Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

T. S. Busel, I. D. Suprunenko, The block structure of the images of regular unipotent elements from subsystem symplectic subgroups of rank 2 in irreducible representations of symplectic groups. I, *Mat. Tr.*, 2019, Volume 22, Number 1, 68–100

DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.103>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 44.207.124.84

April 26, 2023, 12:58:01

БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА ОБРАЗОВ РЕГУЛЯРНЫХ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ПОДСИСТЕМНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПОДГРУПП РАНГА 2 В НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП. I

Т. С. Бусел, И. Д. Супруненко

Найдены размерности блоков Жордана образов регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа C_2 в p -ограниченных неприводимых представлениях групп типа C_n в характеристике $p \geq 11$ с локально малыми старшими весами. Эти результаты могут быть использованы для изучения поведения унипотентных элементов в модулярных представлениях простых алгебраических групп и решения задач распознавания представлений и линейных групп.

Статья состоит из 3-х частей. В первой части статьи содержатся предварительные леммы, необходимые для доказательства основных результатов, и исследуется случай, когда все веса ограничения рассматриваемого представления на подгруппу типа A_1 , содержащую соответствующий унипотентный элемент, меньше p .

Ключевые слова и фразы: унипотентные элементы, размерности блоков Жордана, представления симплектических групп.

*Посвящается нашему учителю и коллеге
Александру Ефимовичу Залесскому
с восхищением в связи с его 80-летием.*

§1. Введение

В статье вычисляются размерности блоков в жордановой форме образов регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа C_2 в p -ограниченных неприводимых представлениях групп типа C_n в характеристике $p \geq 11$ с локально малыми старшими весами. Получен аналогичный результат для нулевой характеристики. Как правило, образы таких элементов в рассматриваемых нами представлениях имеют блоки

Работа поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы «Конвергенция-2020».

Жордана всех априори возможных размерностей. Существует ряд представлений, для которых это не так.

Далее $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p \geq 11$, $G = C_n(K)$, $n > 2$, ω_i , $1 \leq i \leq n$, — фундаментальные веса группы G , $\mathbf{N}_a$ — множество всех целых чисел от 1 до a . Для элемента z некоторой простой алгебраической группы и ее представления φ символ $J_\varphi(z)$ обозначает множество размерностей блоков Жордана элемента $\varphi(z)$ (без учета их кратностей); аналогично определяется множество $J_M(z)$ для модуля M .

Теорема 1. Пусть $p \geq 11$, $G = C_n(K)$, $n > 2$, φ — p -ограниченное представление группы G со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$, $x \in G$ — регулярный унитарный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2 . Предположим, что $3a_{n-1} + 4a_n < p$. Положим $S = 3a_1 + 4(a_2 + \dots + a_n)$.

1. Пусть $S < p$. Тогда $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{S+1}$ или выполнено одно из условий:

- (i) $\omega = \omega_i$, $2 \leq i \leq n$, $J_\varphi(x) = \{1, 4, 5\}$;
- (ii) $\omega = a_1\omega_1$, $a_1 > 1$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{2, 3a_1 - 4, 3a_1 - 1, 3a_1\}$;
- (iii) $\omega = \omega_1$, $J_\varphi(x) = \{1, 4\}$;
- (iv) $n = 3$ и ω — вес из (a)–(d):

- (a) $\omega = \omega_3$, $J_\varphi(x) = \{4, 5\}$;
- (b) $\omega \in \{2\omega_1 + \omega_3, \omega_1 + \omega_3, \omega_1 + 2\omega_3, 5\omega_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3\}$,

$$J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{1\};$$

- (c) $\omega = 3\omega_3$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{13} \setminus \{2\}$;
- (d) $\omega = 2\omega_3$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_9 \setminus \{1, 4\}$.

2. Пусть $S \geq p$. Тогда $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_p$ или выполнено одно из условий:

- (i) $\omega = \frac{p-4}{3}\omega_1 + \omega_j$, $2 \leq j \leq n$,

$$J_\varphi(x) = \mathbf{N}_p \setminus \{p-1\};$$

- (ii) $\omega = a_1\omega_1$, $a_1 > \frac{p-1}{3}$,

$$J_\varphi(x) = \begin{cases} \mathbf{N}_p \setminus \{2, p-2\} & \text{при } a_1 \neq \frac{p+1}{3}, \\ \mathbf{N}_p \setminus \{2, p-3, p-2\} & \text{при } a_1 = \frac{p+1}{3}; \end{cases}$$

- (iii) $\omega = \sum_{j=1}^i a_j\omega_j$, $a_i \geq p-3$, $i < n-1$,

$$\mathbf{N}_p \setminus \{2, p-2\} \subset J_\varphi(x) \subset \mathbf{N}_p;$$

- (iv) $\omega = a_{i-1}\omega_{i-1} + a_i\omega_i$, $a_{i-1} + a_i = p-1$, $i \leq n-1$,

$$\mathbf{N}_p \setminus \{2, p-2\} \subset J_\varphi(x) \subset \mathbf{N}_p;$$

- (v) $n = 3$ и ω — вес из (a)–(e):
- (a) $\omega = (p - 5)\omega_1 + \omega_3$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_p \setminus \{1\}$;
 - (b) $\omega = 4\omega_1 + 2\omega_3$, $p = 11$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{11} \setminus \{1, 10\}$;
 - (c) $\omega \in \{5\omega_1 + 2\omega_3, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_1 + 2\omega_3\}$, $p = 11$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{11} \setminus \{1\}$;
 - (d) $\omega = 4\omega_1 + 3\omega_3$, $p = 13$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{13} \setminus \{2\}$;
 - (e) $\omega = 6\omega_1 + 4\omega_3$, $p = 17$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{17} \setminus \{1\}$.

Таким образом, $|J_\varphi(x)| \geq p - 3$ при $S \geq p$. Кроме того, $|J_\varphi(x)| \geq p - 2$ при $\omega \neq \frac{p+1}{3}\omega_1$.

Теорема 2. Пусть $G_{\mathbb{C}} = C_n(\mathbb{C})$, $n > 2$, $x_{\mathbb{C}} \in G_{\mathbb{C}}$ — регулярный унитарный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2 , φ — неприводимое представление группы $G_{\mathbb{C}}$ со старшим весом ω , и пусть ω и S такие, как в теореме 1. Тогда $J_\varphi(x_{\mathbb{C}})$ вычисляется, как в п. 1 теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 проводится параллельно доказательству теоремы 1 при $S < p$.

Некоторые частные случаи рассматриваемой задачи изучены А. А. Осинской [9]. Используя обозначения теоремы 1, предположим, что $a_i \neq 0$ для некоторого i с $1 < i < n$. Выберем максимальное такое i . Если при этом $a_i = 1$, то предположим дополнительно, что $a_j \neq 0$ для некоторого j с $1 < j < i$, и выберем максимальное такое j . Положим $a = a_i$ при $a_i > 1$ и $a = a_i + a_j$ при $a_i = 1$. В [9] найдено множество $J_\varphi(x)$ в случае, когда $a_{n-1} = a_n = 0$, $3a \leq p - 3$ и $a \neq 3$. Там же определены размерности блоков элемента $\varphi(x)$, не меньшие $3a + 4a_n + 1$, в случае, когда $3a + 4a_n < p$. Для удобства читателя мы приводим доказательство теоремы 1 полностью, поскольку использование результатов [9] не привело бы к существенному сокращению текста.

При решении задачи разработаны методы получения прямых слагаемых с определенными свойствами в ограничениях неприводимых представлений групп типа C_n на подсистемные подгруппы и некоторые подгруппы типа A_1 , которые могут использоваться и для других простых алгебраических групп (см. § 2). При ослаблении ограничений на характеристику поля, вероятно, в формулировке теоремы 1 было бы больше исключительных случаев.

Блочная структура образов корневых элементов в неприводимых представлениях группы типа $C_n(K)$ и ряда других алгебраических групп изучена М. В. Величко [4; 6; 28]. Для представлений с локально малыми старшими весами эта задача рассматривалась в [22; 23]. В [10] найдены размерности блоков Жордана образов регулярных унитарных элементов из подсистемной подгруппы типа A_3 в инфинитезимально неприводимых представлениях групп типа A_n в характеристике ≥ 11 с локально малыми

старшими весами (с точностью до двух размерностей для некоторых представлений специального вида). В стандартной реализации эти элементы имеют ту же нормальную форму Жордана, что и элементы, рассматриваемые в нашей статье. Естественно возникло стремление распространить результаты из [10] на представления симплектической группы. Это не происходило автоматически. Потребовалось разработать существенно новые подходы из-за различного строения систем корней специальных линейных и симплектических групп.

Детальная информация о поведении унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп полезна для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию определенных матриц. В случае положительной характеристики не приходится в ближайшем будущем ожидать решения проблемы вычисления размерностей произвольных неприводимых представлений простых алгебраических групп. В этой ситуации набор размерностей блоков Жордана (без учета их кратностей) образа фиксированного унипотентного элемента в заданном представлении — важный инвариант, который можно рассматривать как естественный ослабленный аналог нормальной формы Жордана. Результаты о свойствах образов унипотентных элементов в неприводимых модулярных представлениях полупростых алгебраических групп легко распространяются на абсолютно неприводимые представления конечных групп Шевалле в собственной характеристике, что расширяет область их потенциальных приложений.

Теорема 1 была анонсирована в [3]. К сожалению, в формулировке этой теоремы в [3] опущен п. 2(v) и неправильно указано множество $J_\varphi(x)$ при $\omega = \frac{p+1}{3}\omega_1$ в п. 2(ii).

Из-за большого объема пришлось разделить статью на 3 части. В первой части статьи содержатся предварительные леммы, необходимые для доказательства основных результатов, и доказываются часть 1 теоремы 1 и теорема 2.

§2. Обозначения и предварительные сведения

Ниже $G = C_n(K)$, ω_i и α_i , $1 \leq i \leq n$, — фундаментальные веса и простые корни группы G , ε_i , $1 \leq i \leq n$, — веса стандартного G -модуля, определенные в [2, § 13], $\langle \mu, \alpha \rangle$ — значение веса μ на корне α (в смысле [12, § 1]). Символы ω_i , ε_i и α_i используются не только для группы G , но и для других полупростых алгебраических групп; из контекста всегда ясно, о какой группе идет речь. Нумерация простых корней алгебраических групп соответствует [1]. Напомним, что неприводимое представление полупростой алгебраической группы в характеристике p называется p -ограниченным,

если все коэффициенты его старшего веса меньше p . Если Γ — полупростая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$ или K , то $W(\Gamma)$ — ее группа Вейля, $\mathfrak{X}_\beta$ — корневая подгруппа, ассоциированная с корнем β , $\Gamma(\beta_1, \dots, \beta_k)$ — подгруппа в Γ , порожденная корневыми подгруппами $\mathfrak{X}_{\pm\beta_1}, \dots, \mathfrak{X}_{\pm\beta_k}$; $\Lambda(\Gamma)$ и $\Lambda^+(\Gamma)$ — множество весов и множество доминантных весов группы Γ . Положим

$$\mathfrak{X}_{\pm i} = \mathfrak{X}_{\pm\alpha_i}, \quad \Gamma(i_1, \dots, i_k) = \Gamma(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}).$$

Используем также обозначение $\Gamma(i_1, \dots, i_k, \beta)$ для группы $\Gamma(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta)$ и другие подобные обозначения. Ниже $X_{\pm i, t}$ — элемент гипералгебры группы Γ , ассоциированный с корнем $\pm\alpha_i$ и числом t . Подгруппу, порожденную всеми корневыми подгруппами, ассоциированными с корнями из некоторой подсистемы системы корней группы Γ , будем называть *подсистемной подгруппой*. Для простой алгебраической группы Γ символом ρ_Γ обозначается полусумма ее положительных корней.

Далее $\dim M$ ($\dim \varphi$) — размерность Γ -модуля M (представления φ), $\Lambda(M)$ ($\Lambda(\varphi)$) и $\Lambda^+(M)$ ($\Lambda^+(\varphi)$) — множества весов и доминантных весов модуля M (представления φ). Если $\omega \in \Lambda^+(\Gamma)$, то $M(\omega)$, $V(\omega)$ и $T(\omega)$ — неприводимый модуль, модуль Вейля и неразложимый тилтинг-модуль группы Γ со старшим весом ω ; $\omega(\varphi)$ ($\omega(M)$) — старший вес представления φ (модуля M); $\omega(m)$ — вес весового вектора m из некоторого модуля, M_λ — весовое подпространство веса λ в модуле M . Напомним, что Γ -модуль называется *тилтинг-модулем*, если он имеет и фильтрацию модулями Вейля, и фильтрацию комодулями Вейля. Если Γ — простая алгебраическая группа над K , то $\Gamma_{\mathbb{C}}$ — простая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$ с той же системой корней, что и Γ . Для неприводимого представления φ группы Γ символ $\varphi_{\mathbb{C}}$ обозначает неприводимое представление группы $\Gamma_{\mathbb{C}}$ со старшим весом $\omega(\varphi)$; аналогично определяется $\Gamma_{\mathbb{C}}$ -модуль $M_{\mathbb{C}}$ для неприводимого Γ -модуля M ; при этом используется обозначение $M_{j, \mathbb{C}}$ вместо $(M_j)_{\mathbb{C}}$ и т. п.

Если H — подгруппа в Γ , то $M \upharpoonright H$ — ограничение Γ -модуля M на H . Предполагается, что веса и корни группы Γ рассматриваются относительно фиксированного максимального тора T . Если $T \cap H$ — максимальный тор подгруппы H , то $\omega \upharpoonright H$ — ограничение веса ω на $T \cap H$. В этом случае для весового вектора m из некоторого Γ -модуля полагаем $\omega_H(m) = \omega(m) \upharpoonright H$. Если M — неприводимый Γ -модуль, то $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Символом $d_\varphi(x)$ обозначим степень минимального многочлена образа элемента $x \in \Gamma$ в представлении φ , $\text{Irr } M$ — множество композиционных факторов модуля M без учета их кратностей. Множество весов группы $A_1(K)$ отождествляется с множеством целых чисел $\mathbb{Z}$: $a\omega_1 \mapsto a$.

Рассматриваются только конечномерные представления. Далее в этом параграфе Γ — произвольная полупростая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$ или K , если не оговорено иное.

В работе существенно используются следующие факты. В силу [15, предложение 5.13] для элемента m произвольного G -модуля, корня γ группы G и элемента $t \in K$ выполняется формула

$$x_\gamma(t)m = \sum_{i=0}^{\infty} t^i X_{\gamma,i}m.$$

В дальнейшем мы применяем эту формулу без специальных ссылок.

Теорема 3 [26]. Пусть $S = \Gamma(i_1, \dots, i_k) \subseteq \Gamma$, M — неприводимый Γ -модуль со старшим весом ω , $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Тогда подпространство $KSv \subseteq M$ является неприводимым S -модулем со старшим весом $\omega|_S$ и прямым слагаемым S -модуля M .

Лемма 1. Пусть $1 \leq i \leq n$, $G_1 = G(1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$ и M — неприводимый G_1 -модуль. Предположим, что $M \cong M^*$. Для $k \in \mathbb{Z}^+$ положим

$$\Omega_k = \left\{ \lambda \in \Lambda(M) \mid \lambda = \omega - k\alpha_i - \sum_{j \neq i} x_j \alpha_j \right\}, \quad U_k = \langle M_\lambda \mid \lambda \in \Omega_k \rangle.$$

Пусть $h = h(M)$ — максимальное число, при котором $\Omega_h \neq \emptyset$. Тогда G_1 -модули U_k и U_{h-k} дуальны.

Доказательство. Пусть T — фиксированный максимальный тор, относительно которого определены веса и корни группы G . Тогда T нормализует подгруппу G_1 . Ясно, что U_k — прямое слагаемое ограничения $M|_{TG_1}$. Поскольку модуль M изоморфен M^* , то его младший вес равен $-\omega(M)$, $\Omega_{h-k} = \{\lambda \in \Lambda(M) \mid -\lambda \in \Omega_k\}$ и $M|_{TG_1}$ имеет прямое слагаемое U , изоморфное U_k^* . Учитывая, что $\dim(U_k)_\lambda = \dim U_{-\lambda}$ для любого веса $\lambda \in \Lambda(M)$, и анализируя действие тора T на подпространствах U_j , получаем, что $U = U_{h-k}$. $\square$

Лемма 2 [20, ч. II, лемма 2.13]. Γ -модуль, порожденный ненулевым вектором веса λ , неподвижным относительно всех корневых подгрупп, ассоциированных с положительными корнями, является гомоморфным образом модуля Вейля $V(\lambda)$ группы Γ .

Лемма 3 [16]. Пусть $\Gamma = A_2(K)$, M — неприводимый p -ограниченный Γ -модуль со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$. Тогда модуль $V(\omega)$ неприводим при $a_1 + a_2 < p-1$ и имеет два композиционных фактора $M(\omega)$ и $M(\omega - d(\alpha_1 + \alpha_2))$ при $a_1 + a_2 = p + d - 2$, $d \geq 1$.

Лемма 4. Пусть $\Gamma = A_2(K)$, M — неприводимый p -ограниченный Γ -модуль со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$, $a_1 + a_2 \neq p-1$, $a_2 \neq 0$, и $0 < k \leq a_1$. Тогда кратность веса $\omega - k\alpha_1 - \alpha_2$ в модуле M равна 2.

Доказательство. Положим $\lambda = \omega - k\alpha_1 - \alpha_2$. Ясно, что

$$\lambda \notin \Lambda\left(M(\omega - d(\alpha_1 + \alpha_2))\right) \text{ при } d > 1.$$

Поэтому из леммы 3 следует, что $\dim M_\lambda = \dim V(\omega)_\lambda$. В силу [24, 6.9] эта кратность равна 2. $\square$

Теорема 4 [11]. Пусть φ — p -ограниченное неприводимое представление группы G . Тогда $\Lambda(\varphi) = \Lambda(\varphi_S)$.

Лемма 5 [24, 1.5]. Пусть M — неприводимый Γ -модуль, $m \in M$ — ненулевой весовой вектор, β — корень группы Γ , $\mathfrak{X}_\beta$ сохраняет m и $0 < \langle \omega(M), \beta \rangle < p$. Тогда $X_{-\beta, c}m \neq 0$ при $0 < c \leq \langle \omega(M), \beta \rangle$.

Из леммы 2.46 в [27] вытекает

Лемма 6. Пусть M — неразложимый G -модуль со старшим весом $\sum_{i=1}^n a_i \omega_i$ и $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Пусть $1 \leq s, t \leq n$. Предположим, что $0 < a_t < p$. Пусть $b_k = -\langle \alpha_{k+1}, \alpha_k \rangle$ и $c_k = -\langle \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle$. Для целого d с $0 < d \leq a_t$ определим вектор $v(s, t, d)$ следующим образом. Пусть $d_t = d$. Если $s > t$, то положим $d_k = a_k + d_{k-1}c_k$ при $s \geq k > t$. Если $s < t$, то положим $d_k = a_k + d_{k+1}b_k$ при $s \leq k < t$. Запишем

$$v(s, t, d) = X_{-s, d_s} \dots X_{-k, d_k} \dots X_{-t, d} v.$$

При $s = t$ положим $v(s, t, d) = X_{-s, d} v$. Тогда $v(s, t, d) \neq 0$ и $X_{m, b} v(s, t, d) = 0$ для положительного $m \neq s$ и $b > 0$. Следовательно, группа $\mathfrak{X}_m$ фиксирует $v(s, t, d)$.

Обозначение $v(s, t, d)$ многократно используется ниже.

Следствие 1. Пусть $H = G(i, i+1, \dots, n)$, $1 < i < n$, и φ — p -ограниченное неприводимое представление группы G со старшим весом

$$\omega(\varphi) = a_1 \omega_1 + \dots + a_{n-1} \omega_{n-1} + a_n \omega_n, a_i \neq 0.$$

Предположим, что t — целое число и $0 < t \leq a_i$. Тогда $\varphi \mid H$ имеет композиционный фактор со старшим весом

$$(a_{i-1} + a_i - t) \omega_1 + (a_{i+1} + t) \omega_2 + a_{i+2} \omega_3 + \dots + a_n \omega_{n-i+1}.$$

Доказательство. Положим $m = v(i-1, i, t)$. В силу леммы 6 $m \neq 0$ и подгруппы $\mathfrak{X}_j$, $j > i-1$, сохраняют m . Поэтому m порождает неразложимый H -модуль со старшим весом $\omega_H(m)$. Легко видеть, что $\omega_H(m)$ равен указанному выше весу. Отсюда следует наше утверждение. $\square$

Предложение 1, лемма 8 и следствие 2, вероятно, известны, но мы не можем привести явные ссылки.

Предложение 1. Пусть U — Γ -модуль. Предположим, что $\text{Irr } U = S_1 \cup S_2$, $S_i \neq \emptyset$, и не существует неразложимых Γ -модулей с двумя композиционными факторами M_1 и M_2 такими, что $M_i \in S_i$, $i = 1, 2$. Тогда $U = N_1 \oplus N_2$, где N_i — Γ -модули и $\text{Irr } N_i = S_i$.

Доказательство. Будем использовать индукцию по числу композиционных факторов модуля U (здесь кратности факторов учитываются). Предположим, что U имеет l композиционных факторов и предложение верно для модулей с меньшим числом композиционных факторов. Очевидно, можно считать, что $l \geq 3$. Пусть $M \subset U$ — неприводимый подмодуль. Положим $\bar{U} = U/M$. Без ограничения общности будем считать, что $M \in S_1$. Ясно, что $S_2 \subset \text{Irr } \bar{U}$. Предположим сначала, что $\text{Irr } \bar{U} = S_2$. Очевидно, что существует подмодуль $U_1 \subset U$ такой, что $M \subset U_1$ и U_1 имеет $l - 1$ композиционных факторов. Понятно, что $\text{Irr } (U_1/M) \subset S_2$. Поэтому в силу предположения индукции $U_1 = M \oplus U_2$, где U_2 — Γ -модуль и $\text{Irr } U_2 \subset S_2$. Положим $P = U/U_2$. Ясно, что P имеет два композиционных фактора, один из них изоморфен M , а другой лежит в S_2 . Тогда по условию предложения $P = P_1 \oplus P_2$, где $P_1 \cong M$, $P_2 \in S_2$. Положим $N_1 = M$ и возьмем в качестве N_2 полный прообраз модуля P_2 в U . Ясно, что $\text{Irr } N_2 = S_2$, $N_1 \cap N_2 = 0$ и модуль N_2 имеет $l - 1$ композиционных факторов. Отсюда следует, что $U = N_1 \oplus N_2$.

Пусть $\text{Irr } \bar{U} \neq S_2$. В силу предположения индукции $\bar{U} = \bar{N}_1 \oplus \bar{N}_2$, где $\bar{N}_i$ — Γ -модули, $\text{Irr } \bar{N}_1 \subset S_1$, $\text{Irr } \bar{N}_2 = S_2$. Возьмем в качестве N_1 полный прообраз модуля $\bar{N}_1$ в U . Ясно, что $\text{Irr } N_1 = S_1$ и что для всех модулей $Q \in S_1$ кратности композиционного фактора, изоморфного Q , в модулях N_1 и U совпадают. Пусть Z — полный прообраз модуля $\bar{N}_2$ в U . Ввиду предположения индукции $Z = M \oplus N_2$, где N_2 — Γ -модуль и $\text{Irr } N_2 = S_2$. Ясно, что для всех модулей $F \in S_2$ кратности композиционного фактора, изоморфного F , в модулях U и N_2 совпадают. Так как $N_1 \cap N_2 = 0$, отсюда следует, что $U = N_1 \oplus N_2$. $\square$

Ниже будет использоваться символ $\text{Ext}_\Gamma^1(M_2, M_1)$, обозначающий группу расширений Γ -модуля M_1 с помощью M_2 , т. е. множество классов эквивалентности коротких точных последовательностей Γ -модулей вида

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M_2 \rightarrow 0$$

со стандартной операцией. Напомним, что для неприводимых модулей M_1 и M_2 модуль M из такой последовательности вполне приводим при $\text{Ext}_\Gamma^1(M_2, M_1) = 0$.

Лемма 7 [20, ч. II, п. 2.12, формулы (1), (4)]. Пусть M_1 и M_2 — неприводимые Γ -модули. Тогда

- 1) $\text{Ext}_\Gamma^1(M_1, M_1) = 0$;
- 2) $\text{Ext}_\Gamma^1(M_1, M_2) = \text{Ext}_\Gamma^1(M_2, M_1)$.

Предложение 2 [20, ч. II, предложение 2.14]. Пусть $\lambda, \mu \in \Lambda^+(\Gamma)$ такие, что $\mu \not\asymp \lambda$. Тогда

$$\text{Ext}_{\Gamma}^1(M(\lambda), M(\mu)) \cong \text{Hom}_{\Gamma}(\text{rad}_{\Gamma} V(\lambda), M(\mu)),$$

где $\text{rad}_{\Gamma} V(\lambda)$ — максимальный собственный подмодуль модуля $V(\lambda)$.

Лемма 8. Пусть U — Γ -модуль, $M = M(\omega)$ и $\text{Irr } U = M \cup I$. Предположим, что модуль $V(\omega)$ неприводим и $M \notin \text{Irr } V(\lambda)$, если $M(\lambda) \in I$. Тогда $U = N_1 \oplus N_2$, где N_1 — прямая сумма нескольких копий модуля M , N_2 — Γ -модуль, $\text{Irr } N_2 = I$.

Доказательство. В силу предложения 2 и леммы 7

$$\text{Ext}_{\Gamma}^1(M, Q) = \text{Ext}_{\Gamma}^1(Q, M) = 0 \quad \text{для любого } Q \in I.$$

Поэтому не существует неразложимых Γ -модулей с двумя композиционными факторами, один из которых изоморфен M , а другой содержится в I . В силу предложения 1 $U = N_1 \oplus N_2$, где N_1 и N_2 — Γ -модули, $\text{Irr } N_1 = M$, а $\text{Irr } N_2 = I$. Осталось доказать полную приводимость модуля N_1 .

Пусть l — число композиционных факторов модуля N_1 . Используем индукцию по l . При $l = 1$ наше утверждение очевидно. При $l = 2$ оно следует из леммы 7. Пусть $l > 2$. Предположим, что утверждение верно для модулей, у которых меньше l композиционных факторов. Очевидно, что в N_1 имеется подмодуль S с $l - 2$ композиционными факторами. Из леммы 7 следует, что

$$N_1/S = \overline{U}_1 \oplus \overline{U}_2, \quad \text{где } \overline{U}_i \cong M.$$

Пусть U_i — полный прообраз $\overline{U}_i$ в N_1 . Ясно, что $N_1 = U_1 + U_2$. Так как модули U_i имеют ровно $l - 1$ композиционных факторов, в силу предположения индукции каждый из них вполне приводим. Отсюда вытекает полная приводимость модуля N_1 . $\square$

Следствие 2. Пусть U — Γ -модуль. Предположим, что модуль $V(\lambda)$ неприводим, если $M(\lambda) \in \text{Irr } U$. Тогда модуль U вполне приводим.

Доказательство. Используем индукцию по порядку t множества $\text{Irr } U$. При $t = 1$ рассуждаем так же, как для модуля N_1 в доказательстве леммы 8. Пусть $t > 1$. Предположим, что утверждение следствия верно для модулей F с мощностью множества $\text{Irr } F$, меньшей t . Зафиксируем модуль $M \in \text{Irr } U$ и положим $I = \text{Irr } U \setminus M$. Так как модули $V(\lambda)$ неприводимы при $M(\lambda) \in \text{Irr } U$, по предложению 2 не существует неразложимых модулей с двумя композиционными факторами, один из которых изоморфен M , а другой содержится в I . Поэтому модуль M и множество I удовлетворяют

условию леммы 8. В силу этой леммы U есть прямая сумма нескольких копий модуля M и модуля U_1 с $\text{Irr } U_1 = I$. Поскольку $|I| = t - 1$, модуль U_1 вполне приводим ввиду предположения индукции. Отсюда вытекает утверждение следствия. $\square$

Следствие 3 хорошо известно, его доказательство приведено здесь, чтобы показать его связь с более общими фактами.

Следствие 3. Пусть $\Gamma = A_1(K)$, U — Γ -модуль, все веса которого меньше p . Тогда модуль U вполне приводим.

Доказательство. Известно, что модули Вейля группы Γ со старшими весами, меньшими p , неприводимы. Поэтому наше утверждение вытекает из следствия 2. $\square$

Лемма 9 [23, лемма 10]. Пусть φ — неприводимое представление группы $\Gamma = A_1(K)$ со старшим весом a , $0 \leq a < p$. Тогда $\dim \varphi = a + 1$ и для неединичного унитарного элемента $z \in \Gamma$ преобразование $\varphi(z)$ имеет единственный блок Жордана размерности $a + 1$.

Определение 1. Связная замкнутая подгруппа A типа A_1 в простой алгебраической группе Γ над K называется *хорошей*, если образы всех корней при гомоморфизме $\sigma : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(A)$, индуцированном ограничением весов с максимального тора T группы Γ на максимальный тор $T_A = T \cap A$ в A , меньше $2p - 1$.

Лемма 10 [25, предложение 2.2]. Если Γ — простая алгебраическая группа над K , то для любого элемента $x \in \Gamma$ порядка p существует хорошая подгруппа A , содержащая x , и все такие подгруппы сопряжены; при этом можно выбрать систему простых корней так, что $\sigma(\alpha_i)$ принадлежит $\{0, 1, 2\}$ и совпадает с i -й меткой на помеченной диаграмме Дынкина элемента x (здесь σ — гомоморфизм из определения 1).

Известно [17, гл. 5], что для регулярного элемента x число $\sigma(\alpha_i)$ равно 2 для всех i .

Лемма 11. Пусть Γ — простая алгебраическая группа над K , α — максимальный короткий корень группы Γ . При $\langle \omega + \rho_\Gamma, \alpha \rangle \leq p$ модуль Вейля $V(\omega)$ неприводим.

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из [20, ч. II, предложение 8.19], поскольку легко заметить, что $\langle \omega + \rho_\Gamma, \beta \rangle \leq \langle \omega + \rho_\Gamma, \alpha \rangle$ для любого положительного корня β группы Γ . $\square$

Лемма 12 [4, лемма 1]. Пусть $\lambda \in \Lambda^+(\Gamma)$ и модуль $V(\lambda)$ неприводим. Предположим, что λ — максимальный вес Γ -модуля U и весовое подпространство этого веса одномерно в U . Тогда $U = V \oplus N$, где $N \cong M(\lambda)$.

Лемма 13 [23, лемма 12]. Пусть Δ — некоторая группа, и пусть $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ — прямая сумма Δ -модулей. Тогда $J_U(z) = \bigcup_{j=1}^k J_{U_j}(z)$ для элемента $z \in \Delta$.

Следствие 4 [5, следствие 8]. Пусть H — подгруппа группы Δ и $z \in H$. Предположим, что для Δ -модуля U ограничение $U|_H$ вполне приводимо. Тогда $J_M(z) \subset J_U(z)$ для любого композиционного фактора M модуля U .

В теореме 5 J_k — блок Жордана размерности k с единицей на диагонали, $J(h)$ — множество размерностей блоков (без учета кратностей) в форме Жордана элемента h из соответствующей линейной группы.

Теорема 5 [14, гл. VIII, теорема 2.7]. Пусть $1 \leq s \leq t \leq p$. Тогда

$$J(J_s \otimes J_t) = \begin{cases} \{t-s+1, t-s+3, \dots, t+s-1\} & \text{при } s+t \leq p; \\ \{p, t-s+1, \dots, 2p-t-s-1\} & \text{при } s+t > p. \end{cases}$$

В частности, $J(J_s \otimes J_p) = \{p\}$.

Лемма 14 [25, лемма 1.1].

- (а) Для каждого доминантного веса λ группы Γ существует неразложимый тилтинг-модуль $T(\lambda)$ со старшим весом λ , определенный однозначно с точностью до изоморфизма.
- (б) Любой тилтинг-модуль есть прямая сумма неразложимых тилтинг-модулей вида $T(\lambda)$.
- (в) Прямое слагаемое тилтинг-модуля также является тилтинг-модулем.
- (г) Тензорное произведение тилтинг-модулей — тилтинг-модуль.

В лемме 15, предложении 3 и следствии 5 рассматриваются тилтинг-модули группы $A_1(K)$.

Лемма 15 [25, леммы 1.2, 1.3]. При $0 \leq c < p$

$$T(c) \cong V(c) \cong M(c).$$

При $p \leq c \leq 2p-2$ положим $c = r+p$. Тогда максимальный подмодуль M модуля $V(c)$ изоморфен $M(p-r-2)$ и $V(c)/M \cong M(c)$. В модуле $T(c)$ имеется фильтрация

$$\begin{aligned} T(c) &= M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4 = 0 \\ {}_c M_1/M_2 &\cong M_3 \cong M(p-r-2) \text{ и } M_2/M_3 \cong M(r+p); \\ \dim(T(c)) &= 2p. \end{aligned}$$

В этом случае модуль $T(c)$ проективен для группы $A_1(p)$, а значит, нетривиальный унипотентный элемент имеет в этом модуле два блока размерности p .

Предложение 3 [18, пример 2]. Пусть $m \geq p$. Тогда

$$T(m) \cong T(p-1+r) \otimes T(s)^{Fr},$$

где r и s определяются из равенства

$$m+1-p = r+ps, \quad 0 \leq r \leq p-1,$$

Fr — морфизм Фробениуса группы $A_1(K)$, задаваемый возведением элементов поля K в степень p .

Следствие 5. При $m \geq p$ нетривиальные унитарные элементы имеют в модуле $T(m)$ только блоки размерности p .

Лемма 16. Пусть $A \subset \Gamma$ — связная полупростая замкнутая подгруппа, $\omega \in \Lambda^+(\Gamma)$. Предположим, что модуль Вейля $V(\omega)$ неприводим и что существуют веса λ_1 и $\lambda_2 \in \Lambda^+(\Gamma)$ такие, что $\omega = \lambda_1 + \lambda_2$ и ограничения $M(\lambda_1) \mid A$ и $M(\lambda_2) \mid A$ — тилтинг-модули. Тогда $M(\omega) \mid A$ — тилтинг-модуль.

Доказательство. Ясно, что размерность весового пространства веса ω в модуле $M(\lambda_1) \otimes M(\lambda_2)$ равна 1. Тогда согласно лемме 12 $M(\omega)$ — прямое слагаемое этого тензорного произведения. Остается использовать утверждения (с) и (d) леммы 14. $\square$

Следствие 6. Пусть Γ — простая алгебраическая группа, $A \subset \Gamma$ — связная полупростая замкнутая подгруппа, M — неприводимый Γ -модуль со старшим весом ω . Предположим, что ограничения на A неприводимых Γ -модулей с фундаментальными старшими весами — тилтинг-модули и что $\langle \omega + \rho_\Gamma, \alpha \rangle \leq p$ для максимального короткого корня α группы Γ . Тогда $M \mid A$ — тилтинг-модуль.

Доказательство. Пусть r — ранг группы Γ , $\omega = \sum_{i=1}^r a_i \omega_i$. Положим $s = \sum_{i=1}^r a_i$. Используем индукцию по s . При $s = 1$ утверждение следствия верно по условию. Пусть $s > 1$ и $a_j \neq 0$ для некоторого j . Положим $\lambda_1 = \omega - \omega_j$, $\lambda_2 = \omega_j$. В силу предположения индукции и условия следствия $M(\lambda_i) \mid A$ — тилтинг-модуль при $i = 1, 2$. Модуль $V(\omega)$ неприводим ввиду леммы 11. Теперь наше утверждение следует из леммы 16. $\square$

Следствие 7. Пусть $\Gamma = A_n(K)$, A — образ вполне приводимого представления группы $A_1(K)$ с p -ограниченными неприводимыми компонентами, M — неприводимый Γ -модуль со старшим весом $a_1 \omega_1$ и $a_1 < p$. Тогда $M \mid A$ — тилтинг-модуль.

Доказательство. Ясно, что $M(\omega_1) \mid A$ — тилтинг-модуль. Известно, что G -модуль $V(a_1 \omega_1)$ неприводим. Достаточно несколько раз применить лемму 16. $\square$

Лемма 17. Пусть $H \subset G$ — подсистемная подгруппа типа C_2 и $a < p$. Тогда ограничение $M(a\omega_1) \mid H$ вполне приводимо и

$$\text{Irr}(M(a\omega_1) \mid H) = \{M(k\omega_1) \mid 0 \leq k \leq a\}.$$

Доказательство. Утверждение следует из [8, предложение 2.8]. $\square$

Теорема 6 [24, 8.1]. Неприводимые модули группы G со старшими весами $a\omega_1$ при $a < p$ или $a\omega_i + (p-1-a)\omega_{i+1}$, где $1 \leq i < n$ и $a \neq 0$ для $i = n-1$, эквивалентны ограничениям на G неприводимых модулей группы $A_{2n-1}(K)$ с такими же старшими весами.

Предложение 4 [8, предложение 1.2]. Пусть $\Delta = A_r(K)$, V — естественный Δ -модуль, k и j — целые неотрицательные числа, $j < p$. При $r = k(p-1) + j \leq (n+1)(p-1)$ r -я усеченная симметрическая степень $S^{r,p}(V)$ является неприводимым модулем со старшим весом

$$(p-1-j)\omega_k + j\omega_{k+1}.$$

Все весовые подпространства этого модуля одномерны. В частности, r -я симметрическая степень $S^r(V)$ — неприводимый Δ -модуль со старшим весом $r\omega_1$ при $r < p$.

Лемма 18. Пусть $\Delta = A_r(K)$, $k+t = r-1$, $H_1 = A_k(K)$, $H_2 = A_t(K)$, V_j — естественный модуль группы H_j , $j = 1, 2$, V — естественный Δ -модуль, $H \cong H_1 H_2$ — подсистемная подгруппа в Δ , $S^{i,p}(V)$ — i -я усеченная симметрическая степень модуля V . Тогда

$$S^{i,p}V \cong \bigoplus_{\substack{i_1+i_2=i, \\ 0 \leq i_1 \leq (k+1)(p-1), \\ 0 \leq i_2 \leq (t+1)(p-1)}} S^{i_1,p}V_1 \otimes S^{i_2,p}V_2. \quad (1)$$

Для доказательства действие подгруппы H рассматривается в стандартных базисах соответствующих модулей, построенных по фиксированным базисам модулей V_1 и V_2 .

В теоремах 7 и 8 обозначения ε_i , $1 \leq i \leq r$, используются для весов естественного модуля произвольной алгебраической группы типа C_r , а не только для группы G . Из контекста ясно, о какой группе идет речь.

Теорема 7. Пусть $\Gamma = C_r(K)$, $r \geq 2$, $x \in \Gamma$ — регулярный унипотентный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2 , A — хорошая A_1 -подгруппа, содержащая x , $\sigma : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(A)$ — гомоморфизм из леммы 10. Тогда $\sigma(\varepsilon_1) = 3$, $\sigma(\varepsilon_2) = 1$, $\sigma(\varepsilon_i) = 0$ при $3 \leq i \leq r$.

Пусть φ — неприводимое p -ограниченное представление группы Γ со старшим весом $\sum_{i=1}^r a_i \omega_i$. Тогда

$$\begin{aligned} \max_{\mu \in \Lambda(\varphi)} \{\sigma(\mu)\} &= 3a_1 + 4(a_2 + \cdots + a_r), \\ d_\varphi(x) &= \min \{p, 1 + 3a_1 + 4(a_2 + \cdots + a_r)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $x_{\mathbb{C}} \in \Gamma_{\mathbb{C}}$ — элемент с той же нормальной формой Жордана в естественном модуле, что и x .

Нетрудно установить, что $x_{\mathbb{C}}$ (и x) в естественном модуле имеет один блок Жордана размерности 4 и блоки размерности 1. Положим

$$N(x) = (3, 1, 0, \dots, 0, -1, -3) \quad (\text{в } N(x) \text{ } 2r \text{ чисел}).$$

В силу [13, предложение 2.12] набор

$$(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(-\varepsilon_1), \dots, \sigma(\varepsilon_r), \sigma(-\varepsilon_r))$$

совпадает с набором $N(x)$ с учетом кратностей. Так как $\sigma(\alpha_i) \geq 0$, отсюда следуют формулы для $\sigma(\varepsilon_i)$ и ясно, что

$$\max_{\mu \in \Lambda(\varphi)} \{\sigma(\mu)\} = \sigma(\omega(\varphi)).$$

Поскольку $\omega_i = \sum_{j=1}^i \varepsilon_j$, получаем

$$\sigma(\omega(\varphi)) = 3a_1 + 4(a_2 + \dots + a_r).$$

Согласно [13, теорема 1.1]

$$d_{\varphi}(x) = \min \{p, d_{\varphi_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}})\}.$$

Пусть τ_j — неприводимое представление группы $\Gamma_{\mathbb{C}}$ со старшим весом ω_j , $1 \leq j \leq r$, $m_j = d_{\tau_j}(x_{\mathbb{C}}) - 1$. Ввиду [13, алгоритм 1.4] число m_j равно сумме j максимальных чисел из набора $N(x)$. Поэтому

$$m_1 = 3, \quad m_2 = \dots = m_r = 4.$$

На основании [13, предложение 1.3] заключаем, что

$$d_{\varphi_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}}) = 1 + \sum_{i=1}^r a_i m_i = 1 + 3a_1 + 4(a_2 + \dots + a_r). \quad \square$$

Положим

$$Q_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n, a_i \in \mathbb{N}\}.$$

Если

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in Q_n \quad \text{и} \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \in Q_{n-1},$$

то $b < a$ означает, что

$$a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq \dots \geq b_{n-1} \geq a_n.$$

В следующей теореме символом V_a обозначим неприводимый $C_n(\mathbb{C})$ -модуль со старшим весом $a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n$, где $a \in Q_n$.

Теорема 8 [7, теорема 11]. Пусть $H \subset C_n(\mathbb{C})$ — подсистемная подгруппа типа C_{n-1} . Тогда

$$V_a \mid H \cong \bigoplus_{b < (a,0)} \bigoplus_{c < b} V_c, \quad \text{где } a, b \in Q_n, \quad c \in Q_{n-1}. \quad (2)$$

Предложение 5. Пусть V_a — неприводимый модуль для группы $C_3(\mathbb{C})$ со старшим весом $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$, $H \subset C_3(\mathbb{C})$ — подсистемная подгруппа типа C_2 . Тогда множество композиционных факторов ограничения $V_a \mid H$ состоит из всех неприводимых модулей со старшими весами вида $d_1\omega_1 + d_2\omega_2$ с $a_3 \leq d_1 + d_2 \leq a_1 + a_2 + a_3$ и $d_2 \leq a_2 + a_3$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 8. В обозначениях этой теоремы a равно $(a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3, a_3)$, b пробегает множество наборов (b_1, b_2, b_3) таких, что

$$a_2 + a_3 \leq b_1 \leq a_1 + a_2 + a_3, \quad a_3 \leq b_2 \leq a_2 + a_3, \quad 0 \leq b_3 \leq a_3.$$

Имеем

$$V_a \mid H \cong \bigoplus_{b < (a,0)} \bigoplus_{c < b} V_c.$$

Поэтому $b_2 \leq c_1 \leq b_1$, $b_3 \leq c_2 \leq b_2$ для всех слагаемых V_c . Для пары целых неотрицательных чисел $d = (d_1, d_2)$ пусть $M(d)$ — неприводимый H -модуль со старшим весом $d_1\omega_1 + d_2\omega_2$,

$$\mathcal{D} = \{d \mid M(d) \text{ — композиционный фактор модуля } V_a \mid H\}.$$

Поскольку $M(d) \cong V_c$ при $c = (d_1 + d_2, d_2)$, отсюда следует, что d_1 и d_2 удовлетворяют соотношениям $a_3 \leq d_1 + d_2 \leq a_1 + a_2 + a_3$ и $d_2 \leq a_2 + a_3$ при $d \in \mathcal{D}$.

С другой стороны, пусть d_1, d_2 — неотрицательные целые числа,

$$a_3 \leq d_1 + d_2 \leq a_1 + a_2 + a_3 \quad \text{и} \quad d_2 \leq a_2 + a_3.$$

Положим

$$c_1 = d_1 + d_2, \quad c_2 = d_2, \quad b_1 = \max\{c_1, a_2 + a_3\}, \quad b_2 = \max\{a_3, c_2\}, \quad b_3 = 0.$$

Тогда $c = (d_1 + d_2, d_2) < b = (b_1, b_2, b_3)$ и по теореме 8 $V_c \cong M(d)$ — прямое слагаемое ограничения $V_a \mid H$. $\square$

Лемма 19. Пусть $\Gamma = C_r(K)$, $r \geq 2$, $x \in \Gamma$ — регулярный унитарный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2 , M — неприводимый Γ -модуль со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_r\omega_r$. Предположим, что модуль Вейля $V(\omega)$ неприводим и $3a_1 + 4(a_2 + \dots + a_r) < p$. Тогда размерности блоков Жордана элемента x в модуле M такие же, как у аналогичного элемента группы $\Gamma_{\mathbb{C}}$ в модуле $M_{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Пусть $x_{\mathbb{C}} \in \Gamma_{\mathbb{C}}$ — регулярный унитарный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2 , A и σ — подгруппа типа A_1 и гомоморфизм, описанные в теореме 7. Легко видеть, что нормальные формы Жордана элементов x и $x_{\mathbb{C}}$ в естественных модулях групп Γ и $\Gamma_{\mathbb{C}}$ совпадают. В силу предложения 2.2 и предшествующего ему замечания из [25] в $\Gamma_{\mathbb{C}}$ существует замкнутая в топологии Зарисского подгруппа $A_{\mathbb{C}} \cong A_1(\mathbb{C})$ такая, что $x_{\mathbb{C}} \in A_{\mathbb{C}}$, $T_{\mathbb{C}} \cap A_{\mathbb{C}}$ — максимальный тор в $A_{\mathbb{C}}$ для некоторого максимального тора $T_{\mathbb{C}} \subset \Gamma_{\mathbb{C}}$ и ограничение весов с $T_{\mathbb{C}}$ на $T_{\mathbb{C}} \cap A_{\mathbb{C}}$ задает гомоморфизм σ .

Так как $M \cong V(\omega)$, из сказанного выше следует, что кратности весов модулей $M_{\mathbb{C}} \mid A_{\mathbb{C}}$ и $M \mid A$ совпадают. Ввиду теоремы 7 $\sigma(\mu) < p$ для любого веса $\mu \in \Lambda(M)$. Тогда по следствию 3 $M \mid A$ — прямая сумма p -ограниченных неприводимых модулей. Таким образом, размерности блоков Жордана элементов $x_{\mathbb{C}}$ и x в модулях $M_{\mathbb{C}}$ и M соответственно однозначно определяются кратностями весов модулей $M_{\mathbb{C}} \mid A_{\mathbb{C}}$ и $M \mid A$ и поэтому совпадают. $\square$

Теорема 9 [21, теорема 6 и табл. 2]. Пусть φ — неприводимое представление группы $C_2(\mathbb{C})$ со старшим весом $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Тогда образ регулярного унитарного элемента в представлении φ имеет блоки всех размерностей

$$i \equiv 3m_1 + 4m_2 + 1 \pmod{2}, \quad \text{где } 1 \leq i \leq 3m_1 + 4m_2 + 1,$$

за исключением весов и блоков, указанных в табл. 1. В частности, при $m_1 > 10$ и $m_2 > 4$ имеются блоки всех априори возможных размерностей.

Далее если $\Gamma = C_r(K)$, то $z \in \Gamma$ — регулярный унитарный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2 , $z_{\mathbb{C}}$ — аналогичный элемент в группе $\Gamma_{\mathbb{C}}$, $A_{\Gamma} \subset \Gamma$ и $A_{\Gamma, \mathbb{C}} \subset \Gamma_{\mathbb{C}}$ — подгруппы типа A_1 , содержащие элементы z и $z_{\mathbb{C}}$ и описанные в теореме 7 и доказательстве леммы 19 соответственно.

Теорема 10. Пусть

$$\Gamma = C_3(K), \quad \Gamma_1 = \Gamma(2, 3),$$

ω — доминантный вес, $M = M(\omega)$,

$$\Delta = \{\lambda \in \Lambda(\Gamma_1) \mid M(\lambda) \in \text{Irr } M_{\mathbb{C}} \mid \Gamma_{1, \mathbb{C}}\},$$

z — регулярный унитарный элемент группы Γ_1 , α — максимальный короткий корень группы Γ . Предположим, что

$$\langle \omega + \rho_{\Gamma}, \alpha \rangle \leq p, \quad \delta \in \Delta, \quad N = M(\delta) \text{ — неприводимый } \Gamma_1\text{-модуль.}$$

Тогда $J_N(z) \subset J_M(z)$.

Таблица 1

m_1	m_2	размер отсутствующего блока
1 (mod 2) > 1	0	$3m_1 + 4m_2 - 1, 2$
1	0, 2 (mod 3)	2
1	1 (mod 3)	4
3	3 (mod 6)	2
2	0	$3m_1 + 4m_2 - 1 = 5, 1$
2 (mod 4) > 2	0	$3m_1 + 4m_2 - 1, 5, 1$
0 (mod 4)	0	$3m_1 + 4m_2 - 1, 3$
0	1	$3m_1 + 4m_2 - 1 = 3, 1$
0	2	$3m_1 + 4m_2 - 1 = 7, 3, 1$
0	3	$3m_1 + 4m_2 - 1 = 11, 5, 3$
0	0 (mod 3) > 3	$3m_1 + 4m_2 - 1, 11, 5, 3$
0	1, 2 (mod 3) > 2	$3m_1 + 4m_2 - 1, 7, 3, 1$
2	> 0	1
0 (mod 2) > 2	1	1
2 (mod 4) > 2	2	1
6	1, 2, 4, 5 (mod 6) > 2	1
4, 10	1, 4 (mod 6) > 1	1
2, 6, 10 (mod 12) и > 6	4	1

Доказательство. В силу леммы 11 модуль Вейля $V(\omega)$ неприводим. Покажем, что модуль $V(\lambda)$ неприводим, если $M(\lambda) \in \text{Irr } M \mid \Gamma_1$. Пусть β — максимальный короткий корень группы Γ_1 . Так как $\lambda \in \Lambda^+(\Gamma)$ и $\langle \rho_\Gamma, \alpha \rangle = 5$, то $\langle \mu, \alpha \rangle \leq \langle \omega, \alpha \rangle \leq p - 5$ для любого $\mu \in \Lambda(M)$. Поскольку $\lambda = \nu \mid \Gamma_1$ для некоторого $\nu \in \Lambda(M)$ и корни α и β лежат в одной W -орбите, заключаем, что $\langle \lambda, \alpha \rangle \leq p - 5$ и $\langle \lambda + \rho_{\Gamma_1}, \beta \rangle \leq p - 2$. Поэтому модуль $V(\lambda)$ неприводим. Поскольку формальные характеры модулей M и $M_{\mathbb{C}}$ совпадают, получаем, что $\text{Irr } M \mid \Gamma_1 = \text{Irr } M_{\mathbb{C}} \mid \Gamma_{1, \mathbb{C}}$. Тогда ввиду леммы 11 $M \mid \Gamma_1$ — прямая сумма неприводимых модулей. Из сказанного выше следует, что при $\delta \in \Delta$ в ограничении M на Γ_1 имеется прямое слагаемое $N \cong M(\delta)$. Поэтому $J_N(z) \subset J_M(z)$. $\square$

Теорема 11. Пусть $\Gamma = C_2(K)$, $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \Lambda^+(\Gamma)$, $a_1 + 2a_2 \leq p - 3$. Тогда модуль Вейля $V(\omega)$ неприводим и ограничение $V(\omega) \mid A_\Gamma$ — тилтинг-модуль. В частности, это верно, если $3a_1 + 4a_2 \leq p + 5$.

Доказательство. Сначала докажем неприводимость модуля Вейля. Пусть α — максимальный короткий корень группы Γ . Легко видеть, что

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{и} \quad \langle \omega + \rho_\Gamma, \alpha \rangle = a_1 + 2a_2 + 3 \leq p.$$

Согласно лемме 11 модуль Вейля $V(\omega)$ неприводим.

Пусть λ — фундаментальный вес и $N = V(\lambda)$. Из теоремы 7 следует, что $\max_{\mu \in \Lambda(N)} \sigma(\mu) \leq 4$ для гомоморфизма σ из этой теоремы, поэтому в силу следствия 3 $N \mid A_\Gamma$ — прямая сумма неприводимых p -ограниченных модулей, изоморфных модулям Вейля с соответствующими старшими весами. Далее используем следствие 6 и заключаем, что $V(\omega) \mid A_\Gamma$ — тилтинг-модуль.

Покажем, что $a_1 + 2a_2 \leq p - 3$ при $3a_1 + 4a_2 \leq p + 5$. Действительно, если при этом $2a_1 + 2a_2 \geq 8$, то $a_1 + 2a_2 + 3 \leq 3a_1 + 4a_2 - 5 \leq p$. Если же $2a_1 + 2a_2 < 8$, то $a_1 + a_2 \leq 3$ и $a_1 + 2a_2 \leq 6 < p - 3$. $\square$

Лемма 20. Пусть $\Gamma = C_2(K)$, $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$, $M = M(\omega)$ — неприводимый Γ -модуль. Предположим, что $a_1 + 2a_2 \leq p - 3$, $3a_1 + 4a_2 < 2p$, $a < p - 1$ и $M(a) \notin \text{Irr } N$ для любой неразложимой компоненты N модуля $M \mid A_\Gamma$ такой, что $N \cong T(b)$ с $b \geq p$. В этом случае $a + 1 \in J_M(z)$ в точности тогда, когда $a + 1 \in J_{M_\mathbb{C}}(z_\mathbb{C})$. В частности, это верно, если $3a_1 + 4a_2 = p + x$ и $a < p - x - 2$.

Доказательство. По теореме 11 модуль $V(\omega)$ неприводим и $M \mid A_\Gamma$ — тилтинг-модуль. Поэтому $\dim M_\lambda = \dim(M_\mathbb{C})_\lambda$ для любого веса $\lambda \in \Lambda(M)$ и факторы фильтрации ограничений $M \mid A_\Gamma$ и $M_\mathbb{C} \mid A_{\Gamma, \mathbb{C}}$ модулями Вейля совпадают (с учетом кратностей). Ясно, что если $V(a)$ встречается в такой фильтрации для модуля $M_\mathbb{C} \mid A_{\Gamma, \mathbb{C}}$, то $V(a)$ является прямым слагаемым этого ограничения. Из условия леммы следует, что если $V(a)$ встречается среди факторов фильтрации модуля $M \mid A_\Gamma$ модулями Вейля, то $V(a) \cong M(a)$ — прямое слагаемое ограничения $M \mid \Gamma$, так как фактор $V(a)$ не может встретиться в фильтрации неразложимых компонент $T(b)$ с $b \geq p$. Отсюда вытекает, что модули $M_\mathbb{C} \mid A_{\Gamma, \mathbb{C}}$ и $M \mid A_\Gamma$ одновременно имеют или не имеют неразложимую компоненту, изоморфную $M(a)$. Поскольку $J_N(z) = \{p\}$ при $N \cong T(b)$ с $b \geq p$, получаем первое утверждение леммы. Из теоремы 7 следует, что $b \leq 3a_1 + 4a_2$ для любой неразложимой компоненты $T(b)$ модуля $M \mid A_\Gamma$. В силу леммы 15 $M(b) \notin \text{Irr } T(p + q)$, если $0 \leq q < p - 1$ и $b < p - q - 2$. Отсюда вытекает второе утверждение леммы. $\square$

Далее $G_1 = G(n - 1, n)$, γ и β — максимальные короткие корни групп G и G_1 соответственно.

Предложение 6. Пусть $\Gamma = G(i, \dots, n)$, $i \leq n - 2$, x — регулярный унитарный элемент из подгруппы G_1 , $A \subset G_1$ и $\sigma : \Lambda(G_1) \rightarrow \mathbb{Z}$ — A_1 -подгруппа, содержащая x , и гомоморфизм из теоремы 7, N — Γ -модуль с единственным максимальным весом λ , $s = \max_{\mu \in \Lambda(N \mid G_1)} \sigma(\mu)$. Положим $b_j = \langle \lambda, \alpha_j \rangle$ при $i \leq j \leq n$. Предположим, что $b_i + 2(b_{i+1} + \dots + b_n) \leq p - 3$. Тогда модуль $N \mid G_1$ вполне приводим, $J_N(x) = \bigcup_{F \in \text{Irr}(N \mid G_1)} J_F(x)$ и $F \mid A$ —

тилтинг-модуль при $F \in \text{Irr}(N \mid G_1)$, $s = 3b_i + 4(b_{i+1} + \dots + b_n)$. В частности, утверждение предложения справедливо, если $s \leq p + 5$.

Доказательство. Пусть δ — максимальный короткий корень группы Γ . Нетрудно заметить, что для любого веса $\mu \in \Lambda(N)$

$$\langle \mu, \delta \rangle \leq \langle \lambda, \delta \rangle = b_i + 2(b_{i+1} + \dots + b_n) \leq p - 3.$$

Поскольку β и δ лежат в одной W -орбите, очевидно, что $\langle \mu, \beta \rangle \leq p - 3$ для любого веса $\mu \in \Lambda(N)$. По лемме 11 модуль $V(\tau)$ неприводим, если $M(\tau) \in \text{Irr } N \mid G_1$. В силу следствия 2 модуль $N \mid G_1$ вполне приводим. Отсюда вытекает утверждение предложения о $J_N(x)$. Ввиду следствия 6 $F \mid A$ — тилтинг-модуль, если $F \in \text{Irr}(N \mid G_1)$.

Пусть σ_Γ — гомоморфизм из теоремы 7, связанный с подгруппой A_Γ . Так как подгруппы A_Γ и A сопряжены в Γ , легко видеть, что

$$s = \max_{\mu \in \Lambda(N)} \sigma_\Gamma(N).$$

Теперь из доказательства теоремы 7 следует, что $s = 3b_i + 4(b_{i+1} + \dots + b_n)$. Пусть $s \leq p + 5$. Рассуждая, как в доказательстве теоремы 11, заключаем, что $b_i + 2(b_{i+1} + \dots + b_n) \leq p - 3$. Отсюда вытекает последнее утверждение предложения. $\square$

Предложение 7. Пусть M — $C_2(\mathbb{C})$ -модуль со старшим весом $\omega = a\omega_1 + b\omega_2$. Тогда размерности указанных ниже весовых подпространств определяются следующими таблицами.

a	b	$\dim M_{\omega-2\alpha_1-\alpha_2}$
> 1	> 0	3
1	> 0	2
> 1	0	2
1	0	1
0	> 0	1

a	b	$\dim M_{\omega-\alpha_1-2\alpha_2}$
> 0	> 1	2
> 0	1	1
0	> 1	1
0	1	0
> 0	0	0

a	b	$\dim M_{\omega-3\alpha_1-\alpha_2}$
> 2	> 0	3
2	> 0	2
1	> 0	1
> 2	0	2
2	0	1
1	0	0
0	> 0	0

a	b	$\dim M_{\omega-2\alpha_1-2\alpha_2}$
> 1	> 1	4
> 1	1	3
> 1	0	1
1	> 1	3
1	1	2
1	0	0
0	> 1	2
0	1	0

a	b	$\dim M_{\omega-\alpha_1-3\alpha_2}$
> 0	> 2	2
> 0	2	1
> 0	1	0
> 0	0	0
0	> 2	1
0	≤ 2	0

Доказательство. Пусть d_λ — кратность веса λ модуля M , W — группа Вейля группы типа C_2 , $s_i \in W$ — отражения, ассоциированные с корнями α_i . Положим $\rho = \rho_{C_2(\mathbb{C})}$. Используем формулу Вейля

$$d_\lambda = - \sum_{w \in W, w \neq 1} \varepsilon(w) d_{\lambda + \rho - w(\rho)},$$

где $\varepsilon(w) = (-1)^{l(w)}$, $l(w)$ — длина элемента w относительно семейства отражений s_i . Известно, что $|W| = 8$ и W — полупрямое произведение группы S_2 , действующей перестановками на множестве $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, и группы порядка 4, переводящей веса ε_i в $\pm \varepsilon_i$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} s_1(\varepsilon_1) &= \varepsilon_2, & s_1(\varepsilon_2) &= \varepsilon_1, & s_1(\rho) &= 2\varepsilon_2 + \varepsilon_1; \\ s_2(\varepsilon_1) &= \varepsilon_1, & s_2(\varepsilon_2) &= -\varepsilon_2, & s_2(\rho) &= 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2; \\ s_1s_2(\varepsilon_1) &= \varepsilon_2, & s_1s_2(\varepsilon_2) &= -\varepsilon_1, & s_1s_2(\rho) &= 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1; & (s_1s_2)^2 &= -1. \end{aligned}$$

Заметим, что $W = \{\pm 1, \pm s_1, \pm s_2, \pm s_1s_2\}$. Теперь нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} d_\lambda &= d_{\lambda+\alpha_1} + d_{\lambda+\alpha_2} - d_{\lambda+3\alpha_1+\alpha_2} \\ &\quad - d_{\lambda+\alpha_1+2\alpha_2} - d_{\lambda+4\alpha_1+3\alpha_2} + d_{\lambda+4\alpha_1+2\alpha_2} + d_{\lambda+3\alpha_1+3\alpha_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для завершения доказательства применим формулу (3) к весам из таблиц. $\square$

Далее M — неприводимый G -модуль со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$, $x \in G_1$ — регулярный унитарный элемент, $A = A_{G_1}$. Для формулировки лемм 21 и 22 нам понадобятся дополнительные обозначения. Предположим, что $a_1 > 0$. Пусть $b \in \mathbb{N}$ и $b \leq a_1$. Обозначим символом $\Lambda_{b,1}$ подмножество в $\Lambda(M)$, состоящее из всех весов вида $\omega - b\alpha_1 - \sum_{j=2}^n k_j\alpha_j$, и положим $N_{b,1} = \langle M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_{b,1} \rangle$.

Пусть $a_2 > 0$ (теперь мы не предполагаем, что $a_1 \neq 0$), $c \in \mathbb{N}$ и $c \leq a_2$. Обозначим символом $\Lambda_{c,2}$ совокупность всех весов из $\Lambda(M)$ вида

$$\omega - (a_1 + c)\alpha_1 - \sum_{j=2}^n k_j\alpha_j$$

и положим $N_{c,2} = \langle M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_{c,2} \rangle$.

Пусть $\Gamma = G(2, \dots, n)$. Легко видеть, что подпространства $N_{b,1}$ и $N_{c,2}$ при подходящих b и c являются Γ -модулями и прямыми слагаемыми модуля $M \mid \Gamma$.

Лемма 21. Пусть $a_1 > 0$, $b \in \mathbb{N}$ и $b \leq a_1$. Предположим, что

$$(a_2 + b) + 2 \sum_{j=3}^n a_j \leq p - 3.$$

Тогда $N_{b,1} \mid G_1$ — вполне приводимый модуль, для любого композиционного фактора F ограничения $N_{b,1} \mid G_1$ множество $J_F(x)$ содержится в $J_M(x)$ и $F \mid A$ — тилтинг-модуль. В частности, утверждение леммы справедливо, если

$$3(a_2 + b) + 4 \sum_{j=3}^n a_j \leq p + 5.$$

Доказательство. В силу леммы 6 $\mu = \omega - b\alpha_1 \in \Lambda(M)$. Ясно, что $\mu \mid \Gamma$ — максимальный вес модуля $N_{b,1}$ и что $\langle \mu, \alpha_2 \rangle = a_2 + b$ и $\langle \mu, \alpha_i \rangle = a_i$ при $3 \leq i \leq n$. Остается воспользоваться предложением 6 и теоремой 3 (при $b = 0$). $\square$

Лемма 22. Пусть $a_2 > 0$, $c \in \mathbb{N}$ и $0 < c \leq a_2$. Предположим, что

$$c + (a_1 + a_2) + 2 \sum_{j=3}^n a_j \leq p - 3.$$

Тогда $N_{c,2} \mid G_1$ — вполне приводимый модуль, для любого композиционного фактора F ограничения $N_{c,2} \mid G_1$ множество $J_F(x)$ содержится в $J_M(x)$ и $F \mid A$ — тилтинг-модуль. В частности, утверждение леммы справедливо, если

$$c + 3(a_1 + a_2) + 4 \sum_{j=3}^n a_j \leq p + 5.$$

Доказательство. Положим $m = v(1, c, 2)$, $\mu = \omega(m)$. В силу леммы 6 $m \neq 0$. Ясно, что $m \in N_{c,2}$. Заметим, что

$$\nu = \omega - (a_1 + c)\alpha_1 - d\alpha_2 - \sum_{j=3}^n k_j \alpha_j \notin \Lambda(M) \quad \text{при } d < c.$$

Действительно,

$$\langle \nu, \alpha_1 \rangle = d + a_1 - 2(a_1 + c) = d - c - a_1 - c < -(a_1 + c).$$

Пусть $s_1 \in W$ — отражение, ассоциированное с корнем α_1 . Тогда

$$s_1(\nu) = \nu + (a_1 + c + c - d)\alpha_1 \notin \Lambda(M),$$

и поэтому $\nu \notin \Lambda(M)$, а значит, $\mu \mid \Gamma$ — максимальный вес модуля $N_{c,2}$.

Легко видеть, что

$$\langle \mu, \alpha_2 \rangle = a_1 + a_2 - c, \quad \langle \mu, \alpha_3 \rangle = a_3 + c, \quad \langle \mu, \alpha_i \rangle = a_i \quad \text{при } i \geq 4.$$

Для завершения доказательства используем предложение 6. □

Следствие 8. В условиях лемм 21 и 22 для любого композиционного фактора U Γ -модуля $N_{b,1}$ или $N_{c,2}$ множество $J_U(x)$ содержится в $J_M(x)$.

Доказательство непосредственно вытекает из лемм 21, 22 и следствия 4.

Очевидно, что следствие 8 дает новую информацию лишь при $n > 3$.

Далее $\mathbf{N}_a^o$ и $\mathbf{N}_a^e$ — множества нечетных и четных натуральных чисел из $\mathbf{N}_a$ соответственно.

§3. Представления с малыми старшими весами

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на построении набора прямых слагаемых с определенными свойствами в ограничениях рассматриваемого модуля на подсистемные подгруппы типа C_2 и подгруппу типа A_1 , содержащую рассматриваемый элемент. Эти слагаемые оказываются тилтинг-модулями с не слишком большими относительно характеристики старшими весами. Существенно используются результаты А. А. Осинской [21, теорема 6] о блочной структуре образов регулярных унитарных элементов в неприводимых представлениях группы $C_2(\mathbb{C})$ и информация о строении тилтинг-модулей группы типа A_1 с весами, не превосходящими $2p - 2$ (лемма 15).

Далее $\rho = \rho_G$, φ — неприводимое представление со старшим весом $\omega(\varphi) = a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$, удовлетворяющим условиям теоремы 1; M — неприводимый G -модуль, где реализуется представление φ ; $x \in G_1$ — регулярный унитарный элемент, $A \subset G_1$ и σ — A_1 -подгруппа, содержащая x , и гомоморфизм из леммы 10, $G_{1,\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}(n - 1, n)$, $x_{\mathbb{C}} \in G_{1,\mathbb{C}}$ — регулярный унитарный элемент. Положим

$$\mathcal{S}(\omega) = \{\mu \mid M(\mu) \in \text{Irr}(M_{\mathbb{C}} \mid G_{1,\mathbb{C}})\}.$$

Вспомним, что регулярные унитарные элементы произвольных подсистемных подгрупп типа C_2 в G сопряжены с x . При доказательстве теоремы 1 мы фактически показываем, что $\varphi(y)$ имеет блок определенного размера для такого элемента y .

В этом параграфе доказывается теорема 1 в случае, когда

$$S = 3a_1 + 4a_2 + \dots + 4a_n < p.$$

Лемма 23. Пусть $S < p$. Тогда модуль $M \mid A$ вполне приводим и для любого композиционного фактора F ограничения $M \mid G_1$ модуль Вейля $V(\omega(F))$ неприводим и $J_F(x) = J_{F_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}})$.

Доказательство. В силу теоремы 7 и следствия 3 $M \mid A$ — вполне приводимый модуль с p -ограниченными неприводимыми компонентами.

Пусть F — композиционный фактор ограничения $M \mid G_1$ со старшим весом $\lambda = b_1\omega_1 + b_2\omega_2$. Согласно теореме 7

$$3b_1 + 4b_2 \in \Lambda(F \mid A) \subset \Lambda(M \mid A),$$

и поэтому $3b_1 + 4b_2 \leq S < p$. Из леммы 19 и теоремы 11 следует, что модуль $V(\lambda)$ неприводим и $J_F(x) = J_{F_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}})$. $\square$

В § 3 будем использовать следствие 4 без дополнительных пояснений. В силу теоремы 7 имеем $J_M(x) \subset \mathbf{N}_{S+1}$.

3.1. $\omega = a_1\omega_1$. Здесь рассматривается случай, когда $\omega = a_1\omega_1$, $a_1 < \frac{p}{3}$. По лемме 17

$$\text{Irr}(M \mid G_1) = \{M(k\omega_1) \mid 0 \leq k \leq a_1\}.$$

Положим $M(k\omega_1) = F_k$. Ввиду теоремы 6 и леммы 19 $J_F(x) = J_{F_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}})$ при $F = F_k$. Поэтому из теоремы 9 вытекает следующее:

- (а) $2, 3a_1 - 4, 3a_1 - 1, 3a_1 \notin J_M(x)$;
- (б) $\mathbf{N}_{S+1} \setminus \{2, 3, 5, 3a_1 - 4, 3a_1 - 1, 3a_1\} \subset J_{F_0}(x) \cup J_{F_{a_1-1}}(x) \cup J_{F_{a_1}}(x)$.

Поясним, что

$$d_{F_k}(x) < \begin{cases} 3a_1 - 4 & \text{при } k < a_1 - 1; \\ 3a_1 - 1 & \text{при } k < a_1. \end{cases}$$

Поэтому $3a_1 - 4 \notin J_M(x)$, так как $3a_1 - 4 \notin J_{F_{a_1-1}}(x) \cup J_{F_{a_1}}(x)$, и $3a_1 - 1, 3a_1 \notin J_M(x)$, ибо $3a_1 - 1, 3a_1 \notin J_{F_{a_1}}(x)$.

В силу теоремы 9 имеем $3 \in J_{F_2}(x)$ и $5 \in J_{F_4}(x)$. Поэтому $3 \in J_M(x)$ при $a_1 \geq 2$ и $5 \in J_M(x)$ при $a_1 \geq 4$. Отсюда следуют утверждения 1(ii) и 1(iii) теоремы 1.

3.2. $n = 3$. Здесь предполагается, что $n = 3$. Известно, что $\gamma = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$. Легко проверить, что

$$\langle \omega + \rho, \gamma \rangle = a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 5.$$

Если $a_1 + a_2 + a_3 \geq 3$, то

$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 \leq 3a_1 + 4a_2 + 4a_3 - 6 \quad \text{и} \quad \langle \omega + \rho, \gamma \rangle < p.$$

При $a_1 + a_2 + a_3 \leq 2$ выполняется $\langle \omega + \rho, \gamma \rangle \leq 9 < p$. Поэтому в силу леммы 11 модуль $V(\omega)$ неприводим. Тогда $J_M(x) = J_{M_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}})$ ввиду леммы 19. Отсюда следует, что

$$J_F(x_{\mathbb{C}}) \subset J_M(x) \quad (4)$$

для любого композиционного фактора F ограничения $M_{\mathbb{C}} \mid G_{1,\mathbb{C}}$. В этом пункте формула (4) применяется без дополнительных комментариев. Для поиска нужного фактора F используется предложение 5.

В силу доказанного в п. 3.1 можно считать, что $a_2 + a_3 > 0$.

Положим

$$\mu_1 = a_1\omega_1 + (a_2 + a_3)\omega_2, \quad \mu_2 = (a_1 + 1)\omega_1 + (a_2 + a_3 - 1)\omega_2.$$

При $a_1 > 0$ введем также вес $\mu_3 = (a_1 - 1)\omega_1 + (a_2 + a_3)\omega_2$. Пусть $M_i = M(\mu_i)$ — неприводимый $C_2(\mathbb{C})$ -модуль, $1 \leq i \leq 3$. Из предложения 5 следует, что $M_1, M_2 \in \text{Irr}(M_{\mathbb{C}} \mid G_{1,\mathbb{C}})$ и что $M_3 \in \text{Irr}(M_{\mathbb{C}} \mid G_{1,\mathbb{C}})$ при $a_1 > 0$.

Положим $\mathcal{J}_1 = J_{M_1}(x_{\mathbb{C}})$, $\mathcal{J}_2 = J_{M_2}(x_{\mathbb{C}})$, $J = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$,

$$I_1 = \{a \mid a \equiv a_1 + 1 \pmod{2}, a \leq S + 1\},$$

$$I_2 = \{a \mid a \equiv a_1 \pmod{2}, a \leq S\}.$$

Если μ_1 и μ_2 оба не являются исключительными весами из табл. 1, то в силу теоремы 9 $J_{M_1}(x_{\mathbb{C}}) = I_1$, $J_{M_2}(x_{\mathbb{C}}) = I_2$. Тогда $J_M(x) = \mathbf{N}_{S+1}$.

Теперь рассмотрим все случаи, когда хотя бы один из весов μ_1 или μ_2 — исключительный вес из табл. 1. Положим $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + a_3$, $c_1 = a_1 + 1$ и $c_2 = a_2 + a_3 - 1$. Тогда

$$\mu_1 = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \quad \mu_2 = c_1\omega_1 + c_2\omega_2.$$

Заметим, что $b_2 \neq 0$ и $c_1 \neq 0$.

В пп. 3.2.1–3.2.6 все утверждения о том, что какой-либо вес лежит в $\mathcal{S}(\omega)$, следуют из предложения 5.

3.2.1. $b_2 = 1$. В этом пункте $\omega = a_1\omega_1 + \omega_2$ или $a_1\omega_1 + \omega_3$. Очевидно, что в этой ситуации $c_2 = 0$. В силу предложения 5 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega_2) &= \{0, \omega_1, \omega_2\}, & \mathcal{S}(\omega_1 + \omega_2) &= \{0, \omega_1, \omega_2, 2\omega_1, \omega_1 + \omega_2\}, \\ \mathcal{S}(\omega_3) &= \{\omega_1, \omega_2\}, & \mathcal{S}(\omega_1 + \omega_3) &= \{\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, \omega_1 + \omega_2\}. \end{aligned}$$

Поэтому из теоремы 9 следует, что

$$J_M(x) = \begin{cases} \{1, 4, 5\} & \text{при } \omega = \omega_2; \\ \{4, 5\} & \text{при } \omega = \omega_3; \\ \mathbf{N}_8 & \text{при } \omega = \omega_1 + \omega_2; \\ \mathbf{N}_8 \setminus \{1\} & \text{при } \omega = \omega_1 + \omega_3. \end{cases}$$

Пусть $a_1 > 1$. Из теоремы 9 вытекает:

- (i) $J = \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{1, 2, S-2\}$ при $a_1 \equiv 0 \pmod{2}$;
- (ii) $J = \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{1, 5, S-2\}$ при $a_1 \equiv 1 \pmod{4}$;
- (iii) $J = \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{3, S-2\}$ при $a_1 \equiv 3 \pmod{4}$.

В силу теоремы 7 $d_{M_3}(x_{\mathbb{C}}) = S-2$. Поскольку $M_3 \in \mathcal{S}(\omega)$ при $a_1 > 1$, отсюда получаем, что

$$S-2 \in J_{M_3}(x_{\mathbb{C}}) \subset J_M(x).$$

Справедливо следующее:

- 1) $0 \in \mathcal{S}(\omega)$ при $\omega = a_1\omega_1 + \omega_2$;
- 2) $4\omega_1 \in \mathcal{S}(\omega)$ при $\omega = a_1\omega_1 + \omega_3$ и $a_1 \geq 3$;
- 3) $\omega_2, 2\omega_1, \omega_1 + \omega_2 \in \mathcal{S}(\omega)$ во всех рассматриваемых случаях;
- 4) $\mathcal{S}(2\omega_1 + \omega_3) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_1 + \omega_2, 3\omega_1\}$.

Тогда в силу теоремы 9

$$J_M(x) = \begin{cases} \mathbf{N}_{S+1} & \text{при } \omega \neq 2\omega_1 + \omega_3; \\ \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{1\} & \text{при } \omega = 2\omega_1 + \omega_3. \end{cases}$$

Далее считаем, что $b_2 > 1$.

3.2.2. $b_1 = 0$. В этом пункте $\omega = a_2\omega_2 + a_3\omega_3$. Ясно, что $c_1 = 1$. Используя теорему 9, получаем

$$\mathbf{N}_{S+1} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, S-1\} \subset J \subset J_M(x).$$

Заметим, что $\lambda = 2\omega_1 + (a_2 + a_3 - 2)\omega_2 \in \mathcal{S}(\omega)$.

Пусть $F = M(\lambda)$ — неприводимый $G_{1,\mathbb{C}}$ -модуль. Тогда $J_F(x_{\mathbb{C}}) \subset J_M(x)$. Из теоремы 9 следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{S+1}^o \setminus \{1\} &\subset J_M(x) \quad \text{при } a_2 + a_3 > 2, \\ \mathbf{N}_9^o \setminus \{1, 5\} &\subset J_M(x) \quad \text{при } a_2 + a_3 = 2, \\ 5 &\in \mathcal{J}_1 \quad \text{при } a_2 + a_3 = 2. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что во всех ситуациях $\mathbf{N}_{S+1}^o \setminus \{1\} \subset J_M(x)$.

Положим

$$\mu = \begin{cases} 8\omega_1 + (a_2 + a_3 - 8)\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 > 9; \\ (a_2 + a_3)\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 \in \{3, 6, 9\}; \\ 8\omega_1 & \text{при } a_2 + a_3 = 8; \\ 4\omega_1 + (a_2 + a_3 - 4)\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 4 \text{ или } 7; \\ 4\omega_1 & \text{при } a_2 + a_3 = 5, a_2 \neq 0; \\ 0 & \text{при } \omega = 2\omega_2. \end{cases}$$

Пусть $N = M(\mu)$ — неприводимый $G_{1,\mathbb{C}}$ -модуль. Во всех этих случаях $\mu \in \mathcal{S}(\omega)$ и по теореме 9 число 1 принадлежит $J_N(x_{\mathbb{C}}) \subset J_M(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\omega_2 + \omega_3) &= \{2\omega_1, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_2, \omega_1, \omega_2\}, \\ \mathcal{S}(3\omega_3) &= \{3\omega_1, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, 3\omega_2\}, \\ \mathcal{S}(2\omega_3) &= \{2\omega_1, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_2\}, \\ \mathcal{S}(5\omega_3) &= \{5\omega_1, 4\omega_1 + \omega_2, 3\omega_1 + 2\omega_2, 2\omega_1 + 3\omega_2, \omega_1 + 4\omega_2, 5\omega_2\}.\end{aligned}$$

В силу теоремы 7

$$J_M(x) = \begin{cases} \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{1\} & \text{при } \omega = \omega_2 + \omega_3 \text{ или } 5\omega_3; \\ \mathbf{N}_9 \setminus \{1, 4\} & \text{при } \omega = 2\omega_3; \\ \mathbf{N}_{13} \setminus \{2\} & \text{при } \omega = 3\omega_3. \end{cases}$$

Остается выяснить, когда 2 и 4 принадлежат $J_M(x)$. Можно считать, что $\omega \notin \{\omega_2 + \omega_3, 3\omega_3, 2\omega_3, 5\omega_3\}$, так как эти случаи уже рассмотрены.

Положим

$$\nu = \begin{cases} 5\omega_1 + (a_2 + a_3 - 5)\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 > 5; \\ 3\omega_1 + 2\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 5; \\ 3\omega_1 + \omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 4; \\ \omega_1 + \omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 3, a_2 \neq 0; \\ \omega_1 & \text{при } \omega = 2\omega_2. \end{cases}$$

Тогда $\nu \in \mathcal{S}(\omega)$. Пусть $F = M(\nu)$ — неприводимый $G_{1,\mathbb{C}}$ -модуль. Ввиду теоремы 9

$$\begin{aligned}\{2, 4\} &\subset J_F(x_{\mathbb{C}}) \text{ при } a_2 + a_3 > 3, \\ 2 &\in J_F(x_{\mathbb{C}}) \text{ при } a_2 + a_3 = 3, a_2 \neq 0, \\ 4 &\in J_F(x_{\mathbb{C}}) \text{ при } \omega = 2\omega_2.\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\mu_2 = \begin{cases} \omega_1 + 2\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 3; \\ \omega_1 + \omega_2 & \text{при } \omega = 2\omega_2. \end{cases}$$

Теорема 9 влечет, что $4 \in \mathcal{J}_2$ в первом случае и $2 \in \mathcal{J}_2$ во втором случае. Отсюда следует, что $\{2, 4\} \subset J_M(x)$ для всех весов, рассматриваемых в этом абзаце. Итак, при $b_1 = 0$ справедлива теорема 1.

Далее предполагаем, что $b_1 > 0$.

3.2.3. $b_1 = 1$. В этом пункте $\omega = \omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$. Ясно, что $c_1 = 2$. В силу теоремы 9 заключаем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &= I_1 \setminus \{2\} \text{ при } a_2 + a_3 \equiv 0, 2 \pmod{3}, \\ \mathcal{J}_1 &= I_1 \setminus \{4\} \text{ при } a_2 + a_3 \equiv 1 \pmod{3}, \\ \mathcal{J}_2 &= I_2 \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Положим

$$\mu_1 = \begin{cases} 8\omega_1 + (a_2 + a_3 - 7)\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 \geq 9; \\ 8\omega_1 & \text{при } a_2 + a_3 = 7 \text{ или } 8; \\ 4\omega_1 + (a_2 + a_3 - 3)\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 3, 5 \text{ или } 6; \\ 4\omega_1 & \text{при } a_2 + a_3 = 4; \\ 0 & \text{при } \omega = \omega_1 + 2\omega_2; \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} 5\omega_1 + (a_2 + a_3 - 4)\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 \geq 5; \\ 3\omega_1 + \omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 3 \text{ или } 4; \\ \omega_1 + \omega_2 & \text{при } \omega = \omega_1 + 2\omega_2. \end{cases}$$

Во всех случаях $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{S}(\omega)$. Пусть $F_i = M(\mu_i)$ — неприводимые $C_{1,\mathbb{C}}$ -модули, $i = 1, 2$. Из теоремы 9 следует, что

$$\begin{aligned} 1 \in J_{F_1}(x_{\mathbb{C}}) \subset J_M(x), \quad \{2, 4\} \subset J_{F_2}(x_{\mathbb{C}}) \subset J_M(x) & \text{ при } a_2 + a_3 > 2, \\ 2 \in J_{F_2}(x_{\mathbb{C}}) \subset J_M(x) & \text{ при } \omega = \omega_1 + 2\omega_2. \end{aligned}$$

Значит, во всех этих случаях $J_M(x) = \mathbf{N}_{S+1}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= \{\omega_1 + 2\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, 3\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1, \omega_2, \omega_1\} \text{ при } \omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3; \\ \mathcal{S}(\omega) &= \{2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, 3\omega_1, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \} \text{ при } \omega = \omega_1 + 2\omega_3. \end{aligned}$$

Ввиду теоремы 9 $J_M(x) = \mathbf{N}_{12} \setminus \{1\}$ для этих весов.

Далее считаем, что $b_1 > 1$.

3.2.4. $b_1 = 2$. В этом пункте $\omega = 2\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$. Ясно, что $c_1 = 3$.

В силу теоремы 9 $\mathcal{J}_1 = \mathbf{N}_{S+1}^o \setminus \{1\}$ и $\mathbf{N}_{S+1}^e \setminus \{2\} \subset \mathcal{J}_2$.

Положим

$$\mu_1 = \begin{cases} 8\omega_1 + (a_2 + a_3 - 6)\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 \geq 6 \text{ и } a_2 + a_3 \neq 7; \\ 8\omega_1 & \text{при } a_2 + a_3 = 7; \\ 4\omega_1 + 3\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 5; \\ 4\omega_1 & \text{при } a_2 + a_3 = 2, 3 \text{ или } 4; \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} 5\omega_1 + (a_2 + a_3 - 3)\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 \geq 4; \\ 3\omega_1 + 2\omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 3; \\ 3\omega_1 + \omega_2 & \text{при } a_2 + a_3 = 2. \end{cases}$$

Во всех рассмотренных ситуациях $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{S}(\omega)$. Определим модули F_1 и F_2 , как в п. 3.2.3. Из теоремы 9 вытекает, что $1 \in J_{F_1}(x_{\mathbb{C}})$ и $2 \in J_{F_2}(x_{\mathbb{C}})$. Поэтому $J_M(x) = \mathbf{N}_{S+1}$.

Далее считаем, что $b_1 > 2$.

3.2.5. $b_1 = 3$. В этом разделе $\omega = 3\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$. Ясно, что $c_1 = 4$. Так как $b_2 > 1$, из теоремы 9 следует, что

$$\mathbf{N}_{S+1}^o \setminus \{1\} \subset \mathcal{J}_2 \subset J_M(x),$$

$$\mathbf{N}_{S+1}^e \setminus \{2\} \subset \mathcal{J}_1 \text{ и } \mathcal{J}_1 = \mathbf{N}_{S+1}^e, \text{ если } b_2 \not\equiv 3 \pmod{6}.$$

Пусть $b_2 \equiv 3 \pmod{6}$. Тогда $b_2 \geq 3$ и $\mu = 5\omega_1 + (a_2 + a_3 - 2)\omega_2 \in \mathcal{S}(\omega)$. В силу теоремы 9

$$2 \in J_{M(\mu)}(x_{\mathbb{C}}) \subset J_M(x) \text{ (здесь } M(\mu) - G_{1,\mathbb{C}}\text{-модуль)}.$$

Значит, в любом случае $\mathbf{N}_{S+1}^e \subset J_M(x)$.

Поскольку $a_1 = 3$, то $\mathcal{S}(\omega)$ содержит вес $\nu = (a_3 + i)\omega_1$ с $a_3 + i \equiv 0 \pmod{4}$. Теорема 9 влечет, что $1 \in J_{M(\nu)}(x_{\mathbb{C}})$ для $G_{1,\mathbb{C}}$ -модуля $M(\nu)$. Следовательно, $J_M(x) = \mathbf{N}_{S+1}$.

3.2.6. Другие случаи. Пусть $b_1 > 3$ и один из весов μ_1 или μ_2 является исключительным. Так как $b_2 > 0$ и $c_2 > 0$, в силу теоремы 9 имеем

$$\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 = \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{1\}.$$

Далее строим вес $\nu = (a_3 + i)\omega_1 \in \mathcal{S}(\omega)$, как в п. 3.2.5, и убеждаемся, что $1 \in J_{M(\nu)}(x_{\mathbb{C}})$. Следовательно, $J_M(x) = \mathbf{N}_{S+1}$.

При $n = 3$ и $S < p$ теорема доказана.

3.3. $n > 3$. В этом пункте предполагается, что $n > 3$ и

$$3a_1 + 4a_2 + \cdots + 4a_n < p.$$

Будем считать, что $\omega \neq a_1\omega_1$, так как этот случай рассмотрен в п. 3.1.

Положим

$$H = G(\alpha_1, \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}, \alpha_n), \quad \Gamma = G(n-2, n-1, n), \quad \lambda = \omega \mid H, \quad F = M(\lambda).$$

Ясно, что $H \cong C_3(K)$ и $\Gamma \cong C_3(K)$,

$$\lambda = a_1\omega_1 + (a_2 + \cdots + a_{n-1})\omega_2 + a_n\omega_3.$$

Так как H и Γ сопряжены, то $F \in \text{Irr}(M \mid \Gamma)$. В силу следствия 4 и леммы 23 $J_F(x) \subset J_M(x)$.

Множество $J_F(x)$ описано в п. 3.2. Ввиду доказанного в том пункте

$$J_F(x) = J_M(x) = \mathbf{N}_{S+1},$$

за исключением случаев, когда

$$\lambda \in \{\omega_2, \omega_3, 2\omega_3, 3\omega_3, 5\omega_3, \omega_1 + \omega_3, 2\omega_1 + \omega_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_1 + 2\omega_3, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3\}.$$

Далее рассмотрим эти случаи. Будем использовать анализ ограничения модуля M на подсистемную подгруппу типа C_4 . Положим

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= G(n-3, n-2, n-1, n), \\ \Gamma_{1,\mathbb{C}} &= G_{\mathbb{C}}(n-3, n-2, n-1, n), \\ \Gamma_{\mathbb{C}} &= G_{\mathbb{C}}(n-2, n-1, n), \quad \mu = \omega \mid \Gamma_1.\end{aligned}$$

В этом пункте δ и δ_1 — максимальные короткие корни групп Γ и Γ_1 соответственно, $M' = M(\mu)$ — неприводимый Γ_1 -модуль,

$$\Sigma = \{\nu \mid M(\nu) \in \text{Irr}(M'_{\mathbb{C}} \mid \Gamma_{\mathbb{C}})\}.$$

Существенно используется следующая

Лемма 24. Пусть $\langle \mu, \delta_1 \rangle \leq p-7$, $\sigma \in \Sigma$, $Q = M(\sigma)$ — Γ -модуль. Тогда

$$J_Q(x) \subset J_M(x).$$

Доказательство. Покажем, что $Q \in \text{Irr } M \mid \Gamma$. Поскольку корни δ и δ_1 лежат в одной орбите относительно группы $W(\Gamma)$ и $\delta_1 \in \Lambda^+(\Gamma_1)$, то $\langle \lambda, \delta \rangle \leq \langle \mu, \delta_1 \rangle \leq p-7$ при $\lambda \in \Lambda(M')$. Несложно проверить, что $\langle \rho_{\Gamma_1}, \delta_1 \rangle = 7$. Напомним, что $\langle \rho_{\Gamma}, \delta \rangle = 5$. Поэтому $\langle \mu + \rho_{\Gamma_1}, \delta_1 \rangle \leq p$ и $\langle \nu + \rho_{\Gamma}, \delta \rangle < p$, если $M(\nu) \in \text{Irr}(M' \mid \Gamma)$. Тогда в силу леммы 11 модуль $V(\mu)$ неприводим и модуль $V(\nu)$ неприводим, если $M(\nu) \in \text{Irr}(M' \mid \Gamma)$. Поэтому формальные характеры модулей M' и $M' \mid \Gamma$ совпадают с формальными характеристиками модулей $M'_{\mathbb{C}}$ и $M'_{\mathbb{C}} \mid \Gamma_{\mathbb{C}}$ соответственно, а Σ — с аналогичным множеством для $M' \mid \Gamma$. Значит,

$$Q \in \text{Irr}(M' \mid \Gamma) \subset \text{Irr}(M \mid \Gamma).$$

Остается воспользоваться следствием 4. Заметим, что в силу теоремы 3 M' — прямое слагаемое ограничения $M \mid \Gamma_1$, но для доказательства достаточно знать, что M' — композиционный фактор этого ограничения. $\square$

Обозначения леммы 24 используются до конца параграфа.

3.3.1. $\lambda = \omega_2$ или $\lambda = \omega_3$. Согласно доказанному в п. 3.2 имеем $J_F(x) = \{1, 4, 5\}$ или $J_F(x) = \{4, 5\}$ соответственно. Ясно, что $\omega = \omega_i$ при $2 \leq i \leq n$.

Так как $\langle \omega, \gamma \rangle = 1$, то очевидно, что $\text{Irr}(M \mid \Gamma_1) \subset \{0, \omega_1, \omega_2\}$. Тогда из следствий 4 и 3 вытекает, что $J_M(x) \subset \{1, 4, 5\}$. Следовательно, $J_M(x) = \{1, 4, 5\}$ при $\lambda = \omega_2$, т. е. при $\omega = \omega_i$, $2 \leq i < n$.

Пусть $\omega = \omega_n$. Тогда $\mu = \omega_4$. Легко видеть, что $\langle \mu, \delta_1 \rangle = 2 < p-7$. По теореме 8 $\omega_2 \in \Sigma$. Используем лемму 24 с $Q = M(\omega_2)$. Ввиду доказанного в п. 3.2 число 1 принадлежит $J_Q(x)$. Поэтому $J_M(x) = \{1, 4, 5\}$.

3.3.2. $\lambda = 2\omega_3$. Здесь $\omega = 2\omega_n$. В силу теоремы 7 $d_\varphi(x) = 9$, и поэтому $J_M(x) \subset \mathbf{N}_9$.

Согласно доказанному в п. 3.2 $J_F(x) = \mathbf{N}_9 \setminus \{1, 4\}$. Легко видеть, что $\mu = 2\omega_4$ и $\langle \mu, \delta_1 \rangle = 4 \leq p - 7$. По теореме 8 имеем $2\omega_2 \in \Sigma$. Применим лемму 24 с $Q = M(2\omega_2)$. Ввиду доказанного в п. 3.2 $\{1, 4\} \subset J_Q(x) \subset J_M(x)$.

3.3.3. $\lambda = 3\omega_3$. В этом пункте $\omega = 3\omega_n$. Из теоремы 7 следует, что $J_M(x) \subset \mathbf{N}_{13}$. В силу доказанного в п. 3.2 $J_F(x) = \mathbf{N}_{13} \setminus \{2\}$. Так как $S < p$, то $p \geq 13$. Легко видеть, что $\mu = 3\omega_4$ и $\langle \mu, \delta_1 \rangle = 6 \leq p - 7$. Из теоремы 8 вытекает, что $3\omega_2 \in \Sigma$. Используем лемму 24 с $Q = M(3\omega_2)$. Из доказанного в п. 3.2 следует, что $2 \in J_Q(x) \subset J_M(x)$.

3.3.4. $\lambda = 5\omega_3$. В этом пункте $\omega = 5\omega_n$. Так как $S < p$, то $p \geq 23$. В силу теоремы 7 $J_M(x) \subset \mathbf{N}_{21}$. Из доказанного в п. 3.2 следует, что $J_F(x) = \mathbf{N}_{21} \setminus \{1\}$. Легко видеть, что $\mu = 5\omega_4$ и $\langle \mu, \delta_1 \rangle = 10 < p - 7$. Из теоремы 8 вытекает, что $5\omega_2 \in \Sigma$. Используем лемму 24 с $Q = M(5\omega_2)$. Согласно доказанному в п. 3.2 заключаем, что $1 \in J_Q(x) \subset J_M(x)$.

3.3.5. $\lambda = \omega_2 + \omega_3$. В этом пункте $\lambda = \omega_2 + \omega_3$, т. е. $\omega = \omega_i + \omega_n$ при $2 \leq i \leq n - 1$. В силу теоремы 7 и доказанного в п. 3.2 $J_M(x) \subset \mathbf{N}_9$ и $J_F(x) = \mathbf{N}_9 \setminus \{1\}$. Легко видеть, что $\mu \in \{\omega_1 + \omega_4, \omega_2 + \omega_4, \omega_3 + \omega_4, \omega_4\}$. Нетрудно проверить, что во всех случаях $\langle \mu, \delta_1 \rangle \leq 4 \leq p - 7$. Положим

$$\sigma = \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 & \text{при } \mu \in \{\omega_1 + \omega_4, \omega_2 + \omega_4, \omega_3 + \omega_4\}, \\ \omega_2 & \text{при } \mu = \omega_4 \end{cases}$$

и $Q = M(\sigma)$. В силу теоремы 8 $\sigma \in \Sigma$. Поэтому $J_Q(x) \subset J_M(x)$ ввиду леммы 24. С учетом доказанного в п. 3.2 имеем $1 \in J_Q(x)$.

3.3.6. $\lambda = \omega_1 + \omega_3$. В этом пункте $\omega = \omega_1 + \omega_n$. В силу теоремы 7 $J_M(x) \subset \mathbf{N}_8$. Из доказанного в п. 3.2 следует, что $J_F(x) = \mathbf{N}_8 \setminus \{1\}$. Положим

$$\Delta = G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}, \alpha_n), \quad \tau = \omega \mid \Delta.$$

Ясно, что $\Delta \cong C_4(K)$ и $\tau = \omega_1 + \omega_4$. Так как подгруппы Γ_1 и Δ сопряжены в G , то $M \mid \Gamma_1$ имеет композиционный фактор N , изоморфный $M(\tau)$. Заметим, что $\langle \tau, \delta_1 \rangle = 3 < p - 7$. В силу леммы 11 модуль $V(\tau)$ неприводим. По теореме 8 $N_{\mathbb{C}} \mid \Gamma_{\mathbb{C}}$ имеет композиционный фактор со старшим весом ω_2 . Пусть $Q' = M(\omega_2)$ — неприводимый Γ -модуль. Рассуждая, как в доказательстве леммы 24, можно установить, что $J_{Q'}(x) \subset J_M(x)$. Ввиду доказанного в п. 3.2 заключаем, что $1 \in J_{Q'}(x)$. Поэтому $J_M(x) = \mathbf{N}_8$.

3.3.7. $\lambda = 2\omega_1 + \omega_3$. В этом пункте $\omega = 2\omega_1 + \omega_n$. По теореме 7 $J_M(x) \subset \mathbf{N}_{11}$. Из доказанного в п. 3.2 вытекает, что $J_F(x) = \mathbf{N}_{11} \setminus \{1\}$. Далее повторяем рассуждения из п. 3.3.6, используя введенные там обозначения. Теперь $\tau = 2\omega_1 + \omega_4$. Существенно, что $\langle \tau, \delta_1 \rangle = 4 \leq p - 7$.

3.3.8. $\lambda = \omega_1 + 2\omega_3$. В этом пункте $\lambda = \omega_1 + 2\omega_3$, т. е. $\omega = \omega_1 + 2\omega_n$. В силу теоремы 7 и доказанного в п. 3.2 $J_M(x) \subset \mathbf{N}_{12}$ и $J_F(x) = \mathbf{N}_{12} \setminus \{1\}$. Далее рассуждаем, как в п. 3.3.6, выбрав другую подгруппу Δ типа C_4 . Сейчас мы положим $\Delta = G(1, 2, 3, 2\varepsilon_4)$ и $\tau = \omega \mid \Delta$. Ясно, что $\Delta \cong C_4(K)$ и $\tau = \omega_1 + 2\omega_4$. Поскольку подгруппы Δ и Γ_1 сопряжены в G , то $M \mid \Gamma_1$ имеет композиционный фактор N , изоморфный $M(\tau)$. Заметим, что $p \geq 13$, ибо $S < p$; $\langle \tau, \delta_1 \rangle = 5 < p - 7$; и ввиду теоремы 8 $N_{\mathbb{C}} \mid \Gamma_{\mathbb{C}}$ имеет композиционный фактор со старшим весом $2\omega_2$. Пусть $Q' \cong M(2\omega_2)$ — Γ -модуль. Используя аргументы из доказательства леммы 24 и п. 3.3.6, можно установить, что $J_{Q'}(x) \subset J_M(x)$. В силу доказанного в п. 3.2 получаем, что $1 \in J_{Q'}(x)$.

3.3.9. $\lambda = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. В этом пункте $\lambda = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, т. е. $\omega = \omega_1 + \omega_i + \omega_n$ с $2 \leq i \leq n - 1$. Ввиду теоремы 7 и доказанного в п. 3.2 $J_M(x) \subset \mathbf{N}_{12}$ и $J_F(x) = \mathbf{N}_{12} \setminus \{1\}$.

Далее рассуждаем, как в пп. 3.3.6–3.3.8. Положим

$$\Delta = G(\alpha_1, \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \quad \text{и} \quad \tau = \omega \mid \Delta.$$

Ясно, что $\Delta \cong C_4(K)$ и

$$\tau = \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_4 & \text{при } i < n - 1; \\ \omega_1 + \omega_3 + \omega_4 & \text{при } i = n - 1. \end{cases}$$

Учитывая, что подгруппы Γ_1 и Δ сопряжены в G , и используя теорему 8 и рассуждения из доказательства леммы 24 и п. 3.3.6, устанавливаем, что $M \mid \Gamma_1$ имеет композиционный фактор F , изоморфный $M(\tau)$, $F_{\mathbb{C}} \mid \Gamma_{\mathbb{C}}$ имеет композиционный фактор со старшим весом $2\omega_2$ и что для Γ -модуля $Z = M(2\omega_2)$ множество $J_Z(x)$ содержится в $J_M(x)$. Из доказанного в п. 3.2 следует, что $1 \in J_Z(x)$. При этом существенно, что $p \geq 13$ и $\langle \tau, \delta_1 \rangle = 5 < p - 7$.

Итак, при $S < p$ все возможности рассмотрены и теорема 1 доказана.

Напомним, что все конечномерные рациональные модули для полупростых алгебраических групп в характеристике 0 вполне приводимы (см. [19, теорема 6.3]).

Легко видеть, что рассуждения этого параграфа можно модифицировать для характеристики 0. Это позволяет доказать теорему 2.

Список литературы

1. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли*. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
2. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли*. Гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978.
3. Бусел Т. С., Супруненко И. Д. Блочная структура образов регулярных унитарных элементов из подсистемных подгрупп типа C_2 в непри-

- водимых представлениях групп типа C_n с локально малыми старшими весами // *Докл. НАН Беларуси*. 2016. Т. 60, № 1. С. 12–17.
4. Величко М. В. О поведении корневых элементов в модулярных представлениях симплектических групп // *Тр. Ин-та матем.* 2006. Т. 14, № 2. С. 28–34.
 5. Величко М. В., Супруненко И. Д. Малые квадратичные элементы в представлениях специальной линейной группы с большими старшими весами // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. 2007. Т. 343. С. 84–120.
 6. Величко М. В. Структура блоков Жордана образов длинных корневых элементов в модулярных представлениях групп типов B_n и F_4 // *Тр. Ин-та матем.* 2011. Т. 19, № 2. С. 7–11.
 7. Желобенко Д. П. Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений // *УМН*. 1962. Т. 17, № 1(103). С. 27–120.
 8. Залесский А. Е., Супруненко И. Д. Срезанные симметрические степени естественных реализаций групп $SL_m(P)$ и $Sp_m(P)$ и их ограничения на подгруппы // *Сиб. матем. журн.* 1990. Т. 31, № 4. С. 33–46.
 9. Осинская А. А. Регулярные унитарные элементы из подсистемных подгрупп типа C_2 в представлениях // *Тр. Ин-та матем.* 2009. Т. 17, № 1. С. 119–126.
 10. Осинская А. А., Супруненко И. Д. Унитарные элементы из подсистемных подгрупп типа A_3 в представлениях специальной линейной группы // *Докл. НАН Беларуси*. 2012. Т. 56, № 4. С. 11–15.
 11. Премет А. А. Веса инфинитезимально неприводимых представлений групп Шевалле над полем простой характеристики // *Матем. сб.* 1987. Т. 133(175), № 2(6). С. 167–183.
 12. Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле*. М.: Мир, 1975.
 13. Супруненко И. Д. Минимальные полиномы элементов порядка p в неприводимых представлениях групп Шевалле над полями характеристики p // *Тр. Ин-та математики СО РАН*. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996. Т. 30: *Вопросы алгебры и логики*. С. 126–163.
 14. Фейт У. *Теория представлений конечных групп*. М.: Наука, 1990.
 15. Borel A. Properties and linear representations of Chevalley groups // *Semin. Algebr. Groups Related Finite Groups* (Princeton 1968/69) / *Lecture Notes in Math.*; N 131. Berlin: Springer, 1970. P. A1–A55.
 16. Braden B. Restricted representations of classical Lie algebras of type A_2 and B_2 // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. 1967. V. 73. P. 482–486.
 17. Carter R. W. *Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters*. New York etc.: John Wiley and Sons, 1985.

18. Donkin S. On tilting modules for algebraic groups // *Math. Z.* 1993. V. 212, N 1. P. 39–60.
19. Humphreys J. *Modular Representations of Finite Groups of Lie Types* / London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. V. 326.
20. Jantzen J. C. *Representations of Algebraic Groups*. 2nd ed. / Math. Surveys and Monographs. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003. V. 107.
21. Osinovskaya A. A. *Nilpotent Elements in Irreducible Representations of Simple Lie Algebras of Small Rank* / Preprint: V. 554, N 5. Minsk: National Academy of Sciences of Belarus, Institute of Mathematics, 1999.
22. Osinovskaya A. A. Restrictions of representations of algebraic groups of types E_n and F_4 to naturally embedded A_1 -subgroups and the behavior of root elements // *Comm. Algebra*. 2005. V. 33, N 1. P. 213–220.
23. Osinovskaya A. A. and Suprunenko I. D. On the Jordan block structure of images of some unipotent elements in modular irreducible representations of the classical algebraic groups // *J. Algebra*. 2004. V. 273, N 2. P. 586–600.
24. Seitz G. M. *The Maximal Subgroups of Classical Algebraic Groups* / Mem. Amer. Math. Soc. 1987. V. 67, N 365.
25. Seitz G. M. Unipotent elements, tilting modules, and saturation // *Invent. Math.* 2000. V. 141, N 3. P. 467–502.
26. Smith S. D. Irreducible modules and parabolic subgroups // *J. Algebra*. 1982. V. 75. P. 286–289.
27. Suprunenko I. D. *The Minimal Polynomials of Unipotent Elements in Irreducible Representations of the Classical Groups in Odd Characteristic* / Mem. Amer. Math. Soc. 2009. V. 200, N 939.
28. Velichko M. V. On the behavior of the root elements in irreducible representations of simple algebraic groups // *Тр. Ин-та матем.* 2005. Т. 13, N 2. С. 116–121.

Бусел Татьяна Сергеевна

Супруненко Ирина Дмитриевна

Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 11,
Минск, 220072 БЕЛАРУСЬ.
E-mail: tbusel@im.bas-net.by;
E-mail: suprunenko@im.bas-net.by

Поступила в редакцию

10 января 2018 г.

Получена после доработки

3 октября 2018 г.

Принята к публикации

10 октября 2018 г.