



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Чеванин, Численное моделирование развития гидродинамических неустойчивостей на многопроцессорных системах, *Матем. моделирование*, 2012, том 24, номер 2, 17–32

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.138.69.163

21 сентября 2024 г., 04:26:00



**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАЗВИТИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ
НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ**

© 2012 г. *В.С. Чеванин*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Предложен эффективный трехмерный параллельный алгоритм с использованием комбинации MPI и OpenMP для численного моделирования развития гидродинамических неустойчивостей на основе схем повышенного порядка точности на многопроцессорных вычислительных системах гибридной архитектуры. Произведено исследование комбинированной техники распараллеливания в сравнении с чистым MPI. С использованием реализованного численного алгоритма произведены расчеты двух типовых задач развития гидродинамических неустойчивостей (Рихтмайера-Мешкова и Рэля-Тейлора). Для задачи развития неустойчивости Рэля-Тейлора получен четкий колмогоровский спектр.

Ключевые слова: гидродинамическая неустойчивость, схема повышенного порядка точности, параллельное программирование, MPI, OpenMP, неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, неустойчивость Рэля-Тейлора.

**NUMERICAL SIMULATION
OF HYDRODYNAMICS INSTABILITIES EVOLUTION
ON MULTIPROCESSOR SYSTEMS**

V.S. Chevanin

Keldysh Institute for Applied Mathematics RAS

An effective three-dimensional parallel algorithm using a combination of MPI and OpenMP for numerical simulation of hydrodynamic instabilities evolution on the basis of schemes of high order on multiprocessor systems with hybrid architecture has been proposed. A research of the combined techniques of parallelization in comparison with pure MPI is produced. Using the realized numerical algorithm the calculations of two typical problems of hydrodynamic instabilities evolution (Richtmyer-Meshkov and Rayleigh-Taylor) has been produced. For the problem of Rayleigh-Taylor instability a clear Kolmogorov spectrum is received.

Key words: hydrodynamic instability, high order accuracy scheme, parallel programming, MPI, OpenMP, Richtmyer-Meshkov instability, Rayleigh-Taylor instability.

Введение

Современные требования к качеству математического моделирования развития гидродинамических неустойчивостей приводят к необходимости проведения расчетов на достаточно подробных сетках (порядка нескольких миллионов ячеек и более) и с использованием схем повышенного порядка точности.

С целью обеспечения эффективности расчетов при соблюдении высказанных выше требований обычно используются распределенные вычисления на многопроцессорных системах. При этом число используемых вычислительных узлов (процессоров системы) может достигать нескольких сотен и тысяч, что делает неэффективным применение вычислительных систем с общей памятью.

Применение схем повышенного порядка точности при параллельных расчетах на системах с распределенной памятью, как правило, приводит к необходимости синхронизации параллельных вычислений. При этом синхронизационные издержки при расчетах на нескольких сотнях или тысячах процессоров могут вносить серьезный вклад в общее расчетное время.

Снижение синхронизационных издержек может быть достигнуто в случае использования распределенных вычислений на многопроцессорных системах с гибридной архитектурой (например, построенных на современных многоядерных процессорах).

Однако для полноценного использования преимуществ гибридной архитектуры многопроцессорной системы зачастую необходимо должным образом модифицировать сам расчетный алгоритм и конечный программный код.

Данная работа посвящена исследованию применения специальной техники распределения вычислений (гибрид интерфейсов межпроцессных обменов MPI и OpenMP) для вычислительных систем гибридной архитектуры на примере математического моделирования развития гидродинамических неустойчивостей двух типов. Также в работе приведены результаты расчетов двух модельных задач развития гидродинамических неустойчивостей (Рихтмайера-Мешкова и Рэля-Тейлора), полученные с использованием двух схем повышенного порядка точности.

Математическая модель и численный алгоритм

В качестве математической модели развития гидродинамических неустойчивостей рассмотрим классическую трехмерную систему уравнений гидродинамики в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3(\mathbf{U})}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(e + p) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(e + p) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ w(e + p) \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где ρ – плотность, u, v, w – компоненты скорости по направлениям XYZ , $p = (\gamma - 1)\varepsilon\rho$ – давление, γ – показатель адиабаты, ε – удельная внутренняя энергия на единицу массы, $e = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)$ – полная энергия.

Для соответствующих сеточных значений гидродинамических переменных рассмотрим консервативную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk}^n}{\Delta t} + \frac{H_{i+1/2,j,k}^{(1)} - H_{i-1/2,j,k}^{(1)}}{\Delta x} + \\ & + \frac{H_{i,j+1/2,k}^{(2)} - H_{i,j-1/2,k}^{(2)}}{\Delta y} + \frac{H_{i,j,k+1/2}^{(3)} - H_{i,j,k-1/2}^{(3)}}{\Delta z} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $H_{i\pm 1/2,j,k}^{(1)}$, $H_{i,j\pm 1/2,k}^{(2)}$, $H_{i,j,k\pm 1/2}^{(3)}$ – численные потоки на границах ячеек для временно-го слоя $t = t_{n-1}$:

$$\begin{aligned} H_{i\pm 1/2,j,k}^{(1)} &= H^{(1)}(U_{i\pm 1/2,j,k}^-, U_{i\pm 1/2,j,k}^+), & H^{(1)}(U_{ijk}, U_{ijk}) &= F_1(U_{ijk}), \\ H_{i,j\pm 1/2,k}^{(2)} &= H^{(2)}(U_{i,j\pm 1/2,k}^-, U_{i,j\pm 1/2,k}^+), & H^{(2)}(U_{ijk}, U_{ijk}) &= F_2(U_{ijk}), \\ H_{i,j,k\pm 1/2}^{(3)} &= H^{(3)}(U_{i,j,k\pm 1/2}^-, U_{i,j,k\pm 1/2}^+), & H^{(3)}(U_{ijk}, U_{ijk}) &= F_3(U_{ijk}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $U_{i\pm 1/2,j,k}^-$, $U_{i\pm 1/2,j,k}^+$ – значения соответствующих гидродинамических переменных на границах ячеек (в данном случае, слева и справа от соответствующей грани ячейки в направлении оси OX).

Вид функций $H^{(1,2,3)}(U_{\dots}^-, U_{\dots}^+)$ в формуле (4) выберем в соответствии с потоками Годунова [1].

Для расчета значений U_{\dots}^- и U_{\dots}^+ в формуле (4) будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с ограничением наклонов (TVD схема с лимитером, подробно описанная в [2]), а также квазимонотонный метод третьего порядка точности, предложенный в [3].

Идея описанной в работе [3] квазимонотонной схемы повышенного порядка точности заключается в построении интерполяционного полинома для расчета значений переменных на границах ячеек таким образом, чтобы норма его отклонения от интегрального среднего внутри ячейки была минимальной. Такой подход способен обеспечить требуемую точность в областях гладкости решения и существенно снизить осцилляции вблизи разрывов.

Начальные и граничные условия для рассматриваемых в работе задач будут сформулированы отдельно.

Рассмотрим идею построения параллельного численного алгоритма для описанной модели. Предположим, что рассматриваемая область представляет собой прямоугольный параллелепипед, а расчетная сетка – регулярная. В таком случае, учитывая тот факт, что схема (3) является явной, можно применить геометрический тип распараллеливания [4] и добиться равномерного распределения обрабатываемых параллельно ячеек расчетной сетки по вычислительным узлам системы.

Следует отметить, что при использовании интерполяции для определения значений U_{\dots}^- и U_{\dots}^+ на границе расчетной ячейки необходимо знать значения соответствующих сеточных гидродинамических переменных в соседних ячейках. Это приводит к необходимости обмена значениями сеточных переменных в приграничных ячейках обрабатываемых параллельно областей как минимум один раз на каждом временном слое.

Такие обмены технически осуществляются обычно с помощью стандартизированных интерфейсов межпроцессных обменов.

Наиболее часто используемым интерфейсом межпроцессных обменов является MPI [5]. Такой выбор является наиболее подходящим для расчетов на системах с распределенной памятью и обеспечивает возможность запуска программы на большинстве доступных многопроцессорных систем.

При расчетах на вычислительных системах с распределенной памятью обмен данными между параллельными процессами с помощью MPI фактически представляет собой пересылку пакетов этих данных через стандартизированные аппаратные каналы (сокеты). При этом обменивающиеся процессы обычно блокируются на время пересылки для сохранения целостности данных.

Суммарное время указанных блокировок в нашем случае зависит от количества вычислительных узлов, между которыми распределяются вычисления, а также от числа ячеек в параллельно обрабатываемых областях и от порядка используемого интерполяционного полинома и может вносить серьезный вклад в общее расчетное время.

Добиться снижения синхронизационных затрат можно за счет использования вычислительных систем с общей памятью, так как в таком случае можно исключить пересылки пакетов данных, заменив их обменами через общие для параллельных процессов области памяти. Однако вычислительные системы с общей памятью обычно включают в себя достаточно небольшое число процессоров (обычно до 32), что, в свою очередь, делает такие системы неэффективными в нашем случае.

Выходом из этой ситуации может стать использование гибридных систем, совмещающих архитектуры с общей и распределенной памятью. В качестве примера такой гибридной архитектуры рассмотрим систему, построенную на многоядерных процессорах.

В таком случае для вычислительных потоков, обрабатываемых ядрами процессоров, аналогом общей памяти является кэш-память процессора или предоставляемая процессору локальная оперативная память. Многоядерные процессоры в таком случае представляют собой логические блоки (подсистемы с общей памятью) и могут быть объединены в общую систему (с общей или распределенной памятью).

Следует отметить, что для полноценного использования преимуществ подобных систем, часто требуется должным образом модифицировать расчетный алгоритм.

Для обменов данными через области общей памяти иногда целесообразно использование альтернативных интерфейсов для создания многопоточных приложений, например, OpenMP [6].

Использование OpenMP дает возможность производить обмены данными между параллельными потоками (нитьями) через области общей памяти, однако такой подход неэффективен при обменах данными вне областей общей памяти гибридной системы (в этом случае рекомендуется использовать указанный выше MPI).

Рассмотрим идею комбинированного использования MPI и OpenMP (рис.1) для распараллеливания вычислений на примере системы, построенной на современных многоядерных процессорах.

Следует также отметить, что дальнейшее описание технических деталей применения MPI и OpenMP приведено для соответствующих реализаций Fortran-MPI и Fortran-OpenMP (локализация для других языков программирования будет выглядеть аналогично).

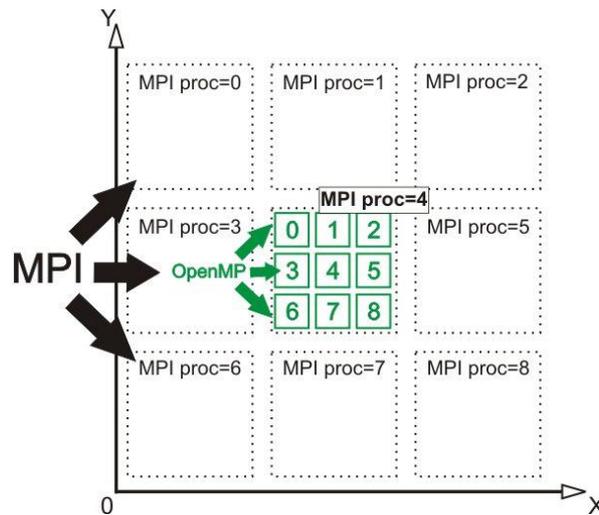


Рис.1. Гибридная схема использования MPI и OpenMP.

Рассматриваемая вычислительная система, построенная на многоядерных процессорах, представляет собой кластерную структуру – блоки, содержащие процессор и локальную память, объединены в локальную сеть (система с распределенной памятью). При этом ядра процессора имеют общий доступ к локальной памяти блока (подсистема с общей памятью). Распараллеливание между блоками осуществляется с помощью MPI, а между ядрами – с помощью OpenMP.

Применение описываемой гибридной техники распараллеливания стало возможным благодаря тому, что MPI (начиная с MPI-2) дает возможность инициализировать процессы с поддержкой «нитей» с помощью функции *MPI_INIT_THREAD* вместо *MPI_INIT*. Эта возможность позволяет процессу MPI создавать несколько потоков (в рассматриваемом случае – потоков OpenMP), причем параметр, передаваемый в качестве аргумента функции *MPI_INIT_THREAD*, определяет желаемый уровень поддержки нитей. В нашем случае необходимо указать в качестве аргумента *MPI_THREAD_FUNNELED*, чтобы каждый процесс MPI мог инициализировать несколько параллельных потоков OpenMP и только один поток OpenMP при этом мог осуществлять вызовы обменных функций MPI.

Создать параллельно обрабатываемые области с помощью OpenMP можно достаточно просто с помощью команд *!\$OMP DO* и *!\$OMP END DO NOWAIT*. В тех случаях, когда необходимо принудительно синхронизировать потоки OpenMP, можно использовать команду *!\$OMP BARRIER*.

Следует отметить, что численное моделирование развития гидродинамических неустойчивостей в некоторых случаях предполагает достаточно частое сохранение промежуточных данных. С целью избежания дополнительных синхронизаций в нашем случае операции ввода/вывода осуществляются одним «главным» потоком OpenMP в рамках процесса MPI. В этом случае можно использовать команды *!\$OMP MASTER* и *!\$OMP END MASTER* для того, чтобы часть кода между ними была выполнена только главным потоком OpenMP.

Исследование эффективности распараллеливания с помощью MPI и OpenMP

Исследуем эффективность описанной гибридной техники распараллеливания на примере нескольких тестовых расчетов задачи гравитационного турбулентного перемешивания (развитие неустойчивости Рэля-Тейлора).

Рассмотрим систему двух идеальных изотермических газов с уравнением состояния $p = \rho \frac{c_{0\alpha}^2}{\gamma}$, $\alpha = 1, 2$, $c_{0\alpha}$ – скорость звука для соответствующего газа (предполагаем, что скорость звука всюду одинакова), $\gamma = 5/3$ – показатель адиабаты в наших расчетах.

Предположим, что рассматриваемая область представляет собой прямоугольный параллелепипед $\{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, Z_{\min} \leq z \leq Z_{\max}\}$, $L_x = 1$, $L_y = 1$, $L_z = Z_{\min} - Z_{\max} = 2$, $Z_{\min} = -1.125$, $Z_{\max} = 0.875$, в котором в начальный момент времени газы заключены в областях, разделенных плоскостью $z = 0$, причем тяжелый газ занимает верхнюю часть рассматриваемой области.

В таком случае для распределения плотности и давления газов в начальный момент времени справедливы следующие соотношения:

для $z > 0$

$$p = p_0 \exp\left(-\gamma \frac{gz}{c_{02}^2}\right), \quad \rho = \rho_{02} \exp\left(-\gamma \frac{gz}{c_{02}^2}\right), \quad (5)$$

а для $z < 0$

$$p = p_0 \exp\left(-\gamma \frac{gz}{c_{01}^2}\right), \quad \rho = \rho_{01} \exp\left(-\gamma \frac{gz}{c_{01}^2}\right). \quad (6)$$

В формулах (5) и (6) p_0 – давление на поверхности раздела газов $z = 0$ непрерывно, плотности газов около контактной границы – ρ_{01} (легкий газ) и ρ_{02} (тяжелый газ), а ускорение силы тяжести $g = 1$.

Также предположим, что в начальный момент на поверхности раздела газов дополнительно заданы возмущения плотности в виде

$$\rho_1 = \rho_{01} (1 + 0.1 \operatorname{sign}(\xi - 1)) \exp\left(\gamma \frac{gh}{2c_{01}^2}\right), \quad (7)$$

где ξ – равномерно распределенное в интервале $(0, 1)$ случайное число.

Следует отметить, что при построении расчетного алгоритма возмущение достаточно задать в одном пространственном слое ячеек $(-0.01 \leq z \leq 0$ или $-0.005 \leq z \leq 0$ – в зависимости от конкретной сетки) и в легком газе.

Неустойчивость Рэля-Тейлора в этом случае возникает на границе раздела газов вследствие наличия возмущений контактной границы в начальный момент времени.

Начальные возмущения контактной границы увеличивают свою амплитуду с течением времени, что приводит к возникновению областей «провалов» тяжелого газа в виде струй и областей «подъемов» легкого газа в виде пузырей. При этом развитие неустойчивости проходит линейную, промежуточную регулярную асимптотическую и турбу-

лентную стадии. Наибольший интерес обычно представляет исследование турбулентной стадии развития, что является достаточно сложной задачей и часто требует использования методов повышенного порядка точности при построении расчетных алгоритмов.

Для численного моделирования предложенной задачи будем использовать схему (3), соответствующую системе уравнений гидродинамики (1). Следует отметить, что схема (3) должна быть модифицирована с учетом наличия гравитационных сил.

В качестве граничных условий выберем условия отражения от границ области. В качестве начальных значений будем использовать следующие:

$$\rho_{01} = 1.0, \quad \rho_{02} = 3.0, \quad p_0 = 15.0, \quad \mathbf{v}_0 = \{u_0, v_0, w_0\} = 0.$$

Для оценки эффективности параллельных вычислений принято использовать ряд общепризнанных численных показателей, основным из которых можно назвать ускорение (speedup) [7] параллельного алгоритма:

$$S = \frac{T_1}{T_{Np}}, \tag{8}$$

где T_1 – время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре, T_{Np} – время выполнения параллельного алгоритма на Np процессорах. Среди основных показателей можно отметить также эффективность параллельного алгоритма

$$E_{Np} = \frac{S}{Np}. \tag{9}$$

Приведенные параметры оценки эффективности распараллеливания (ускорение, эффективность) являются достаточными для сравнительного анализа применения MPI или гибрида MPI и OpenMP.

Для исследования ускорения и эффективности параллельного численного алгоритма моделирования развития неустойчивости Рэлея-Тейлора (НРТ) первую серию измерений проведем с использованием различного количества вычислительных узлов (процессоров или ядер многоядерного процессора) и одинакового общего числа расчетных ячеек – немасштабируемые расчеты. При этом, как уже было отмечено, с целью сравнительной оценки эффективности построим параллельные алгоритмы с использованием гибрида MPI и OpenMP и с использованием только MPI.

Результаты измерений ускорения и эффективности немасштабированных параллельных расчетов задачи гравитационного перемешивания представлены на рис.2,3.

Представленные на рис.2,3 результаты свидетельствуют о сравнительном превосходстве гибрида MPI и OpenMP при расчетах с использованием достаточно большого количества процессоров (в нашем случае – начиная с 64).

Следует также отметить, что расчеты производились на вычислительной системе, построенной на современных 16-ядерных процессорах, что позволило исследовать различные комбинации использования процессоров/ядер (например, восьми вычислительным узлам соответствуют комбинации, при которых заняты по одному ядру восьми процессоров, по два ядра четырех процессоров и т.д.). На рис.2,3 приведены усредненные

оценки (по 10 замеров на комбинацию) для лучших комбинаций как для MPI, так и для гибрида.

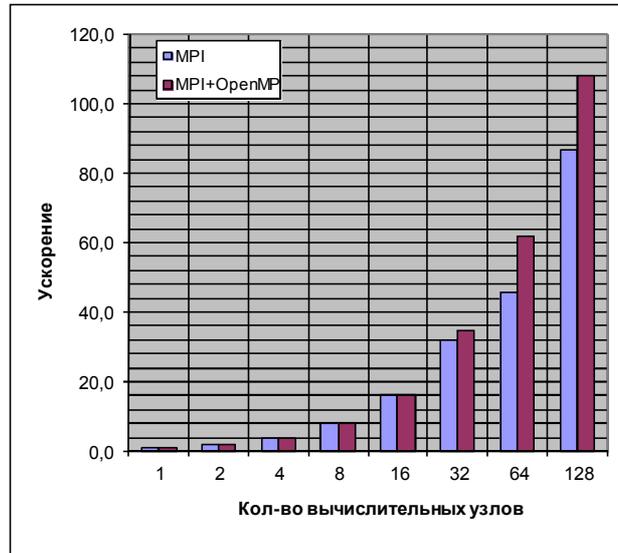


Рис.2. Сравнительные показатели ускорения немасштабируемых расчетов при распараллеливании с помощью MPI и MPI+OpenMP для моделирования развития НРТ.

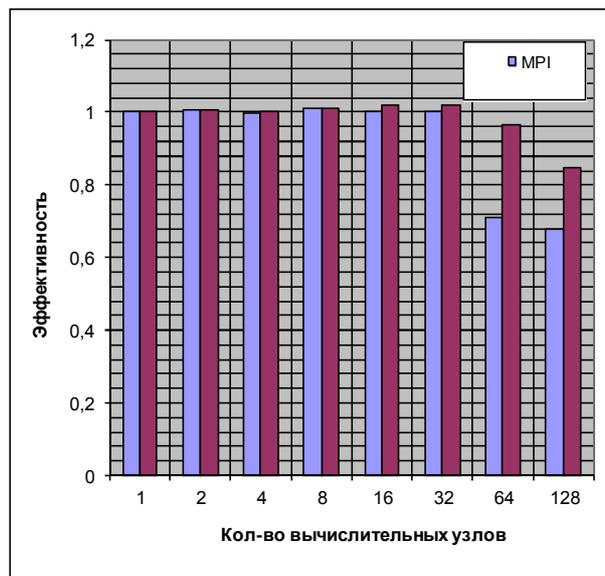


Рис.3. Сравнительные показатели эффективности немасштабируемых расчетов при распараллеливании с помощью MPI и MPI+OpenMP для моделирования развития НРТ.

Достаточно резкое падение эффективности распараллеливания с использованием MPI, начиная с 64 узлов, можно объяснить резким возрастанием обменов при увеличении количества процессоров и неизменном общем числе расчетных точек. Для проверки

этого утверждения проведем аналогичные измерения ускорения и эффективности параллельных расчетов с использованием различного количества вычислительных узлов при условии постоянства количества расчетных точек на каждом из узлов – масштабируемые расчеты.

На рис.4,5 представлены результаты измерений ускорения и эффективности масштабируемых параллельных расчетов задачи гравитационного перемешивания.

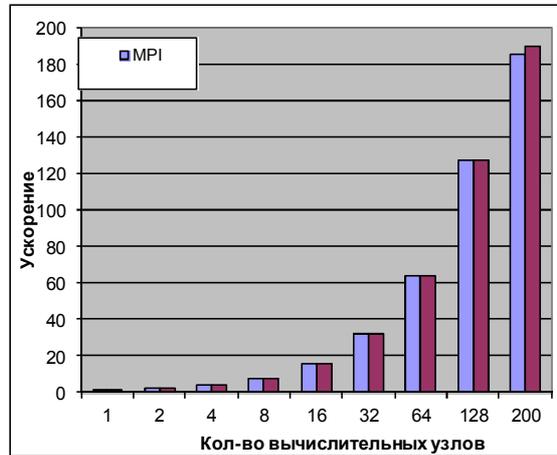


Рис.4. Сравнительные показатели ускорения масштабируемых расчетов при распараллеливании с помощью MPI и MPI+OpenMP для моделирования развития НРТ.

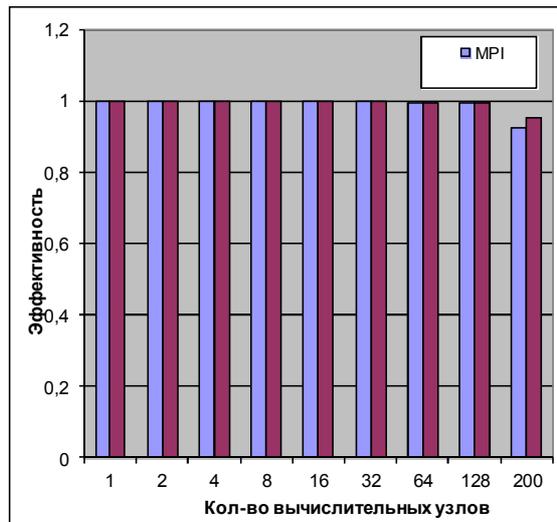


Рис.5. Сравнительные показатели эффективности масштабируемых расчетов при распараллеливании с помощью MPI и MPI+OpenMP для моделирования развития НРТ.

Следует отметить, что отсутствие серьезного снижения эффективности MPI в случае масштабируемых расчетов не наблюдается, что согласуется с высказанным выше утверждением.

В таком случае ускорение при использовании Np процессоров можно вычислить следующим образом:

$$S = \frac{T_1^{Np}}{T_{Np}} = Np \frac{T_1}{T_{Np}},$$

где T_{Np} – расчетное время на Np процессорах, T_1^{Np} – в этом случае время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре ($T_1^{Np} = Np * T_1$, T_1 – время выполнения последовательного алгоритма в области, обрабатываемой одним узлом при распараллеливании), а эффективность

$$E = \frac{S}{Np} = \frac{T_1}{T_{Np}}.$$

Также можно отметить, что и в случае масштабируемых параллельных вычислений гибрид MPI и OpenMP оказался более эффективным по сравнению с MPI на большом числе процессоров (от 200).

Сравнение схем повышенного порядка точности

Для анализа качества расчетов с использованием схем повышенного порядка точности совместно с исследованием ускорения и эффективности параллельных вычислений на примере моделирования развития неустойчивости Рэля-Тейлора также были произведены расчеты динамики роста ширины зоны турбулентного перемешивания (рис.6) и спектра кинетической энергии (рис.7) с использованием схемы [2] и квазимонотонной схемы повышенного порядка точности [3].

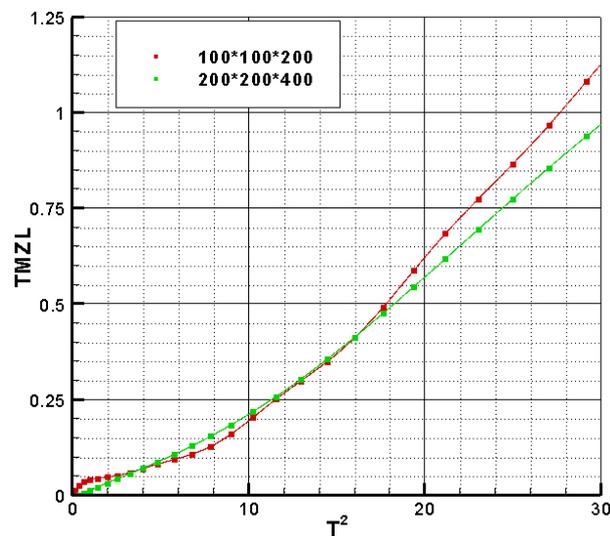


Рис.6. Сглаженные графики зависимости ширины зоны турбулентного перемешивания от квадрата времени T^2 на сетках 100*100*200 и 200*200*400.

На рис.6 представлены результаты расчетов динамики роста ширины зоны турбулентного перемешивания с использованием квазимоноотонной схемы повышенного порядка точности на сетках, содержащих $100*100*200$ и $200*200*400$ расчетных ячеек.

При расчетах ширины зоны турбулентного перемешивания было отмечено, что поперечные размеры возмущений уменьшаются пропорционально разрежению сетки, а, следовательно, уменьшается и скорость роста возмущений. Однако при выборе размеров возмущений независимо от шага сетки результат расчета будет следовать размерам возмущений, а не шагу сетки.

Также достаточно важной при моделировании задач турбулентного перемешивания является задача исследования спектра кинетической энергии (спектральной плотности).

Для расчета спектра кинетической энергии для каждой из пространственных компонент скорости используется аналог разложения в ряд Фурье

$$\{u, v, w\}_{ijk} = \sum_{l=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} \sum_{n=0}^{N_z-1} \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}_{lmn} \cos\left(\frac{\pi l}{L_x} x_i\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L_y} y_j\right) \cos\left(\frac{\pi n}{L_z} z_k\right),$$

где $\tilde{u}_{ijk}, \tilde{v}_{ijk}, \tilde{w}_{ijk}$ – соответствующие коэффициенты разложения. Различные наборы $\{l, m, n\}$ образуют волновые векторы, модули которых равны $q = \sqrt{l^2 / L_x^2 + m^2 / L_y^2 + n^2 / L_z^2}$, при этом максимальное значение модуля равно $q_{\max} = \sqrt{N_x^2 / L_x^2 + N_y^2 / L_y^2 + N_z^2 / L_z^2}$. Далее интервал всех возможных абсолютных значений волновых векторов $(0, q_{\max})$ разбивается на некоторое количество подынтервалов, внутри каждого из которых производится суммирование соответствующих значений спектральной кинетической энергии $\tilde{E}_{lmn} = \frac{\tilde{u}_{lmn}^2 + \tilde{v}_{lmn}^2 + \tilde{w}_{lmn}^2}{2}$. Таким образом, при достаточно подробном разбиении интервала $(0, q_{\max})$ мы можем получить спектр $\tilde{E}_{lmn}(q)$, который можно интерпретировать как спектр кинетической энергии.

Сравнительные результаты расчетов спектральной плотности кинетической энергии, выполненные с помощью схемы [2] (второго порядка) и квазимоноотонной схемы повышенного порядка точности (третьего порядка), приведены на рис.7 (в обоих случаях использовалась сетка $200*200*400$).

Представленная на рис.7 спектральная плотность имеет выраженный линейный участок с наклоном $-5/3$ (колмогоровский спектр), который затем сменяется линейным участком с наклоном $-11/3$.

Подобные результаты в том или ином виде наблюдались ранее при моделировании аналогичных задач с использованием TVD схем.

Резкое затухание спектра в области $q \geq 2$ не имеет физического смысла, а связано со спецификой усреднения и отсутствием всех гармоник для всех волновых чисел в дискретном представлении.

Следует отметить, что применение квазимоноотонной схемы повышенного порядка точности позволяет получить более четкий колмогоровский спектр по сравнению с проводимыми ранее расчетами.

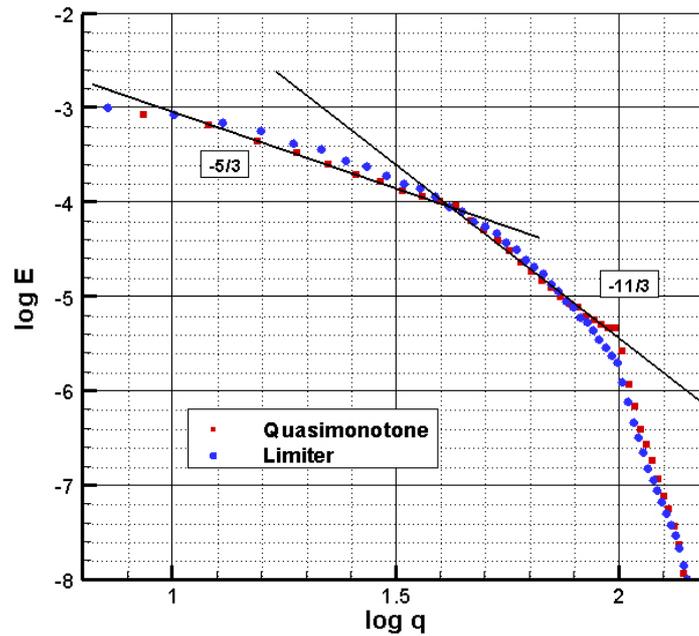


Рис.7. Спектральная плотность кинетической в расчетах с использованием схемы [2] (круги) и квазимонотонной схемы повышенного порядка точности (квадраты) для момента времени $t=4.0$. Дополнительно построены наклонные линии $-5/3$ и $-11/3$.

В заключение приведем результаты расчетов еще одной задачи турбулентного перемешивания, предложенной Погги, более детально описанной в [8]. Задача Погги является задачей о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова.

Данная задача представляет собой эволюцию движения ударной волны в трехмерной области ($0 \leq x \leq 80\text{мм}$, $0 \leq y \leq 80\text{мм}$, $-100 \leq z \leq 300\text{мм}$). При этом рассматриваемая область заполнена двумя газами с различными значениями показателя адиабаты (воздух и элегаз – SF6), а также состоит из двух камер – высокого и низкого давления. В рамках данной задачи будем считать, что показатель адиабаты для элегаза $\gamma=1.094$ и для воздуха – $\gamma=1.4$.

В начальный момент времени существуют 3 области с различными значениями газодинамических величин (рис.8):

- Область, заполненная SF6 под высоким давлением ($-100\text{мм} \leq z \leq -3\text{мм}$);
- Область, заполненная SF6 под низким (атмосферным) давлением ($-3\text{мм} \leq z \leq 0\text{мм}$);
- Область, заполненная воздухом под низким давлением ($0\text{мм} \leq z \leq 300\text{мм}$).

Три полученные области трубы в начальный момент времени разделены двумя тонкими мембранами. Таким образом, в данной задаче присутствуют 2 типа разрывных условий для газодинамических величин – ударная волна (УВ), которая возникает при прорыве мембраны, разделяющей камеры с SF6 под высоким и низким давлением, а также контактный разрыв (КР), возникающий на границе, разделяющей элегаз под низким давлением и воздух.

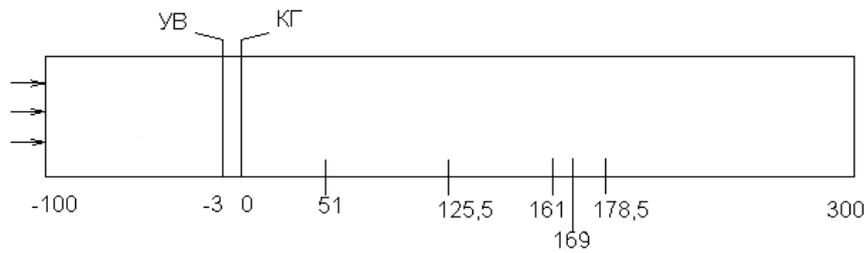


Рис.8. Начальное положение ударной волны и контактного разрыва, а также положение датчиков в принятой постановке задачи.

В данной задаче рассматриваются случайные начальные возмущения контактной границы (КГ), заключающиеся в прогибе мембраны. Этот «прогиб» обеспечивает начальные возмущения, благодаря которым возникает неустойчивость Рихтмайера-Мешкова.

Для численного моделирования описанной задачи можно также использовать систему (1) и соответствующую ей схему (3). При этом необходимо учесть наличие газов с различным значением показателя адиабаты (подробно данная процедура описана в [9]). Также следует отметить, что при расчетах будем использовать указанные выше квази-монотонную схему повышенного порядка точности и схему [2].

Граничные условия сформулируем таким образом, чтобы стенки $x=x_{min}$, $x=x_{max}$, $y=y_{min}$, $y=y_{max}$ и $z=z_{max}$ были жесткими (граничное значение соответствующей нормальной компоненты скорости равно нулю). Стенка $z=z_{min}$ – «проницаемая», здесь равны нулю производные по z -координате от плотности, давления и продольной скорости.

Начальные условия сформулируем следующим образом:

в области, заполненной SF6 под высоким давлением:

$$\gamma = 1.094, \quad \rho = 1.209 \cdot 10^{-2} \text{ г/см}^3, \quad p = 2.152 \text{ бар}, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 97.76 \text{ м/с},$$

в области, заполненной SF6 под низким (атмосферным) давлением:

$$\gamma = 1.094, \quad \rho = 6.037 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3, \quad p = 1 \text{ бар}, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

в области, заполненной воздухом под низким давлением:

$$\gamma = 1.4, \quad \rho = 1.198 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3, \quad p = 1 \text{ бар}, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

На контактном разрыве зададим псевдослучайные возмущения плотности с амплитудой $\Delta\rho = 0.9678 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$.

Численное моделирование будем производить на основе алгоритма, построенного с использованием описанного выше гибрида MPI и OpenMP на сетке $120 \cdot 120 \cdot 1200$.

Основной целью проводимых расчетов является получение и анализ временных зависимостей пульсаций продольной компоненты скорости $\langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2$ в местах расположения датчиков LDA и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Координаты точек измерения указаны в [8].

На рис.9 приведены результаты расчетов пульсаций продольной компоненты скорости $\langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2$ в указанных местах расположения датчиков, а также соответствующие экспериментальные данные. В данном случае была использована квази-монотонная схема повышенного порядка точности.

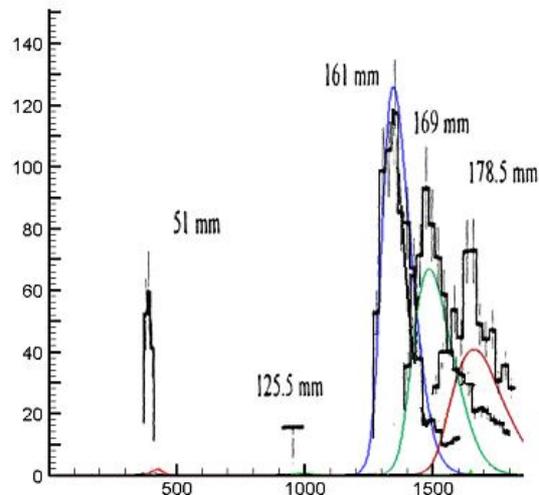


Рис.9. Сравнение результатов расчетов временной зависимости пульсаций продольной компоненты скорости с экспериментом. Гладкие линии – результат расчетов.

Можно отметить, глядя на рис.9, что полученные с использованием квазимонотонной схемы повышенного порядка точности результаты хорошо согласуются с экспериментом.

Для сравнения на рис.10 приведены результаты расчетов нормированных амплитуд пульсаций с использованием квазимонотонной схемы повышенного порядка точности и схемы [2].

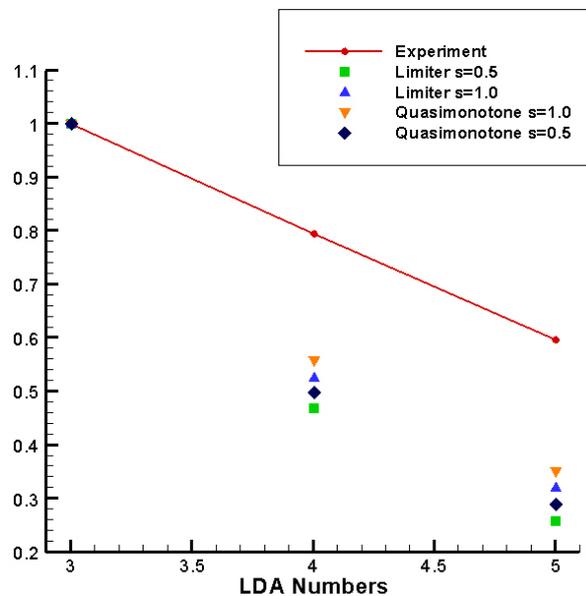


Рис.10. Сравнение нормированных максимумов амплитуд пульсаций схемы [2], квазимонотонной схемы повышенного порядка точности и эксперимента.

Как видно из рис.10, «закон затухания» пульсаций в случае использования квази-монотонной схемы повышенного порядка точности немного более соответствует экспериментальному закону.

Также использование квази-монотонной схемы повышенного порядка точности дает хорошие результаты для границ зоны турбулентного перемешивания (рис.11).

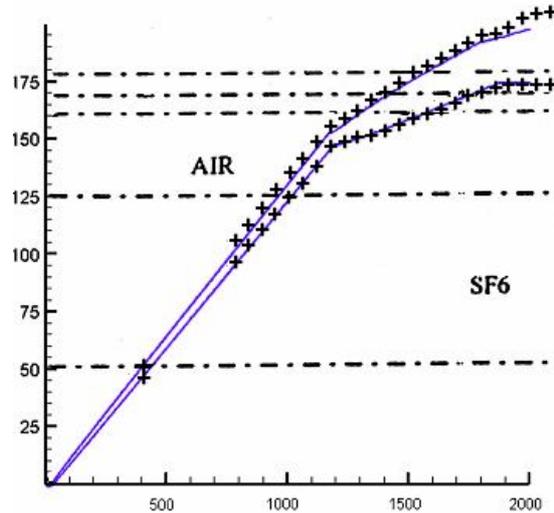


Рис.11. Сравнительная $Z-t$ диаграмма движения границ зоны турбулентного перемешивания. Сплошная линия – результаты расчетов с помощью квази-монотонной схемы повышенного порядка точности, крестики – эксперимент. Размеры по вертикальной оси (Z) в мм, по горизонтальной оси (время t) в мкс.

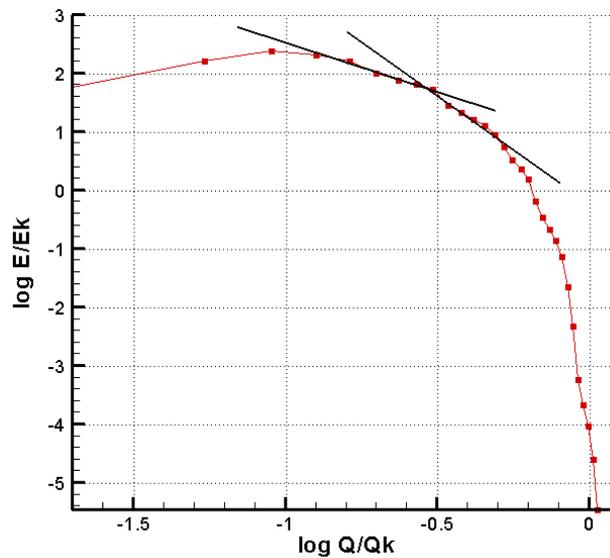


Рис.12. Спектральная плотность кинетической энергии. Расчеты выполнены с помощью квази-монотонной схемы повышенного порядка точности. Прямые линии на графике проведены с наклоном к осям $-5/3$ и $-11/3$.

Представленная на рис.11 $Z-t$ диаграмма движения границ зоны турбулентного перемешивания имеет 3 достаточно четко выраженные стадии, переходы между которыми обусловлены максимальным сжатием первичной и вторичной (отраженной) ударных волн.

Как уже было отмечено выше, еще одним достаточно важным показателем при исследовании турбулентного перемешивания является анализ спектральной плотности кинетической энергии на разных этапах развития турбулентности.

Спектральная плотность кинетической энергии представлена на рис.12. Как и в случае гравитационного перемешивания, на графике спектральной плотности можно выделить инерционный интервал $E \sim q^{-5/3}$ и интервал в области диссипации $E \sim q^{-11/3}$.

Таким образом, применение гибрида MPI и OpenMP при построении численного алгоритма позволяет эффективно проводить расчеты задач турбулентного перемешивания на основе схем повышенного порядка точности и получать более точные турбулентные характеристики (например, спектральную плотность кинетической энергии).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.К. Годунов. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб., 1959, 47(89):3, с.271–306.
2. К.В. Вязников, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами гиперболического типа // Математическое моделирование, 1989, т.1, №5, с.95-120.
3. М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин, В.С. Чеванин. Об одном варианте существенно неосциллирующих разностных схем высокого порядка точности для систем законов сохранения // Математическое моделирование, 2009, т.21, №11, с.19-32.
4. В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. Параллельные вычисления. С-Пб., БХВ-Петербург, 2002.
5. Marc Snir, Steve W. Otto, David W. Walker, Jack Dongarra, Steven Huss-Lederman. MPI: The Complete Reference, Cambridge, MA, MIT Press, 1995.
6. А.С. Антонов. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. Изд-во Московского Университета, 2009.
7. G.V. Wilson. Practical Parallel Programming. MIT Press, 1990.
8. F. Poggi, M.-H. Thorembey, G. Rodriguez. Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer-Meshkov instability // Physics of Fluids, 1998, v.10, №11, p.2698-2700.
9. М.Е. Ладонкина. Численное моделирование турбулентного перемешивания с использованием высокопроизводительных систем. Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. – М: 2005.

Поступила в редакцию 11.02.11