Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Жуков, О. Б. Феодоритова, Н. Д. Новикова, А. П. Дубень, Явно-итерационная схема для интегрирования по времени системы уравнений Навье–Стокса, *Матем. моделирование*, 2020, том 32, номер 4, 57–74

DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2020-04-05>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:57:00

ЯВНО-ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

© 2020 г. *В.Т. Жуков, О.Б. Феодоритова, Н.Д. Новикова, А.П. Дубень*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
zhukov@kiam.ru, feodor@kiam.ru, nn@kiam.ru, alexey.duben@gmail.com

DOI: 10.20948/mm-2020-04-05

Предложена новая явно-итерационная схема интегрирования по времени многомерных уравнений Навье-Стокса сжимаемой среды на основе расщепления на конвективный и диффузионный этапы, которые выполняются последовательно на каждом шаге по времени. Конвективный этап реализуется по схеме Годунова, диффузионный – по чебышевской явно-итерационной схеме ЛИ-М, не имеющей ограничения на шаг по времени. Результирующая схема обеспечивает выполнение основных законов сохранения на произвольных нерегулярных сетках. Явный характер вычислений гарантирует эффективность использования схемы в различных параллельных технологиях.

Ключевые слова: численное моделирование, уравнения Навье-Стокса, расщепление по физическим процессам, чебышевская явно-итерационная схема.

AN EXPLICIT-ITERATIVE SCHEME FOR THE TIME INTEGRATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

V.T. Zhukov, O.B. Feodoritova, N.D. Novikova, A.P. Duben

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

A new integration algorithm is proposed for the time-dependent Navier-Stokes equations of compressible flows. We propose operator splitting method to split the equations into convection and diffusion parts which are solved successively at each time step. The convection part is solved by the Godunov method, the diffusion part is solved by the explicit-iteration Chebyshev scheme which has no stability restriction on the time-step size. The resulting scheme ensures the fulfillment of the main conservation laws on arbitrary unstructured grids. The explicit nature of the calculations ensures the efficiency of the use of the scheme in various parallel technologies.

Key words: numerical simulation, Navier-Stokes equations, splitting method, Chebyshev explicit-iterative scheme.

1. Введение

Создание новых методов решения системы нестационарных уравнений Навье-Стокса представляется актуальным в аспекте трехмерного моделиро-

вания многокомпонентных химически реагирующих течений. В данной работе нами предлагается схема интегрирования по времени для системы трехмерных уравнений Навье-Стокса динамики сжимаемого теплопроводного идеального газа [1], в перспективе ориентированная на учет многокомпонентной диффузии. В основе схемы лежит известный принцип расщепления алгоритма расчета одного временного шага всей системы уравнений на конвективный и диффузионный этапы [2]. Предполагается, что для гиперболической подсистемы, получающейся из исходной системы в отсутствие вязкости, теплопроводности и диффузии, расчет одного шага по времени может быть выполнен по явной схеме явновского типа.

Ясно, что при расчете конвективного этапа по явной схеме для устойчивости шаг по времени τ_{conv} ограничен критерием Куранта–Фридрихса–Леви, и такое ограничение при расчете нестационарных процессов носит физически естественный характер. Если есть зоны, где существенны диффузионные (вязкие, теплопроводные) процессы, то расчет диффузионного этапа с шагом τ_{conv} невозможно проводить по явной схеме. В этом случае для системы параболических уравнений, отвечающей диффузионному этапу, можно записать неявную схему и решать ее одним из итерационных алгоритмов. При таком подходе подбор эмпирических элементов (предобусловливателей, критериев окончания итераций и др.) осложняется, так как с ростом числа химических компонентов заполненность матрицы линейной системы может возрасти квадратично. Такая ситуация возникает, когда в матрице коэффициентов диффузии нельзя пренебречь недиагональными членами, или когда запись диффузионного потока компонента включает корректирующую поправку для сохранения баланса массы [3]. При использовании явно-итерационных схем возникает ограничение на число итераций снизу, см. теорему Гельфанда–Локуциевского [4, с.275–282]. Класс схем, подпадающих под это ограничение, включает итерационные схемы, эквивалентные некоторой двухслойной явной схеме с расширенным шаблоном влияния. Для схемы ЛИ-М [5–8], используемой нами на диффузионном этапе, упомянутая теорема выполняется. Эта схема возникла на основе схемы [9–11]. Расчет по схеме ЛИ-М решения на верхнем слое по времени реализуется определенным числом явных итераций с параметрами, являющимися корнями многочленов Чебышева. Преимуществом схемы ЛИ-М является отсутствие как ограничения на шаг по времени, так и эмпирических параметров. Отметим, что в [5–7] построены и исследованы схемы ЛИ-М, ЛИ-2 точности $O(\tau)$, $O(\tau^2)$ соответственно. Указанные схемы алгоритмически похожи на схемы интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, теория и примеры применения которых даны в

[12–14]. Свойства схемы ЛИ-М и ее отличие от явных схем интегрирования жестких систем обсуждаются в разделе 2. Здесь укажем ключевой момент – один из элементарных шагов схемы ЛИ-М совпадает с явной схемой, т.е. схема может быть записана в виде схемы предиктор-корректор, см. раздел 2.

В итоге результирующая схема для всей системы уравнений Навье-Стокса обладает следующими отличительными достоинствами: она обеспечивает на дискретном уровне точное выполнение законов сохранения на произвольных нерегулярных сетках, проста в реализации. Предлагаемая схема удобна для создания компьютерного кода расчета многокомпонентных химически реагирующих течений на основе современного аэродинамического комплекса [15]. Явный характер вычислений гарантирует эффективность использования схемы при параллельной реализации.

Известные схемы расщепления такими свойствами в совокупности не обладают [16], либо ориентированы на регулярные сетки [17].

2. Схема локальных итераций ЛИ-М

Конструкция схемы ЛИ-М основана на многочленах Чебышева I рода степени p . Нужный многочлен определяется однозначно шагом по времени τ и верхней границей $\lambda_{\max}$ разностного эллиптического оператора. Степень многочлена $p \sim \sqrt{\tau \lambda_{\max}}$ определяется параболическим числом Куранта $\tau \lambda_{\max}$. На шаге по времени ЛИ-М выполняет $q = 2p - 1 \geq 1$ итераций, алгоритмически эквивалентных явной схеме счета. Если формально исключить промежуточные итерации, то схему ЛИ-М можно представить как явную схему с увеличенным в q раз шаблоном узлов сетки по пространству. Привлекательность состоит в том, что q -кратное увеличение шаблона дает возможность увеличить шаг счета по времени в q^2 раз.

Одной из отличительных особенностей схемы ЛИ-М является правильный расчет эволюции во времени первых, низкочастотных компонентов разностного решения. Главная идея существующих модификаций схем локальных итераций отличается от обычного чебышевского ускорения итераций: конструкция диктуется условиями аппроксимации и устойчивости, а не оптимизацией сходимости итераций к решению неявной схемы. Теоретическое обоснование схем локальных итераций проведено для многомерных линейных параболических уравнений при краевых условиях первого, второго и третьего рода, но схема может быть использована и для более общих эволюционных уравнений и систем. В частности, в [8] схема ЛИ-М применена для решения нелинейной системы уравнений теплопроводности в рамках газодинамической модели: на тепловом этапе трехтемпературная

нелинейная модель решается схемой ЛИ-М, обеспечивающей сохранение баланса тепла для каждой ячейки сетки, что важно при расчетах высокотемпературных процессов.

Алгоритм схемы ЛИ-М приведем для простоты изложения для начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + f(x, t), \quad x \in G \subset R^d, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

На границе ∂G области G задано условие $u(x, t) = \varphi(x, t)$, $x \in \partial G$, $t \in [0, T]$, при $t=0$ – начальное условие $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in G$. В (1) L – линейный эллиптический самосопряженный положительно-определенный оператор. Функции f , φ , u^0 заданы, функция u является искомой. Типичным примером служит оператор $Lu = -\operatorname{div}(k(x, t) \operatorname{grad} u)$ при краевых условиях первого, второго или третьего рода.

Вопросы пространственной дискретизации в данной работе не обсуждаются. Считаем, что в области $G \times [0, T]$ построена пространственно-временная сетка $\Omega_{h, \tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$, где $\Omega_\tau = \{t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N_\tau\}$ – сетка по времени с шагом $\tau = T/N_\tau$, $\Omega_h = \{x_i \in G, 0 \leq i \leq N_h\}$ – неструктурированная сетка в G , зависящая от параметра $h = (1/N_h)^{1/d}$ – шага сетки, характеризующего средний диаметр ячеек сетки, x_i – точка пространства R^d . Шаг τ по времени может быть переменным. Узлы сетки Ω_h будем записывать также в виде x_h , опуская в записи узла его номер. Обозначим через $\partial\Omega_h$ теоретико-множественную границу Ω_h . Введем сеточные функции обычным образом: значения сеточной функции u на n -м временном слое t_n обозначим как u^n или $u^n(x) = u(x, t_n)$, $x \in \Omega_h$, а значения функции на сетке $\Omega_{h, \tau}$ как $u_i^n(x) = u(x_i, t_n)$ или в безиндексном виде как $u(x, t)$, $x, t \in \Omega_{h, \tau}$. В подпространстве U_h сеточных функций, заданных на Ω_h и обращающихся в нуль на $\partial\Omega_h$, определим разностный оператор L_h , аппроксимирующий исходный дифференциальный оператор L на классе гладких функций, определенных на G и обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Конкретный вид оператора L_h и его порядок аппроксимации также не являются принципиальными. Предполагаем, что оператор L_h – самосопряженный, его собственные значения λ неотрицательны и лежат на отрезке $[0; \lambda_{\max}]$ вещественной оси.

Схема ЛИ-М является двухслойной по времени и алгоритм перехода от слоя t_n к слою t_{n+1} явно-итерационный. Число итераций q определяется

только из условия устойчивости и является своим для каждого слоя n . Контроль сходимости итераций не нужен, точность по времени обеспечивается конструкцией схемы и регулируется выбором шага τ .

Для объяснения свойств схемы ЛИ-М рассмотрим промежуточную дифференциально–разностную схему, сводя задачу (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений во внутренних узлах $Int \Omega_h$ области Ω_h

$$\frac{d v}{d t} = -L_h v + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $v = (v_i, 0 \leq i \leq N_h)$, $f = (f_i, 0 \leq i \leq N_h)$ – вектор-функции непрерывного аргумента t , а компоненты $f_i(t)$ совпадают с $f(x, t)$ во всех внутренних узлах сетки $Int \Omega_h$, за исключением приграничных, в которых в $f_i(t)$ учитываются краевые условия. Система (2) дополняется начальными условиями $v_i(0) = u(x_i, 0)$, $x_i \in Int \Omega_h$. В [6] предложена схема с чебышевскими параметрами, для погрешности которой при условии $p \geq 0.25 \pi \sqrt{\tau \lambda_{\max} + 1}$ верна в сеточной L_2 –норме оценка $\|u^n - v^n\| \leq C n \tau^2$ для любого целого n тако-го, что $n \tau \leq T$, причем константа C не зависит от p [9,10]. Модификация ЛИ-М этой схемы приведена ниже в этом разделе, см. также [5–8,18]. Схему ЛИ-М формально можно отнести к классу схем с переменными шагами по времени. К этому классу относятся схемы на основе многочленов Чебышева [12–14]. Использование многочленов Чебышева ради расширения области устойчивости может приводить к нежелательным конструкциям, например, к зависимости константы C в оценке точности от степени многочлена Чебышева. Пример такой схемы на основе оптимального многочлена Чебышева приведен в [18] – в одномерном случае схема превращается в тривиальную явную схему с трехточечным шаблоном по пространству с шагом ph .

Существуют модификации схемы [9,10], позволяющие считать как с точностью $O(\tau)$, так и с точностью $O(\tau^2)$. В данной работе мы рассматриваем схему ЛИ-М точности $O(\tau)$. Алгоритм схемы имеет следующий вид.

1. Вычисляем верхнюю границу $\lambda_{\max}$ спектра оператора L_h по теореме Гершгорина и задаем степень чебышевского многочлена p формулой:

$$p = \left\lceil 0.25 \pi \sqrt{\tau \lambda_{\max} + 1} \right\rceil, \quad (3)$$

где функция $\lceil s \rceil$ – это наименьшее целое, большее или равное s .

2. Берем нули многочлена Чебышева, упорядочивая их для устойчивости [19]:

$$K_p = \left\{ \cos \frac{2i-1}{2p} \pi, \quad i = 1, 2, \dots, p \right\}.$$

По упорядоченному множеству $\beta_m \in K_p$ находим параметры

$$a_m = \frac{\lambda_{\max}}{1 + z_1} (z_1 - \beta_m), \quad m = 1, \dots, p, \quad (4)$$

где корню $\beta_1 = z_1 = \cos(0.5 \pi / p)$ соответствует параметр $a_1 = 0$.

Окончательно набор итерационных параметров состоит из $q = 2p - 1$ чисел $\{b_1, \dots, b_q\} \equiv \{a_p, \dots, a_2, a_p, \dots, a_2, a_1\}$. В этом наборе параметры $a_p, \dots, a_2$ повторяются дважды, а параметр $a_1 = 0$ – один раз; вместо обратного можно взять прямой порядок, это не имеет значения.

3. Задаем начальное приближение $y^{(0)} = u^n$ на слое n и в цикле по $l = 1, 2, \dots, q$ вычисляем

$$y^{(l)} = \frac{1}{1 + \tau b_l} (y^{(0)} + \tau b_l y^{(l-1)} - \tau L_h y^{(l-1)} + \tau f^{n+0.5}), \quad (5)$$

где $f^{n+0.5} = f(x, t_n + 0.5\tau)$. Результат – функция на верхнем слое $u^{n+1} = y^{(q)}$.

4. Если $n + 1 < N_\tau$, то переходим на слой t_{n+1} с новыми данными.

Выбор в (4) $\beta_1 = z_1 = \cos(0.5 \pi / p)$ обеспечивает равенство $a_1 = 0$, поэтому последняя итерация на каждом шаге по времени эквивалентна счету по явной схеме, что хорошо вписывается в структуру "предиктор-корректор" схем, основанных на законах сохранения. Важно, что нижняя граница спектра оператора L_h , обычно неизвестная, не участвует в определении алгоритма.

Дадим операторное описание схемы. Введем оператор:

$$F_p(L_h) = H_p(L_h) / H_p(-1/\tau), \quad (6)$$

где

$$H_p(\lambda) = \prod_{m=p}^{m=1} (a_m - \lambda) \equiv T_p(z_1 - (z_1 + 1) \lambda / \lambda_{\max}),$$

а $T_p(x)$ – многочлен Чебышева I рода, наименее уклоняющийся от 0 на отрезке $[-1; 1]$:

$$T_p(x) = \begin{cases} \cos(p \arccos x), & |x| \leq 1, \\ \text{ch}(p \text{ arch } x), & |x| > 1. \end{cases} \quad (7)$$

Введем для удобства записи оператор

$$B = I + \tau L_h. \quad (8)$$

Обращение этого оператора в виде процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений возникает при записи чисто неявной схемы. Обозначим

$$F_p = \prod_{m=p}^{m=1} \left(I - \frac{1}{1 + \tau a_m} B \right), \quad Z_{p-1} = \prod_{m=p}^{m=2} \left(I - \frac{1}{1 + \tau a_m} B \right). \quad (9)$$

Здесь I – тождественный оператор. Так как $a_1 = 0$, то $F_p = -\tau L_h Z_{p-1}$. После исключения из (5) промежуточных итераций схему ЛИ-М можно записать с помощью введенных обозначений в операторной форме:

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= S^+ y^n + \tau Q^n, \quad 0 \leq n < N_\tau, \quad y^0 = u^0, \\ S^+ &= (I - F_p^2) B^{-1}, \quad Q^n = (I - F_p Z_{p-1}) B^{-1} f^{n+0.5}. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) запись B^{-1} носит формальный характер, в явном виде обращение оператора не выполняется, выражения с B^{-1} возникают в (10) в результате реализации итераций (5).

В данной работе мы представляем реализацию схемы ЛИ-М применительно к нестационарным трехмерным уравнениям Навье-Стокса описания течений сжимаемой теплопроводной среды. В будущем предполагается реализация схемы ЛИ-М для моделирования вязких, теплопроводных и диффузионных процессов в многокомпонентных химически реагирующих газовых средах.

3. Схема ЛИ-М для решения одномерных уравнений Навье-Стокса

Предварительно опишем схему ЛИ-М применительно к системе одномерных уравнений Навье-Стокса. В декартовых координатах эта система может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (u(E + p))}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $E = \rho(e + u^2/2)$ – полная энергия, e – внутренняя энергия, μ , κ – коэффициенты вязкости и теплопроводности соответственно. Система дополняется уравнениями состояния, вид которых для изложения алгоритма схемы не имеет существенного значения. Для конкретности будем рассматривать идеальный газ с уравнениями состояния $p = (\gamma - 1)\rho e$, $e = e(T) = C_p T$, где C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении. В общем случае считаем, что из уравнения $e = e(T)$ можно найти $T = T(e)$.

Пусть для системы (11) в области $0 < x < 1$, $0 < t \leq T$ поставлена начально-краевая задача. Введем на $0 < x < 1$ равномерную сетку G_h с шагом h и запишем в каждом ее узле x_i ($i = 1, \dots, N_h$) разностную схему методом конечного объема, т.е. проинтегрируем по «дуальной» ячейке и перейдем к потоковой записи схемы. На границах ячеек заменяем диффузионные потоки разностными соотношениями, а конвективные потоки определяем, например, с помощью решения элементарных задач Римана. В записи схем для удобства будем использовать дифференциальные выражения, подразумеваемая упомянутые выше аппроксимации. По времени введем сетку $0 = t_0, t_1, \dots, t_{N_\tau} = T$ с шагом интегрирования $\tau = t_{n+1} - t_n$.

В основе предлагаемой схемы лежит процедура расщепления на конвективный и диффузионный этапы. При этом предполагается, что шаг по времени τ ограничен условием устойчивости явной схемы для гиперболической системы $\tau = \tau_{conv}$, получающейся из исходной системы (11) в отсутствии вязкости и теплопроводности, $\mu = \kappa = 0$.

Для описания схемы интегрирования по времени введем следующие обозначения. Переменные, принадлежащие нижнему временному слою t_n , обозначим как ρ , u , E , e . Результат расчета конвективного этапа обозначим ρ_{conv} , u_{conv} , E_{conv} , e_{conv} . Результирующие величины на верхнем слое $t_{n+1} = t_n + \tau_{conv}$ обозначим верхней чертой: $\bar{\rho}$, $\bar{u}$, $\bar{E}$, $\bar{e}$.

Пространственную аппроксимацию считаем известной. Алгоритм расчета одного временного шага удобно разбить на три этапа: конвективный, вязкий и теплопроводный. Приведем описание этапов в формализованном упрощенном виде. Реальный компьютерный алгоритм выглядит по-другому, он учитывает наличие источников членов любого происхождения.

Этап I, конвективный. Известные переменные – ρ , u , E , e на нижнем слое. Проводим расчет этапа по явной схеме:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{conv} - \rho}{\tau_{conv}} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\rho_{conv} u_{conv} - \rho u}{\tau_{conv}} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= 0, \\
\frac{E_{conv} - E}{\tau_{conv}} + \frac{\partial(u(E + p))}{\partial x} &= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Результат: ρ_{conv} , u_{conv} , E_{conv} . Величину ρ_{conv} принимаем за основную переменную на верхнем слое: $\bar{\rho} = \rho_{conv}$.

Введем сеточные операторы, аппроксимирующие с точностью $O(h^2)$ соответствующие дифференциальные операторы:

$$L_h^u u \simeq -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad L_h^T T \simeq -\frac{1}{\bar{\rho} C_p} \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x}.$$

По μ , κ , ρ (или $\bar{\rho}$) на пространственной сетке вычисляются: оценка максимального собственного значения $\lambda_{\max} = \max(\lambda_{\max}^u, \lambda_{\max}^T)$, где $\lambda_{\max}^u$, $\lambda_{\max}^T$ – соответственно оценки спектров операторов L_h^u , L_h^T ; степень многочлена $p = \left\lceil 0.25\pi \sqrt{\tau_{conv} \lambda_{\max} + 1} \right\rceil$ и итерационные параметры $\{b_1, \dots, b_{2p-1}\} \equiv \{a_p, \dots, a_2, a_p, \dots, a_2, a_1\}$.

Этап II, вязкий. Проводим расчет «вязкого» этапа по схеме ЛИ-М для параболического уравнения (для системы трех уравнений в 3D случае), из полученного вычеркиваем конвективный член в уравнении импульса. Решаем с начальными данными $\bar{\rho}$, u_{conv} уравнение:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right). \tag{13}$$

Находим промежуточную величину (предиктор) $\tilde{u}$ с помощью «редуцированной» схемы ЛИ-М

$$\tilde{u} = S_u u_{conv}, \quad S_u = (I + \tau L_h^u Z_{p-1}^2) B^{-1}, \quad B = I + \tau L_h^u. \tag{14}$$

Под «редуцированной» мы понимаем схему ЛИ-М, в которой делается $2p-2$ итераций и не сделана последняя итерация, представляющая собой явный шаг. Применение оператора S_u к разности точного и приближенного решений задачи (13) делает величину этой разности гладкой, что, в свою

очередь, позволяет сделать явный заключительный шаг в силу закона сохранения (корректор):

$$\frac{\bar{\rho}\bar{u} - \bar{\rho} u_{conv}}{\tau_{conv}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right). \quad (15)$$

Оператор S_u в (14) вместе с явным шагом (15) дает схему ЛИ-М (10) в силу цепочки равенств (с заменой L_h на L_h^u в (8)):

$$I - \tau L_h^u (I + \tau L_h^u Z_{p-1}^2) B^{-1} = (B - \tau L_h^u - \tau L_h^u \tau L_h^u Z_{p-1}^2) B^{-1} = (I - F_p^2) B^{-1}.$$

Алгоритм этапа II аналогичен итерациям (5), примененным к уравнению (13) с начальными данными $u^0 = u$. Результат – основная переменная на верхнем слое $\bar{u} = u^q$. Как отмечалось, операторная запись приведена для объяснения алгоритма. По сумме конвективного и первого параболического этапов выполнено консервативное замыкание

$$\frac{\bar{\rho}\bar{u} - \rho u}{\tau_{conv}} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = L_h^u \tilde{u}$$

с функцией (предиктором) $\tilde{u}$, полученной в ходе итераций (5) в соответствии с (14).

Этап III, теплопроводный. Исходные переменные $\bar{\rho}, \bar{u}, u_{conv}, E_{conv}, e_{conv} = E_{conv}/\rho_{conv} - 0.5u_{conv}^2$. Решаем с начальными данными E_{conv} и $T = T(e_{conv})$ уравнение (с известным источником f в правой части)

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f, \quad f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right).$$

Из этого уравнения вычисляем промежуточную температуру $\tilde{T}$ (предиктор) с помощью «редуцированной» схемы ЛИ-М

$$\tilde{T} = S_e T + \tau_{conv} G(f), \quad S_e = (I + \tau L_h^T Z_{p-1}^2) B^{-1}, \quad B = I + \tau L_h^T. \quad (16)$$

Функция $G(f)$ в (16) формируется в ходе итераций, ее также можно записать в операторной форме. Заключительный шаг этого этапа в силу закона сохранения (корректор) имеет вид

$$\frac{\bar{E} - E_{conv}}{\tau_{conv}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right) + f. \quad (17)$$

Оператор S_e из (16) в совокупности с явным шагом (17) дает схему

ЛИ-М для уравнения теплопроводности, что проверяется точно так же как и в случае схемы предиктор-корректор (14), (15). Результат этапа: $\bar{\rho}$, $\bar{u}$, $\bar{E} = \bar{\rho}(\bar{e} + 0.5\bar{u}^2)$.

Еще раз скажем, что дифференциальные выражения в уравнениях (12)–(17) заменяются сеточными аппроксимациями. Например, можно считать, что (12) – это условная запись схемы Годунова. Результатом первого этапа являются сеточные функции $\bar{\rho}$, u_{conv} , E_{conv} , но последние две функции u_{conv} , E_{conv} являются предварительными и уточняются на следующих двух этапах. На втором этапе решается уравнение, которое получено из уравнения импульса после исключения конвективных потоков и «замораживания» плотности на временном интервале $[t_n, t_n + \tau_{conv}]$ ее значением на верхнем слое $\bar{\rho}$. Функция $\bar{u}$ определяется по функции u_{conv} , полученной на промежуточном слое с помощью схемы ЛИ-М.

Алгоритм этапа III реализует решение уравнения, которое получено из третьего уравнения системы (12) после «замораживания» плотности. Алгоритм решения полученного уравнения может быть записан как для внутренней энергии e , так и для температуры T , поскольку известны зависимости $e = e(T) = C_p T$. Мы приведем алгоритм для температуры T .

Инициализация: $T_0 = e / C_p$. Итерационный процесс $m = 1, \dots, q$:

$$T^m = \frac{1}{1 + \tau_{conv} b_m} \left\{ T_0 + \tau_{conv} b_m T^{m-1} + \tau_{conv} \frac{1}{\bar{\rho} C_p} (L_h^T T^{m-1} + g) \right\}, \quad (18)$$

$$g = f - \bar{\rho} \frac{\bar{u}^2 - u_{conv}^2}{\tau_{conv}}, \quad f \approx \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right).$$

Результат: $\bar{T} = T^q$, $\bar{e} = C_p \bar{T}$.

На этом расчет одного шага по времени завершен. Для многокомпонентной модели схема расщепления будет дополнена расчетом компонентов, структура алгоритма сохранится, появится этап расчета с помощью схемы ЛИ-М предикторных значений компонентов и в правой части разностного закона сохранения (17) появится суммарный тепловой поток, состоящий из собственно теплового потока, обусловленного градиентом температуры, и диффузионного потока, обусловленного диффузией компонентов смеси.

4. Схема ЛИ-М для решения 3D уравнений Навье-Стокса

Для трехмерных уравнений Навье-Стокса схема расщепления с применением ЛИ-М для расчета диффузионного этапа строится по аналогии с од-

номерным случаем. Реализация проведена на базе программного комплекса NOISEtte [15]. Как уже сказано в разделе 3, для работы схемы ЛИ-М необходимо задать оценку максимального собственного значения $\lambda_{\max}$ диффузионного оператора. Вычислим в каждой расчетной ячейке k диаметром h_k величину $D_{coeff}^k = (1/\rho) \max\{4\mu/3, \mu/Pr\}$, где Pr – число Прандтля, с помощью которого в коде NOISEtte задается коэффициент теплопроводности. Тогда в качестве локальной диффузионной границы шага по времени можно взять $\tau_{diff}^k = h_k^2 / (12D_{coeff}^k)$. Оценку $\lambda_{\max}$ находим как максимум обратных величин по всем ячейкам сетки:

$$\lambda_{\max} = \max_k (1/\tau_{diff}^k). \quad (19)$$

При дискретизации по времени применяем изложенную в разделе 3 схему расщепления. На конвективном этапе по данным на нижнем слое $U = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E)^T$ находим (по явной схеме гудуновского типа, например) переменные $U = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E)_{conv}^T$. Шаг τ_{conv} определяется гиперболической подсистемой.

Параболический этап состоит из двух явно-итерационных процедур. Сначала производим расчет трех уравнений импульса с учетом только вязких членов по схеме ЛИ-М со значением $\lambda_{\max}$, найденным по формуле (19). Обновляем вектор состояния U , заменяя в нем компоненты скорости на новые. Затем рассматриваем уравнение полной энергии с учетом теплопроводности и диссипации за счет трения. Это уравнение записывается в терминах внутренней энергии с «заморозкой» плотности на временном интервале от $[t_n; t_n + \tau_{conv}]$ – берется значение $\bar{\rho}$, полученное на конвективном этапе. Решаем это уравнение по схеме ЛИ-М с тем же самым значением $\lambda_{\max}$ (19); итерируется либо температура T , как в (18), либо функция pe . На этом расчет одного шага по времени завершен.

5. Демонстрационный расчет

Мы разрабатываем схему для расчетов в основном нестационарных процессов, причем с ориентацией на моделирование многокомпонентной диффузии. Будем сравнивать эффективность предложенной и явной схем. При применении неявной схемы большие шаги по времени обычно используют для определения стационарного решения, когда не требуется сохранять физическую адекватность решений в процессе установления. Для нестационарной задачи корректное сравнение предложенной схемы с неявной схемой требует настройки параметров неявной схемы (задающих выбор итерационного метода, тип предобусловливателя, точность решения линеаризованной системы) и будет проведено в будущем.

Приведем простой демонстрационный пример расчета нестационарного процесса. Напомним, что при интегрировании по явной схеме всей системы уравнений Навье-Стокса шаг по времени τ выбирается из условия устойчивости, которое, по крайней мере, требует выполнения следующего ограничения на шаг по времени: $\tau \leq \min(\tau_{conv}, \tau_{diff})$, где τ_{conv}, τ_{diff} – шаги по времени, диктуемые соответственно гиперболическим (конвективным) и параболическим (вязким, диффузионным) ограничениями.

При использовании расщепления для явной схемы гиперболического этапа максимально допустимый шаг есть τ_{conv} , а параболический этап интегрируется по схеме ЛИ-М с этим же шагом $\tau = \tau_{conv}$, включая случай $\tau_{conv} > \tau_{diff}$ доминирования диффузии над конвекцией. Обычно мы берем $\tau = K_{conv} \tau_{conv}$ с числом Куранта $K_{conv} = 0.125 \div 0.5$.

Рассмотрим задачу о тепловой конвекции – нестационарном течении газа при внезапном подогреве границы, см. [20]. Пусть газ с постоянными начальными плотностью ρ_0 , температурой T_0 и скоростью $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ заключен в замкнутую область между двумя стенками, одна из которых нагрета до температуры $T_1 > T_0$ и в дальнейшем не изменяется во времени, а вторая поддерживается при постоянной температуре T_0 . Найдем распространение тепла и движение газа в последующие моменты времени. Будем рассматривать совершенный газ с коэффициентами теплопроводности и вязкости, зависящими от температуры по формуле Сазерленда [1]. Движение газа и перенос тепла в газе в области между двумя стенками вплоть до достижения стационарного состояния можно представить в виде последовательности трех процессов:

1. Развитие и распространение волн температуры, скорости, плотности и давления от начального состояния до момента столкновения их с противоположной стенкой.
2. Многократное последовательное взаимодействие волн со стенками.
3. Стационарное состояние, при котором газ неподвижен, давление и поток тепла между стенками являются постоянными, температура линейна, плотность – обратно пропорциональна температуре.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением первого процесса. Для определенности рассмотрим начально-краевую задачу в двумерной области $0 < x < 1$; $0 < y < 1$. Для моделирования одномерного течения на нижней и верхней границах области ставятся условия периодичности. Краевые условия: $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$, $T(0,t)=10$, $T(1,t)=1$. Начальные условия: $u(x,0)=0$, $v(x,0)=0$, $\rho(x,0)=1$, $T(x,0)=1$. Уравнение состояния при выбранном обезразмеривании имеет вид $p = \rho T$. Расчеты проведены на прямоугольных

сетках с числом ячеек $N_x \times N_y$. Число шагов N_x по оси Ox изменялось, по оси Oy оставалось постоянным (задача одномерная). Развитие и перемещение волн плотности, давления, температуры и скорости до момента столкновения с противоположной стенкой показаны на рис.1,2. Графики показаны для 6-и моментов времени $t_i = 0.05i$, $i = 1, \dots, 6$, и отмечены цифрами 1, 2, ..., 6 соответственно.

Рис.1. Плотность и давление.

В момент времени $t_6 = 0.3$ возмущения достигают правой холодной стенки. Эти результаты получены на сетке 320×10 по схеме ЛИ-М с конвективным числом Куранта $K_{conv} = 0.125$. В этом расчете число итераций схемы ЛИ-М возрастало с 9 до 15 с ростом времени. Отметим, что естественное условие продвижения волны за шаг по времени не более чем на шаг по пространству выполняется при $K_{conv} = 0.5$.

В расчетах использована схема первого порядка точности, так как при малых t в окрестности нагретой стенки имеются значительные градиенты температуры и давления, и при использовании схем повышенного порядка вблизи нагретой стенки возникают нефизические возмущения.

Расчеты на сетках с числом узлов $N_x = 160$ и $N_x = 320$ по оси Ox дают практически одинаковые результаты с различием в пределах 1%. На рис.3,4 для указанных сеток показаны графики давления и скорости в момент времени $t_1 = 0.05$; справа крупно показаны графики, где отличия наиболее заметны – для давления вблизи горячей стенки, для скорости – вблизи точки максимума. По схеме ЛИ-М расчеты проведены на сетке с $N_x = 160$ и с фиксированным шагом $\tau = 5e-04$, что соответствует числу Куранта $K_{conv} = 0.3$, а на сетке с $N_x = 320$ – с шагами $\tau = 2.5e-04$ и $\tau = 5e-04$, что отвечает $K_{conv} = 0.3$ и $K_{conv} = 0.6$ соответственно.

Рис.2. Температура и скорость.

Расчет по явной схеме с числом Куранта $K_{tot} = 0.5$, вычисленным для полной системы с учетом совместного конвективно-диффузионного ограничения, приводит к появлению отрицательных значений давления, а расчет с $K_{tot} = 0.25$ является успешным. Указанное ограничение определяет шаг интегрирования по времени $\tau = 10^{-5}$. Это означает, что расчеты по схеме ЛИ-М проведены с существенно более крупными шагами по времени (в 25 и 50 раз). Результаты по точности вполне удовлетворительны, см. рис.3,4. Для сетки с $N_x = 320$ расчет по схеме ЛИ-М с шагом $\tau = 5e-04$ требует в 5 раз меньше времени, чем явная схема. На расчетном интервале $[0; 0.05]$ явная схема делает 4172 шага по времени, схема ЛИ-М – 100 шагов, но в этой схеме на каждом шаге по времени в среднем $q = 2p - 1 = 21$ раз происходит пересчет теплового и вязких потоков, что соответствует степени $p = 11$ чебышевского многочлена, лежащего в основе конструкции схемы ЛИ-М.

Рис.3. Давление при $t = 0.05$.

Рис.4. Скорость при $t = 0.05$.

6. Заключение

В данной работе приведен новый алгоритм интегрирования по времени системы уравнений Навье-Стокса, описывающей течения сжимаемой теплопроводной среды на произвольных неструктурированных сетках. Подход основан на расщеплении расчета одного временного шага на гиперболический и параболический этапы. Для гиперболической подсистемы, получающейся из исходной системы уравнений в отсутствии вязкости и теплопроводности, расчет одного шага по времени выполнен по явной схеме. На диффузионном этапе мы используем явно-итерационную чебышевскую схему ЛИ-М, обладающую алгоритмической простотой и отсутствием настроечных параметров. Результирующая схема обеспечивает выполнение законов сохранения, результаты расчетов демонстрирует хорошую эффективность по точности и объему вычислительных затрат.

Авторы выражают признательность и благодарность А.В. Горобцу и П.В. Бахвалову за помощь в работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987, 840 с.;
L.G. Lojtsyanskij. Mekhanika zhidkosti i gaza. – M.: Nauka, 1987, 840 s.
2. Г.И. Марчук. Методы расщепления. – М.: Наука, 1988, 263 с.;
G.I. Marchuk. Metody rasshchepleniya. – M.: Nauka, 1988, 263 s.
3. В.Т. Жуков, Ю.Г. Рыков, О.Б. Феодоритова. Математическая модель течения многокомпонентной смеси газов с учетом возможности возникновения жидкой фазы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2018, №183, 36 с.;
V.T. Zhukov, YU.G. Rykov, O.B. Feodoritova. Matematicheskaya model' techeniya mnogokomponentnoj smesi gazov s uchetom vozmozhnosti vzniknoveniya zhidkoj fazy // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha, 2018, №183, 36 s.

4. И.М. Гельфанд, О.В. Локуцкий. О разностных схемах для решения уравнения теплопроводности. В кн.: Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. – М.: Физматгиз, 1962, 340 с.;
I.M. Gel'fand, O.V. Lokucievskij. O raznostnyh skhemah dlya resheniya uravneniya teploprovodnosti. V kn.: Godunov S.K., Ryaben'kij V.S. Vvedenie v teoriyu raznostnyh skhem. – M.: Fizmatgiz, 1962, 340 s.
5. В.Т. Жуков. Разностные схемы локальных итераций для параболических уравнений // препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1986, № 183, с.20;
V.T. Zhukov. Raznostnye skhemy lokal'nyh iteracij dlya parabolicheskikh uravnenij // preprint IPM im. M.V. Keldysha AN SSSR, 1986, № 183, s.20.
6. В.Т. Жуков. Явно-итерационные схемы для параболических уравнений // ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов, 1993, № 4, с.40–46;
V.T. Zhukov. Yavno-iteracionnye skhemy dlya parabolicheskikh uravnenij // VANT. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov, 1993, №4, s.40–46.
7. В.Т. Жуков. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование, 2010, т.22, № 10, с.127–158;
англ. пер.: *V.T. Zhukov. On explicit methods for the time integration of parabolic equations // Math. Models&Comput. Simul., 2011, v.3, № 3, p.311–332.*
8. В.Т. Жуков, А.В. Забродин, О.Б. Феодоритова. Метод решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1993, т.33, № 8, с.1240–1250;
англ. пер.: *V.T. Zhukov, A.V. Zabrodin, O.B. Feodoritova. Features of the numerical simulation of the target of inertial thermonuclear synthesis in the approximation of heat conduction gas dynamics // Comput. Math.&Math. Phys., 1994, v.34, № 12, p.1591–1601.*
9. В.О. Локуцкий, О.В. Локуцкий. Применение чебышевских параметров для численного решения некоторых эволюционных задач // препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1984, № 99, с.32;
V.O. Lokucievskij, O.V. Lokucievskij. Primenenie chebyshevskih parametrov dlya chislenogo resheniya nekotoryh evolyucionnyh zadach // preprint IPM im. M.V. Keldysha AN SSSR, 1984, № 99, s.32.
10. В.О. Локуцкий, О.В. Локуцкий. О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа // Докл. АН СССР, 1986, т.291, № 3, с.540–544;
V.O. Lokucievskij, O.V. Lokucievskij. O chislennom reshenii kraevykh zadach dlya uravnenij parabolicheskogo tipa // Dokl. AN SSSR, 1986, t.291, № 3, s.540–544.
11. В.Т. Жуков. Численные эксперименты по решению уравнения теплопроводности методом локальных итераций // препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1984, №97, с.22;
V.T. Zhukov. Chislennye eksperimenty po resheniyu uravneniya teploprovodnosti metodom lokal'nyh iteracij // preprint IPM im. M.V. Keldysha AN SSSR, 1984, № 97, s.22
12. В.И. Лебедев. Явные разностные схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем уравнений // препринт ОБМ АН СССР, 1987, № 177;
V.I. Lebedev. YAvnye raznostnye skhemy s peremennymi shagami po vremeni dlya resheniya zhestkih sistem uravnenij // preprint OVM AN SSSR, 1987, № 177.
13. *V.I. Lebedev. Explicit difference schemes with time-variable steps for solving stiff systems of equations // Sovjet. J. Numer. Analys. Math. Modelling, 1989, v.4, № 2, p.111–136.*

14. В.И. Лебедев. Как решать явными методами жесткие системы дифференциальных уравнений // В кн.: Вычислительные процессы и системы. Вып. 8. Под ред. Г.И. Марчука. – М.: Наука, 1991, с.237–291;
V.I. Lebedev. Kak reshat' yavnymi metodami zhestkie sistemy differencial'nyh uravnenij // V kn.: Vychislitel'nye processy i sistemy. Vyp. 8. Pod red. G.I. Marchuka. – M.: Nauka, 1991, s.237–291.
15. И.В. Абалакин, П.А. Бахвалов, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Вычисл. методы и программир., 2012, т.13, вып.3, с.110–125;
I.V. Abalakin, P.A. Bahvalov, A.V. Gorobec, A.P. Duben', T.K. Kozubskaya. Parallelnyj programmnyj kompleks NOISEtte dlya krupnomasshtabnyh raschetov zadach aerodinamiki i aeroakustiki // Vychisl. metody i programmir., 2012, t.13, vyp.3, s. 110–125.
16. P. Batten, D.M. Ingram, R. Saunders, and D.M. Causon. A time-splitting approach to solving the Navier-Stokes equations // *Computers & Fluids*, 1993, v.25, p.421–431.
17. В.М. Ковеня, П.В. Бабинцев. Применение алгоритмов расщепления в методе конечных объемов для численного решения уравнений Навье–Стокса // Сиб. журн. индустр. матем., 2018, т.21, №3, с.60–73;
англ. пер.: *V.M. Kovenya, P.V. Babintsev. Application of Splitting Algorithms in the Method of Finite Volumes for Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations // J. Appl. Industr. Math., 2018, v.12, №3, p.479–491.*
18. A.S. Shvedov, V.T. Zhukov. Explicit iterative difference schemes for parabolic equations // *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 1998, v.13, № 2, p.133–148. [In English]
19. В.И. Лебедев, С.А. Финогенов. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом методе // ЖВМ и МФ, 1971, т.11, № 2, с.425–438;
англ. пер.: *V.I. Lebedev, S.A. Finogenov. Ordering of the iterative parameters in the cyclical Chebyshev iterative method // Zh. vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1971, v.11, №2, p.425–438.*
20. В.И. Полежаев. Численное решение уравнений Навье–Стокса для течения и теплообмена в замкнутой двумерной области // Дисс. на соискание ученой степени канд. технических наук. – М.: НИИТП. 1967, 196 с.;
V.I. Polezhaev. Chislennoe reshenie uravnenij Navie-Stoksa dlya techeniya i teploobmena v zamknutoj dvumernoj oblasti // Diss. na soiskanie uchenoj stepeni kand. tekhnicheskikh nauk. – M.: NIITP, 1967, 196 s.

Поступила в редакцию 08.04.2019

После доработки 08.04.2019

Принята к публикации 25.11.2019