. Далее, множество всех вырожденных матриц $S = \{a \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det a = 0\}$ есть замкнутое подмножество в $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$, и, значит, его дополнение – множество всех невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ есть открытое подмногообразие многообразия $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$. Следовательно, $GL(n, \mathbb{R})$ – гладкое многообразие с атласом из одной карты $\{GL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^{n^2}\}$, где отображение ι – каноническое вложение. С другой стороны, $GL(n, \mathbb{R})$ есть группа относительно обычного матричного умножения. Легко проверяется, что групповые операции суть гладкие отображения, так что $GL(n, \mathbb{R})$ – группа Ли. Многообразие $GL(n, \mathbb{R})$ состоит из двух связных компонент $GL_{\pm}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det a \gtrless 0\}$, причем только компонента $GL_+(n, \mathbb{R})$, содержащая единичную матрицу e , является подгруппой группы $GL(n, \mathbb{R})$. Отметим, что аналогичная группа $GL(n, \mathbb{C})$ – группа Ли всех комплексных невырожденных матриц связная.

ПРИМЕР 2.6.2. Группа $GL(n, \mathbb{R})$ имеет подгруппы, играющие важную роль в математической физике. Это

- ★ $SL(n, \mathbb{R}) = \{a \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det a = 1\}$ – специальная группа (всех вещественных матриц с детерминантом 1);
- ★ $O(n, \mathbb{R}) = \{a \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid a \cdot a^t = e\}$ – группа всех ортогональных матриц, где a^t – транспонированная матрица;
- ★ $SO(n, \mathbb{R}) = \{a \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid a \cdot a^t = e, \det a = 1\}$ – специальная группа ортогональных матриц.

Можно проверить, что все эти группы суть группы Ли. Аналогичные подгруппы имеет и группа $GL(n, \mathbb{C})$.

Пусть G, H – группы Ли. Морфизм групп $f: G \rightarrow H$ называется *морфизмом групп Ли*, если f – гладкое отображение гладкого многообразия G в гладкое многообразие H , т.е. морфизм категории гладких многообразий. Таким образом, определена категория групп Ли.

Аналогичным образом определяется антиморфизм групп Ли.

ПРИМЕР 2.6.3. Пусть G – группа Ли, тогда отображение $G \rightarrow G$, $a \mapsto a^{-1}$, есть антиморфизм групп Ли.

2.6.2. Группы Ли преобразований. Пусть G – группа Ли, M – гладкое многообразие. Левое действие L группы G на множестве M (см. с. 20) называется *левым действием группы Ли G на многообразии M* , если отображение

$$L: G \times M \rightarrow M, \quad (a, p) \mapsto L(a, p) = a \cdot p,$$

гладкое, т.е. есть морфизмом категории гладких многообразий. Аналогичным образом определяется и правое действие группы Ли на многообразии. В обоих случаях группа Ли G называется *группой Ли преобразований* многообразия M .

Пусть L – левое действие группы Ли G на гладком многообразии M . Тогда для каждого элемента $a \in G$ определены

- ★ диффеоморфизм (автоморфизм категории гладких многообразий)
 $L_a: M \simeq M, \quad p \mapsto q = a \cdot p \quad \text{для всех } p \in M;$
- ★ автоморфизм категории алгебр
 $L_a^*: \mathcal{C}^\infty(M) \simeq \mathcal{C}^\infty(M),$
 $g \mapsto f = g \circ L_a \quad \text{для всех } g \in \mathcal{C}^\infty(M);$
- ★ автоморфизм категории векторных расслоений
 $(L_a)_*: TM \simeq TM,$
 $X_p \mapsto Y_{a \cdot p} = (L_a)_*(X_p) \quad \text{для всех } p \in M, X \in T_p M;$
- ★ автоморфизм категории алгебр Ли (см. предложение 2.3.7)
 $(L_a)_*: \mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}(M), X \mapsto Y = (L_a)_*(X) = (L_a)_* \circ X \circ L_{a^{-1}},$
 для всех $X \in \mathfrak{X}(M);$
- ★ автоморфизм категории алгебр Ли (см. предложение 2.3.7)
 $(L_a)_*: \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{D}(M),$
 $\xi \mapsto \eta = (L_a)_*(\xi) = L_{a^{-1}}^* \circ \xi \circ L_a^* \quad \text{для всех } \xi \in \mathfrak{D}(M);$
- ★ автоморфизм категории внешних алгебр
 $L_a^*: \Omega(M) \simeq \Omega(M), \quad \omega \mapsto L_a^*(\omega), \text{ где}$
 $L_a^*(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)(p) = \omega((L_a)_*(X_1) \wedge \cdots \wedge (L_a)_*(X_n))(a \cdot p)$
 для всех $n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega^n(M), X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M), p \in M.$

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что здесь $d \circ L_a^* = L_a^* \circ d$ для всех $a \in G$ (см. предложение 2.4.12).

Касательное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ называется *левоинвариантным* (инвариантным относительно левого действия группы G), если

$(L_a)_*(X) = X$, т.е. если $X \circ L_a = (L_a)_* \circ X$ для всех $a \in G$. Соответственно, дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ называется *левоинвариантным*, если $(L_a)_*(\xi) = \xi$, т.е. если $L_a^* \circ \xi = \xi \circ L_a^*$, для всех $a \in G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.1. *Множество ${}_G\mathfrak{T}(M)$ всех левоинвариантных касательных полей на M есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{T}(M)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу предложения 2.3.7 в этом случае

$$(L_a)_*([X, Y]) = [(L_a)_*(X), (L_a)_*(Y)] = [X, Y]$$

для всех $a \in G$, $X, Y \in {}_G\mathfrak{T}(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.2. *Пусть точки $p, q \in M$ лежат на одной орбите. Тогда для любого касательного поля $X \in {}_G\mathfrak{T}(M)$ справедливо равенство*

$$X_q = (L_a)_*(X_p),$$

где элемент $a \in G$ такой, что $q = a \cdot p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что указанный элемент a существует (возможно, не единственный) в силу определения орбиты точки относительно действия группы. Далее, в этом случае

$$X_q = ((L_a)_*(X))_q = ((L_a)_* \circ X \circ L_{a^{-1}})_q = (L_a)_*(X_{a^{-1} \cdot q}) = (L_a)_*(X_p).$$

Пусть L – левое действие группы Ли G на гладком многообразии M .

Форма $\omega \in \Omega^n(M)$, $n \in \mathbb{N}$, называется *левоинвариантной формой*, если $L_a^*(\omega) = \omega$ для всех $a \in G$. В этом случае

$$\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)(p) = \omega((L_a)_*(X_1) \wedge \cdots \wedge (L_a)_*(X_n))(a \cdot p)$$

для всех $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{T}(M)$, $p \in M$, $a \in G$. Множество всех левоинвариантных форм на M обозначим через

$${}_G\Omega(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \Omega_G^n(M),$$

где

$${}_G\Omega^0(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid f(a \cdot p) = f(p) \text{ для всех } a \in G, p \in M\}$$

– множество всех гладких функций на многообразии M , постоянных на орбитах группы G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.3. Пусть

$$\omega \in {}_G\Omega^n(M), \quad X_1, \dots, X_n \in {}_G\mathfrak{T}(M), \quad n \in \mathbb{N},$$

тогда

$$\omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_n)(a \cdot p) = \omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_n)(p) \quad \text{для всех } a \in G, p \in M.$$

Другими словами, в этом случае функция $\omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_n)$ постоянна на орбитах группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, здесь

$$L_a^*(\omega) = \omega, \quad (L_a)_*(X_i) = X_i \quad \text{для всех } a \in G, 1 \leq i \leq n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.4. Множество всех левоинвариантных форм ${}_G\Omega(M)$ есть дифференциально замкнутая подалгебра внешней алгебры $\Omega(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно (см. с. 153),

$$L_a^*(\omega \wedge \chi) = L_a^*(\omega) \wedge L_a^*(\chi) = \omega \wedge \chi$$

для всех $\omega \in {}_G\Omega^n(M)$, $\chi \in {}_G\Omega^r(M)$, $a \in G$, $n, r \in \mathbb{Z}_+$, так что ${}_G\Omega(M)$ – подалгебра алгебры $\Omega(M)$. Далее, согласно предложению 2.4.12

$$L_a^*(d(\omega)) = d(L_a^*(\omega)) = d(\omega)$$

$$\text{для всех } \omega \in {}_G\Omega^n(M), a \in G, n \in \mathbb{Z}_+,$$

откуда $d_G\Omega(M) \subset {}_G\Omega(M)$, т.е. подалгебра ${}_G\Omega(M)$ дифференциально замкнутая.

2.6.3. Алгебра Ли группы Ли. Пусть G – группа Ли, действие l – ее левый сдвиг,

$$l: G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto l_a(b) = a \cdot b$$

(см. пример 1.2.4).

Алгебра Ли ${}_G\mathfrak{T}(G)$ всех левоинвариантных касательных полей на многообразии G называется алгеброй Ли группы Ли G .

По построению группа Ли G действует на многообразии G транзитивно и свободно, множество орбит состоит из одной орбиты – самого многообразия G , так что в силу предложения 2.6.2 каждое поле $X \in {}_G\mathfrak{T}(G)$ однозначно определяется своим значением в любой наперед заданной точке. Из соображений удобства, обычно в качестве такой точки выбирают единицу $e \in G$. В этом случае, для всякого поля $X \in {}_G\mathfrak{T}(G)$ предложение 2.6.2 дает представление

$$X_a = (l_a)_*(X_e) = X_e \circ l_a^* \quad \text{для всех } a \in G,$$

где

$$\begin{aligned} l_a^*: \mathcal{C}^\infty(a) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(e), \\ \mathbf{f}_a &\mapsto \mathbf{g}_e = l_a^*(\mathbf{f}_a) = \mathbf{f}_a \circ l_a \quad \text{для всех } \mathbf{f}(x) \in \mathcal{C}^\infty(a) \end{aligned}$$

(см. с. 135). Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.5. Пусть G – группа Ли и ${}_G\mathfrak{T}(G)$ – ее алгебра Ли, тогда

$${}_G\mathfrak{T}(G) = \{X \in \mathfrak{T}(G) \mid X_a = (l_a)_*(X_e) \text{ для всех } a \in G\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо лишь проверить, что всякое касательное поле указанного вида на G левоинвариантное. Предлагается проделать это в качестве упражнения.

СЛЕДСТВИЕ 2.6.1. Пусть G – группа Ли. Правило $X \mapsto X_e$, определяет изоморфизм линейных пространств

$${}_G\mathfrak{T}(G) \simeq T_e G,$$

и индуцирует на касательном пространстве $T_e G$ структуру алгебры Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ. На практике алгебры Ли ${}_G\mathfrak{T}(G)$ и $T_e G$, как правило, отождествляют и обозначают через $\mathfrak{g}$. Отметим, что имеются и другие, эквивалентные, определения алгебры Ли данной группы Ли (см., например, [17]). Обратим также внимание, что левоинвариантные поля на группе не выдерживают умножение на функции, множество ${}_G\mathfrak{T}(G)$ есть линейное пространство, а не $\mathcal{C}^\infty(G)$ -модуль.

ПРИМЕР 2.6.4. Для группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$ (см. пример 2.6.1) алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}(n, \mathbb{R})$, для группы Ли $SL(n, \mathbb{R})$ (см. пример 2.6.2) алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr}(a) = 0\}$, где $\text{Tr}(a)$ – след матрицы a , для группы Ли $O(n, \mathbb{R})$ алгебра Ли $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid a + a^t = 0\}$, для группы Ли $SO(n, \mathbb{R})$ алгебра Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$). Во всех случаях скобка Ли есть матричный коммутатор. Обратим внимание, что у групп $O(n, \mathbb{R})$ и $SO(n, \mathbb{R})$ алгебры Ли одинаковые, это не случайно, поскольку по алгебре Ли восстанавливается лишь связная компонента группы Ли, а $SO(n, \mathbb{R})$ и есть связная компонента группы $O(n, \mathbb{R})$. Аналогичные результаты справедливы и для комплексных матричных групп.

Пусть G – группа Ли и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Пусть m – размерность многообразия G . Очевидно, и размерность линейного пространства $\mathfrak{g} = T_e G$ также равна m (коротко, $\dim G = \dim \mathfrak{g} = m$). В линейном пространстве $\mathfrak{g}$ выберем произвольный базис $\{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathfrak{g}$, тогда согласно определению алгебры Ли найдутся числа $c_{\mu\nu}^\lambda \in \mathbb{R}$, $1 \leq \lambda, \mu, \nu \leq m$, такие, что

$$[g_\mu, g_\nu] = \sum_{1 \leq \lambda \leq m} c_{\mu\nu}^\lambda g_\lambda \quad \text{для всех } 1 \leq \mu, \nu \leq m.$$

Числа $c_{\mu\nu}^\lambda$ называются *структурными константами* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и удовлетворяют следующим равенствам, полностью характеризующими алгебру Ли в данном базисе:

- ★ $c_{\mu\nu}^\lambda + c_{\nu\mu}^\lambda = 0$ для всех $1 \leq \lambda, \mu, \nu \leq m$ (кососимметричность);
- ★ $\sum_{1 \leq \beta \leq m} (c_{\beta\lambda}^\alpha c_{\mu\nu}^\beta + c_{\beta\mu}^\alpha c_{\nu\lambda}^\beta + c_{\beta\nu}^\alpha c_{\lambda\mu}^\beta) = 0$ для всех $1 \leq \alpha, \lambda, \mu, \nu \leq m$ (тождество Якоби).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.6. *Каждый автоморфизм $\Phi: G \simeq G$ группы Ли G индуцирует автоморфизм $\Phi_*: \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$ ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.3.7 автоморфизм Φ индуцирует автоморфизм $\Phi_*: \mathfrak{I}(G) \simeq \mathfrak{I}(G)$ алгебры Ли касательных полей на G , и надо лишь проверить, что $\Phi_*: {}_G \mathfrak{I}(G) \rightarrow {}_G \mathfrak{I}(G)$. Для этого сначала заметим, что формула $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$, $a, b \in G$, влечет равенство $\Phi \circ l_a = l_{\Phi(a)} \circ \Phi$, т.е. $\Phi \circ l_{\Phi^{-1}(a)} = l_a \circ \Phi$, для всех $a \in G$. Пусть теперь $A \in {}_G \mathfrak{I}(G)$, так что $A_{a \cdot b} = (l_a)_*(A_b)$ для всех $a, b \in G$ и $B = \Phi_*(A)$, $B_a = \Phi_*(A_{\Phi^{-1}(a)})$

для всех $a \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} B_{a \cdot b} &= \Phi_*(A_{\Phi^{-1}(a \cdot b)}) = \Phi_*(A_{\Phi^{-1}(a) \cdot \Phi^{-1}(b)}) = (\Phi \circ l_{\Phi^{-1}(a)})_*(A_{\Phi^{-1}(b)}) \\ &= (l_a \circ \Phi)_*(A_{\Phi^{-1}(b)}) = (l_a)_*(B_b) \quad \text{для всех } a, b \in G, \end{aligned}$$

что и требовалось.

ПРИМЕР 2.6.5. Пусть G – алгебра Ли и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Для каждого $a \in G$ положим $\text{ad}(a) = l_a \circ r_{a^{-1}} = r_{a^{-1}} \circ l_a$ (см. пример 1.2.5), так что $\text{ad}(a)(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ для всех $x \in G$. Согласно предложению 2.6.6 автоморфизм $\text{ad}(a)$ индуцирует автоморфизм $\text{ad}(a)_*$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что в свою очередь определяет действие $\text{ad}_*: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$, называемое *присоединенным представлением* группы Ли G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть G – группа Ли, действие l – ее левый сдвиг, ${}_G\Omega(G)$ – множество всех левоинвариантных форм на G . Согласно предложению 2.6.4 ${}_G\Omega(G)$ – дифференциально замкнутая подалгебра внешней алгебры $\Omega(G)$. Обозначим через $\mathfrak{g}^* = T_e^*G$ кокасательное пространство гладкого многообразия G в точке $e \in G$, и пусть $\wedge \mathfrak{g}^* = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} \wedge^p \mathfrak{g}^*$ – его внешняя алгебра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.7. *Имеет место изоморфизм внешних алгебр*

$${}_G\Omega(G) \simeq \wedge \mathfrak{g}^*, \quad \omega \mapsto \omega_e.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $p = 0$. По определению

$$\begin{aligned} {}_G\Omega^0(G) &= \{f \in \mathcal{C}^\infty(G) \mid f(a \cdot b) = f(b) \text{ для всех } a, b \in G\} \simeq \\ &\simeq \mathbb{R} = \wedge^0 \mathfrak{g}^*, \end{aligned}$$

поскольку группа G действует на многообразии G транзитивно. Пусть теперь $\omega \in {}_G\Omega^p(G)$, $p \in \mathbb{N}$, тогда по определению левоинвариантности

$$\begin{aligned} \omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)(a) &= \omega_e(Y_{1,e} \wedge \cdots \wedge Y_{p,e}) \\ \text{для всех } X_1, \dots, X_p &\in \mathfrak{X}(G), a \in G, \end{aligned}$$

где $\omega_e \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$, $Y_{i,e} = (l_{a^{-1}})_*(X_{i,a}) \in \mathfrak{g}$, $1 \leq i \leq p$. Таким образом, всякая левоинвариантная форма полностью определяется своим значением в точке $e \in G$ (как обычно, мы отождествляем дифференциальные формы и сечения соответствующего расслоения).

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим внимание, что здесь

$$\omega(A_1 \wedge \cdots \wedge A_p)(a) = \text{const}$$

для всех $\omega \in {}_G\Omega^p(G)$, $A_1, \dots, A_p \in {}_G\mathfrak{T}(G)$,

поскольку группа G действует на многообразии G транзитивно. Отметим также, что левоинвариантные формы на группе не поддерживают умножение на функции, множество ${}_G\Omega(G)$ есть линейное пространство, а не $\mathcal{C}^\infty(G)$ -модуль.

Согласно предложению 2.6.4 на внешней алгебре ${}_G\Omega(G)$ определен дифференциал $d = d_G: {}_G\Omega(G) \rightarrow {}_G\Omega(G)$. Изоморфизм ${}_G\Omega(G) \simeq \wedge \mathfrak{g}^*$ (см. предложение 2.6.7) переносит этот дифференциал на внешнюю алгебру $\wedge \mathfrak{g}^*$. Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.8. *Определен дифференциал*

$$d = d_{\mathfrak{g}}: \wedge \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge \mathfrak{g}^*$$

такой, что для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} {}_G\Omega^p(G) & \simeq & \wedge^p \mathfrak{g}^* \\ d = d_G \downarrow & & \downarrow d = d_{\mathfrak{g}} \\ {}_G\Omega^{p+1}(G) & \simeq & \wedge^{p+1} \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Именно,

$$d_{\mathfrak{g}}c = 0 \quad \text{для всех } c \in \wedge^0 \mathfrak{g}^* = \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} (d_G \chi)(A_0 \wedge \cdots \wedge A_p) &= \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \chi([A_i, A_j] \wedge \cdots \check{A}_i \cdots \check{A}_j \cdots \wedge A_p) \end{aligned}$$

для всех $p \in \mathbb{N}$, $\chi \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$, $A_0, \dots, A_p \in \mathfrak{g}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего напомним, что ${}_G\Omega^0(G) \simeq \mathbb{R}$ и, значит, $d_G \omega = 0$ для всех $\omega \in {}_G\Omega^0(G)$. Далее, в случае $p \in \mathbb{N}$ следует воспользоваться стандартной формулой для внешнего дифференциала (см. предложение 2.4.7), изоморфизмом ${}_G\mathfrak{T}(G) \simeq \mathfrak{g}$ (см. следствие 2.6.1) и учесть приведенное выше замечание.

СЛЕДСТВИЕ 2.6.2. *Имеет место уравнение Маурера–Картана:*

$$d\omega(A \wedge B) = -\frac{1}{2} \omega([A, B]) \quad \text{для всех } \omega \in {}_G\Omega^1(G), A, B \in {}_G\mathfrak{T}(G).$$

2.6.4. Локальные однопараметрические группы преобразований. Пусть M – гладкое многообразие, $\dim M = m$. Говорят, что задана *локальная однопараметрическая группа локальных преобразований* φ (иначе, *локальный поток*), если заданы открытое подмножество $U \subset M$, интервал $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, и гладкое отображение $\varphi: I_\epsilon \times U \rightarrow M$, $(t, p) \mapsto \varphi_t(p)$, такие, что

- ★ для каждого $t \in I_\epsilon$ отображение $\varphi_t: U \rightarrow M$, $p \mapsto \varphi_t(p)$, есть диффеоморфизм открытого подмногообразия U на образ $\varphi_t(U)$;
- ★ если $t, s, t+s \in I_\epsilon$ и $p, \varphi_s(p) \in U$, то $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$.

По построению $\varphi_0 = \text{id}_U$, $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$, для всех $t \in I_\epsilon$.

Локальная однопараметрическая группа локальных преобразований $\varphi: I_\epsilon \times U \rightarrow M$ называется *однопараметрической группой преобразований* многообразия M (иначе, *поток*), если $I_\epsilon = \mathbb{R}$ и $U = M$.

Каждый локальный поток $\varphi: I_\epsilon \times U \rightarrow M$ порождает касательное поле $X \in \mathfrak{T}(U)$, где

$$X(f)(p) = \left. \frac{d}{dt} f(p(t)) \right|_{t=0} \quad \text{для всех } f \in C^\infty(U), p \in U,$$

кривая $p(t) = \varphi_t(p)$, $t \in I_\epsilon \subset M$ (в частности, $p(0) = p$, и коротко можно записать $\dot{p}(0) = X_p$).

Верно и обратное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.9. Пусть даны касательное поле $X \in \mathfrak{T}(M)$ и точка $u \in M$. Существуют $\epsilon > 0$, открытое подмножество $U \subset M$, $u \in U$, и локальный поток $\varphi: I_\epsilon \times U \rightarrow M$, индуцирующий поле X на U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем карту $V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m$ на M , $u \in V$, с координатами $x = \psi(p)$, $p \in V$. В этом случае сужение

$$X|_V = \xi = \sum_{1 \leq \mu \leq m} \xi^\mu \cdot \partial_{x^\mu}, \quad \xi^\mu = \xi^\mu(x) \in C^\infty(\psi(V)).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{df^\mu(t, x)}{dt} = \xi^\mu(f(t, x)), \quad f^\mu(0, x) = x, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

для неизвестной функции $f = (f^1(t, x), \dots, f^m(t, x))$. Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений для $a = \psi(u)$

найдутся $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что эта задача Коши имеет единственное решение $f(t, x) \in \mathcal{C}^\infty(I_\epsilon \times B_\delta)$, где $B_\delta = \{|x - a| < \delta\}$. Положим $U = \psi^{-1}(B_\delta)$, $\varphi = \varphi_t(p) = f(t, \psi(p))$, тогда $u \in U \subset V$ и индуцированное гладкое отображение $\varphi: I_\epsilon \times U \rightarrow M$ задает искомую локальную группу преобразований. Свойство

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p)) \quad \text{для всех } t, s, t+s \in I_\epsilon, \quad \text{и } p, \varphi_s(p) \in U,$$

есть следствие того факта, что наша система $df/dt = \xi(f)$ автономная, т.е. ее правая часть явно не зависит от переменной $t \in I_\epsilon$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.10. Пусть $\Phi: M \simeq M$ — диффеоморфизм гладкого многообразия M , и пусть локальный поток $\varphi_t: U \rightarrow M$, $t \in I_\epsilon$, порождает касательное поле $X \in \mathfrak{X}(U)$. Тогда индуцированный локальный поток $\psi_t = \Phi \circ \varphi_t \circ \Phi^{-1}: V \rightarrow M$, $V = \Phi(U)$, $t \in I_\epsilon$, порождает поле $Y = \Phi_*(X) = \Phi_* \circ X \circ \Phi^{-1} \in \mathfrak{X}(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для всех $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $q \in V$ имеем

$$Y(g)(q) = \left. \frac{d}{dt} g(q(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(p(t)) \right|_{t=0} = X(f)(p),$$

где $f = \Phi^*(g) = g \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $p = \Phi^{-1}(q) \in U$, $q(t) = \psi_t(q)$, $p(t) = \varphi_t(p)$, что и требуется.

СЛЕДСТВИЕ 2.6.3. Касательное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ инвариантно относительно диффеоморфизма $\Phi: M \simeq M$, т.е. $\Phi_*(X) = X$, тогда и только тогда, когда диффеоморфизм Φ коммутирует с каждым локальным потоком $\varphi_t: U \rightarrow M$, $t \in I_\epsilon$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.11. Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $\varphi_t: U \rightarrow M$ — локальный поток, порождающий касательное поле X , тогда коммутатор

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - (\varphi_t)_*(Y)),$$

или, подробнее,

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p - (\varphi_t)_*(Y_q)) \quad \text{для всех } p \in U, \quad q = \varphi_t^{-1}(p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится средствами классического анализа, см., например, [18].

2.6.5. Экспоненциальное отображение. Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Пусть $A \in \mathfrak{g} =_G \mathfrak{T}(G)$. Как касательное поле A порождает локальный поток $\varphi: I_\epsilon \times U \rightarrow G$, где $U \subset G$, $e \in U$, причем в данном случае

$$\varphi_t(a) = (\varphi_t \circ l_a)(e) = (l_a \circ \varphi_t)(e) = a \cdot \varphi_t(e) \quad \text{для всех } t \in I_\epsilon, a \in U,$$

поскольку поле A левоинвариантное (см. следствие 2.6.3). Более того, локальный поток φ распространяется на все многообразие G , $\varphi: I_\epsilon \times G \rightarrow G$, правилом $\varphi_t(a) = a \cdot \varphi_t(e)$ для всех $t \in I_\epsilon$, $a \in G$. Фиксируем теперь произвольное λ , $0 < \lambda < \epsilon$, тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ найдутся $n \in \mathbb{Z}$ и $\tau \in I_\epsilon$ такие, что $t = n\lambda + \tau$. Для каждого $a \in G$ положим

$$\varphi_t(a) = a \cdot \varphi_t(e) = a \cdot \varphi_{n\lambda+\tau}(e) = a \cdot \varphi_\lambda(e)^n \cdot \varphi_\tau(e).$$

Можно проверить, что это правило не зависит от выбора λ и представления $t = n\lambda + \tau$, что оно однозначно продолжает локальный поток φ до глобального потока $\varphi: \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ и что порождаемое этим глобальным потоком касательное поле совпадает с исходным левоинвариантным полем $A \in \mathfrak{g}$. Итак, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.12. *Каждое левоинвариантное поле $A \in \mathfrak{g}$ порождает поток $\varphi = \varphi^A: \mathbb{R} \times G \rightarrow G$,*

$$\varphi_t^A(a) = a \cdot e^{tA} \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}, a \in G,$$

где положено $e^{tA} = \varphi_t(e)$. Другими словами, $\varphi_t^A = r_{e^{tA}}$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли и $A \in \mathfrak{g}$. Кривая $\{e(t) = e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset G$ есть однопараметрическая коммутативная подгруппа группы G , поскольку

$$\begin{aligned} e(s+t) &= \varphi_{s+t}^A(e) = \varphi_s^A(\varphi_t^A(e)) = \varphi_t^A(e) \cdot \varphi_s^A(e) \\ &= e(t) \cdot e(s) = e(t+s) = e(s) \cdot e(t) \quad \text{для всех } s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

В частности, определено экспоненциальное отображение

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad A \mapsto e^A = e(1).$$

Предложение 2.6.11 для левоинвариантных полей на группе принимает вид

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.13. Пусть $A, B \in \mathfrak{g}$, тогда коммутатор

$$[A, B] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B - (r_{e^{tA}})_*(B)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B - \text{ad}(e^{-tA})_*(B)),$$

в частности,

$$[A, B]_e = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B_e - \text{ad}(e^{-tA})_*(B_e)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует учесть, что здесь $\varphi_t = r_{e^{tA}}$, $(l_{e^{-tA}})_*(B) = B$ и что $\text{ad}(e^{-tA})(e) = e$.

2.6.6. Правое действие группы на многообразии.

Пусть M – гладкое многообразие, группа Ли G действует на M справа, $R: M \times G \rightarrow M$, $(p, a) \mapsto R(p, a) = p \cdot a$. В частности,

★ для каждого $a \in G$ определены диффеоморфизмы:

$$R_a: M \simeq M, p \mapsto p \cdot a, \quad l_a: G \simeq G, b \mapsto a \cdot b, \quad r_a: G \simeq G, b \mapsto b \cdot a,$$

★ для каждого $p \in M$ определено гладкое отображение

$$L_p: G \rightarrow M, a \mapsto p \cdot a,$$

причем $L_p \circ l_a = L_{p \cdot a}$ и $L_p \circ r_a = R_a \circ L_p$, т.е. следующие диаграммы коммутативны

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{l_a} & G \\ & \searrow L_{p \cdot a} & \downarrow L_p \\ & & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{r_a} & G \\ L_p \downarrow & & \downarrow L_p \\ M & \xrightarrow{R_a} & M \end{array}$$

Далее, каждому левоинвариантному полю $A \in \mathfrak{g}$ отвечает однопараметрическая подгруппа e^{tA} , $t \in \mathbb{R}$, группы Ли G , действующая на многообразии M справа и порождающая на M поток

$$R_{e^{tA}}: M \simeq M, \quad p \mapsto R_{e^{tA}}(p) = R(p, e^{tA}) = p \cdot e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Этот поток индуцирует на M касательное поле $A^* \in \mathfrak{X}(M)$, называемое *фундаментальным*, где

$$A^*(f)(p) = \left. \frac{d}{dt} f(p \cdot e^{tA}) \right|_{t=0} \quad \text{для всех } p \in M, f \in C^\infty(M).$$

Таким образом, определено каноническое отображение

$$\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad A \mapsto \sigma(A) = A^*.$$

Гладкое отображение $L_p: G \rightarrow M$, $p \in M$, имеет касательное отображение $(L_p)_*: TG \rightarrow TM$, в частности,

$$(L_p)_*: T_e G = \mathfrak{g} \rightarrow T_p M.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.14. *Имеет место равенство*

$$A_p^* = (L_p)_*(A_e) \quad \text{для всех } p \in M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $f \in C^\infty(M)$ и $p \in M$, тогда

$$\begin{aligned} A_p^*(\mathbf{f}_p) &= A^*(f)(p) = \left. \frac{d}{dt} f(p \cdot e^{tA}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(L_p(e^{tA})) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (L_p^*(f))(e^{tA}) \right|_{t=0} = A(L_p^*(f))(e) = (L_p)_*(A_e)(\mathbf{f}_p), \end{aligned}$$

что и требуется доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.15. *Пусть группа Ли G действует на многообразии M справа, тогда отображение $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{T}(M)$ есть морфизм алгебр Ли. Более того, если G действует на M эффективно, то σ есть мономорфизм (т.е. его ядро тривиальное), а если свободно, то $A_p^* \neq 0$ для всех $A \in \mathfrak{g}$, $A \neq 0$, $p \in M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что коммутатор двух фундаментальных полей есть фундаментальное поле, порожденное коммутатором исходных левоинвариантных полей. Именно, пусть $A, B \in \mathfrak{g}$, $R_{e^{tA}}$ – поток, порождающий фундаментальное поле A^* . Тогда согласно предложению 2.6.11 для всех $p \in M$ имеем

$$[A^*, B^*]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B^* - (R_{e^{tA}})_*(B^*))_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B^* - (R_{e^{tA}})_*(B_q^*)),$$

где $q = p \cdot e^{-tA}$. Далее, в силу предложения 2.6.14

$$\begin{aligned} (R_{e^{tA}})_*(B_q^*) &= (R_{e^{tA}} \circ L_q)_*(B_e) = (L_q \circ r_{e^{tA}})_*(B_e) \\ &= (L_p \circ l_{e^{-tA}} \circ r_{e^{tA}})_*(B_e) = (L_p)_*(\text{ad}(e^{-tA})_*(B_e)), \end{aligned}$$

так что

$$[A^*, B^*]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (L_p)_*(B_e - \text{ad}(e^{-tA})_*(B_e)) = (L_p)_*([A, B]_e)$$

в силу предложения 2.6.13. Согласно предложению 2.6.14 отсюда следует доказываемое утверждение. Остальные утверждения предлагается доказать самостоятельно или посмотреть, например, в книге [18].

2.7. Связности

2.7.1. Связности в гладких расслоениях.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F , и пусть $TE \xrightarrow{\pi_*} TB$ – соответствующее касательное отображение, так что определена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{\pi_*} & TB \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ E & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

В силу локальной тривиальности расслоения отображение π_* сюръективное, т.е. его образ $\text{im } \pi_* = TB$, однако оно имеет нетривиальное ядро

$$\begin{aligned} \ker \pi_* &= VE = \bigcup_{p \in E} V_p E, \\ V_p E &= \{X_p \in T_p E \mid \pi_*(X_p) = 0\} = T_p S_{\pi(p)}, \end{aligned}$$

где $S_x = \pi^{-1}(x)$ – слой в E над точкой $x \in B$. Касательные векторы $X_p \in V_p E$, $p \in E$, называются *вертикальными*. По построению множество VE есть подрасслоение касательного расслоения TE , его гладкие сечения называются *вертикальными полями* или (отождествляя касательные поля и дифференцирования) *вертикальными дифференцированиями*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.1. *Касательное поле $X \in \mathfrak{Z}(E)$ есть вертикальное дифференцирование тогда и только тогда, когда композиция $X \circ \pi^* = 0$, т.е. когда $X(\pi^*(\phi)) = 0$ для всех $\phi \in C^\infty(B)$. В частности, множество $\mathfrak{V}(E)$ всех вертикальных полей на E есть $C^\infty(E)$ -модуль и подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{Z}(E)$ всех касательных полей на E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\mathfrak{V}(E)$ есть $\mathcal{C}^\infty(E)$ -модуль как множество сечений векторного расслоения, а для доказательства того что $\mathfrak{V}(E)$ есть алгебра Ли следует воспользоваться следствием 2.3.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.7.1. *Подрасслоение $VE \xrightarrow{\pi_V} E$, где $\pi_V = \pi_E|_{VE}$, есть инволютивное и, значит, интегрируемое, распределение на E , причем порождаемое им слоение описано в примере 2.5.2 выше.*

Подрасслоение $HE \xrightarrow{\pi_H} E$, где $\pi_H = \pi_E|_{HE}$, касательного расслоения TE называется *связностью* на E , если

$$TE = VE \oplus HE,$$

где прямая сумма есть послойная прямая сумма линейных пространств, т.е.

$$T_p E = V_p E \oplus H_p E \quad \text{для всех } p \in E.$$

(В качестве упражнения полезно дать категорное определение такой прямой суммы.) Касательные векторы $X_p \in H_p E$, $p \in E$, называются *горизонтальными*, гладкие сечения подрасслоения HE называются *горизонтальными полями*, множество $\mathfrak{H}(E)$ всех горизонтальных полей на E есть $\mathcal{C}^\infty(E)$ -модуль.

По построению $\mathfrak{T}(E) = \mathfrak{V}(E) \oplus \mathfrak{H}(E)$, где прямая сумма берется в категории $\mathcal{C}^\infty(E)$ -модулей. Следовательно, определены проекции

$$\begin{aligned} \star v: \mathfrak{T}(E) &\rightarrow \mathfrak{V}(E), & X &\mapsto v(X), \\ \star h: \mathfrak{T}(E) &\rightarrow \mathfrak{H}(E), & X &\mapsto h(X), \end{aligned}$$

так что для всякого $X \in \mathfrak{T}(E)$ имеет место разложение

$$X = v(X) + h(X), \quad \text{где } v(X) \in \mathfrak{V}(E), \quad h(X) \in \mathfrak{H}(E).$$

Отметим также, что если распределение HE инволютивное, то на E определена вторая структура слоения, дополнительная к исходной, т.е. в этом случае на E определено *двойное слоение*, при этом через каждую точку многообразия E проходят два слоя – вертикальный и горизонтальный.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F , и пусть HE – связность на E . В этом случае определена последовательность расслоений

$$0 \longrightarrow VE \longrightarrow TE = VE \oplus HE \xrightarrow{\pi_*} TB \longrightarrow 0.$$

Подробнее, для каждой точки $p \in E$ определена точная последовательность векторных пространств

$$0 \longrightarrow V_p E \longrightarrow T_p E = V_p E \oplus H_p E \xrightarrow{\pi_*} T_{\pi(p)} B \longrightarrow 0.$$

В частности, определены изоморфизмы векторных пространств

$$\pi_*|_{HE}: H_p E \simeq T_{\pi(p)} B \quad \text{для всех } p \in E,$$

причем следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} HE & \xrightarrow{\pi_*|_{HE}} & TB \\ \pi_H \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ E & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

Это позволяет каждому касательному полю $X \in \mathfrak{T}(B)$ поставить в соответствие его *горизонтальный лифт* $X^h \in \mathfrak{H}(E)$ – горизонтальное поле, задаваемое правилом

$$X_p^h = (\pi_*|_{HE})^{-1}(X_{\pi(p)}) \quad \text{для всех } p \in E.$$

Другими словами, X^h – единственное поле на E такое, что

$$X^h \in \mathfrak{H}(E) \quad \text{и} \quad \pi_*(X_p^h) = X_p \quad \text{для всех } p \in E,$$

иначе, $X^h \in \mathfrak{H}(E)$ и $X^h \sim_\pi X$ (см. с. 137).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.2. *Отображение*

$$^h: \mathfrak{T}(B) \rightarrow \mathfrak{H}(E), \quad X \mapsto X^h,$$

обладает следующими характерными свойствами:

- ★ $(f \cdot X + g \cdot Y)^h = \pi^*(f) \cdot X^h + \pi^*(g) \cdot Y^h$
для всех $f, g \in C^\infty(B)$, $X, Y \in \mathfrak{T}(B)$;
- ★ $[X, Y]^h = h([X^h, Y^h])$ для всех $X, Y \in \mathfrak{T}(B)$;
- ★ $\text{im } ^h = \{Y \in \mathfrak{H}(E) \mid \pi_*(Y_p) = \pi_*(Y_q) \text{ для всех } \pi(p) = \pi(q)\}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, первое утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} (\pi^*(f) \cdot X^h + \pi^*(g) \cdot Y^h)_p &= \pi^*(f)(p) \cdot X_p^h + \pi^*(g)(p) \cdot Y_p^h \\ &= f(b) \cdot (\pi_*|_{HE})^{-1}(X_b) + g(b) \cdot (\pi_*|_{HE})^{-1}(Y_b) \\ &= (\pi_*|_{HE})^{-1}(f \cdot X + g \cdot Y)_b \\ &= (f \cdot X + g \cdot Y)_p^h, \quad \text{для всех } p \in E, \quad b = \pi(p) \in B. \end{aligned}$$

Для доказательства второго утверждения следует заметить, что по построению $X^h \sim_\pi X$, $Y^h \sim_\pi Y$, а $[X^h, Y^h] \sim_\pi [X, Y]$ в силу следствия 2.3.1. Очевидно, $\pi_*(h([X^h, Y^h])_p) = \pi_*([X, Y]_p)$ для всех $p \in E$. Таким образом,

$$h([X^h, Y^h]) \in \mathfrak{H}(E) \quad \text{и} \quad h([X^h, Y^h]) \sim_\pi [X, Y],$$

так что

$$[X, Y]^h = h([X^h, Y^h]),$$

поскольку горизонтальный лифт определен однозначно. Для проверки третьего утверждения достаточно заметить, что в случае выполнения условия $\pi_*(Y_p) = \pi_*(Y_q)$ для всех $p, q \in E$ таких, что $\pi(p) = \pi(q)$, горизонтальное поле $Y = X^h$, где $X \in \mathfrak{X}(B)$ определено условием $X_b = \pi_*(Y_p)$ для каждого $b \in B$ и произвольного $p \in \pi^{-1}(b)$.

Гладкая кривая $\gamma^h: I \rightarrow E$ называется *горизонтальным лифтом* гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow B$ (см. пример 2.3.1), если она *горизонтальна* (т.е. $\dot{\gamma}^h(t) \in H_{\gamma^h(t)}E$ для всех $t \in I$) и $\pi(\gamma^h(t)) = \gamma(t)$ также для всех $t \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.3. Пусть $\gamma: I \rightarrow B$ – гладкая кривая и $p_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, где $x_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in I$. Тогда существует единственный горизонтальный лифт $\gamma^h: I \rightarrow E$ такой, что $\gamma^h(t_0) = p_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [18], [1].

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – векторное расслоение и HE – связность на E . Пусть касательное поле $X \in \mathfrak{X}(B)$ и сечение (векторное поле) $f \in \mathcal{F}(\pi)$. Пусть точка $x \in B$ и ее образ $f(x) \in \pi^{-1}(x) \subset E$. Проведем через точку x гладкую кривую $\gamma: I_\epsilon \rightarrow B$, $I_\epsilon = \{|\tau| < \epsilon\}$, $\gamma(0) = x$, такую что $\dot{\gamma}(0) = X_x$. Для каждого $t \in I_\epsilon$ обозначим через $\gamma_t^h: I_\epsilon \rightarrow E$ горизонтальный лифт кривой γ такой, что $\gamma_t^h(t) = f(\gamma(t))$. Вектор $\phi_t(f(\gamma(t))) = \gamma_t^h(0) \in \pi^{-1}(x)$ называется *параллельным переносом вектора* $f(\gamma(t)) = \gamma_t^h(t) \in \pi^{-1}(\gamma(t))$ *вдоль кривой* γ . Вектор

$$(\nabla_X f)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t(f(\gamma(t))) - f(x)) \in \pi^{-1}(x)$$

называется *ковариантной производной в точке x сечения f в направлении X_x* . Заметим, что дробь $(\phi_t(f(\gamma(t))) - f(x))/t$ определена корректно, поскольку мы предположили, что расслоение

$\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ векторное и, значит, в его слоях определены линейные операции. Перейдя в подходящую локальную расслаивающую карту, можно убедиться, что выписанный выше предел существует, не зависит от выбора кривой γ и гладко зависит от точки x . Построенное таким образом сечение $\nabla_X f \in \mathcal{F}(\pi)$ называется *ковариантной производной сечения $f \in \mathcal{F}(\pi)$ вдоль поля $X \in \mathfrak{X}(B)$* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.4. *Ковариантная производная ∇ обладает следующими свойствами:*

- * $\nabla_{\lambda \cdot X + \mu \cdot Y} f = \lambda \cdot \nabla_X f + \mu \cdot \nabla_Y f$
для всех $f \in \mathcal{F}(\pi)$, $\lambda, \mu \in C^\infty(B)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$;
- * $\nabla_X (f + g) = \nabla_X f + \nabla_X g$
для всех $f, g \in \mathcal{F}(\pi)$, $X \in \mathfrak{X}(B)$;
- * $\nabla_X (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \nabla_X f + X(\lambda) \cdot f$
для всех $f \in \mathcal{F}(\pi)$, $\lambda \in C^\infty(B)$, $X \in \mathfrak{X}(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [18], [1].

Введем $C^\infty(E)$ -модуль $\Omega(E, \mathfrak{V}(E)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \Omega^n(E, \mathfrak{V}(E))$, где

$$\Omega^n(E, \mathfrak{V}(E)) = \text{Hom}_{C^\infty(E)}(\wedge^n \mathfrak{X}(E), \mathfrak{V}(E)) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}_+.$$

В частности, $\Omega^0(E, \mathfrak{V}(E)) = \mathfrak{V}(E)$. (Мы не будем здесь называть элементы модуля $\Omega(E, \mathfrak{V}(E))$ *дифференциальными формами*, поскольку на модуле $\mathfrak{V}(E)$ не определено действие алгебры Ли $\mathfrak{X}(E) = \mathfrak{X}(E)$, см. с. 166.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.5. *Пусть HE – связность в расслоении $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. Тогда проекция $v: \mathfrak{X}(E) \rightarrow \mathfrak{V}(E)$, $X \mapsto v(X)$, является 1-формой из $\Omega^1(E, \mathfrak{V}(E))$, называется формой связности и обладает характерными свойствами:*

- * $v(X) = X$ для всех $X \in \mathfrak{V}(E) \subset \mathfrak{X}(E)$;
- * $v(X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{H}(E) \subset \mathfrak{X}(E)$.

Обратно, если дана 1-форма $v \in \Omega^1(E, \mathfrak{V}(E))$, $X \mapsto v(X)$, такая, что $v(X) = X$ для всех $X \in \mathfrak{V}(E)$, то подмодуль

$$\mathfrak{H}(E) = \ker v = \{X \in \mathfrak{X}(E) \mid v(X) = 0\}$$

определяет в расслоении $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ связность HE для которой v будет формой связности, а отображение

$$h = \text{id} - v: \mathfrak{X}(E) \rightarrow \mathfrak{H}(E)$$

будет проекцией на подмодуль $\mathfrak{H}(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предлагается провести самостоятельно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.6. Пусть HE – связность в расслоении $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. Тогда 2-форма $c \in \Omega^2(E, \mathfrak{V}(E))$, $X \wedge Y \mapsto c(X \wedge Y)$, где

$$c(X \wedge Y) = -\frac{1}{2} v([h(X), h(Y)]) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{T}(E),$$

называется формой кривизны связности HE , причем распределение HE инволютивное тогда и только тогда, когда связность HE плоская, т.е. когда ее кривизна $c = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства того, что

$$c \in \Omega^2(E, \mathfrak{V}(E)),$$

следует лишь проверить, что $c((f \cdot X) \wedge Y) = f \cdot c(X \wedge Y)$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(E)$ и всех $X, Y \in \mathfrak{T}(E)$. Но

$$\begin{aligned} v([h(f \cdot X), h(Y)]) &= v([f \cdot h(X), h(Y)]) \\ &= v(f \cdot [h(X), h(Y)] - h(Y)(f)h(X)) \\ &= f \cdot v([h(X), h(Y)]) - h(Y)(f)v(h(X)) \\ &= f \cdot v([h(X), h(Y)]) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{T}(E). \end{aligned}$$

Для проверки второго утверждения следует вспомнить определение инволютивности распределения.

2.7.2. Связности в главных расслоениях.

Главные расслоения. Пусть G – группа Ли. Гладкое расслоение $\{P \xrightarrow{\pi} M\}$ с типичным слоем G называется *главным расслоением* над M с группой G , если определено свободное правое действие R группы Ли G на многообразии P ,

$$R: P \times G \rightarrow P, \quad (p, a) \mapsto R(p, a) = p \cdot a,$$

причем

- ★ слои расслоения $\{P \xrightarrow{\pi} M\}$ суть орбиты группы Ли G на P , т.е.
 - для каждой точки $x \in M$ слой $S_x = \pi^{-1}(x)$ – орбита группы G , так что для любых $p, q \in S_x$ существует единственный элемент $a \in G$ такой, что $q = p \cdot a$,

- для каждой точки $p \in P$ орбита $pG = \{p \cdot a \mid a \in G\} = S_{\pi(p)}$;
- ★ локальная тривиализация согласована с действием группы Ли G на многообразии P , т.е. у каждой точки многообразия M есть окрестность $U \subset M$ и диффеоморфизм

$$\Phi: \pi^{-1}(U) \simeq U \times G, \quad p \mapsto \Phi(p) = (\pi(p), \phi(p)),$$

такой, что

$$\phi(p \cdot a) = \phi(p) \cdot a \quad \text{для всех } a \in G, p \in \pi^{-1}(U).$$

Такое расслоение обычно обозначается через $P(M, G)$. Обратим внимание, что в этом случае $M = P/G$, $\pi: P \rightarrow M$ – каноническая проекция на факторпространство.

ПРИМЕР 2.7.1. Пусть G – группа Ли, M – гладкое многообразие. Определим свободное правое действие группы Ли G на гладком многообразии $P = M \times G$ правилом

$$R: P \times G \rightarrow P, \quad ((x, b), a) \mapsto R((x, b), a) = (x, b \cdot a).$$

Легко проверяется (проделать это!), что таким образом определено главное расслоение $P(M, G)$, обычно называемое *тривиальным*.

ПРИМЕР 2.7.2 (расслоение реперов). Пусть M – гладкое многообразие, $\dim M = m$. *Репером* в точке $p \in M$ называется всякий базис $\mathbf{e}_p = (e_{1,p}, \dots, e_{m,p})$ касательного пространства $T_p M$, записанный в виде строки. Обозначим через $L_p(M)$ множество всех реперов в точке p и положим $L(p) = \bigcup_{p \in M} L_p(M)$. Проекция $\pi: L(M) \rightarrow M$ определена правилом $\mathbf{e}_p \mapsto \pi(\mathbf{e}_p) = p$. Группа $GL(m, \mathbb{R})$ действует на $L(M)$ справа по правилу

$$R: L(M) \times GL(m, \mathbb{R}) \rightarrow L(M), \quad (\mathbf{e}_p, a) \mapsto R_a(\mathbf{e}) = \mathbf{e}_p \cdot a,$$

для всех $p \in M$, $\mathbf{e}_p \in L_p(M)$, $a \in GL(m, \mathbb{R})$, где $\mathbf{e}_p \cdot a$ есть произведение строки $\mathbf{e}_p$ на квадратную матрицу a по обычным правилам линейной алгебры. Очевидно, здесь группа $GL(m, \mathbb{R})$ действует в каждом слое $\pi^{-1}(p) = L_p(M)$, $p \in M$, свободно и транзитивно, что и требуется для главного расслоения. Для построения главного расслоения $L(M)(M, GL(m, \mathbb{R}))$ осталось ввести на множестве $L(M)$ структуру гладкого многообразия, такую чтобы введенные алгебраические операции были гладкими. Для этого достаточно воспользоваться картами, тривиализующими касательное расслоение TM . Детали можно найти, например, в [18] или [15].

Морфизм главных расслоений из главного расслоения $P(M, G)$ в главное расслоение $Q(N, H)$ есть тройка $M \xrightarrow{\varphi} N$, $P \xrightarrow{\Phi} Q$, $G \xrightarrow{\gamma} H$, где пара $M \xrightarrow{\varphi} N$, $P \xrightarrow{\Phi} Q$ есть морфизм гладких расслоений, а отображение $\gamma: G \rightarrow H$ – морфизм групп Ли, причем выполнено условие согласования

$$\Phi(p \cdot a) = \Phi(p) \cdot \gamma(a) \quad \text{для всех } p \in P, a \in G.$$

Таким образом, определена категория главных расслоений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.7. *Если главное расслоение $P(M, G)$ имеет глобальное сечение, то оно тривиальное, точнее изоморфно тривиальному. Именно, в этом случае существует диффеоморфизм $\Phi: P \simeq M \times G$, $p \mapsto \Phi(p) = (\pi(p), g(p))$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Phi} & M \times G \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & M & \end{array}$$

где π_1 – проекция на первый сомножитель, и справедливо равенство

$$\Phi(p \cdot a) = (\pi(p), g(p) \cdot a) \quad \text{для всех } p \in P, a \in G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma: M \rightarrow P$ – данное глобальное сечение, где $x \mapsto \sigma(x) \in P$ для всех $x \in M$, причем $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$. Для каждого $p \in P$ определим образ $g(p)$ как единственный элемент группы G , $g(p) \in G$, для которого $p = \sigma(\pi(p)) \cdot g(p)$. Легко проверяется, что индуцированное отображение $p \mapsto \Phi(p) = (\pi(p), g(p))$ обладает требуемыми свойствами.

Итак, нетривиальные главные расслоения имеют только локальные сечения.

Связности в главных расслоениях. Пусть $P(M, G)$ – главное расслоение. Тогда (см. с. 185)

- ★ для каждого $a \in G$ определены
 - диффеоморфизм (автоморфизм гладких многообразий)

$$R_a: P \simeq P, \quad p \mapsto R_a(p) = R(p, a) = p \cdot a,$$

причем $R_a: S_x \simeq S_x$, поскольку G действует свободно и транзитивно на каждом слое S_x для всех $x \in M$,

- автоморфизм касательных расслоений

$$(R_a)_*: TP \simeq TP,$$

$$(R_a)_*: T_p P \simeq T_{p \cdot a} P, \quad X_p \mapsto Y_{p \cdot a} = (R_a)_*(X_p),$$

причем $(R_a)_*: V_p P \simeq V_{p \cdot a} P$ для всех $p \in P$ (напомним, что $V_p P = T_p S_{\pi(p)}$),

- автоморфизм $\mathcal{C}^\infty(P)$ -модулей

$$(R_a)_*: \mathfrak{T}(P) \simeq \mathfrak{T}(P),$$

$$X \mapsto Y = (R_a)_*(X) = (R_{a^{-1}})^* \circ X \circ (R_a)^*,$$

$$Y_p = (R_a)_*(X_{p \cdot a^{-1}}) \quad \text{для всех } p \in P,$$

причем $(R_a)_*: \mathfrak{V}(P) \simeq \mathfrak{V}(P)$,

- автоморфизм $\mathcal{C}^\infty(P)$ -модулей

$$(R_a)^*: \Omega^n(P) \simeq \Omega^n(P), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \omega \mapsto \chi = (R_a)^*(\omega),$$

$$\chi(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)(p) = \omega(Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_n)(p \cdot a)$$

для всех $X_i \in \mathfrak{T}(P)$, $p \in P$, $Y_i = (R_a)_*(X_i)$, $1 \leq i \leq n$;

★ для каждого $p \in P$ определены

- гладкое отображение

$$L_p: G \rightarrow P, \quad a \mapsto L_p(a) = R(p, a) = p \cdot a,$$

причем $L_p: G \simeq S_{\pi(p)}$,

- касательное отображение

$$(L_p)_*: TG \rightarrow TP,$$

$$(L_p)_*: T_a G \rightarrow T_{p \cdot a} P, \quad A_a \mapsto X_{p \cdot a} = (L_p)_*(A_a),$$

причем $(L_p)_*: T_a G \simeq V_{p \cdot a} P$ для всех $a \in G$.

В частности,

$$(L_p)_*: \mathfrak{g} = T_e G \simeq V_p P \quad \text{для всех } p \in P.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.8. *Каноническое отображение*

$$\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{T}(P)$$

(см. с. 185) расширяется до изоморфизма $\mathcal{C}^\infty(M)$ -модулей (см. пример 2.4.1)

$$\sigma: \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{V}(P), \quad A \mapsto X = \sigma(A),$$

где

$$X: P \rightarrow VP, \quad p \mapsto X_p = (L_p)_*(A(p)) \in V_p P, \\ \text{для всех } A: P \rightarrow \mathfrak{g}, \quad p \mapsto A(p), \quad p \in P.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, здесь обратное отображение

$$\sigma^{-1}: \mathfrak{V}(P) \simeq \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}), \quad X \mapsto A = \sigma^{-1}(X),$$

действует по правилу $A(p) = (L_p)^{-1}(X_p)$ для всех $p \in P$. Гладкость прямого и обратного отображений легко проверяется в локальных картах.

Множество $\mathfrak{g}$ естественным образом вкладывается в $\mathcal{C}^\infty(P)$ -модуль $\mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})$ и порождает его (см. пример 2.4.1), его образ

$$\sigma(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{V}(P) \mid (L_p)^{-1}(X_p) \text{ не зависит от } p \in P\}$$

порождает $\mathcal{C}^\infty(P)$ -модуль $\mathfrak{V}(P)$. Вертикальные поля

$$A^* = \sigma(A) \in \sigma(\mathfrak{g})$$

называются *фундаментальными*.

Заметим, что изоморфизмы $(L_p)_*: \mathfrak{g} \simeq V_p P$, $p \in P$, позволяют тривиализовать вертикальное подрасслоение VP правилом

$$VP \simeq P \times \mathfrak{g}, \quad X_p \mapsto (p, A(p)), \quad A(p) = (L_p)^{-1}(X_p), \quad p \in P.$$

Естественно ожидать, что наличие дополнительной алгебраической структуры приводит к более богатой геометрии. Главное новшество – возможность определить действие алгебры Ли $\mathfrak{D}(P) = \mathfrak{T}(P)$ на $\mathcal{C}^\infty(P)$ -модуле $\mathfrak{V}(P)$.

Поскольку действие $\mathfrak{X}$ алгебры Ли $\mathfrak{D}(P) = \mathfrak{T}(P)$ на $\mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})$ уже определено (см. пример 2.4.1), ее действие $\mathfrak{X}_{\mathfrak{V}}$ на $\mathfrak{V}(P)$ дается правилом

$$D = \mathfrak{X}_{\mathfrak{V}}(D) = \sigma \circ \mathfrak{X}(D) \circ \sigma^{-1} \quad \text{для всех } D \in \mathfrak{D}(P).$$

Подробнее, всякое вертикальное поле $X \in \mathfrak{V}(P)$ записывается в виде $X = \sum_{1 \leq i \leq N} f^i \cdot A_i^*$, где $N = N(X) \in \mathbb{N}$, $f^i \in \mathcal{C}^\infty(P)$, $A_i \in \mathfrak{g}$, и

$$D(X) = \sum_{1 \leq i \leq N} D(f^i) \cdot A_i^* \quad \text{для всех } D \in \mathfrak{D}(P).$$

В частности, $D(A^*) = 0$ для всех $D \in \mathfrak{D}(P)$ и $A \in \mathfrak{g}$.

Итак, для всякой формы $\omega \in \Omega^n(P, \mathfrak{V}(P))$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. с. 191), стандартным образом (см. с. 167) определен внешний дифференциал $d\omega \in \Omega^{n+1}(P, \mathfrak{V}(P))$,

$$d\omega(X_0 \wedge \cdots \wedge X_n) = \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i X_i(\omega(X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \wedge X_n)) \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \check{X}_j \cdots \wedge X_n) \right\}$$

для всех $X_0, \dots, X_n \in \mathfrak{T}(P)$.

Связность HP в гладком расслоении $\{P \xrightarrow{\pi} M\}$ называется *связностью в главном расслоении* $P(M, G)$, если она согласована с действием группы Ли G на гладком многообразии P , т.е. если

$$(R_a)_*: H_p P \simeq H_{p \cdot a} P \quad \text{для всех } a \in G, p \in P,$$

причем в этом случае

$$(R_a)_*: \mathfrak{H}(P) \simeq \mathfrak{H}(P) \quad \text{для всех } a \in G.$$

Пусть $P(M, G)$ – главное расслоение со связностью HP .

В частности, определены проекции

$$\star v: \mathfrak{T}(P) \rightarrow \mathfrak{V}(P), \quad X \mapsto v(X),$$

$$\star h: \mathfrak{T}(P) \rightarrow \mathfrak{H}(P), \quad X \mapsto h(X),$$

так что для всякого $X \in \mathfrak{T}(P)$ имеется единственное разложение

$$X = v(X) + h(X), \quad \text{где } v(X) \in \mathfrak{V}(P), h(X) \in \mathfrak{H}(P).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.9. *Имеют место равенства*

$$(R_a)_* \circ v = v \circ (R_a)_*, \quad (R_a)_* \circ h = h \circ (R_a)_* \quad \text{для всех } a \in G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проверить самостоятельно.

Предложение 2.7.5 теперь имеет вид

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.10. *Пусть в главном расслоении $P(M, G)$ дана связность HP . Тогда проекция $v: \mathfrak{T}(P) \rightarrow \mathfrak{V}(P)$ есть форма из $\Omega^1(P, \mathfrak{V}(P))$, называется формой связности и обладает характерными свойствами*

- ★ $v(X) = X$ для всех $X \in \mathfrak{V}(P)$;
- ★ $v(X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{H}(P)$;
- ★ $(R_a)_* \circ v = v \circ (R_a)_*$ для всех $a \in G$.

Обратно, если дана 1-форма $v \in \Omega^1(P, \mathfrak{V}(P))$ такая, что $v(X) = X$ для всех $X \in \mathfrak{V}(P)$, причем $(R_a)_* \circ v = v \circ (R_a)_*$ для всех $a \in G$, то подмодуль

$$\mathfrak{H}(P) = \ker v = \{X \in \mathfrak{V}(P) \mid v(X) = 0\}$$

определяет в главном расслоении $P(M, G)$ связность HP для которой v будет формой связности, а отображение

$$h = \text{id} - v: \mathfrak{V}(P) \rightarrow \mathfrak{H}(P)$$

будет проекцией на подмодуль $\mathfrak{H}(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве предложения 2.7.5 следует учесть требование инвариантности связности HP относительно действия группы G .

$C^\infty(P)$ -модуль $C^\infty(P, \mathfrak{g})$ обладает поточечной структурой алгебры Ли,

$$[A, B](p) = [A(p), B(p)] \quad \text{для всех } A, B \in C^\infty(P, \mathfrak{g}), \quad p \in P,$$

причем

$$[fA, B] = f[A, B] \quad \text{для всех } f \in C^\infty(P), \quad A, B \in C^\infty(P, \mathfrak{g}).$$

Изоморфизм $\sigma: C^\infty(P, \mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{V}(P)$ переносит эту структуру на $C^\infty(P)$ -модуль $\mathfrak{V}(P)$,

$$[X, Y]^\mathfrak{g} = \sigma([\sigma^{-1}(X), \sigma^{-1}(Y)]) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{V}(P),$$

где по-прежнему

$$[fX, Y]^\mathfrak{g} = f[X, Y]^\mathfrak{g} \quad \text{для всех } f \in C^\infty(P), \quad X, Y \in \mathfrak{V}(P).$$

Определим 2-форму $[\dots] \in \Omega^2(P, \mathfrak{V}(P))$ правилом

$$[X \wedge Y] = [v(X), v(Y)]^\mathfrak{g} \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{V}(P)$$

и напомним, что выше (см. предложение 2.7.6) была определена форма кривизны $c \in \Omega^2(P, \mathfrak{V}(P))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.11. *Имеет место структурное уравнение Картана:*

$$dv(X \wedge Y) = -\frac{1}{2}[X \wedge Y] + c(X \wedge Y) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что все три составляющие структурного уравнения являются 2-формами, т.е. $C^\infty(P)$ -билинейные, и что фундаментальные поля порождают $C^\infty(P)$ -модуль $\mathfrak{V}(P)$, справедливость уравнения достаточно проверить в трех частных случаях: (а) оба поля X, Y – фундаментальные, (б) поле X – фундаментальное, а поле Y – горизонтальное, (в) оба поля X, Y – горизонтальные.

(а) Пусть $X = A^*, Y = B^*$. Тогда, с одной стороны (см. с. 197),

$$\begin{aligned} dv(A^* \wedge B^*) &= \frac{1}{2}(A^*(v(B^*)) - B^*(v(A^*)) - v([A^*, B^*])) \\ &= \frac{1}{2}(A^*(B^*) - B^*(A^*) - [A^*, B^*]) = -\frac{1}{2}[A^*, B^*], \end{aligned}$$

поскольку $v(A^*) = A^*, v(B^*) = B^*, A^*(B^*) = B^*(A^*) = 0$ (см. с. 197), $v([A^*, B^*]) = v([A, B]^*) = [A, B]^* = [A^*, B^*]$ (см. предложение 2.6.15). С другой стороны,

$$[A^* \wedge B^*] = [v(A^*), v(B^*)]^\sharp = [A^*, B^*]^\sharp = [A, B]^* = [A^*, B^*]$$

согласно предложению 2.6.15, а

$$c(A^* \wedge B^*) = -\frac{1}{2}v([h(A^*), h(B^*)]) = 0,$$

поскольку $h(A^*) = h(B^*) = 0$. Таким образом, в этом случае структурное уравнение выполняется.

(б) Пусть $X = A^*, Y \in \mathfrak{H}(P)$. Тогда, с одной стороны,

$$dv(A^* \wedge Y) = \frac{1}{2}(A^*(v(Y)) - Y(v(A^*)) - v([A^*, Y])) = 0,$$

поскольку $v(Y) = 0, Y(v(A^*)) = Y(A^*) = 0$, и коммутатор

$$[A^*, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(Y - (R_{e^{tA}})_*(Y)) \in \mathfrak{H}(P)$$

в силу предложения 2.6.11, определения фундаментального поля (см. с. 185) и условия согласования $(R_a)_*: \mathfrak{H}(P) \simeq \mathfrak{H}(P)$ (см. с. 197). С другой стороны, формы $[A^* \wedge Y] = [v(A^*), v(Y)]^{\mathfrak{g}} = 0$ ($v(Y) = 0$) и $c(A^* \wedge Y) = 0$ ($h(A^*) = 0$), так что структурное уравнение справедливо и в этом случае.

(в) Пусть $X, Y \in \mathfrak{H}(P)$. Тогда, с одной стороны,

$$dv(X \wedge Y) = \frac{1}{2}(X(v(Y)) - Y(v(X)) - v([X, Y])) = c(X \wedge Y),$$

поскольку $v(Y) = v(X) = 0$, $h(X) = X$ и $h(Y) = Y$, а с другой стороны, $[X \wedge Y] = [v(X), v(Y)]^{\mathfrak{g}} = 0$ ($v(Y) = v(X) = 0$), так что структурное уравнение справедливо.

СЛЕДСТВИЕ 2.7.2. *Имеет место тождество Бианки*

$$dc(X \wedge Y \wedge Z) = 0 \quad \text{для всех } X, Y, Z \in \mathfrak{H}(P).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. На практике обычно вместо модуля $\Omega(P, \mathfrak{V}(P))$ используют изоморфный ему модуль $\Omega(P, \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}))$, обозначаемый через $\Omega(P, \mathfrak{g})$. Именно, *формой связности* называют 1-форму $\omega = \sigma^{-1} \circ v \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, а *формой кривизны* называют 2-форму $\Omega = \sigma^{-1} \circ c \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$. Структурное уравнение Картана в этом случае принимает вид

$$d\omega(X \wedge Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X \wedge Y) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{T}(P),$$

где $[\omega(X), \omega(Y)]$ – поточечный коммутатор в $\mathcal{C}^\infty(P)$ -модуле $\mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})$, а тождество Бианки – вид

$$d\Omega(X \wedge Y \wedge Z) = 0 \quad \text{для всех } X, Y, Z \in \mathfrak{H}(P).$$

2.7.3. Связности в ассоциированных расслоениях.

Ассоциированные расслоения. Пусть G – группа Ли, $P(M, G)$ – главное расслоение над многообразием M с группой G . Пусть F – гладкое многообразие на котором определено левое действие группы Ли G ,

$$L: G \times F \rightarrow F, \quad (a, u) \mapsto L(a, u) = a \cdot u.$$

Тогда на прямом произведении $P \times F$ определено правое действие группы Ли G ,

$$R: (P \times F) \times G \rightarrow P \times F, \quad ((p, u), a) \mapsto R((p, u), a) = (p \cdot a, a^{-1} \cdot u).$$

Две пары $(p, u), (q, v) \in P \times F$ называются *эквивалентными относительно этого действия*, если существует $a \in G$ такое, что $(p, u) = (q \cdot a, a^{-1} \cdot v)$. Множество всех таких классов эквивалентности $[p, u]$ обозначаем через $E = P \times_G F$ и приходим к следующей коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \xrightarrow{\pi_1} & P \\ \varrho \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi_E} & M \end{array}$$

где π_1 – проекция на первый сомножитель, π – проекция, входящая в определение главного расслоения $P(M, G)$, каноническая проекция ϱ каждой паре (p, u) ставит в соответствие ее класс эквивалентности $[p, u]$, проекция π_E действует по правилу: $[p, u] \mapsto \pi(p)$ (это правило не зависит от выбора представителя (p, u) , поскольку из условия $p = q \cdot a$ следует, что $\pi(p) = \pi(q)$ для всех $p, q \in P, a \in G$). Используя локальную тривиализацию расслоения $P(M, G)$, можно проверить, что на множестве E существует естественная структура гладкого многообразия такая, что проекции ϱ и π_E суть гладкие отображения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.12. Для каждого $x \in M$ слой $\pi_E^{-1}(x) \simeq F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что равенство $[p, u] = [p, v]$ влечет равенство $u = v$ для любых $p \in P, u, v \in F$, поскольку группа G действует на P свободно. Итак, пусть $x \in M$. Выберем произвольное $r \in P$. Определим отображение $i_r: \pi_E^{-1}(x) \rightarrow F$ правилом $[p, u] \mapsto v$, где $v = a \cdot u$, a – единственный элемент из группы G такой, что $p = r \cdot a$, так что здесь $[p, u] = [r \cdot a, u] = [r, a \cdot u] = [r, v]$. В свою очередь, отображение $j_r: F \rightarrow \pi_E^{-1}(x)$ зададим правилом $v \mapsto [r, v]$. Легко проверяется, что $j_r \circ i_r = \text{id}_{\pi_E^{-1}(x)}$ и $i_r \circ j_r = \text{id}_F$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $x \in M$, и фиксируем $r \in \pi^{-1}(x) \subset P$. Тогда для любого $p \in \pi^{-1}(x)$ существует единственный элемент $a \in G$ такой, что $p = r \cdot a$, а значит, в любом классе $[p, u] \in \pi_E^{-1}(x)$ существует единственный представитель вида (r, v) (именно, с $v = a \cdot u$), т.е. коротко можно писать

$$\pi_E^{-1}(x) = \{(r, v) \mid v \in F\} \simeq F.$$

Полученное расслоение обозначается через $E = E(M, F, G, P)$ и называется *расслоением над M со стандартным слоем F , ассоциированным с главным расслоением $P = P(M, G)$* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.13. Пусть в ассоциированном расслоении $E(M, F, G, P)$ многообразие F есть векторное пространство, на котором определено представление группы Ли G (в частности, G действует на F линейно). Тогда $E(M, F, G, P)$ обладает естественной структурой векторного расслоения с типичным слоем F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что каждый слой $\pi_E^{-1}(x)$, $x \in M$, обладает естественной структурой векторного пространства, изоморфного (в категории линейных пространств) пространству F . Фиксируем точку $r \in \pi_E^{-1}(x)$ и для любых $[r, u], [r, v] \in \pi_E^{-1}(x)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ положим

$$\alpha[r, u] + \beta[r, v] = [r, \alpha u + \beta v] \in \pi_E^{-1}(x).$$

Покажем, что это определение не зависит от выбора точки $r \in \pi_E^{-1}(x)$. Возьмем другую точку $s \in \pi_E^{-1}(x)$, тогда найдется единственный элемент $a \in G$ такой, что $r = s \cdot a$, и, значит,

$$[r, u] = [s, a \cdot u], \quad [r, v] = [s, a \cdot v],$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha[s, a \cdot u] + \beta[s, a \cdot v] &= [s, \alpha \cdot a \cdot u + \beta \cdot a \cdot v] = [s, a \cdot (\alpha u + \beta v)] \\ &= [s \cdot a, \alpha u + \beta v] = [r, \alpha u + \beta v] = \alpha[r, u] + \beta[r, v]. \end{aligned}$$

Гладкость этой конструкции легко проверяется в локальных тривиализующих картах.

Связности в ассоциированных расслоениях.

Пусть $P(M, G)$ – главное расслоение со связностью HP и $E(M, F, G, P)$ – ассоциированное с ним расслоение. В расслоении $E(M, F, G, P)$ следующим образом определяется связность, ассоциированная со связностью HP . Пусть класс $[p, u] \in E$. Определим отображение

$$\phi_u: P \rightarrow E$$

правилом $r \mapsto [r, u]$ (в частности, $p \mapsto [p, u]$), тогда касательное отображение $(\phi_u)_*: TP \rightarrow TE$ (в частности, $T_p P \rightarrow T_{[p, u]} E$), и мы

положим $H_{[p,u]}E = (\phi_u)_*(H_pP)$. Проверим, что это определение не зависит от выбора представителя класса $[p, u]$. Возьмем произвольный представитель $(q, v) \in [p, u]$, так что $q = p \cdot a$, $v = a^{-1} \cdot u$ для некоторого $a \in G$. Тогда $\phi_v: P \rightarrow E$, $r \mapsto [r, v]$ (в частности, $q \mapsto [q, v] = [p, u]$), причем

$$\begin{aligned} (\phi_v)_*(H_qP) &= (\phi_v)_*(H_{p \cdot a}P) = ((\phi_v)_* \circ (R_a)_*)(H_pP) \\ &= (\phi_v \circ R_a)_*(H_pP) = (\phi_u)_*(H_pP) = H_{[p,u]}E, \end{aligned}$$

где было учтено, что по определению связности в главном расслоении $(R_a)_*: H_pP \simeq H_{p \cdot a}P$ и что

$$(\phi_v \circ R_a)(r) = \phi_v(r \cdot a) = [r \cdot a, v] = [r, a \cdot v] = [r, u] = \phi_u(r)$$

для всех $r \in P$.

Гладкость этой конструкции легко проверяется в локальных тривиализующих картах. Далее, легко проверяется, что имеет место разложение в прямую сумму

$$T_{[p,u]}E = V_{[p,u]}E \oplus H_{[p,u]}E \quad \text{для всех } [p, u] \in E,$$

и аналогичные разложения для касательного расслоения TE и $C^\infty(E)$ -модуля касательных полей $\mathfrak{T}(E)$.

Таким образом, *связность в главном расслоении действительно индуцирует связность в ассоциированном расслоении.*

Список литературы

- [1] C. J. Isham, *Modern differential geometry for physicists*, World Sci. Lecture Notes Phys., **61**, World Scientific, River Edge, NJ, 1999, [MR 1698234](#).
- [2] J. Madore, *An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **206**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, [MR 1366835](#).
- [3] J. L. Taylor, "Homology and cohomology for topological algebras", *Advances in Mathematics*, **9**:2 (1972), 137–182, [doi 10.1016/0001-8708\(72\)90016-3](#), [MR 328624](#), [Zbl 0271.46040](#).
- [4] L. R. Vermani, *An elementary approach to homological algebra*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003, [MR 1988048](#).
- [5] V. V. Zharinov, *Lecture notes on geometrical aspects of partial differential equations*, Ser. Soviet East European Math., **9**, World Scientific, River Edge, NJ, 1992, [MR 1167448](#).
- [6] Н. Бурбаки, *Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов*, Мир, Москва, 1975, [MR 0377915](#).
- [7] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, Москва, 1997.
- [8] Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, Москва, 1961, [MR 0130684](#).
- [9] А. Гротендик, *О некоторых вопросах гомологической алгебры*, ИЛ, Москва, 1961.
- [10] А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии*, Мир, Москва, 1976, [MR 0448330](#).
- [11] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Вып. 5, Лекционные курсы НОЦ, МИАН, Москва, 2006, [Mi http://mi.mathnet.ru/rus/lkn5](http://mi.mathnet.ru/rus/lkn5).
- [12] В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, том I, Эдиториал УРСС, Москва, 1998.
- [13] В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, том II, Эдиториал УРСС, Москва, 1998.
- [14] В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы теории гомологий*, Наука, Москва, 1984, [MR 0766739](#).
- [15] Р. Зуланке, П. Винтген, *Дифференциальная геометрия и расслоения*, Мир, Москва, 1975, [MR 0413153](#).
- [16] А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, ИЛ, Москва, 1960, [MR 0117263](#).

- [17] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, Москва, 1978, [MR 0509211](#).
- [18] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, том I, Наука, Москва, 1981, [MR 0628734](#).
- [19] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, том II, Наука, Москва, 1981, [MR 0643797](#).
- [20] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, Москва, 1968.
- [21] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, Москва, 1966.
- [22] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Физматлит, Москва, 2004.
- [23] Манин Ю. И., *Лекции по алгебраической геометрии*. Часть I. *Аффинные схемы*, МГУ, Москва, 1970.
- [24] Наймарк М. А., *Нормированные кольца*, Наука, Москва, 1968, [MR 0355602](#).
- [25] А. Пич, *Ядерные локально выпуклые пространства*, Мир, Москва, 1967, [MR 0221262](#).
- [26] А. Робертсон, В. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, Москва, 1967, [MR 0228963](#).
- [27] С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Мир, Москва, 1970, [MR 0394454](#).
- [28] Р. Уэллс, *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, Мир, Москва, 1976, [MR 0515873](#).
- [29] М. В. Федорюк, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва, 1985, [MR 0964270](#).
- [30] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, Москва, 2005.
- [31] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры. Общая теория, представления, гомологии*, Наука, Москва, 1989, [MR 1031991](#).
- [32] А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, Москва, 2004.

Предметный указатель

- Бианки тождество, 200
- Картана
структурное уравнение, 199
- Лейбница правило, 125
- Ли
производная, 154
- Маурера–Картана
уравнение, 181
- автоморфизм, 9
внутренний, 21
- алгебра
А-модуля
тензорная, 82
Ли присоединенная, 68
градуированная, 69
градуированная коммутативная, 70
модуля
внешняя, 84
симметрическая, 83
- алгебра Ли
группы Ли, 177
- антиморфизм, 17
- атлас, 115
- базис, 46
А-модуля левого, 77
- биекция, 9
- бикомплекс, 94
- вектор
вертикальный, 187
горизонтальный, 188
касательный, 129
кокасательный, 140
- векторное поле
касательное, 133
кокасательное, 142
- гомологии, 86, 88
- гомоморфизм, 9, 17, 23
- гомотопия, 92
- горизонтальный лифт, 189
кривой, 190
- градуировка
обрезающая фильтрацию, 112
- границы, 86, 88
- группа, 16
Ли, 173
абелева, 23
градуированная, 54
нулевая, 23
изотропии, 21
преобразований, 20
симметрическая, 82
- группа Ли
преобразований, 175
- де Рама
комплекс, 156, 167
- действие
левое, 20
правое, 20
присоединенное, 21
левое, 28
правое, 28
свободное, 20
транзитивное, 20
эффективное, 20
- диаграмма, 11
- дифференциал, 86, 90
внешний, 155
- дифференцирование
алгебры, 125

- левоинвариантное, 176
- модуля, 162
- идеал, 26
- изоморфизм, 9
- интеграл, 171
- инъекция, 9
 - каноническая, 13
- карта, 115
- категория, 8
 - абелевых групп, 23
 - алгебр, 63
 - топологических, 66
 - гладких многообразий, 116
 - групп, 17
 - дуальная, 10
 - колец, 24
 - множеств, 9
 - модулей
 - левых, 29
 - объектов над S , 11
 - топологических пространств, 10, 59
- ковариантная производная, 190
- когомологии, 91, 92
- кограницы, 91, 92
- кольцо, 24
 - ассоциативное, 25
 - градуированное, 56
 - коммутативное, 26
 - нулевое, 24
 - с делением, 58
 - унитальное, 25
- комплекс, 88
 - де Рама, 156
 - де Рама
 - векторнозначный, 167
 - коцепной, 88
 - с фильтрацией, 107
 - цепной, 88
- константы структурные, 179
- коцепи, 90, 91
- коциклы, 91, 92
- коядро, 34
- лист, 168
- многообразие
 - гладкое, 115
- множество
 - частично упорядоченное, 40
- множитель
 - градулирующий, 69
- модуль, 27, 72
 - Ли, 84
 - бидифференциальный, 93
 - градуированный, 56, 80
 - двусторонний, 28
 - дифференциальный, 86
 - с фильтрацией, 101
 - дуальный (сопряженный), 54
 - левый, 27, 72
 - правый, 27, 72
 - производный, 86, 91
 - свободный, 46, 77
 - тривиальный, 28
- моморфизм, 9
- морфизм, 8
 - Ли модулей, 85
 - бидифференциальных модулей, 94
 - бикомплексов, 96
 - векторных расслоений, 122
 - групп Ли, 174
 - дифференциальных модулей, 86
 - дифференциальных модулей
 - с фильтрацией, 101
 - колец, 24
 - унитальных, 25
 - комплексов, 89
 - модулей, 29
 - обратный, 9
 - расслоений, 119
 - слоений, 170
- направленность, 40

нормализатор, 19
носитель, 31, 123, 135

образ

морфизма, 24
обратный, 120

объединение семейства мно-
жеств, 14

объект, 8

объект универсальный
отталкивающий, 9
притягивающий, 9

оператор

граничный, 86
кограничный, 90

орбита, 22

отображение

A -линейное, 72, 73
 R -линейное, 29
аддитивное, 23
антимультимпликативное, 17
гладкое, 116
градуированное A -билиней-
ное, 81
дуальное, 54
касательное, 135
кокасательное, 144
конечное, 31
мультипликативное, 17
сопряженное, 54
экспоненциальное, 184

параллельный перенос, 190

перестановка, 16

подгруппа, 17, 23
нормальная, 18
стабильная, 21

подкатегория, 11
полная, 11

подкольцо, 26

подмногообразие, 117
интегральное, 171
открытое, 118

подмодуль, 30

подрасслоение, 120
векторное, 123

поле, 58

векторное, 122
вертикальное, 187
горизонтальное, 188
левоинвариантное, 175
фундаментальное, 185, 196

последовательность
спектральная, 103

поток, 182
локальный, 182

предел

индуктивный, 43
проективный, 41

представление, 22
присоединенное, 180

преобразование
естественное, 15

проекция
каноническая, 11

произведение
декартово, 12
прямое, 14
прямое семейства
алгебр, 67

семейства категорий, 10
семейства объектов, 11
тензорное

Γ -градуированное, 82
тензорное семейства
алгебр, 68
модулей, 48, 78

пространство
векторное, 58
касательное, 130
кокасательное, 140
линейное, 58
топологическое, 60

отделимое, 115
хаусдорфово, 115

прямое произведение
многообразий, 117

- размерность
 - многообразия, 116
 - свободного модуля, 46
- распределение, 170
 - инволютивное, 172
 - интегрируемое, 171
- расслоение, 118
 - ассоциированное, 202
 - векторное, 122
 - главное, 192
- расширение
 - унитальное, 64
- репер, 193
- росток, 129
 - гладкой функций, 124
- связность, 188
 - в главном расслоении, 197
 - плоская, 192
- сдвиг
 - левый, 21
 - правый, 21
- семейство модулей
 - индуктивно направленное, 43
 - проективно направленное, 41
- сечение расслоения, 121
- симметрия
 - слоения, 170
- слоение, 167
- стрелка, 8
- субмерсия, 169
- сумма
 - прямая, 14
 - прямая семейства
 - алгебр, 67
 - семейства объектов, 13
- сюрьекция, 9
- тело, 58
- умножение, 24
- факторгруппа, 19, 24
- факторкольцо, 27
- фактормодуль, 32
- фильтрация, 100
 - неотрицательная, 111
 - подчиненная градуировке, 111
- форма
 - левоинвариантная, 176
- форма кривизны, 192, 200
- форма связности, 191, 200
- формула
 - гомотопическая, 87, 89, 92
- функтор
 - дуальности, 54
 - ковариантный, 14
 - контравариантный, 15
- функция
 - гладкая, 116
- центр, 20
- централизатор, 20
- цепи, 86, 88
- циклы, 86, 88
- элемент
 - обратный, 58
- эндоморфизм, 9
- эпиморфизм, 9
- ядро
 - морфизма, 24