Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Чикуров, Численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью приведения их к форме Шеннона, *Матем. моделирование*, 2020, том 32, номер 8, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2020-08-01>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:14:10

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРИВЕДЕНИЯ ИХ К ФОРМЕ ШЕННОНА

© *Н.Г. Чикуров*

Уфимский государственный авиационный технический университет
tchikurov@yandex.ru

DOI: 10.20948/mm-2020-08-01

Рассматривается численный метод решения, основанный на приведении систем обыкновенных дифференциальных уравнений к форме Шеннона. Уравнения Шеннона отличаются тем, что содержат лишь операции умножения и суммирования. Отсутствие функциональных преобразований позволяет упростить и унифицировать процесс численного интегрирования дифференциальных уравнений в форме Шеннона. Для этого достаточно в исходных уравнениях, заданных в нормальной форме Коши, произвести простую замену переменных. В отличие от классического метода Рунге-Кутты четвертого порядка рассматриваемый численный метод может иметь более высокий порядок точности.

Ключевые слова: численные методы, порядок точности, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения Шеннона.

A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY CONVERTING THEM INTO THE FORM OF A SHANNON

N.G. Chikurov

Ufa State Aviation Technical University

A numerical solution method based on the reduction of systems of ordinary differential equations to the Shannon form is considered. Shannon's equations differ in that they contain only multiplication and summation operations. The absence of functional transformations makes it possible to simplify and unify the process of numerical integration of differential equations in the form of Shannon. To do this, it is enough in the initial equations given in the normal form of Cauchy to make a simple replacement of variables. In contrast to the classical fourth-order Runge-Kutta method, the numerical method under consideration may have a higher order of accuracy.

Keywords: numerical methods, order of accuracy, ordinary differential equations, Shannon equations.

1. Введение

Одна из главных задач, которая решается в компьютерных системах автоматического управления, – численное интегрирование дифференциальных уравнений в реальном масштабе времени. Примером могут служить цифровые системы управления электроприводами, системы числового программного управления (ЧПУ) металлорежущими станками и промышленными роботами, системы управления летательными аппаратами и др.

Шаг интегрирования дифференциальных уравнений в таких системах, как правило, постоянный. Он определяется периодом квантования системы по времени (периодом таймера). В системах ЧПУ оптимальное значение периода таймерных прерываний $T=10$ мс. Увеличение этого значения нежелательно, так как возрастает дискретность квантования выходного сигнала по уровню, а уменьшение – усложняет обслуживание частых прерываний в операционной системе, что снижает производительность вычислений.

Анализ численных методов, которые можно использовать для решения дифференциальных уравнений в компьютерных системах ЧПУ, показывает, что при заданном шаге интегрирования методы четвертого порядка точности, например, методы Рунге-Кутты, не обеспечивают требуемую точность решения задачи.

Обобщая изложенное, можно сделать следующее заключение: для интерполяции в устройствах ЧПУ сложных траекторий, а также для решения других задач с высокой точностью, необходимы численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с порядком точности выше 4-го.

2. Дифференциальные уравнения в форме Шеннона

Английским математиком К. Шенноном [1,2] приводится доказательство теоремы, согласно которой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, не содержащую гипертрансцендентные функции, можно решить с применением только интеграторов и сумматоров, если эти уравнения записать в виде:

$$dy_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_{ijk} y_j dy_k, \quad y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

где $y_0=t$ – независимая переменная, $y_1, \dots, y_n$ – зависимые переменные.

Уравнения Шеннона отличаются тем, что содержат лишь операции умножения переменной на коэффициент и суммирования. Отсутствие функциональных преобразований позволяет упростить и унифицировать процесс численного интегрирования дифференциальных уравнений в форме Шенно-

на. Для этого достаточно в исходных уравнениях, заданных в нормальной форме Коши, произвести простую замену переменных.

В отличие от уравнений в форме Коши в уравнениях Шеннона отсутствует общий для всех уравнений множитель dx , представляющий собой дифференциал независимой переменной. Это означает, что уравнения Шеннона требуют интегрирования не по Риману, а по Стильтесу. Для этой цели необходимы специальные формулы численного интегрирования по Стильтесу, которые будут рассмотрены далее.

Интегратор Стильтеса принято изображать в виде ориентированного пятиугольника (рис.1), где $y(t)$ – подынтегральная функция; $x(t)$ – интегрирующая функция; t – независимый аргумент.

К уравнениям Шеннона можно привести рациональные, алгебраические и трансцендентные функции. Исключение составляют лишь довольно редко встречающиеся гипертрансцендентные (трансцендентно-трансцендентные) функции, например гамма-функция или дзета-функция Римана.

Рис.1. Изображение интегратора Стильтеса.

Рис.2. Схема вычисления $y = \sin t$.

Раньше дифференциальные уравнения в форме Шеннона решались в бортовых ЭВМ, построенных на основе цифровых дифференциальных анализаторов (ЦДА) [3], а также в механических решающих устройствах. Покажем на двух простых примерах запись дифференциальных уравнений в форме Шеннона.

2.1. Воспроизведение тригонометрической функции $y = \sin t$. Эта функция сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dy/dt &= z, \\ dz/dt &= -y. \end{aligned}$$

В форме Шеннона система принимает вид:

$$\begin{aligned} dy &= zdt, \\ dz &= -ydt, \\ y(t_0) &= y_0, \quad z(t_0) = z_0. \end{aligned}$$

Структурная схема, соответствующая уравнениям Шеннона, состоит из двух последовательно соединенных интеграторов (рис.2). Наряду с функцией $y = \sin t$, в рассматриваемой схеме вычисляется функция $z = \cos t$.

2.2. Воспроизведение гиперболы $y = 1/k(t_0 + t)$. Продифференцируем эту функцию по t и введем новую переменную z , которую, в свою очередь, продифференцируем по y

$$dy / dt = -ky^2 = z,$$

$$dz / dt = -2ky.$$

где $k > 0$ – произвольный коэффициент. Запишем полученную систему дифференциальных уравнений в стандартной форме Шеннона

$$dy = zdt,$$

$$dz = -2kydy,$$

$$y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0.$$

На основании уравнений Шеннона строим структурную схему вычислительного устройства, которое содержит два интегратора (рис.3).

Рис.3. Схема вычисления функции $y = 1/k(t_0 + t)$

Рассмотрим общую методику преобразования дифференциальных уравнений из формы Коши в форму Шеннона. Дано уравнение в форме Коши:

$$y_1'(t) = f[t, y_1(t)], \quad y_1(t_0) = y_{10}. \quad (2)$$

Будем считать, что правая часть уравнения (2) не содержит гипертрансцендентных функций. Заменяем это уравнение эквивалентной системой дифференциальных уравнений в форме Шеннона. Предварительно перепишем уравнение (2) в следующем виде:

$$dy_1(t) = f[t, y_1(t)]dt. \quad (3)$$

Численное решение уравнения (3) будем искать в виде степенного ряда

Тейлора в окрестностях точек t_k

$$y_1(t_k + \Delta t) = y_{1k0} + y_{1k1}\Delta t + y_{1k2}\Delta t^2 + y_{1k3}\Delta t^3 + \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \Delta t = t - t_k.$$

Функция $f[t, y_1(t)]$ состоит из последовательности алгебраических операций и элементарных функций. Поэтому процедура вычисления f представляет собой вычисление некоторого ряда промежуточных переменных

$$y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_n(t),$$

последней из которых является само выражение $f[t, y_1(t)] = y_n(t)$. Каждую из промежуточных переменных будем вычислять путем решения дополнительных дифференциальных уравнений в форме Шеннона.

Дифференциальные уравнения элементарных функций в форме Шеннона легко получаются простым дифференцированием этих функций по различным переменным. Методика таких преобразований применительно к цифровым дифференциальным анализаторам была опубликована ранее [3]. Полученные уравнения Шеннона решались аппаратными средствами с небольшим шагом интегрирования.

Достаточно сложные преобразования, основанные на разложении элементарных функций в степенные многочлены Тейлора, но без использования дифференциальных уравнений в форме Шеннона, рассмотрены в [4, 5]. В табл.1 показаны некоторые элементарные функции в виде дифференциальных уравнений в форме Шеннона.

Таблица 1. Дифференциальные уравнения элементарных функций в форме Шеннона.

Элементарная функция	Дифференциальные уравнения в форме Шеннона
1. Экспоненциальная функция $y_i = \exp(t)$	$dy_i = y_i dt$
2. Тригонометрические функции $y_i = \sin t, \quad y_{i+1} = \cos t$	$dy_i = y_{i+1} dt$ $dy_{i+1} = -y_i dt$
3. Логарифмическая функция $y_i = \ln t$	$dy_i = y_{i+1} dt$ $dy_{i+1} = -y_{i+1} dy_i$
4. Обратная функция $y_i = 1/t$	$dy_i = -y_i dy_{i+1}$ $dy_{i+1} = y_i dt$
5. Извлечение квадратного корня $y_i = \sqrt{t}$	$dy_i = y_{i+1} dt$ $dy_{i+1} = -y_{i+1} dy_{i+2}$ $dy_{i+2} = 2y_{i+1} dy_i$
6. Произведение переменных $y_i = z \cdot u$	$dy_i = z du + u dz$

Эту таблицу можно продолжить, включив в нее ряд других элементар-

ных функций. Такого рода таблицы можно оформить в виде библиотеки и записать в память компьютера. В результате появляется возможность автоматической трансляции дифференциальных уравнений в форме Коши в дифференциальные уравнения в форме Шеннона.

2.3. Пример. Дано дифференциальное уравнение в форме Коши

$$dy_1(t)/dt = \exp(t) \cdot \cos y_1, \quad y_1(0) = y_0.$$

Требуется заменить это уравнение эквивалентной системой дифференциальных уравнений в форме Шеннона.

Используя данные табл.1, определим элементарные функции

$$y_2 = \sin y_1, \quad y_3 = \cos y_1.$$

Эти функции представляют собой решение системы двух дифференциальных уравнений в форме Шеннона (п.2, табл.1)

$$dy_2 = y_3 dy_1,$$

$$dy_3 = -y_2 dy_1.$$

Далее определяем элементарную функцию $y_4 = \exp(t)$. Дифференциальное уравнение этой функции в форме Шеннона имеет простой вид (п.1, табл.1): $dy_4 = y_4 dt$.

Наконец, заменим получившееся произведение переменных $y_5 = y_4 y_3$ дифференциальным соотношением (п.6, табл.1)

$$dy_5 = y_3 dy_4 + y_4 dy_3.$$

В результате эквивалентная система дифференциальных уравнений в форме Шеннона приобретает следующий вид:

$$dy_1 = y_5 dt,$$

$$dy_2 = y_3 dy_1,$$

$$dy_3 = -y_2 dy_1,$$

$$dy_4 = y_4 dt,$$

$$dy_5 = y_4 dy_3 + y_3 dy_4.$$

Таким образом, любое обыкновенное дифференциальное уравнение в форме Коши, не содержащее в правой части гипертрансцендентные функции, может быть преобразовано в эквивалентную систему дифференциальных уравнений в форме Шеннона, имеющих вид (1).

3. Решение дифференциальных уравнений в форме Шеннона с помощью степенных рядов

Рассмотрим новую методику численного решения дифференциальных уравнений в форме Шеннона с использованием степенных рядов. Методика основана на применении интегралов Римана и интегралов Стильтьеса.

3.1. Интеграл Римана (частный случай интеграла Стильтьеса). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dx(t)/dt = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

в предположении, что функция $u(t)$ аналитическая в точке x_0 и ее ряд Тейлора сходится в окрестностях точки x_0 к данной функции.

Рассмотрим численное решение уравнения (4). Запишем его в виде

$$dx(t) = u(t)dt \quad (5)$$

и проинтегрируем уравнение (5) с помощью интеграла Римана:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где t - независимая переменная. Для интегрирования применим специальное устройство – интегратор Римана (рис.4). Предположим, что подынтегральная функция $u(t)$ задана в виде степенного ряда:

$$u(t) = u_0 + u_1 \Delta t + u_2 \Delta t^2 + u_3 \Delta t^3 + \dots, \quad (7)$$

где $u_0, u_1, u_2, \dots$ – коэффициенты ряда, $\Delta t = t - t_k$ – шаг интегрирования, $k=0, 1, 2, \dots$ – узел сетки перед новым шагом. Требуется найти коэффициенты степенного ряда переменной $x(t)$ на выходе интегратора Римана:

$$x(t) = x_0 + x_1 \Delta t + x_2 \Delta t^2 + x_3 \Delta t^3 + \dots, \quad (8)$$

где $x_0, x_1, x_2, \dots$ - коэффициенты ряда. Для решения задачи продифференцируем выражение (8)

$$dx = (x_1 + 2x_2 \Delta t + 3x_3 \Delta t^2 + \dots) dt \quad (9)$$

Но

$$dx = u dt = (u_0 + u_1 \Delta t + u_2 \Delta t^2 + u_3 \Delta t^3 + \dots) dt \quad (10)$$

Приравнивая в (9) и (10) коэффициенты при одинаковых степенях Δt , получаем рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_0, \\
x_2 &= (1/2)u_1, \\
x_3 &= (1/3)u_2, \\
&\dots \\
x_n &= (1/n)u_{n-1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Подставив значения коэффициентов $x_1, x_2, x_3, \dots$ в уравнение (8), получим значение функции $x(t)$ в конце шага интегрирования. Далее ищем численное решение (4) на отрезке $[t_0, t_0 + T]$, принадлежащем интервалу существования решений (4), в виде таблицы при значениях $t = t_k$.

Рис.4. Интегратор Римана.

Рис.5. Интегратор Стильеса.

3.2. Интеграл Стильеса. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{ds(t)} = u(t) \tag{12}$$

или

$$dx(t) = u(t)ds(t). \tag{13}$$

Проинтегрируем уравнение (13) по Стильесу

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(\tau)ds(\tau), \tag{14}$$

где $u(t)$ – подынтегральная функция; $ds(t)$ – интегрирующая сложная функция, зависящая от t . Полагаем, что функции $u(t)$ и $s(t)$ – непрерывные аналитические функции, к которым сходятся их ряды Тейлора в окрестностях каждой точки таблицы решений. Для интегрирования применим интегратор Стильеса (рис.5). Положим, что в (14) заданы подынтегральная и интегрирующая функции в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned}
s &= s_0 + s_1\Delta t + s_2\Delta t^2 + s_3\Delta t^3 + \dots, \\
u &= u_0 + u_1\Delta t + u_2\Delta t^2 + u_3\Delta t^3 + \dots.
\end{aligned} \tag{15}$$

Требуется найти коэффициенты степенного ряда переменной $x(t)$ на выходе интегратора Стильеса:

$$x(t) = x_0 + x_1 \Delta t + x_2 \Delta t^2 + x_3 \Delta t^3 + \dots \quad (16)$$

Решаем задачу. Продифференцируем уравнения (15) и (16)

$$\begin{aligned} ds &= (s_1 + 2s_2 \Delta t + 3s_3 \Delta t^2 + \dots) dt, \\ dx &= (x_1 + 2x_2 \Delta t + 3x_3 \Delta t^2 + \dots) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Но

$$dx = u ds = (u_0 + u_1 \Delta t + u_2 \Delta t^2 + u_3 \Delta t^3 + \dots)(s_1 + 2s_2 \Delta t + 3s_3 \Delta t^2 + \dots) dt. \quad (18)$$

Для облегчения вычислений выражение (18) представим в виде:

$$dx = u ds = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & \Delta t & \Delta t^2 & \Delta t^3 \\ \begin{array}{c} u_0 s_1 \\ u_0 2s_2 \\ u_0 3s_3 \\ u_0 4s_4 \end{array} & \begin{array}{c} u_1 s_1 \\ u_1 2s_2 \\ u_1 3s_3 \end{array} & \begin{array}{c} u_2 s_1 \\ u_2 2s_2 \end{array} & u_3 s_1 \\ \hline & & & dt \end{array} \end{array}$$

Из соотношений (17), (18) получаем рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_0 s_1, \\ x_2 &= \frac{1}{2} (2u_0 s_2 + u_1 s_1), \\ x_3 &= \frac{1}{3} (3u_0 s_3 + 2u_1 s_2 + u_2 s_1), \\ &\dots \\ x_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) u_i s_{n-i}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив значения коэффициентов $x_1, x_2, x_3, \dots$ в уравнение (16), получим значение функции $x(t)$ в конце шага интегрирования.

4. Устойчивость и точность решения дифференциальных уравнений в форме Шеннона

Вопросы устойчивости решений ОДУ хорошо изучены [6–9]. Следуя указанным публикациям, рассмотрим задачу с начальными условиями

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = A\bar{u}, \quad u(0) = u_0. \quad (20)$$

Устойчивость решения системы (20) обычно рассматривают на примере так называемого «тестового» уравнения [6, 8].

$$du / dt = \lambda u, \quad (21)$$

где λ – одно из собственных чисел матрицы A . Для того чтобы уравнение (21) моделировало исходную систему (20), необходимо рассматривать его при всех собственных числах λ матрицы A .

Для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений качественное исследование решения вблизи некоторого частного решения можно провести путем замены матрицы A локально постоянной матрицей Якоби.

Применим метод степенных рядов (11) к решению тестового уравнения (21). В результате требование асимптотической числовой устойчивости приводит к условию:

$$\left| 1 + \lambda \Delta t + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta t^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 \Delta t^3 + \dots + \frac{1}{n!} \lambda^n \Delta t^n + \dots \right| < 1. \quad (22)$$

Оценка устойчивости решений с помощью соотношений типа (22) имеет в основном теоретическое значение, так как вычисление собственных значений матрицы A – процедура достаточно сложная. Проще воспользоваться значениями коэффициентов ряда Тейлора, которые мы рассчитываем в каждом цикле интегрирования дифференциальных уравнений. В соответствии с признаком Даламбера ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*$ сходится, если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+1}^* / x_k^*| < 1. \quad (23)$$

Для степенного ряда $x_k^* = x_k \Delta t^k$. С учетом этого получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+1} / x_k| \cdot \Delta t < 1.$$

Но $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+1} / x_k| = 1 / R$, где R – радиус сходимости степенного ряда (для вещественных чисел – интервал сходимости). В результате получаем второе условие сходимости, эквивалентное (23)

$$\Delta t < R, \quad R > 0, \quad (24)$$

т.е. шаг интегрирования не должен превышать величины радиуса сходимости ряда. Установим ограничение на все члены ряда, начиная с первого

$$q_k = |x_{k+1}^* / x_k^*| < 1, \quad x_k^* \neq 0, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (25)$$

где n – количество членов ряда Тейлора.

Данному условию отвечает неравенство

$$\Delta t < R_k^{\min}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

где $R_k^{\min} = |x_k/x_{k+1}|_{\min}$ – минимальное отношение соседних коэффициентов ряда Тейлора, вычисляемых по рекуррентным формулам (11) и (19).

Оптимальное значение шага интегрирования, гарантирующее достаточно быструю сходимость ряда Тейлора, будем вычислять по формуле:

$$\Delta t_{opt} = \alpha R_k^{\min}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (26)$$

где $\alpha=1/2$ – коэффициент запаса.

Если дифференциальные уравнения интегрируются с заданным шагом $\Delta t = \Delta t_0$, то в каждом цикле вычислений проверяется условие $\Delta t \leq \Delta t_{opt}$. Если неравенство не выполняется, то шаг интегрирования делится пополам $\Delta t = \Delta t_0/2$, и заданный шаг Δt_0 отрабатывается за два шага Δt . Если необходимо, то шаг Δt_0 можно разделить на 4 или 8 частей и т.д.

В известных одношаговых методах типа методов Рунге-Кутты не удастся выразить локальную ошибку вычислений в явной форме. Решая дифференциальные уравнения в форме Шеннона, можно сравнительно легко оценить локальную погрешность Δ_n на одном шаге. Она равна остаточному члену ряда Тейлора в форме Лагранжа.

$$\Delta_n = \frac{y^{(n+1)}(t_k + \theta \cdot \Delta t)}{(n+1)!} \Delta t^{n+1} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{y^{(i)}(t_k)}{i!} \Delta t^i = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^*, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (27)$$

Необходимая точность решения дифференциальных уравнений в форме Шеннона при заданном шаге интегрирования Δt достигается за счет изменения порядка точности n . Ряд (27) может быть знакопеременным или иметь только положительные члены. Для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего признаку сходимости Лейбница, остаток Δ_n можно сверху ограничить по абсолютной величине:

$$\Delta_n \leq |x_n^*|, \quad (28)$$

а если ряд (27) содержит положительные члены, то этот ряд с учетом соотношения (25) можно приближенно выразить в виде суммы геометрической прогрессии

$$\Delta_n \approx \frac{x_{n+1}^*}{1-q} = \frac{x_n^* q}{1-q}. \quad (29)$$

Принимая во внимание принятый коэффициент запаса $\alpha=1/2$, из уравнений (25, 26) получаем равенство

$$q_k^{\max} = \left| \frac{x_{k+1}^*}{x_k^*} \right|_{\max} = \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|_{\max} \Delta t_{opt} = \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|_{\max} \alpha \left| \frac{x_k}{x_{k+1}} \right|_{\min} = \alpha = \frac{1}{2}, \quad k=\overline{1, n-1}. \quad (30)$$

Подставив значение $q = q_k^{\max}$ из (30) в (29) снова приходим к оценке локальной погрешности Δ_n в виде неравенства (28).

Таким образом, на каждом шаге интегрирования количество знакопередающих или только положительных членов ряда Тейлора вычисляется столько, пока последний из вычисленных членов ряда Δx_n^* не станет меньше наперед заданной локальной погрешности Δ_n .

Если при заданном порядке точности n степенной ряд медленно сходится и неравенство (28) не удовлетворяет требованиям точности, то следует уменьшить шаг интегрирования в 2^m раз и отработать заданный шаг за 2^m шагов ($m > 0$ – целое число).

Заметим, что применительно к жестким плохо обусловленным системам дифференциальных уравнений вычислить коэффициенты степенных рядов по рекуррентным формулам (11) и (19) затруднительно. Для решения жестких уравнений применяют специальные, построенные на других принципах, явные [7] и неявные [8, 9] численные методы.

5. Алгоритм сплайновой интерполяции

В системах ЧПУ расчет сложных пространственных движений рабочих органов называют интерполяцией. В процессе интерполяции на металлорежущем станке воспроизводится заданная траектория движения инструмента относительно обрабатываемой детали. Выбирая в системе дифференциальных уравнений в качестве независимой переменной путь вдоль дуги s , можно регулировать скорость движения текущей точки вдоль этой дуги простым изменением шага Δs . Задача системы ЧПУ – рассчитать в реальном масштабе времени приращения координат в каждом цикле интерполяции.

На многокоординатных металлорежущих станках в процесс интерполяции может быть вовлечено 5–6 рабочих органов. Несинхронность их движений по своим траекториям не должна превышать одной дискреты отсчета перемещений, которая для большинства систем ЧПУ составляет 1 мкм (0.001 мм).

Рассмотрим сплайн в виде сегмента кубической параметрической кривой, которая описывается векторным уравнением

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{a}u^3 + \mathbf{b}u^2 + \mathbf{c}u + \mathbf{d}, \quad 0 \leq u \leq s_k,$$

где s_k – длина дуги сплайна (скалярный параметр), $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ – векторные коэффициенты. Запишем эту систему уравнений в скалярном виде

$$\begin{aligned} x &= a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x, \\ y &= a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u + d_y, \\ z &= a_z u^3 + b_z u^2 + c_z u + d_z. \end{aligned} \quad (31)$$

Продифференцируем уравнения (31)

$$\begin{aligned} dx/du &= 3a_x u^2 + 2b_x u + c_x = V_x, & V_x &= 3a_x u^2 + 2b_x u + c_x, \\ dy/du &= 3a_y u^2 + 2b_y u + c_y = V_y, & \text{где } V_y &= 3a_y u^2 + 2b_y u + c_y, \\ dz/du &= 3a_z u^2 + 2b_z u + c_z = V_z, & V_z &= 3a_z u^2 + 2b_z u + c_z. \end{aligned} \quad (32)$$

Продифференцируем уравнения (32)

$$\begin{aligned} dV_x/du &= 6a_x u + 2b_x = W_x, & W_x &= 6a_x u + 2b_x, \\ dV_y/du &= 6a_y u + 2b_y = W_y, & \text{где } W_y &= 6a_y u + 2b_y, \\ dV_z/du &= 6a_z u + 2b_z = W_z, & W_z &= 6a_z u + 2b_z. \end{aligned} \quad (33)$$

Продифференцируем уравнения (33)

$$\begin{aligned} dW_x/du &= 6a_x, \\ dW_y/du &= 6a_y, \\ dW_z/du &= 6a_z. \end{aligned} \quad (34)$$

Запишем дифференциал дуги сплайна: $ds = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} du$, откуда

$$du/ds = 1/\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 1/\sqrt{2P} = \varphi, \quad (35)$$

где $P = \frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$; φ – новая переменная, s – независимый аргумент.

Найдем производную φ по переменной P и приравняем ее к новой переменной Q

$$\frac{d\varphi}{dP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} P^{-3/2} \right) = -\varphi^3 = Q. \quad (36)$$

Найдем производную Q по переменной φ и приравняем ее к новой переменной R

$$dQ/d\varphi = -3\varphi^2 = R. \quad (37)$$

Найдем производную R по переменной φ

$$dR/d\varphi = -6\varphi. \quad (38)$$

Продифференцируем сложную функцию $P[V(u)]$ по переменной u

$$\frac{dP}{du} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial V_x} \frac{dV_x}{du} + \frac{\partial P}{\partial V_y} \frac{dV_y}{du} + \frac{\partial P}{\partial V_z} \frac{dV_z}{du} \right) = V_x \frac{dV_x}{du} + V_y \frac{dV_y}{du} + V_z \frac{dV_z}{du}. \quad (39)$$

На основе уравнений (32–39) составляем систему дифференциальных уравнений в форме Шеннона, описывающую алгоритм сплайновой интерполяции

$$\begin{aligned} du &= \varphi ds, & dV_x &= W_x du, & dW_x &= 6a_x du, & d\varphi &= QdP, & dP &= dP_x + dP_y + dP_z, \\ dx &= V_x du, & dV_y &= W_y du, & dW_y &= 6a_y du, & dQ &= Rd\varphi, & dP_x &= V_x dV_x, \\ dy &= V_y du, & dV_z &= W_z du, & dW_z &= 6a_z du, & dR &= -6\varphi d\varphi, & dP_y &= V_y dV_y, \\ dz &= V_z du, & & & & & & & dP_z &= V_z dV_z. \end{aligned} \quad (40)$$

Системе уравнений (40) соответствует схема соединений интеграторов Стилтеса и Римана (рис.6).

Рис.6. Структурная схема сплайнового интерполятора.

Каждому уравнению системы отвечает определенный интегратор. Теперь применим к данной схеме рекуррентные формулы (11) и (19), с помощью которых определим коэффициенты степенных многочленов, аппроксимирующих переменные на выходе каждого интегратора.

$$\begin{aligned}
 u_i &= \frac{1}{i} \Phi_{i-1}, & V_{xi} &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) W_{xj} u_{i-j}, & x_i &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) V_{xj} u_{i-j}, \\
 W_{xi} &= 6a_x u_i, & V_{yi} &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) W_{yj} u_{i-j}, & y_i &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) V_{yj} u_{i-j}, \\
 W_{yi} &= 6a_y u_i, & V_{zi} &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) W_{zj} u_{i-j}, & z_i &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) V_{zj} u_{i-j}, \\
 W_{zi} &= 6a_z u_i, & P_{xi} &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) V_{xj} V_{x(i-j)}, & \Phi_i &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) Q_j P_{i-j}, \\
 P_{yi} &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) V_{yj} V_{y(i-j)}, & Q_i &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) R_j \Phi_{i-j}, \\
 P_{zi} &= \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) V_{zj} V_{z(i-j)}, & R_i &= -\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) \Phi_j \Phi_{i-j}, \\
 P_i &= P_{xi} + P_{yi} + P_{zi}, & i &= \overline{1, n},
 \end{aligned} \tag{41}$$

где n – алгебраический порядок точности численного метода.

Значения переменных в конце каждого шага интегрирования Δs можно найти в виде степенных многочленов Тейлора, суммы которых удобно вычислять по схеме Горнера.

$$\begin{aligned}
 u &= \left\{ \left[(u_n \Delta s + u_{n-1}) \Delta s + u_{n-2} \right] \Delta s + \dots + u_1 \right\} \Delta s + u_0, \\
 W_x &= \left\{ \left[(W_{xn} \Delta s + W_{x(n-1)}) \Delta s + W_{x(n-2)} \right] \Delta s + \dots + W_{x1} \right\} \Delta s + W_{x0}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 R &= \left\{ \left[(R_n \Delta s + R_{n-1}) \Delta s + R_{n-2} \right] \Delta s + \dots + R_1 \right\} \Delta s + R_0.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Чтобы повысить устойчивость и точность решения дифференциальных уравнений в форме Шеннона, значения промежуточных элементарных функций следует скорректировать непосредственно по формулам этих функций. В рассматриваемой задаче это формулы:

$$x = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u, \quad V_x = 3a_x u^2 + 2b_x u + c_x, \quad W_x = 6a_x u + 2b_x,$$

$$\varphi = 1 / \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} y &= a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u, & V_y &= 3a_y u^2 + 2b_y u + c_y, & W_y &= 6a_y u + 2b_y, & Q &= -\varphi^3, \\ z &= a_z u^3 + b_z u^2 + c_z u, & V_z &= 3a_z u^2 + 2b_z u + c_z, & W_z &= 6a_z u + 2b_z, & R &= -3\varphi^2. \end{aligned}$$

Заметим, что в нашем случае формулы (43) исключают необходимость определения сумм степенных многочленов по формулам (42), кроме первой из них, но не исключают необходимости вычислений коэффициентов всех степенных многочленов по формулам (41).

Коррекция значений промежуточных элементарных функций непосредственно по формулам этих функций существенно повышает точность (на 1 – 3 порядка) и устойчивость метода. Оценка зависимости результатов вычислений от указанной коррекции – отдельная тема, которую из-за ограниченного объема статьи мы обсуждать здесь не будем.

Проведем вычислительный эксперимент. Пусть заданы координаты конечной точки сплайна $x_k = 100$, $y_k = 50$, $z_k = 50$, а также проекции касательных в начальной точке $Tx_n = 0.3$, $Ty_n = 0.2$, $Tz_n = 0.6$ и в конечной точке $Tx_k = 0.3$, $Ty_k = -0.2$, $Tz_k = -0.6$. Значения указанных параметров определяют в автоматизированной системе управления на этапе аппроксимации контура обработки сплайнами по специальной методике, которая здесь не рассматривается.

Определяем коэффициенты сплайн-функции

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{(Tx_n + Tx_k)u_k - 2x_k}{u_k^3}, & b_x &= \frac{(2Tx_n + Tx_k)u_k - 3x_k}{u_k^2}, & c_x &= Tx_n, \\ a_y &= \frac{(Ty_n + Ty_k)u_k - 2y_k}{u_k^3}, & b_y &= \frac{(2Ty_n + Ty_k)u_k - 3y_k}{u_k^2}, & c_y &= Ty_n, \\ a_z &= \frac{(Tz_n + Tz_k)u_k - 2z_k}{u_k^3}, & b_z &= \frac{(2Tz_n + Tz_k)u_k - 3z_k}{u_k^2}, & c_z &= Tz_n. \end{aligned} \quad (44)$$

Длина дуги сплайна

$$s_k = \int_0^{u_k} \sqrt{(a_x u^2 + 2b_x u + c_x)^2 + (a_y u^2 + 2b_y u + c_y)^2 + (a_z u^2 + 2b_z u + c_z)^2} du.$$

Полагая $u_k = s_k$, подставляем значение u_k в формулы (41) и методом последовательных приближений уточняем значение s_k . Начальное значение s_k приравняем к длине хорды сплайна.

Зададим простое движение вдоль дуги сплайна с некоторой постоянной скоростью, определяемой шагом интегрирования $\Delta s = s_k / N$. Примем $N=25$. Это означает, что через 25 циклов интегрирования текущая точка должна совместиться с конечной точкой сплайна. Значения этой несовместимости по координатным осям – есть ошибка решения задачи.

Рассмотрим полученные в результате компьютерного моделирования ошибки сплайновой интерполяции в зависимости от порядка точности n (табл.2).

Таблица 2. Ошибки сплайновой интерполяции.

n	Без коррекции переменных				С коррекцией переменных			
	δx	δy	δz	P^*	δx	δy	δz	P^*
4	$3.8 \cdot 10^{-1}$	$2.0 \cdot 10^{-1}$	$6.6 \cdot 10^{-1}$	4.3	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	4.6
8	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	8.6	$3.0 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	9.5
12	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	12	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	16
16	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$8.2 \cdot 10^{-5}$	18	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$5.1 \cdot 10^{-6}$	16
20	$4.9 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$3.2 \cdot 10^{-6}$	19	$1.8 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	19

Для сравнения система дифференциальных уравнений сплайновой интерполяции была приведена к нормальной форме Коши и решена классическим методом Рунге-Кутты.

При шаге интегрирования $\Delta s = s_k / 25$ получено $\delta x = 5.6 \cdot 10^{-3}$, $\delta y = 3.8 \cdot 10^{-3}$, $\delta z = 1.1 \cdot 10^{-2}$. Погрешность решения задачи обоими методами с порядком точности $n = 4$ приблизительно одинаковая. Повышенный порядок точности $n = 20$ уменьшает погрешность решения на 5 порядков.

По формуле Эйткена [10] $P^* = (1/\ln 0.5) \ln((f_3 - f_2)/(f_2 - f_1))$, где f_1, f_2, f_3 – значения численного решения, полученные на сгущенных сетках с узлами $N, 2N, 4N$ соответственно, были найдены порядки сходимости численных решений P^* . Как и следовало ожидать, эти порядки коррелируют с порядками точности n . Для метода Рунге-Кутты $P^* = 4.7$.

6. Заключение

Интегрирование линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, приведенных к форме Шеннона, с помощью степенных рядов позволяет увеличить порядок точности метода и значительно уменьшить ошибку дискретизации.

Коррекция значений промежуточных элементарных функций непосредственно по формулам этих функций дополнительно повышает устойчивость и точность метода.

Показана методика приведения систем дифференциальных уравнений в форме Коши к уравнениям в форме Шеннона, которая может быть реализована на компьютере при работе в автоматическом режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shannon C.* Mathematical theory of the differential analyzer // *J. Math. and Phys.*, 1941, 20, № 4, 337p.
2. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике / Пер. с англ. Под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б. Лупанова. – М.: Изд. иностр. лит., 1963, 709 с.
Shennon K. Raboty po teorii informacii i kibernetike / Per. s angl. Pod red. R.L. Dobrushina i O.B. Lupanova. – M.: Izd. inostr. lit., 1963, 709 s.
3. *Каляев А.В.* Теория цифровых интегрирующих машин и структур. – М.: Советское радио, 1970, 471 с.
Kalyaev A.V. Teoriya tsifrovyykh integriruyuschix mashin i struktur. – M.: Sovetskoe radio. 1970, 471 s.
4. *Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990, 512 с.
Hairer E., Norset S., Wanner G. Solving ordinary differential equations. Nonstiff problems. - Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987.
5. *Гофен А.М.* Быстрое разложение в ряд Тейлора и решение задачи Коши // ЖВМ и МФ, 1982, т.22, №5, с.1094–1108.
Gofen A.M. Bystroe razlozhenie v ryad Tejlora i reshenie zadachi Koshi // Vychisl. matem. i matem. fiz., 1982, t. 22, №5, s. 1094 – 1108.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Уч. пособие. - М.: Наука, 1989, 432 с.
Samarskij A.A., Gulin A.V. Chislennye metody: Uch. posobie. - M.: Nauka, 1989, 432 s.
7. *Жолковский Е.К., Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Решение жестких задач Коши явными схемами с геометрически-адаптивным выбором шага // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018, №227, 20 с.
Zholkovskij E.K., Belov A.A., Kalitkin N.N. Reshenie zhestkix zadach Koshi yavnymi skhemami s geometricheski-adaptivnym vyborom shaga // Preprint IPM im. M.V. Keldysha, 2018, №227, 20 s.
8. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. - М.: Наука, 1979, 208 с.
Rakitskij I.U.V., Ustinov S.M., Chernoruczkij I.G. Chislennye metody resheniya zhestkix sistem. - M.: Nauka, 1979, 208 s.
9. *Чикуров Н.Г.* Устойчивость и точность неявных методов решения жестких систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2006, т.42, № 7, с.994-1004.
Chikurov N.G. Stability and accuracy of implicit methods for stiff systems of linear differential equations // *Differential Equations*, 2006, v. 42, p.1057–1067.
10. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978, 512 с.
Kalitkin N.N. Chislennye metody. – M.: Nauka, 1978, 512 s.

Поступила в редакцию 12.08.2019

После доработки 09.01.2020

Принята к публикации 27.01.2020