Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. S. Borisov, E. I. Shefer, Asymptotic behavior of the mean sojourn time for a random walk to be in a domain of large deviations, *Mat. Tr.*, 2019, Volume 22, Number 2, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.201>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.229.45.116

April 26, 2023, 03:11:51

АСИМПТОТИКА СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

И. С. Борисов, Е. И. Шефер

В статье исследована асимптотика математического ожидания времени нахождения траектории случайного блуждания до момента времени n выше удаляющейся криволинейной границы в области больших уклонений в случае, когда распределение скачка удовлетворяет условию Крамера.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, среднее время пребывания в области, большие уклонения.

§1. Введение и формулировка результата

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией $\sigma^2 := \mathbb{E}\xi_1^2 > 0$. Обозначим

$$S_k := \sum_{i=1}^k \xi_i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Временем пребывания траектории $\{S_k; k = 1, \dots, n\}$ выше переменного уровня $xg(\cdot)$ назовем случайную величину

$$\tau_n(xg) := \sum_{k=1}^n I\{S_k > xg(k/n)\},$$

где $I(\cdot)$ — индикатор события, $x \equiv x(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ задает скорость удаления границы, а ограниченная положительная функция $g(t)$, $t \in (0, 1]$, — конфигурацию границы в зависимости от времени.

Цель работы — исследовать асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ математического ожидания

$$\mathbb{E}\tau_n(xg) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта 18-01-00074).

Введем в рассмотрение функцию

$$G(t) := g^2(t)/t, \quad t \in (0, 1].$$

Для формулировки нижеследующих условий нам будет удобно доопределить $G(t)$ в правой полуокрестности точки $t = 1$ как $G(t) := g^2(1)/t$. Предположим, что существует точка $t_0 \in (0, 1]$, в которой достигается минимум функции $G(\cdot)$ и выполнены следующие условия:

1) существует такое $0 < r \leq g(t_0)$, что

$$G(t) \geq \max \left\{ c_0(t), \frac{r^2}{t} \right\} \quad \text{при всех } t \in (0, 1],$$

где положительная функция $c_0(t)$ монотонно убывает на $(0, t_0)$, монотонно возрастает на $(t_0, 1]$ и $c_0(t_0) = G(t_0)$;

2) функция $G(t)$ непрерывно дифференцируема m_1 раз в левой полуокрестности точки t_0 и m_2 раз в правой полуокрестности этой точки; при этом m_1 и m_2 — порядки соответственно *первых ненулевых* левой и правой производных функции $G(t)$ в точке $t = t_0$;

3) $x/\sqrt{n} \rightarrow \infty$ и $x/n^{1-\gamma_m} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$\gamma_m := \frac{1 - 1/m}{3 - 2/m}, \quad m := \max\{m_1, m_2\};$$

4) $\mathbb{E}e^{\lambda|\xi_1|} < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$.

Теорема 1. При выполнении условий 1–4 и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\tau_n(xg) &\sim M(G, t_0, m_1, m_2) \frac{n(2m!)^{1/m} \sqrt{t_0}}{\sqrt{2\pi}g(t_0)} \left(\frac{\sigma}{\beta_n} \right)^{1+2/m} \Gamma\left(\frac{m+1}{m} \right) \\ &\times \exp \left\{ -nt_0 \Lambda\left(\frac{xg(t_0)}{nt_0} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\beta_n := \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad \Gamma(z) := \int_0^\infty y^{z-1} e^{-y} dy, \quad z > 0,$$

$\Lambda(z)$ — функция уклонений (функция Крамера) случайной величины ξ_1 , т. е.

$$\Lambda(z) := \sup_t \{tz - \log \psi_{\xi_1}(t)\}, \quad \text{где } \psi_{\xi_1}(t) := \mathbb{E}e^{t\xi_1},$$

(здесь $\log(\infty) = \infty$ по определению),

$M(G, t_0, m_1, m_2)$

$$:= \begin{cases} \frac{1}{|G^{(m_1)}(t_0-0)|^{1/m_1}}, & \text{если } t_0 \in (0, 1), \quad m_1 > m_2, \\ \frac{1}{|G^{(m_2)}(t_0+0)|^{1/m_2}}, & \text{если } t_0 \in (0, 1), \quad m_1 < m_2, \\ \frac{1}{|G^{(m_1)}(t_0-0)|^{1/m_1}} + \frac{1}{|G^{(m_2)}(t_0+0)|^{1/m_2}}, & \text{если } t_0 \in (0, 1), \quad m_1 = m_2, \\ \frac{1}{|G^{(m_1)}(1-0)|^{1/m_1}}, & \text{если } t_0 = 1. \end{cases}$$

При $m \geq 2$ аргумент экспоненты в (1) может быть заменен следующим выражением:

$$-\frac{\beta_n^2 g^2(t_0)}{2t_0 \sigma^2} + \frac{\mathbb{E} \xi_1^3 \beta_n^3 g^3(t_0)}{6t_0^2 \sigma^4 \sqrt{n}}. \quad (2)$$

Замечание 1. В случае $m = 1$ теорема 1 доказана в [1]. Кроме того, частный случай теоремы 1 при $g(\cdot) \equiv 1$, который автоматически вкладывается в случай $t_0 = 1$ и $m = 1$, содержится в [4]. Стоит также отметить, что теорема 1 допускает обобщение на случай конечного набора точек $\{t_k\}$, в окрестностях которых выполнены условия 1–4 со своими параметрами m_1 и m_2 для каждой точки t_k . Правая часть итоговой асимптотики в этом случае будет представлена в виде суммы правых частей в (1), вычисленных для каждой точки t_k отдельно.

Замечание 2. В соотношении (2) в силу условия 3 второе слагаемое имеет порядок $O(n^{-1/2} \beta_n^3) = o(\beta_n^2)$, причем эта величина в указанной в условии 3 зоне уклонений может стремиться как к нулю, так и к бесконечности.

В теореме 1 рассматривался случай, когда функция $g(t)$ касалась повернутой параболы в одной точке (или в конечном числе точек) сегмента $(0, 1]$. Следующая теорема рассматривает случай, когда на невырожденном отрезке функция $g(t)$ будет совпадать с повернутой параболой, или, другими словами, функция $G(t)$ тождественно равна своему минимальному значению на некотором невырожденном отрезке $[t_1, t_2] \subset (0, 1]$.

Мы будем предполагать выполненными следующие условия, аналогичные условиям 1 и 2 теоремы 1:

1') существует такое $0 < r \leq g(t_1)$, что

$$G(t) \geq \max \left\{ c_0(t), \frac{r^2}{t} \right\} \quad \text{при всех } t \in (0, 1],$$

где положительная функция $c_0(t)$ монотонно убывает на $[0, t_1)$, монотонно возрастает на $(t_2, 1]$ и $c_0(t) = G(t_1)$ при всех $t \in [t_1, t_2]$;

2') функция $G(t)$ непрерывно дифференцируема m_1 раз в левой окрестности точки t_1 и m_2 раз в правой окрестности точки t_2 ; при этом m_1 и m_2 — порядки *первых ненулевых* левой и правой производных функции $G(t)$ в точках t_1 и t_2 соответственно.

Для формулировки теоремы 2 введем следующее обозначение:

$$\Lambda_0(z) := \Lambda(z) - z^2/2\sigma^2.$$

Отметим, что $z^2/2\sigma^2$ является первым членом ряда Крамера, т. е. первым ненулевым членом разложения функции уклонений $\Lambda(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1', 2', 3 и 4. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}_{\tau_n}(xg) \sim \frac{n^{3/2}\sigma\sqrt{t_1}}{\sqrt{2\pi}xg(t_1)} J_n(t_1, t_2) \exp \left\{ -\frac{x^2 g^2(t_1)}{2nt_1\sigma^2} \right\},$$

где

$$J_n(t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \exp \left\{ -nt\Lambda_0 \left(\frac{xg(t_1)}{n\sqrt{t_1 t}} \right) \right\} dt.$$

В случае $m \geq 2$

$$J_n(t_1, t_2) \sim \int_{t_1}^{t_2} \exp \left\{ \frac{g^3(t_1)x^3\mathbb{E}\xi_1^3}{6\sigma^4 t_1^{3/2} n^2 \sqrt{t}} \right\} dt,$$

в частности,

$$J_n(t_1, t_2) \sim \begin{cases} t_2 - t_1, & \text{если } \mathbb{E}\xi_1^3 = 0 \text{ или } \frac{x^3}{n^2} \rightarrow 0, \\ \frac{12n^2 t_1^3 \sigma^4}{x^3 g^3(t_1) \mathbb{E}\xi_1^3} \exp \left\{ \frac{x^3 g^3(t_1) \mathbb{E}\xi_1^3}{6n^2 t_1^2 \sigma^4} \right\}, & \text{если } \mathbb{E}\xi_1^3 > 0 \text{ и } \frac{x^3}{n^2} \rightarrow \infty, \\ \frac{12n^2 t_2^3 \sigma^4}{x^3 g^3(t_2) |\mathbb{E}\xi_1^3|} \exp \left\{ \frac{x^3 g^3(t_2) \mathbb{E}\xi_1^3}{6n^2 t_2^2 \sigma^4} \right\}, & \text{если } \mathbb{E}\xi_1^3 < 0 \text{ и } \frac{x^3}{n^2} \rightarrow \infty. \end{cases}$$

§2. Доказательство теоремы 1

Без ограничения общности всюду в дальнейшем считаем, что $\sigma = 1$ и $g(t_0) = \sqrt{t_0}$. В противном случае мы можем провести следующую перенормировку:

$$\mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\} = \mathbb{P}\left\{ \frac{S_k}{\sigma} > \frac{xg(k/n)}{\sigma} \right\} = \mathbb{P}\left\{ \frac{S_k}{\sigma} > \frac{xg(t_0)}{\sigma\sqrt{t_0}} \frac{\sqrt{t_0}g(k/n)}{g(t_0)} \right\},$$

что немедленно сведет нашу задачу к указанному выше случаю при замене x и g соответственно на

$$\hat{x} := \frac{xg(t_0)}{\sigma\sqrt{t_0}} \quad \text{и} \quad \hat{g}(\cdot) := \frac{\sqrt{t_0}g(\cdot)}{g(t_0)}.$$

Также без ограничения общности можно считать, что функция $g(t)$ равномерно ограничена. В противном случае часть суммы, где $g(k/n) \geq 2g(t_0)$, можно мажорировать величиной $\mathbb{E}\tau_n(2g(t_0)x)$, исследованной, например, в [1], которая не будет влиять на асимптотику $\mathbb{E}\tau_n(xg)$ (см. ниже следующую оценку (23)).

В силу замечания 1 мы рассмотрим только случай $m \geq 2$. Прежде всего выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_{1,n} \rightarrow 0$ таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\frac{n}{\varepsilon_{1,n}x^2} \rightarrow 0, \quad \frac{x}{\varepsilon_{1,n}n} \rightarrow 0.$$

Покажем, что такая последовательность $\varepsilon_{1,n}$ может быть выбрана в виде $\varepsilon_{1,n} = \delta_n \beta_n^{2/m_1-2}$, где $\delta_n \rightarrow 0$. Проверка первого соотношения элементарна:

$$\frac{n}{\varepsilon_{1,n}x^2} = \frac{1}{\varepsilon_{1,n}\beta_n^2} = \frac{1}{\delta_n\beta_n^{2/m_1}} \rightarrow 0,$$

если, например, $\delta_n \geq \beta_n^{-1/m_1}$. Заметим, что из условия 3 следует асимптотическое представление $\beta_n = \nu_n n^{1/2-\gamma_m}$, где $\nu_n \rightarrow 0$, откуда получаем

$$\frac{x}{\varepsilon_{1,n}n} = \frac{\beta_n}{\varepsilon_{1,n}\sqrt{n}} = \frac{\beta_n^{3-2/m_1}}{\delta_n\sqrt{n}} \leq \frac{\beta_n^{3-2/m}}{\delta_n\sqrt{n}} = \frac{\nu_n^{3-2/m} n^{(1/2-\gamma_m)(3-2/m)}}{\delta_n\sqrt{n}} = \frac{\nu_n^{3-2/m}}{\delta_n} \rightarrow 0,$$

скажем, если $\delta_n \geq \nu_n$. Таким образом, при $\delta_n \geq \max\{\beta_n^{-1/m_1}, \nu_n\}$ и $\delta_n \rightarrow 0$ оба соотношения будут выполнены. В процессе доказательства теоремы 1 будет приведено еще одно условие на скорость убывания δ_n .

Аналогичным образом введем последовательность $\varepsilon_{2,n}$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{n}{\varepsilon_{2,n}x^2} \rightarrow 0, \quad \frac{x}{\varepsilon_{2,n}n} \rightarrow 0.$$

Теперь разобьем $\mathbb{E}\tau_n(xg)$ на четыре подсуммы:

$$\mathbb{E}\tau_n(xg) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &:= \sum_{k=N_n}^{[n_0]} \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\}, & R_2 &:= \sum_{k=[n_0]+1}^{K_n} \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\}, \\ R_3 &:= \sum_{k=1}^{N_n-1} \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\}, & R_4 &:= \sum_{k=K_n+1}^n \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\}, \end{aligned}$$

$$N_n := \left[nt_0 - \frac{n^2 t_0^2}{\varepsilon_{1,n} x^2} \right], \quad K_n := \left[nt_0 + \frac{n^2 t_0^2}{\varepsilon_{2,n} x^2} \right], \quad n_0 := nt_0.$$

Если же $t_0 = 1$, то $R_2 = R_4 = 0$. Далее будет показано, что $R_3 = o(R_1)$ и $R_4 = o(R_2)$, т. е. основной вклад в асимптотику $\mathbb{E}\tau_n(xg)$ вносят R_1 и R_2 . Всюду далее будем полагать, что $t_0 \in (0, 1)$. В противном случае нам достаточно найти лишь асимптотику суммы R_1 и доказать, что $R_3 = o(R_1)$. Это является частным случаем теоремы при $t_0 = 1$.

2.1. Исследование асимптотики $R_1 + R_2$. Доказательство теоремы будет приводиться при $m_1 > 1$ и $m_2 > 1$. Если одно из этих двух чисел будет равно 1, то к соответствующей сумме можно применить рассуждения из [1].

Найдем асимптотику суммы R_1 . Выводы при нахождении асимптотики R_2 будут зеркальными отражениями формул при вычислении асимптотики R_1 , о чем более подробно будет сказано в конце параграфа.

Нам понадобится следующий результат из [1], непосредственно вытекающий из соответствующего утверждения в [3, с. 322].

Следствие. При выполнении условий 3 и 4 при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое представление

$$\mathbb{P}\{S_n \geq x\} \sim \frac{\sqrt{n} e^{-n\Lambda(x/n)}}{x\sqrt{2\pi}}. \quad (3)$$

В силу условия 4 функция $\Lambda(z)$ аналитична в окрестности нуля. Прежде всего отметим, что из условия 3 равномерно по всем $k \in [N_n, n_0]$ имеют место предельные соотношения $x/k^{3/4} \rightarrow 0$ и $x/\sqrt{k} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда при выполнении условий 1–4 нормированная функция уклонений при разложении в ряд Тейлора в окрестности нуля (ряд Крамера) примет вид

$$k\Lambda\left(\frac{xg(k/n)}{k}\right) = \frac{x^2 g^2(k/n)}{2k} - \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3 g^3(k/n)}{6k^2} + o(1). \quad (4)$$

Докажем, что для всех $k \in [N_n, n_0]$ выполняется следующая эквивалентность:

$$\exp\left\{\frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3 g^3(k/n)}{6k^2}\right\} \sim \exp\left\{\frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3 g^3(t_0)}{6n^2 t_0^2}\right\} = \exp\left\{\frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}}\right\},$$

или, что то же самое,

$$\frac{x^3 g^3(k/n)}{k^2} - \frac{x^3}{n^2 \sqrt{t_0}} = \left(\frac{x^3 g^3(k/n)}{k^2} - \frac{x^3 g^3(t_0)}{k^2}\right) + \left(\frac{x^3 g^3(t_0)}{k^2} - \frac{x^3}{n^2 \sqrt{t_0}}\right) \rightarrow 0. \quad (5)$$

Покажем, что каждая из двух разностей в (5) будет стремиться к 0. Из условия 2 следует, что производная функции $G(t)$ равномерно ограничена в некоторой окрестности точки t_0 , а следовательно,

$$|g'(t)| < C_1 < \infty \quad \text{для всех } t \in \left[\frac{N_n}{n}, \frac{n_0}{n} \right].$$

Из формулы конечных приращений следует, что

$$g\left(\frac{k}{n}\right) - \sqrt{t_0} = g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{n_0}{n}\right) \leq C_1 \frac{n_0 - k}{n} \leq C_1 \frac{t_0 n_0}{\varepsilon_{1,n} x^2}.$$

Воспользуемся неравенством

$$|y^3 - x^3| \leq 3 \max\{y^2, x^2\} |y - x|$$

и оценкой $g(t) < 2\sqrt{t_0}$ для всех $t \in (0, 1]$. Тогда

$$\left| \frac{x^3 g^3(k/n)}{k^2} - \frac{x^3 g^3(t_0)}{k^2} \right| \leq 12t_0 \frac{x^3}{k^2} \left| g\left(\frac{k}{n}\right) - g(t_0) \right| \leq \frac{12t_0^2 C_1 x^3 n_0}{k^2 \varepsilon_{1,n} x^2} = C_2 \frac{x n_0}{k^2 \varepsilon_{1,n}}.$$

Из условия на k следует, что $n_0 - k \leq n_0^2/x^2 \varepsilon_{1,n}$. Стало быть,

$$C_2 \frac{x n_0}{k^2 \varepsilon_{1,n}} \leq C_2 \frac{x n_0}{(n_0 - n_0^2/x^2 \varepsilon_{1,n})^2 \varepsilon_{1,n}} = C_2 \frac{x}{n_0 \varepsilon_{1,n} (1 - n_0/x^2 \varepsilon_{1,n})^2} \rightarrow 0,$$

так как $x/n_0 \varepsilon_{1,n} \rightarrow 0$ и $n_0/x^2 \varepsilon_{1,n} \rightarrow 0$ в силу условий на $\varepsilon_{1,n}$.

Рассмотрим вторую разность из (5). Для нее имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^3 g^3(t_0)}{k^2} - \frac{x^3}{n^2 \sqrt{t_0}} \right| &\leq x^3 t_0^{3/2} \left(\frac{1}{(n_0 - n_0^2/x^2 \varepsilon_{1,n})^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \\ &= \frac{x^3 t_0^{3/2}}{n_0^4} \left(\frac{2n_0/x^2 \varepsilon_{1,n} - n_0^2/x^4 \varepsilon_{1,n}^2}{(1 - n_0/x^2 \varepsilon_{1,n})^2} \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались тем, что $x^3/n_0^4 \rightarrow 0$ по условию 3.

Таким образом, соотношение (5) доказано. Отсюда можно сделать вывод, что основной вклад в асимптотику показателя экспоненты вносит первый член его разложения в ряд Крамера. Поэтому в силу (3)–(5) верно следующее асимптотическое представление вероятности $\mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\}$ равномерно по всем $k \in [N_n, n_0]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\} &\sim \frac{\sqrt{k}}{xg(t_{nk})\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2 g^2(t_{nk})}{2k} + \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{t_{nk}}}{\beta_n g(t_{nk})\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2 g^2(t_{nk})}{2t_{nk}} + \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $t_{nk} := k/n$. Отсюда заключаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$R_1 \sim n \exp \left\{ \frac{\mathbb{E} \xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\} \sum_{k=N_n}^{[n_0]} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{t_{nk}}}{\beta_n g(t_{nk}) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2 g^2(t_{nk})}{2t_{nk}} \right\}. \quad (7)$$

Легко видеть, что выражение

$$\frac{R_1}{n} \exp \left\{ -\frac{\mathbb{E} \xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\}$$

эквивалентно интегральной сумме Римана соответствующего интеграла, которым и можно будет заменить правую часть (7), как будет установлено далее. Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [1].

Лемма 1. При $n \rightarrow \infty$ имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=N_n}^{[n_0]} \frac{1}{n} \frac{\sqrt{t_{nk}}}{\beta_n g(t_{nk}) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2 g^2(t_{nk})}{2t_{nk}} \right\} - \int_{N_n/n}^{t_0} \frac{\sqrt{t}}{g(t) \beta_n \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2 g^2(t)}{2t} \right\} dt \right| \\ &= o \left(\sum_{k=N_n}^{[n_0]} \frac{1}{n} \frac{\sqrt{t_{nk}}}{\beta_n g(t_{nk}) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2 g^2(t_{nk})}{2t_{nk}} \right\} \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 1, мы получили интеграл

$$\int_{N_n/n}^{t_0} \frac{\sqrt{t}}{g(t)} e^{-\beta_n^2 g^2(t)/2t} dt = \int_{N_n/n}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} e^{-\beta_n^2 G(t)/2} dt. \quad (8)$$

Далее, заметим, что функция $G(t)$ непрерывна и монотонно убывает на полуинтервале $[N_n/n, t_0)$ по причине того, что при больших n область интегрирования будет включаться в окрестность $[t_0 - \delta, t_0]$ точки $t = t_0$. Функция $e^{-\beta_n^2 G(t)/2}$ на этом полуинтервале интегрируема, $G(t) = 1 + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по всем $t \in [N_n/n, t_0)$. Поэтому к интегралу (8) применима теорема о среднем:

$$\int_{N_n/n}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} e^{-\beta_n^2 G(t)/2} dt \sim \int_{N_n/n}^{t_0} e^{-\beta_n^2 G(t)/2} dt. \quad (9)$$

Разложим функцию $G(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = t_0 - 0$:

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{j=0}^{m_1} \frac{G^{(j)}(t_0 - 0)(t - t_0)^j}{j!} + \Delta(t - t_0)(t - t_0)^{m_1} \\ &= 1 + \frac{G^{(m_1)}(t_0 - 0)(t - t_0)^{m_1}}{m_1!} + \Delta(t - t_0)(t - t_0)^{m_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Delta(y)$ — некоторая функция, стремящаяся к 0 при $y \rightarrow 0$. Тогда интеграл в правой части (9) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{N_n/n}^{t_0} e^{-\beta_n^2 G(t)/2} dt \\ &= \int_{N_n/n}^{t_0} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2}{2} \left(1 + \frac{G^{(m_1)}(t_0-0)(t-t_0)^{m_1}}{m_1!} + \Delta(t-t_0)(t-t_0)^{m_1} \right) \right\} dt. \end{aligned}$$

Отметим, что длина интервала интегрирования $(t_0 - N_n/n)$ в последнем интеграле имеет порядок

$$\frac{n}{\varepsilon_{1,n} x^2} = \frac{1}{\delta_n \beta_n^{2/m_1}}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\Delta(y)$ при $y \rightarrow +0$ монотонно убывает. Теперь оценим величину погрешности в показателе экспоненты под указанным интегралом:

$$\beta_n^2 \left(t_0 - \frac{N_n}{n} \right)^{m_1} \Delta \left(t_0 - \frac{N_n}{n} \right) \sim \frac{1}{\delta_n^{m_1}} \Delta \left(\frac{1}{\delta_n \beta_n^{2/m_1}} \right) \rightarrow 0 \quad (11)$$

при достаточно медленно стремящейся к нулю последовательности $\delta_n \geq \beta_n^{-1/m_1}$. При такой оценке снизу эту последовательность можно выбрать с условием $\delta_n \geq \Delta^{1/(m_1+1)}(\beta_n^{-1/m_1})$. Это и есть третье и последнее ограничение на скорость сходимости к нулю последовательности δ_n . Например, последовательность

$$\delta_n = \max \left\{ \nu_n, \beta_n^{-1/m_1}, \Delta^{1/(m_1+1)}(\beta_n^{-1/m_1}) \right\}$$

удовлетворяет всем трем вышеприведенным условиям.

Таким образом, окончательно получаем

$$\int_{N_n/n}^{t_0} e^{-\beta_n^2 G(t)/2} dt \sim e^{-\beta_n^2/2} \int_{N_n/n}^{t_0} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2}{2m_1!} G^{(m_1)}(t_0-0)(t-t_0)^{m_1} \right\} dt.$$

Проведем замену интегрирования по формуле $y = (t_0 - t)^{m_1}$. Тогда интеграл в правой части последнего соотношения примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & e^{-\beta_n^2/2} \int_{N_n/n}^{t_0} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2}{2m_1!} G^{(m_1)}(t_0-0)(t-t_0)^{m_1} \right\} dt \\ &= e^{-\beta_n^2/2} \int_0^{(t_0-N_n/n)^{m_1}} \frac{1}{m_1} y^{1/m_1-1} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2}{2m_1!} (-1)^{m_1} G^{(m_1)}(t_0-0)y \right\} dy. \end{aligned}$$

Функция $G(t)$ убывает в некоторой окрестности t_0 при $t < t_0$. Из формулы (10) следует, что при нечетных m_1 выполняется $G^{(m_1)}(t_0-0) < 0$, а

при четных m_1 будет $G^{(m_1)}(t_0 - 0) > 0$, т. е. величина $(-1)^{m_1} G^{(m_1)}(t_0 - 0)$ положительна. Таким образом,

$$\begin{aligned} & e^{-\beta_n^2/2} \int_0^{(t_0 - N_n/n)^{m_1}} \frac{1}{m_1} y^{1/m_1-1} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2}{2m_1!} (-1)^{m_1} G^{(m_1)}(t_0 - 0) y \right\} dy \\ & \sim \frac{1}{m_1} B_{m_1}^{1/m_1} e^{-\beta_n^2/2} \int_0^{(t_0 - N_n/n)^{m_1} B_{m_1}^{-1}} z^{1/m_1-1} e^{-z} dz, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$B_{m_1} := \frac{2m_1!}{\beta_n^2 |G^{(m_1)}(t_0 - 0)|}.$$

Поведение верхнего предела интегрирования при $n \rightarrow \infty$ по существу уже установлено в (11):

$$\left(t_0 - \frac{N_n}{n} \right)^{m_1} B_{m_1}^{-1} = O(\delta_n^{-m_1}). \quad (13)$$

Из (13) следует, что верхний предел интеграла в правой части (12) стремится к ∞ . Потому при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_1} B_{m_1}^{1/m_1} e^{-\beta_n^2/2} \int_0^{(t_0 - N_n/n)^{m_1} B_{m_1}^{-1}} z^{1/m_1-1} e^{-z} dz \\ & \sim \frac{1}{m_1} B_{m_1}^{1/m_1} e^{-\beta_n^2/2} \int_0^\infty z^{1/m_1-1} e^{-z} dz \\ & = \frac{1}{m_1} B_{m_1}^{1/m_1} e^{-\beta_n^2/2} \Gamma\left(\frac{1}{m_1}\right) = B_{m_1}^{1/m_1} e^{-\beta_n^2/2} \Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из леммы 1, а также соотношений (6), (8) и (14) мы получаем следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} R_1 & \sim \frac{n B_{m_1}^{1/m_1}}{\sqrt{2\pi} \beta_n} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2n} + \frac{\mathbb{E} \xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\} \Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right) \\ & \sim \frac{n(2m_1!)^{1/m_1}}{\sqrt{2\pi} \beta_n^{1+2/m_1} |G^{(m_1)}(t_0-0)|^{1/m_1}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2n} + \frac{\mathbb{E} \xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\} \Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right) \\ & = \frac{n^{3/2+1/m_1} (2m_1!)^{1/m_1}}{\sqrt{2\pi} x^{1+2/m_1} |G^{(m_1)}(t_0-0)|^{1/m_1}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2n} + \frac{\mathbb{E} \xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\} \Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, мы получили асимптотику для суммы R_1 .

Для вычисления асимптотики R_2 повторим всю схему рассуждений при нахождении асимптотики R_1 . Первым делом обратимся к формуле (5).

Путем повторения рассуждений для $k \in [n_0, K_n]$ можно убедиться, что аналог формулы (5) также будет выполняться. Ясно, что аналог леммы 1 также применим и к

$$\frac{R_2}{n} \exp \left\{ -\frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\},$$

а именно:

$$\frac{R_2}{n} \exp \left\{ -\frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\} \sim \int_{t_0}^{K_n/n} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2 G(t)}{2} \right\} dt.$$

В силу условий на функцию $G(t)$ теорема о среднем здесь также применима. Далее, с помощью аналогов формул (10) и (11) получаем

$$\int_{t_0}^{K_n/n} e^{-\beta_n^2 G(t)/2} dt \sim e^{-\beta_n^2/2} \int_{t_0}^{K_n/n} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2}{2m_2!} G^{(m_2)}(t_0+0)(t-t_0)^{m_2} \right\} dt. \quad (16)$$

Заметим, что аналог формулы (9) позволяет утверждать, что в интеграле в правой части (16) величина $G^{(m_2)}(t_0+0)$ положительна. Заменим переменную интегрирования по формуле $y = (t - t_0)^{m_2}$. После замены переменной получаем следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & e^{-\beta_n^2/2} \int_{t_0}^{K_n/n} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2}{2m_2!} G^{(m_2)}(t_0+0)(t-t_0)^{m_2} \right\} dt \\ &= e^{-\beta_n^2/2} \int_0^{(K_n/n-t_0)^{m_2}} \frac{1}{m_2} y^{1/m_2-1} \exp \left\{ -\frac{\beta_n^2}{2m_2!} G^{(m_2)}(t_0+0)y \right\} dy. \end{aligned}$$

Осталось лишь заметить, что полученный интеграл отличается от интеграла в (12) только аргументом у функции $G^{(m_1)}(\cdot)$ и соответственно константой m_2 вместо m_1 . Верхний предел интегрирования аналогично формуле (13) будет стремиться к ∞ . В итоге для R_2 имеем

$$R_2 \sim \frac{n^{3/2+1/m_2} (2m_2!)^{1/m_2}}{\sqrt{2\pi} x^{1+2/m_2} |G^{(m_2)}(t_0+0)|^{1/m_2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2n} + \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\} \Gamma \left(\frac{m_2+1}{m_2} \right). \quad (17)$$

Сравним между собой асимптотики для R_1 и R_2 , полученные в формулах (15) и (17). Утверждается следующее: если $m_1 > m_2$, то $R_2 = o(R_1)$. В самом деле, не обращая внимания на константы, которые не зависят от n , мы видим, что R_1 и R_2 отличаются множителями

$$\frac{n^{3/2+1/m_1}}{x^{1+2/m_1}} = n\beta_n^{-1-2/m_1}, \quad \frac{n^{3/2+1/m_2}}{x^{1+2/m_2}} = n\beta_n^{-1-2/m_2}.$$

Требуемое предельное соотношение будет выполняться, так как $\beta_n \rightarrow \infty$. Отсюда можно сделать вывод, что асимптотика будет определяться максимальным из двух номеров первых ненулевых производных.

2.2. Оценка $R_3 + R_4$. В этом пункте мы покажем, что $R_3 + R_4$ не вносит вклада в асимптотику среднего времени, т. е. в (15) и (17) приведен ее окончательный вид.

Лемма 2. При $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение $R_3 = o(R_1)$.

Доказательство. Разобьем сумму R_3 на две части: $R_3 = R_5 + R_6$, где

$$R_5 := \sum_{k=bnt_0}^{N_n-1} \mathbb{P}\{S_k > g(k/n)x\}, \quad R_6 := \sum_{k=1}^{bnt_0-1} \mathbb{P}\{S_k > g(k/n)x\},$$

а положительное $b < 1$ будет выбрано позднее.

Сначала найдем асимптотику суммы R_5 . Из (3) и (4) получается следующее представление для отношения вероятностей:

$$\frac{\mathbb{P}(S_k > g(k/n)x)}{\mathbb{P}(S_{nt_0} > x\sqrt{t_0})} \sim \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}g(k/n)} \exp \left\{ \frac{x^2 g^2(t_0)}{2nt_0} - \frac{x^2 g^2(k/n)}{2k} + \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3 g^3(k/n)}{6k^2} - \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3 g^3(t_0)}{6n^2 t_0^2} \right\}. \quad (18)$$

Из формулы конечных приращений и неравенства

$$|y^3 - x^3| \leq 3 \max\{y^2, x^2\}|y - x|$$

вытекает следующая оценка для всех $k \in [bnt_0, N_n - 1]$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3 g^3(k/n)}{6k^2} - \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3 g^3(t_0)}{6n^2 t_0^2} \right| \\ & \leq C_1 \left| \frac{x^3 g^3(k/n)}{k^2} - \frac{x^3 g^3(t_0)}{k^2} \right| + C_1 \left| \frac{x^3 g^3(t_0)}{k^2} - \frac{x^3 g^3(t_0)}{n^2 t_0^2} \right| \\ & \leq C_1 \frac{x^3}{b^2 n^2 t_0^2} \max\{g^2(k/n), g^2(t_0)\} |g(k/n) - g(t_0)| + C_1 x^3 g^3(t_0) \frac{n^2 t_0^2 - k^2}{k^2 n^2 t_0^2} \\ & \leq C_2 \frac{x^3}{n^2} |k/n - t_0| + C_1 x^3 g^3(t_0) \frac{(nt_0 - k)(nt_0 + k)}{k^2 n^2 t_0^2} \\ & \leq C_2 (x/n)^3 (nt_0 - k) + C_3 \frac{x^3}{n^4} 2nt_0 (nt_0 - k) \leq C_4 (x/n)^3 (nt_0 - k). \end{aligned} \quad (19)$$

Мы без ограничения общности полагали, что функция $G(t) = g^2(t)/t$ в окрестности точки t_0 убывает слева и $G(t_0) = 1$. Выберем достаточно малое число $\delta > 0$, чтобы отрезок $[(1 - \delta)nt_0, N_n]$ включался в такую окрестность. Так что для всех $k \in [(1 - \delta)nt_0, N_n]$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{g^2(k/n)x^2}{2k} - \frac{x^2}{2n} &= \frac{x^2}{2n} (G(k/n) - 1) \\ &= \frac{x^2}{2n} (G(k/n) - G(t_0)) \geq \frac{x^2}{2n^2} |G'(\theta_0)| (nt_0 - k). \end{aligned} \quad (20)$$

Если же $k \in [bnt_0, (1-\delta)nt_0]$ (при условии $b < 1-\delta$), то в силу условия 1 имеем $G(k/n) > 1 + c(\delta)$, где $c(\delta) > 0$, откуда вытекает оценка снизу

$$\frac{g^2(k/n)x^2}{2k} - \frac{x^2}{2n} = \frac{x^2}{2n}(G(k/n) - 1) \geq c(\delta)\frac{x^2}{2n^2}. \quad (21)$$

Таким образом, из (19)–(21) и условия 3 следует равномерная по $k \in [bnt_0, N_n]$ оценка сверху

$$\left| \frac{x^2 g^2(t_0)}{2nt_0} - \frac{x^2 g^2(k/n)}{2k} + \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3 g^3(k/n)}{6k^2} - \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3 g^3(t_0)}{6n^2 t_0^2} \right| \leq C_5 \left(\frac{x}{n} \right)^2 (nt_0 - k).$$

Тогда в (18) для всех $k \in [bnt_0, N_n]$ при достаточно больших n получаем

$$\frac{\mathbb{P}(S_k > g(k/n)x)}{\mathbb{P}(S_{nt_0} > x\sqrt{t_0})} \leq C_6 \exp \left\{ -C_7 \left(\frac{x}{n} \right)^2 (nt_0 - k) \right\},$$

где положительные постоянные C_k в приведенных выше выкладках зависят только от функции g и констант $b > 0$ и t_0 .

Таким образом, принимая во внимание (3), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=bnt_0}^{N_n-1} \mathbb{P}\{S_k > g(k/n)x\} \\ & \leq C_6 \mathbb{P}(S_{nt_0} > x\sqrt{t_0}) \sum_{k=bnt_0}^{N_n} \exp \left\{ -C_7 \left(\frac{x}{n} \right)^2 (nt_0 - k) \right\} \\ & \sim C_6 \mathbb{P}(S_{nt_0} > x\sqrt{t_0}) \int_{bnt_0}^{N_n} \exp \left\{ -C_7 \frac{x^2}{n^2} (nt_0 - t) \right\} dt \\ & = C_6 \mathbb{P}(S_{nt_0} > x\sqrt{t_0}) \int_{nt_0 - N_n}^{(1-b)nt_0} \exp \left\{ -C_7 \frac{x^2}{n^2} s \right\} ds \\ & = O \left(\mathbb{P}(S_{nt_0} > x\sqrt{t_0}) \frac{n^2}{x^2} \exp \left\{ -C_7 \frac{x^2}{n^2} (nt_0 - N_n) \right\} \right) \\ & = O \left(\frac{n^{5/2}}{x^3} e^{-C_7 t_0^2 / \varepsilon_{1,n}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2n} + \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_0}} \right\} \right) = o(R_1). \end{aligned} \quad (22)$$

Из оценок (15) и (22) следует утверждение леммы для R_5 .

Нам осталось оценить R_6 . Справедлива очевидная оценка

$$R_6 \leq \sum_{k=1}^{bnt_0} \mathbb{P}\{S_k > rx\} \equiv \mathbb{E}\tau_{[bnt_0]}(rx).$$

Из [1] следует, что

$$\mathbb{E}\tau_{[bnt_0]}(rx) \sim \frac{\sqrt{2}(bnt_0)^{5/2}}{\sqrt{\pi}(rx)^3} \exp \left\{ -bnt_0 \Lambda \left(\frac{rx}{(bnt_0)} \right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как $rx/(bnt_0) \rightarrow 0$, в окрестности нуля можно использовать оценку для функции уклонений (см. (4))

$$\Lambda \left(\frac{rx}{(bnt_0)} \right) \geq c \frac{(rx)^2}{2(bnt_0)^2}, \quad (23)$$

а это значит, что

$$\exp \left\{ -bnt_0 \Lambda \left(\frac{rx}{(bnt_0)} \right) \right\} \leq \exp \left\{ -c \frac{(rx)^2}{2bnt_0} \right\}.$$

Положим теперь $b = r^2/(2t_0)$. Таким образом, для такого b имеем

$$R_6 = o(R_1),$$

что является завершающим шагом в доказательстве леммы. $\square$

Доказательство утверждения $R_4 = o(R_2)$ полностью аналогично уже доказанному в лемме 2. Таким образом, теорема 1 доказана.

§3. Доказательство теоремы 2

Мы так же, как и выше, будем полагать без ограничения общности, что функция $g(t)$ равномерно ограничена, $\sigma = 1$ и $g(t) = \sqrt{t}$ для всех $t \in [t_1, t_2]$. Разобьем $\mathbb{E}\tau_n(xg)$ на три подсуммы: $\mathbb{E}\tau_n(xg) = S_1 + S_2 + S_3$, где

$$S_1 := \sum_{k=1}^{[nt_1]} \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\}, \quad S_2 := \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\},$$

$$S_3 := \sum_{k=[nt_2]+1}^n \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\}.$$

Всюду далее предполагается, что $t_1 \neq 0$ и $t_2 \neq 1$, в противном случае доказательство будет только упрощаться, так как хотя бы одна из двух сумм S_1 и S_3 будет равна 0.

Поведение сумм S_1 и S_3 при $n \rightarrow \infty$ было изучено при доказательстве теоремы 1. Рассмотрим это на примере S_1 . Применяя рассуждения при доказательстве теоремы 1 к сумме S_1 , мы получаем для нее следующую асимптотику:

$$S_1 \sim \frac{n^{3/2+1/m_1} (2m_1!)^{1/m_1}}{\sqrt{2\pi} x^{1+2/m_1} |G^{(m_1)}(t_1-0)|^{1/m_1}} \Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right) \exp\left\{-nt_1 \Lambda\left(\frac{x}{n\sqrt{t_1}}\right)\right\}. \quad (24)$$

Для S_3 верна следующая асимптотика:

$$S_3 \sim \frac{n^{3/2+1/m_2} (2m_2!)^{1/m_2}}{\sqrt{2\pi} x^{1+2/m_2} |G^{(m_2)}(t_2+0)|^{1/m_2}} \Gamma\left(\frac{m_2+1}{m_2}\right) \exp\left\{-nt_2 \Lambda\left(\frac{x}{n\sqrt{t_2}}\right)\right\}. \quad (25)$$

Теперь перейдем к нахождению асимптотики суммы S_2 . Заметим, что при данных условиях $g(k/n) = \sqrt{k/n}$ для всех $k \in [nt_1] + 1, [nt_2]$. Применяя (3) к каждой вероятности, участвующей в сумме S_2 , получаем, что для всех $k \in [nt_1] + 1, [nt_2]$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\} &\sim \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi} xg(k/n)} e^{-k\Lambda(xg(k/n)/k)} \\ &\sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} x} \exp\left\{-\frac{x^2}{2n} - k\Lambda_0\left(\frac{x}{\sqrt{kn}}\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} x} \exp\left\{-\frac{x^2}{2n} - nt_{nk}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{nk}}}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $t_{nk} := k/n$. Отсюда следует представление для суммы S_2 :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \mathbb{P}\{S_k > xg(k/n)\} \\ &\sim \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} x} \exp\left\{-\frac{x^2}{2n} - nt_{nk}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{nk}}}\right)\right\} \\ &= \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2\pi} x} e^{-x^2/2n} \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n} \exp\left\{-nt_{nk}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{nk}}}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что сумма, стоящая в конце формулы (27), представляет собой интегральную сумму Римана. Докажем следующий аналог леммы 1.

Лемма 3. При $n \rightarrow \infty$ имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n} \exp\left\{-nt_{nk}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{nk}}}\right)\right\} - \int_{t_1}^{t_2} \exp\left\{-nt\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t}}\right)\right\} dt \right| \\ &= o\left(\sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n} \exp\left\{-nt_{nk}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{nk}}}\right)\right\}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Известна элементарная оценка погрешности приближения интеграла Римана для любой функции $f \in C^1(0, 1)$:

$$\left| \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n} f(t_{nk}) - \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \right| \leq \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n^2} \max_{t_{n,k-1} \leq t \leq t_{nk}} |f'(t)|.$$

Далее, полагая

$$f(t) = \exp \left\{ -nt\Lambda_0 \left(\frac{x}{n\sqrt{t}} \right) \right\},$$

покажем, что k -е слагаемое суммы в правой части последнего неравенства представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, чем соответствующее слагаемое суммы в (27). Воспользовавшись представлением функции уклонений через ряд Крамера, получим

$$f(t) = \exp \left\{ -nt\Lambda_0 \left(\frac{x}{n\sqrt{t}} \right) \right\} = \exp \left\{ \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2\sqrt{t}} (1 + o(1)) \right\}.$$

После вычисления производной $f'(t)$ можно легко убедиться в том, что для доказательства леммы нам достаточно лишь заметить, что

$$\frac{1}{n^2} \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{12n^2 t^{3/2}} = O\left(\frac{x^3}{n^4}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно по всем t из области интегрирования. $\square$

Нам осталось доказать, что $S_1 = o(S_2)$ и $S_3 = o(S_2)$, или, другими словами, показать, что именно S_2 определяет асимптотику всей суммы. Покажем это для $S_1 = o(S_2)$. Доказательство $S_3 = o(S_2)$ будет полностью аналогично приведенному ниже.

Прежде всего получим нижнюю оценку на S_2 . Введем мажоранту $g_2(t)$ для функции $g(t)$ на интервале $(t_1, 1)$ таким образом, чтобы функция $G_2(t) := g_2^2(t)/t$ монотонно возрастала для всех $t \in (t_1, 1)$. Также потребуем, чтобы номер первой правой ненулевой производной функции $G_2(t)$ в точке t_1 был больше m_1 и был конечен. Обозначим его как m_3 . Отсюда следует оценка

$$S_2' := \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \mathbb{P}\{S_k > xg_2(k/n)\} \leq S_2.$$

Осталось лишь заметить, что функция

$$g_1(t) := \begin{cases} g(t), & t \in (0, t_1], \\ g_2(t), & t \in (t_1, 1), \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 1 и 2, а потому с помощью теоремы 1 мы получаем следующую асимптотику:

$$S'_2 \sim \frac{n^{3/2+1/m_3} (2m_3!)^{1/m_3}}{\sqrt{2\pi} x^{1+2/m_3} |G^{(m_3)}(t_1 + 0)|^{1/m_3}} \Gamma\left(\frac{m_3 + 1}{m_3}\right) \exp\left\{-nt_1 \Lambda\left(\frac{x}{n\sqrt{t_1}}\right)\right\}.$$

Сравнивая множители перед экспонентой, можно легко убедиться в том, что $S_1 = o(S'_2)$. Отсюда немедленно вытекает основное утверждение теоремы.

Далее уже отмечалось, что при $m > 1$ мы имеем $x^4/n^3 \rightarrow 0$. Тогда

$$-nt\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t}}\right) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{t}} + o(1), \quad \text{где } \alpha_n := \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2}.$$

Найдем асимптотику интеграла $I_n := \int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha_n/\sqrt{t}} dt$. Рассмотрим 2 случая:

СЛУЧАЙ 1. $\mathbb{E}\xi_1^3 = 0$ или $x^3/n^2 \rightarrow 0$. Если $\mathbb{E}\xi_1^3 = 0$, то $\alpha_n = 0$ для всех n . Поэтому $I_n \sim t_2 - t_1$. При $x^3/n^2 \rightarrow 0$ мы имеем $\alpha_n \rightarrow 0$, что снова дает нам $I_n \sim t_2 - t_1$ по теореме Лебега.

СЛУЧАЙ 2. $x^3/n^2 \rightarrow \infty$ и $\mathbb{E}\xi_1^3 \neq 0$. Вычислим асимптотику интеграла I_n :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha_n/\sqrt{t}} dt = 2\alpha_n^2 \int_{\alpha_n/\sqrt{t_2}}^{\alpha_n/\sqrt{t_1}} \frac{e^y}{y^3} dy \\ &= 2\alpha_n^2 \left(\frac{e^y}{y^3} \Big|_{\alpha_n/\sqrt{t_2}}^{\alpha_n/\sqrt{t_1}} + 3 \int_{\alpha_n/\sqrt{t_2}}^{\alpha_n/\sqrt{t_1}} \frac{e^y}{y^4} dy \right) \\ &= 2\alpha_n^2 \left(L_n + O\left(\frac{L_n}{\alpha_n}\right) \right) \\ &= 2\alpha_n^2 (L_n + o(L_n)) \sim 2\alpha_n^2 L_n, \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$L_n := \frac{e^y}{y^3} \Big|_{\alpha_n/\sqrt{t_2}}^{\alpha_n/\sqrt{t_1}}.$$

Из (28) получаем

$$\begin{aligned} I_n &\sim \frac{2t_1^{3/2}}{\alpha_n} e^{-\alpha_n/\sqrt{t_1}} - \frac{2t_2^{3/2}}{\alpha_n} e^{-\alpha_n/\sqrt{t_2}} \\ &= \frac{12n^2 t_1^{3/2}}{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3} \exp\left\{\frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_1}}\right\} - \frac{12n^2 t_2^{3/2}}{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3} \exp\left\{\frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_2}}\right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что

$$I_n \sim \begin{cases} \frac{12n^2 t_1^{3/2}}{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3} \exp \left\{ \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_1}} \right\}, & \text{если } \mathbb{E}\xi_1^3 > 0, \\ -\frac{12n^2 t_2^{3/2}}{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3} \exp \left\{ \frac{\mathbb{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2 \sqrt{t_2}} \right\}, & \text{если } \mathbb{E}\xi_1^3 < 0. \end{cases}$$

Теорема 2 доказана.

Авторы благодарят А. А. Могульского за ряд полезных замечаний касательно постановки задачи в теореме 1.

Список литературы

1. Борисов И. С., Шефер Е. И. Асимптотика среднего времени пребывания траектории случайного блуждания выше удаляющейся криволинейной границы // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.* 2017. Т. 17, Вып. 4. С. 18–27.
2. Боровков А. А. *Теория вероятностей*. 5-е изд. / Учебное пособие. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
3. Боровков А. А., Боровков К. А. *Асимптотический анализ случайных блужданий*. Т. 1: Медленно убывающие распределения скачков. М.: Физматлит, 2008.
4. Лотов В. И., Тарасенко А. С. Об асимптотике среднего времени пребывания случайного блуждания на полуоси // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2015. Т. 79, № 3. С. 23–40.

Борисов Игорь Семенович

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: sibam@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
30 января 2019 г.

Получена после доработки
14 февраля 2019 г.

Принята к публикации
27 февраля 2019 г.

Шефер Евгений Игоревич

Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: shef_john@mail.ru