Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. F. Voronin, On $\mathbb{R}$ -linear problem and truncated Wiener–Hopf equation, *Mat. Tr.*, 2019, Volume 22, Number 2, 21–33

DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.202>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.237.206.68

April 26, 2023, 11:22:49

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ $\mathbb{R}$ -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ И УСЕЧЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА — ХОПФА

А. Ф. Воронин

Исследуются задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (известная также под названиями задачи Маркушевича и обобщенной краевой задачи Римана) и интегральное уравнение в свертках второго рода на конечном интервале (известное также под названием усеченного уравнения Винера — Хопфа). Найдены новые условия корректной разрешимости задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения и усеченного уравнения Винера — Хопфа.

Ключевые слова и фразы: задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения, задача Маркушевича, краевая задача Римана, обобщенная краевая задача Римана, частные индексы, свертка, усеченное уравнение Винера — Хопфа, существование решения, устойчивость, единственность.

Введение

Прежде чем перейти непосредственно к рассматриваемым в работе задачам, введем следующие обозначения: $L_{n \times m}$, $1 \leq n, m \leq 2$, — пространство $n \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$; $\mathcal{F}f$ — образ Фурье матрицы-функции $f \in L_{n \times m}$:

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}$ — расширенная вещественная прямая (R — вещественная прямая); $W^{n \times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$, где C — постоянная матрица порядка n , $f \in L_{n \times n}$; $W_+^{n \times n}$ ($W_-^{n \times n}$) — подалгебра в $W^{n \times n}$, состоящая из матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$); при $C = 0$ соответствующие алгебры и подалгебры будем снабжать нижним индексом 0 ($W_0^{n \times n}$, $W_{0\pm}^{n \times n}$). При $n = 1$ верхний индекс $n \times n$ при W будем опускать. Если A — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A .

Рассмотрим $\mathbb{R}$ -линейную задачу сопряжения (известную также под названиями задачи Маркушевича и обобщенной краевой задачи Римана) о нахождении функций $\varphi^\pm \in W_{0\pm}$ по краевому условию на $\mathbb{R}$:

$$\varphi^+(x) = a(x)\varphi^-(x) + b(x)\overline{\varphi^-(x)} + c(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.1)$$

где

$$a, b \in W, \quad a(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in W_0. \quad (0.2)$$

Изучению задачи (0.1)–(0.2) посвящено много работ (см. библиографию в [6; 11]). В настоящий момент нет общей теории задачи (0.1), известны лишь отдельные результаты, которые в своей основе получены еще в середине прошлого века на начальном пути исследования задачи. Корректность задачи исследована для частного случая $|a| > |b|$, а также в вырожденных случаях: $|a| = |b|$; $b \in W_+$; b — рациональная функция.

Ниже для простоты краевую задачу (0.1)–(0.2) будем называть задачей Маркушевича.

Рассмотрим также уравнение в свертках второго рода на конечном интервале $(0, \tau)$ (известное также под названием усеченного уравнения Винера — Хопфа):

$$u(t) - \int_0^\tau k(t-s)u(s) ds = f(t), \quad t \in (0, \tau), \quad (0.3)$$

где

$$k \in L_1(R), \quad f \in L_1(0, \tau), \quad \tau > 0. \quad (0.4)$$

Легко видеть, что значения функции $k(t)$ вне интервала $(-\tau, \tau)$ не влияют на решение уравнения (0.3). Для удобства считаем, что $k(t)$ — заданная функция при $t \in (-\tau, \tau)$ и произвольная (из L_1) при $t \notin (-\tau, \tau)$.

Решение $u(t)$ уравнения (0.3) при условии (0.4) будем искать в $L_1(0, \tau)$.

Развитой теории интегральных уравнений в свертках (0.3) также не существует. Отметим следующие частные случаи исследования уравнения (0.3): норма интегрального оператора меньше 1; ядро интегрального оператора является периодической функцией с периодом τ ; длина интервала τ — достаточно большое положительное число. Также изучался вырожденный случай, когда образ Фурье ядра — рациональная функция.

В работах автора [6; 7] найдена (эквивалентная) связь между задачей Маркушевича (0.1) и уравнением в свертках (0.3). Как следствие такой связи в данной работе будут получены новые условия корректной разрешимости задачи Маркушевича (0.1) и уравнения в свертках (0.3) при следующем ограничении на ядро k :

$$k(t) = k_+(t) + \overline{k_+(-t)}, \quad t \in R, \quad \mathcal{F}k = \mathcal{F}k_+ + \overline{\mathcal{F}k_+}. \quad (0.5)$$

где $k_+(t) = \theta(t)k(t)$, θ — функция Хевисайда. Другими словами, результаты исследования усеченного уравнения Винера — Хопфа (задачи Маркушевича) в перечисленных выше частных случаях будут перенесены на задачу Маркушевича (усеченное уравнение Винера — Хопфа). Кроме того, будут найдены новые условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера — Хопфа (задачи (0.3)–(0.5)), которые не следуют из известных результатов для задачи Маркушевича.

Для полноты изложения приведем некоторые результаты из [6; 7], которые будут использоваться в данной статье. Для этого рассмотрим две краевые задачи Римана, являющиеся аналогами задачи (0.1) и уравнения в свертках (0.3) соответственно.

Рассмотрим первую краевую задачу Римана на $\mathbb{R}$ (аналог задачи Маркушевича (0.1)–(0.2)). В ней требуется определить вектор-функцию $\Psi^+ \in W_{0+}^{2 \times 1}$ из краевого условия

$$\Psi^+(x) = M(x)\overline{\Psi^+(x)} + q(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.6)$$

где

$$M \in \mathcal{G}W^{2 \times 2}, \quad q \in W_0^{2 \times 1}, \quad M = \frac{1}{\bar{a}} \begin{pmatrix} b & |a|^2 - |b|^2 \\ 1 & -\bar{b} \end{pmatrix}, \quad (0.7)$$

$$q_1 = \frac{\bar{a}c - b\bar{c}}{\bar{a}}, \quad q_2 = -\frac{\bar{c}}{\bar{a}}. \quad (0.8)$$

Здесь и далее классы функций $W_0^{2 \times 1}$ и $W_{0\pm}^{2 \times 1}$ определены по аналогии с классами $W_0^{2 \times 2}$ и $W_{0\pm}^{2 \times 2}$ соответственно. Например, условие $\Psi^+ \in W_{0+}^{2 \times 1}$ означает, что

$$\Psi^+ = (\Psi_1^+, \Psi_2^+)^T, \quad \Psi_j^+ \in W_{0+}, \quad j = 1, 2,$$

где T — знак транспонирования.

Справедлива следующая (см. [5; 10, § 3])

Лемма 1. Для существования решения задачи Маркушевича (0.1)–(0.2) необходимо и достаточно существования решения краевой задачи Римана (0.6)–(0.8). Эквивалентность этих двух задач устанавливается равенствами

$$\varphi^+(x) = \Psi_1^+(x), \quad \varphi^-(x) = \overline{\Psi_2^+(x)}.$$

Приведем теперь вторую краевую задачу Римана (аналог уравнения в свертках (0.3) при условии (0.4)). Для вектор-функций $\Phi^\pm \in W_{0\pm}^{2 \times 1}$ рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$ краевую задачу Римана

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.9)$$

где

$$G(x) = -\frac{1}{\Lambda^-(x)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau} \mathcal{F}k_-(x) \\ e^{-ix\tau} \mathcal{F}k_+(x) & 1 - \mathcal{F}k_-(x) - \mathcal{F}k_+(x) \end{pmatrix}, \quad (0.10)$$

$$k_{\pm}(t) = \theta(\pm t)k(t), \quad \mathcal{F}k_{\pm}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} k_{\pm}(t) dt, \quad \Lambda^{\pm}(x) = 1 - \mathcal{F}k_{\pm}(x),$$

$$g_1(x) = \frac{\mathcal{F}f(x)}{\Lambda^-(x)} \mathcal{F}k_-(x), \quad g_2(x) = \frac{\mathcal{F}f(x)}{\Lambda^-(x)} e^{-ix\tau} \mathcal{F}k_+(x). \quad (0.11)$$

Определим на алгебре W_0 дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по формулам

$$P_0^{\pm} : W_0 \rightarrow W_{0\pm}, \quad P_0^{\pm} \mathcal{F}g_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} g_0(t) \theta(\pm t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $g_0 \in L_1(\mathbb{R})$.

Справедлива (см. [7, лемма 2; 4, теорема 1])

Лемма 2. Задача (0.3)–(0.4) эквивалентна краевой задаче Римана (0.9)–(0.11) с дополнительным условием

$$\widehat{u}_1(x) := \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau} \Phi_2^-(x) + \mathcal{F}f(x) \in W_{0+}, \quad e^{-ix\tau} \widehat{u}_1(x) \in W_{0-}. \quad (0.12)$$

Решения задачи (0.3)–(0.4) и краевой задачи (0.9)–(0.12) связаны равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \mathcal{F}k_-(x) \mathcal{F}u(x), \quad \Phi_2(x) = e^{-ix\tau} \mathcal{F}k_+(x) \mathcal{F}u(x), \\ \mathcal{F}u(x) &= \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau} \Phi_2^-(x) + \mathcal{F}f(x), \quad \widehat{u}_1(x) = \mathcal{F}u(x), \end{aligned}$$

где

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^-, \quad \Phi^{\pm}(x) = P_0^{\pm} \Phi(x).$$

Если выполнено неравенство

$$\Lambda^{\pm}(x) \neq 0,$$

то матрица $G(x)$ принадлежит $\mathcal{GW}^{2 \times 2}$ и допускает левую и правую стандартные факторизации с суммарным индексом $\varkappa_0$:

$$\varkappa_0 = \text{Ind det } G(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \Delta_{\mathbb{R}} \arg \det G(x) = \text{Ind} \frac{\Lambda^+(x)}{\Lambda^-(x)} \geq 0.$$

Вернемся к задаче $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения. Отметим, что коэффициент $b(x)$ в задаче (0.1)–(0.2) как элемент алгебры W имеет следующий общий вид:

$$b(x) = C + b^-(x) + b^+(x),$$

где

$$b^\pm(x) = \mathcal{F}\{\beta(t)\theta(\pm t)\}(x), \quad \beta \in L_1(R), \quad C = \text{const}.$$

При $\beta(t) = 0$, $t < -\tau$, положим

$$b_\tau^-(x) := b^-(x) \equiv \mathcal{F}\{\beta(t)\theta(-t)\}(x) = \int_{-\tau}^0 e^{itx} \beta(t) dt. \quad (0.13)$$

Легко видеть, что

$$b_\infty^- \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} b_\tau^- = b^-.$$

Фактически, в настоящей работе будем рассматривать случай, когда b^- имеет вид (0.13).

Не уменьшая общности, будем полагать (см., например, [6]), что коэффициенты a и b задачи Маркушевича (0.1) имеют следующий вид:

$$a(x) = \prod_{j=1}^{j=\nu} \frac{x - z_j}{x - \bar{z}_j} =: p^\nu \quad (a = 1, \nu = 0), \quad b = b^+ + b^- \in W_0, \quad (0.14)$$

где ν — неотрицательное целое число, $\text{Im } z_j > 0$, $j = 1, \dots, \nu$ при $\nu > 0$.

Будем говорить, что функция b^- из класса $B_{\tau, \nu}^-$ ($b^- \in B_{\tau, \nu}^-$), если выполняется равенство

$$b^-(x) = P_0^- \left\{ e^{-ix\tau} p^\nu \frac{\mathcal{F}k_+(x)}{1 - \mathcal{F}k_+(x)} \right\}, \quad (0.15)$$

где

$$\Lambda^+(x) \equiv 1 - \mathcal{F}k_+(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.16)$$

$$\nu = \text{Ind } \Lambda^+(x), \quad \Lambda^+(z_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \nu \quad \text{при } \nu > 0.$$

Можно видеть, что из (0.15)–(0.16) вытекает (0.13).

Сформулируем теперь теорему и следствие из нее, которые доказаны в [7, теорема 1, следствие 1].

Теорема 1. Пусть выполнены условия (0.4)–(0.5), (0.14) и

$$b^- \in B_{\tau, \nu}^-. \quad (0.17)$$

Тогда матричные коэффициенты краевых задач Римана (0.9)–(0.11) и (0.6)–(0.8), соответственно матрицы $G(x)$ и $M(x)$, имеют одинаковый набор (левых) частных индексов.

Более того, справедливо равенство

$$M(x) = -\left\{\frac{1}{\Lambda_0^+(x)}, 1\right\} I_1 G(x) \{\overline{\Lambda_0^+(x)}, 1\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.18)$$

где

$$\Lambda_0^+ = p^{-\nu} \Lambda^+, \quad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для справедливости теоремы 1 достаточно доказать равенство (0.18). Справедливость же последнего устанавливается непосредственным перемножением матриц в правой части равенства в (0.18).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\nu = 0$. Тогда задача Маркушевича (0.1)–(0.2) корректно разрешима (решение существует, единственно и устойчиво по отношению к коэффициентам задачи a, b, c в норме алгебры Винера) тогда и только тогда, когда однородное уравнение (0.3) имеет лишь тривиальное решение.

Замечание. Необходимо отметить, что (при выполнении условий (0.4)–(0.5) и (0.16) при $\nu = 0$) интегральное уравнение (0.3) корректно разрешимо для любого $f \in L_1(0, \tau)$, если однородное интегральное уравнение (0.3) имеет только тривиальное решение. Это следует из равенства нулю левых частных индексов матрицы $G(x)$ (см. [6, доказательство следствия 1]).

§1. Усеченное уравнение Винера — Хопфа

В [1] показано, что задача Маркушевича (0.1)–(0.2) корректно разрешима, если выполнены условия: $|a| > |b|$, $\text{Ind} a(x) = 0$. Найдем отражение этого результата для уравнения в свертках (0.3). Получим достаточные условия (не известные ранее) корректной разрешимости усеченного уравнения Винера — Хопфа (0.3).

Положим

$$\|k_+\|_1 := \int_0^\infty |k_+(s)| ds.$$

Справедливы следующие две теоремы, в которых для простоты считаем, что $k(t) := 0$, $|t| > \tau$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (0.4)–(0.5) и

$$k(t) = 0, \quad |t| < \tau/2. \quad (1.1)$$

Если

$$\|k\|_1 \equiv \int_{-\tau}^\tau |k(s)| ds < 2, \quad (1.2)$$

то усеченное уравнение Винера — Хопфа (0.3) корректно разрешимо.

Доказательство. Рассмотрим сопутствующую (к уравнению (0.3)) задачу Маркушевича (0.1)–(0.2) при $a = 1$ ($\nu = 0$). Не уменьшая общности, считаем (см. [6]), что $b(x) = b^-(x)$.

Покажем, что из условий теоремы 2 вытекает условие принадлежности (0.17). В самом деле, из (1.1)–(1.2) и (0.5) следует, что

$$\int_{-\tau}^{\tau} |k(s)| ds = 2 \int_{\tau/2}^{\tau} |k_+(s)| ds < 2.$$

Значит,

$$\|k_+\|_1 < 1. \quad (1.3)$$

Положив

$$b^-(x) := P_0^- \left\{ e^{-ix\tau} \frac{\mathcal{F}k_+(x)}{1 - \mathcal{F}k_+(x)} \right\},$$

получим выполнение условия (0.17) (по определению) и следующую цепочку равенств:

$$b^-(x) = P_0^- \left\{ e^{-ix\tau} \mathcal{F}k_+(x) \left(1 + \frac{\mathcal{F}k_+(x)}{1 - \mathcal{F}k_+(x)} \right) \right\} = e^{-ix\tau} \mathcal{F}k_+(x) \quad (1.4)$$

ввиду того, что

$$\mathcal{F}k_+(x) = e^{ix\tau/2} \int_0^{\tau/2} e^{ixs} k(s + \tau/2) ds, \quad e^{-ix\tau} \frac{(\mathcal{F}k_+(x))^2}{1 - \mathcal{F}k_+(x)} \in W_{0+}.$$

Из равенства левой и правой частей цепочки равенств (1.4) и неравенства (1.3) выводим оценку

$$|b^-(x)| \leq |\mathcal{F}k_+(x)| < 1.$$

Тогда из [1] получим, что сопутствующая задача Маркушевича (0.1)–(0.2) корректно разрешима. Из следствия 1 и замечания к нему вытекает теорема 2. $\square$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (0.4)–(0.5) и

$$|1 - \mathcal{F}k_+(x)| > \|k_+\|_1. \quad (1.5)$$

Тогда оба частных индекса матрицы $G(x)$ (в лемме 2) равны

$$\nu := \text{Ind}(1 - \mathcal{F}k_+(x)).$$

Если $\nu = 0$, то усеченное уравнение Винера — Хопфа (0.3) корректно разрешимо.

Доказательство. Рассмотрим сопутствующую (к уравнению (0.3)) задачу Маркушевича (0.1)–(0.2) при $a = 1$:

$$b(x) = e^{-ix\tau} \frac{\mathcal{F}k_+(x)}{1 - \mathcal{F}k_+(x)}.$$

Из вышестоящего равенства и условия (1.5) находим следующую оценку для модуля коэффициента $b(x)$:

$$|b(x)| = \frac{|\mathcal{F}k_+(x)|}{|1 - \mathcal{F}k_+(x)|} < 1.$$

Согласно [1] при $\nu = 0$ получим, что сопутствующая задача Маркушевича (0.1)–(0.2) корректно разрешима. Тогда из следствия 1 и замечания к нему вытекает справедливость теоремы 3 в случае $\nu = 0$.

Рассмотрим случай $\nu \geq 0$. Из условия $|b| < 1$ с учетом [10, теорема 3] получим, что оба частных индекса матрицы $M(x)$ (в лемме 1) равны ν . Значит, оба частных индекса матрицы $G(x)$ также равны ν , что следует из теоремы 1. $\square$

Приведем достаточные условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера — Хопфа (0.3), полученные из других соображений (без использования задачи Маркушевича).

Теорема 4. Пусть справедливы условия (0.4)–(0.5) и выполнены неравенства

$$1 - \mathcal{F}k(x) \neq 0, \quad x \in R, \quad (1.6)$$

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) \neq 0, \quad x \in R. \quad (1.7)$$

Тогда оба частных индекса матрицы $G(x)$ (в лемме 2) равны

$$\nu := \text{Ind}(1 - \mathcal{F}k_+(x)).$$

Если $\nu = 0$, то усеченное уравнение Винера — Хопфа (0.3) корректно разрешимо.

Доказательство. Из неравенства в (1.6) и условия симметрии (0.5) следует существование канонической факторизации функции $1 - \mathcal{F}k(x)$:

$$1 - \mathcal{F}k(x) = X^+(x) \overline{X^+}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $X^+ \in \mathcal{GW}_+^{2 \times 1}$.

Положив

$$M(x) := -\overline{\Lambda^+}(x) \left\{ 1, \frac{1}{X^+(x)} \right\} G(x) \left\{ 1, \frac{1}{\overline{X^+}(x)} \right\},$$

получим

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau} \overline{\mathcal{F}k_+}(x) \frac{1}{\overline{X^+}(x)} \\ e^{-ix\tau} \mathcal{F}k_+(x) \frac{1}{X^+(x)} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{GW}^{2 \times 2}.$$

Покажем, что оба частных индекса матрицы $M(x)$ равны 0, что и завершит основную часть доказательства теоремы 4.

Через $M^*(x)$ обозначим матрицу, эрмитово сопряженную к матрице $M(x)$. Положив

$$M_R(x) := \frac{1}{2}(M(x) + M^*(x)),$$

имеем

$$M_R(x) = I.$$

Тогда из [8, теорема 8.1] следует, что оба частных индекса матрицы $M(x)$ равны 0. Следовательно, частные индексы матрицы $G(x)$ равны ν по построению. При $\nu = 0$ по лемме 2 однородная задача (0.3)–(0.5) имеет единственное тривиальное решение. По замечанию к следствию 1 получим справедливость теоремы 4 при $\nu = 0$. $\square$

Легко видеть, что неравенство в (1.6) заведомо выполнено, если

$$\mathcal{F}k_+(x) + \overline{\mathcal{F}k_+(x)} < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим два примера к теореме 4.

1. Пусть $\|k_+\|_1 < 1/2$. Тогда оба неравенства (1.6) и (1.7) будут выполнены, и по теореме 4 задача (0.3)–(0.5) корректно разрешима. С другой стороны, из неравенства $\|k\|_1 < 1$ по теореме Банаха об обратном операторе получим, что уравнение (0.3) (при условии (0.4)) имеет единственное решение в $L_1(0, \tau)$, представимое в виде абсолютно сходящегося ряда Неймана. Следовательно, уравнение (0.3) корректно разрешимо.

2. Пусть τ — достаточно большое число. Тогда из неравенства в (1.6) (неравенство в (1.7) может не выполняться) по теореме 7.2 из [9] получим существование и единственность решения задачи (0.3)–(0.5).

Пользуясь случаем, сделаем замечание к работе [2], где рассматривалась задача (0.3)–(0.4) с четным ядром. В упомянутой работе пропущено неравенство (1.6), а именно, в условия теорем 1–2 и леммы 1 из [2] необходимо (для выполнения теорем 1–2 и леммы 1) добавить следующее ограничение:

$$1 - \mathcal{F}k(x) \neq 0, \quad x \in R, \quad \mathcal{F}k(x) = \overline{\mathcal{F}k(x)}.$$

§2. Задача Маркушевича

Приведем теперь условия корректной разрешимости задачи Маркушевича (0.1)–(0.2) (при условии (0.13)), которые вытекают из известных результатов для усеченного уравнения Винера — Хопфа.

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\|k\|_1 \equiv \int_{-\tau}^{\tau} |k(s)| ds < 1. \quad (2.1)$$

Теорема 5. Пусть выполнено неравенство в (2.1) и условия (0.14) и (0.17). Тогда оба частных индекса матрицы $M(x)$ (в лемме 1) равны ν . Если $\nu = 0$, то задача Маркушевича (0.1)–(0.2) корректно разрешима.

Если $\nu \geq 0$ и

$$c(x) = b(x)\mathcal{F}f(x), \quad f(t) = -\overline{f(\tau - t)}, \quad t \in (0, \tau),$$

то задача Маркушевича (0.1)–(0.2) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \varphi^-(x) &= \frac{1}{2}(\overline{\Phi_1^+(x)} - \Phi_2^-(x)), \\ \varphi^+(x) &= \frac{1}{2\Lambda^+(x)}(\Phi_2^+(x) - \overline{\Phi_1^-(x)}) + b^+(x)\overline{\varphi^-(x)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \overline{\mathcal{F}k_+(x)}\mathcal{F}u(x), \quad \Phi_2(x) = e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\mathcal{F}u(x), \\ \Phi^\pm(x) &= P_0^\pm\Phi(x). \end{aligned}$$

Доказательство. Из неравенства (2.1) следует, что уравнение (0.3) корректно разрешимо. Тогда первая часть теоремы 5 следует из теоремы 1 и следствия 1. Вторая часть теоремы 5 непосредственно следует из [7, теорема 2]. $\square$

В следующем случае считаем, что ядро $k(t)$ является периодической функцией на интервале $(-\tau, \tau)$ с периодом τ . В этом случае усеченное уравнение Винера — Хопфа детально исследовано в [3].

Пусть $\mathcal{N}$ — множество целых чисел. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 &:= \{m \in \mathcal{N} : \Lambda^+(x_m) = 0, \text{ где } x_m = 2m\pi/\tau\}, \\ \left(\Lambda^+(x) &= 1 - \int_0^\tau e^{ixt}k_+(t)dt, \quad x \in R, \quad k(t) := 0, \quad |t| > \tau \right). \end{aligned}$$

Из соотношения

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Lambda^+(x) = 1$$

и явного вида для целой аналитической функции Λ^+ следует, что $\mathcal{N} \supset \mathcal{N}_0$ — конечное множество (с числом элементов n_0). Ясно, что $n_0 = 0$ при $\mathcal{N}_0 = \emptyset$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (0.14), (0.17) при $\nu = 0$ и функция $k_+(t)$ удовлетворяет следующему равенству:

$$k_+(t) = \overline{k_+(\tau - t)}, \quad t \in (0, \tau). \quad (2.3)$$

Тогда задача Маркушевича (0.1)–(0.2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}_0 = \emptyset$.

В противном случае, если $\mathcal{N}_0 \neq \emptyset$, общее решение однородной ($c = 0$) задачи Маркушевича (0.1)–(0.2) вычисляется по формулам (2.2), где

$$\mathcal{F}u(x) = Q_0^+(x)(1 - e^{ix\tau}),$$

$$Q_0^+(x) = \sum_{j=1}^{n_0} c_j(x - x_j)^{-1}, \quad x_j = 2m_j\pi/b, \quad m_j \in \mathcal{N}_0,$$

c_j ($j = 1, \dots, n_0$) — произвольные комплексные постоянные.

Доказательство. Задаче Маркушевича (0.1)–(0.2), (0.14) поставим в соответствие уравнение в свертках второго рода (0.3) при условиях (0.4)–(0.5). По условиям (0.5) и (2.3) имеем

$$k(t) = \overline{k_+(-t)} = k_+(t + \tau) = k(t + \tau), \quad t \in (-\tau, 0),$$

следовательно,

$$k(t) = k(t + \tau), \quad t \in (-\tau, 0). \quad (2.4)$$

Значит, ядро $k(t)$ является периодической функцией на интервале $(-\tau, \tau)$. Тогда из [3, теоремы 1 и 2] непосредственно вытекает

Следствие 2. Пусть выполнены условия (0.4), (2.4). Если $\mathcal{N}_0 = \emptyset$, то интегральное уравнение (0.3) корректно разрешимо в $L_1(0, \tau)$. В противном случае, если $\mathcal{N}_0 \neq \emptyset$, общее решение однородного ($f = 0$) интегрального уравнения (0.3) имеет следующий общий вид:

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Q_0^+(x)(1 - e^{ix\tau})\}(t).$$

Из первой части следствия 2 и следствия 1 вытекает первая часть теоремы 6. Из второй части следствия 2 и статьи [7, теорема 2] при $f = 0$ вытекает вторая часть теоремы 6. $\square$

В случае, когда τ — достаточно большое число, задача Маркушевича исследована в [7, теорема 3].

Рассмотрим теперь случай, когда выполнены условия теоремы 4.

Положим

$$b(x) := \int_{-\tau}^{\infty} e^{itx} \beta(t) dt,$$

$$H_b^+(x) := 1 + e^{ix\tau} b(x) \neq 0, \quad x \in R, \quad (2.5)$$

где $\beta \in L_1(-\tau, \infty)$.

Теорема 7. Пусть справедливы условие (0.14) и неравенство в (2.5) и $\nu = \text{Ind } H_b^+(x) = 0$. Кроме того, пусть выполнено неравенство

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) - \overline{\mathcal{F}k_+(x)} \neq 0, \quad x \in R, \quad (2.6)$$

где

$$\mathcal{F}k_+(x) = \frac{e^{ix\tau}b(x)}{H_b^+(x)}. \quad (2.7)$$

Тогда задача Маркушевича (0.1)–(0.2) корректно разрешима.

Доказательство. Из (2.5) и условия $\nu = 0$ следует, что

$$\frac{1}{H_b^+}, \frac{e^{ix\tau}b}{H_b^+} \in W_+. \quad (2.8)$$

Тогда функция $k_+(t)$ определяется из равенства (2.7) по формуле

$$k_+(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{ix\tau}b(x)}{H_b^+(x)} \right\} (t) \in L_1(0, \infty).$$

Из равенства (2.7) и определения функции H_b^+ в (2.5) получаем

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) = \frac{1}{H_b^+(x)}. \quad (2.9)$$

Из (2.9) и (2.8) следует, что

$$\begin{aligned} 1 - \mathcal{F}k_+(x) &\neq 0, \quad x \in R, \quad \text{Ind}(1 - \mathcal{F}k_+(x)) = 0, \\ H_b^+(x) - 1 &\equiv e^{ix\tau}b(x) = \frac{1}{1 - \mathcal{F}k_+(x)} - 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) получим выполнение условия (0.16), а из последнего равенства вытекает, что

$$b(x) = e^{-ix\tau} \frac{\mathcal{F}k_+(x)}{1 - \mathcal{F}k_+(x)} \in W_0.$$

Таким образом, условие принадлежности (0.17) справедливо по построению.

Поставим теперь задаче Маркушевича (0.1)–(0.2), (0.14) в соответствие уравнение в свертках второго рода (0.3) при условиях (0.4)–(0.5). По теореме 4 задача (0.3)–(0.5) корректно разрешима, так как условия теоремы 4 для $\nu = 0$ выполнены, что следует из неравенств в (2.6) и (2.10). Легко видеть, что выполнены также условия следствия 1, из которого получаем справедливость теоремы 7. $\square$

Список литературы

1. Боярский Б. В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта // *Сообщения АН Груз. ССР*. 1960. Т. 25, № 4. С. 385–390.
2. Воронин А. Ф. Необходимые и достаточные условия корректности для уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с четным ядром // *Сиб. матем. журн.* 2008. Т. 49, № 4. С. 756–767.
3. Воронин А. Ф. Исследование интегрального уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2009. Т. 12, № 1. С. 31–39.
4. Воронин А. Ф. Системы уравнений в свертках 1-го и 2-го рода на конечном интервале и факторизация матриц-функций // *Сиб. матем. журн.* 2012. Т. 53, № 5. С. 978–990.
5. Воронин А. Ф. Условия устойчивости и единственности решения задачи Маркушевича // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2017. Т. 14. С. 511–517.
6. Воронин А. Ф. О связи обобщенной краевой задачи Римана и усеченного уравнения Винера — Хопфа // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2018. Т. 15. С. 412–421.
7. Воронин А. Ф. Обобщенная краевая задача Римана и интегральные уравнения в свертках первого и второго рода на конечном интервале // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2018. Т. 15. С. 1651–1662.
8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // *УМН*. 1958. Т. 13, № 2(80). С. 3–72.
9. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
10. Литвинчук Г. С. Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение // *Изв. вузов. Матем.* 1967. № 12. С. 47–57.
11. Mityushev V. V. $\mathbb{R}$ -Linear and Riemann–Hilbert problems for multiply connected domains // *Advances in Appl. Analysis (Trends Math.)*. Basel: Birkhäuser, 2012. P. 147–176.

Воронин Анатолий Федорович

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: voronin@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
23 января 2019 г.

Получена после доработки
6 февраля 2019 г.

Принята к публикации
27 февраля 2019 г.