Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. A. Zubareva, The spectrum of the Laplace operator on connected compact simple Lie groups of rank four. II, *Mat. Tr.*, 2019, Volume 22, Number 2, 34–53

DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.203>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.157.27.8

April 26, 2023, 18:26:03

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА НЕКОТОРЫХ СВЯЗНЫХ КОМПАКТНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ ЛИ РАНГА ЧЕТЫРЕ. II

И. А. Зубарева

В работе даются явные вычисления спектра оператора Лапласа для гладких вещественных или комплексных функций на связных компактных простых группах Ли ранга четыре с биинвариантной римановой метрикой, отвечающих системам корней A_4 и F_4 .

Ключевые слова и фразы: оператор Лапласа, спектр, представление группы, форма Киллинга, кривизна Риччи.

Введение

В работе [2] изучается спектр оператора Лапласа на гладких вещественных функциях, определенных на компактных однородных нормальных римановых многообразиях. Показано, что эту задачу в некотором смысле можно свести к рассмотрению компактных односвязных (связных) простых групп Ли G с биинвариантной (т. е. инвариантной относительно левых и правых сдвигов) римановой метрикой ν . В последнем случае предлагается алгоритм поиска спектра лапласиана через представления алгебр Ли групп Ли G .

В работе [6] алгоритм поиска лапласиана из [2] обобщен на случай произвольной связной компактной простой группы Ли G , а также вычислены спектры лапласиана всех связных компактных простых групп Ли ранга один и два.

В работе [1] посредством алгоритма поиска лапласиана из [6] проведены явные вычисления спектра лапласиана для всех связных компактных простых групп Ли ранга два и установлена связь полученных формул с теорией чисел и целочисленными тернарными и бинарными квадратичными формами.

Работа [5] посвящена нахождению спектра лапласиана для связных компактных простых групп Ли ранга четыре, отвечающих системам корней B_4 , C_4 и D_4 , и установлена связь полученных формул с теорией чисел

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1.4, проект № 0314-2016-0004.

и целочисленными квадратичными формами двух, трех и четырех переменных.

В данной работе посредством алгоритма поиска лапласиана из [6] проведены явные вычисления спектра связных компактных простых групп ранга четыре, отвечающих системам корней A_4 и F_4 .

§1. Предварительные сведения

Пусть G — связная компактная простая группа Ли с биинвариантной римановой метрикой ν . Множество $\text{Spec}(G, \nu)$ всех собственных значений оператора Лапласа — Бельтрами Δ на гладких вещественных функциях, определенных на (G, ν) , с учетом кратности собственных значений, т. е. размерности пространств соответствующих собственных функций, называется *спектром* оператора Лапласа. Спектр группы Ли (G, ν) можно представить следующим образом:

$$\text{Spec}(G, \nu) = \{0 = \lambda_0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots\}. \quad (1)$$

Лапласиан естественным образом обобщается на комплекснозначные функции.

Определение 1. Билинейная (симметричная) форма k_ρ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, заданная формулой

$$k_\rho(u, v) = \text{trace}(\rho(u)\rho(v)), \quad u, v \in \mathfrak{g},$$

называется *формой, ассоциированной с представлением ρ* .

Форма k_{ad} , где $\text{ad}(u)(v) := [u, v]$ — присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, называется *формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$* .

Из теоремы 1.2 и следствия 1.2 работы [3] вытекает

Предложение 1. Если (G, ν) является связной компактной простой m -мерной группой Ли с биинвариантной римановой метрикой ν , причем $\nu(e) = -k_{\text{ad}}$, то для присоединенного представления Ad группы Ли G

$$\lambda_{\text{Ad}} = -1, \quad \dim \text{Ad} = d_{\text{Ad}} = m, \quad (2)$$

где λ_{Ad} — собственное значение оператора Лапласа, отвечающее присоединенному представлению Ad .

Опуская детали, сразу приведем алгоритм вычисления спектров лапласианов всех групп Ли (G, ν) с фиксированной алгеброй Ли, сформулированный в [6, следствие 5], предполагающий использование табл. I–IX из [4], в которых ρ обозначает вектор β .

Теорема 1. Для вычисления спектров лапласианов всех связных компактных простых групп Ли G с простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ с системой корней Γ и биинвариантной римановой метрикой ν с условием $\nu(e) = -\gamma k_{\text{ad}}$, где $\gamma > 0$, нужно выполнить следующие действия:

- 1) вычислить выражение $b = \langle \tilde{\alpha} + \beta, \tilde{\alpha} + \beta \rangle - \langle \beta, \beta \rangle$, где $\tilde{\alpha}$ — старший (максимальный) корень, предполагая, что относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$) векторы ε_i из соответствующей таблицы в [4] взаимно ортогональны и единичны;
- 2) взять скалярное произведение $(\cdot, \cdot) = \frac{1}{b} \langle \cdot, \cdot \rangle$;
- 3) найти фундаментальные веса $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_l$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G (если $\mathfrak{g}$ имеет ранг l) по соответствующей таблице из [4];
- 4) для каждого старшего веса $\Lambda \in \Lambda_1^+(\Gamma)$, т. е. для каждого

$$\Lambda = \sum_{i=1}^l \Lambda_i \bar{\omega}_i, \quad \text{где } \Lambda_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, l,$$

найти собственное число $\lambda(\Lambda)$ оператора Лапласа, отвечающее старшему весу Λ , по формуле

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{\gamma} [\langle \Lambda + \beta, \Lambda + \beta \rangle - \langle \beta, \beta \rangle] \quad (3)$$

и размерность $d(\Lambda + \beta)$ неприводимого комплексного представления комплексной оболочки алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшим весом Λ по формуле

$$d(\Lambda + \beta) = \prod_{\alpha \in \Gamma^+} \frac{(\Lambda + \beta, \alpha)}{(\beta, \alpha)}; \quad (4)$$

- 5) для каждой решетки $\Lambda(G)$, удовлетворяющей соотношению

$$\Lambda_0(\Gamma) \subseteq \Lambda(G) \subseteq \Lambda_1(\Gamma),$$

где $\Lambda_0(\Gamma)$ и $\Lambda_1(\Gamma)$ — решетки, порожденные простыми корнями и фундаментальными весами, найденные в п. 1 и п. 3 соответственно, G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая характеристической решетке $\Lambda(G)$, выполнить следующие три пункта:

- 6) найти множество старших весов $\Lambda^+(G) = \Lambda(G) \cap \Lambda_1^+(\Gamma)$, задав его через фундаментальные веса $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_l$;
- 7) для каждого старшего веса $\Lambda \in \Lambda^+(G)$ на основании п. 4 найти собственное значение $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda + \beta)$ неприводимого комплексного представления, отвечающих весу Λ ;
- 8) найти кратность каждого собственного значения λ по формуле

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\Lambda: \lambda(\Lambda) = \gamma \lambda} \prod_{\alpha \in \Gamma^+} \left(\frac{(\Lambda + \beta, \alpha)}{(\beta, \alpha)} \right)^2, \quad (5)$$

получив таким образом спектр $\text{Spec}(G, \nu)$ группы Ли G , отвечающей характеристической решетке $\Lambda(G)$.

В итоге получаем все спектры $\text{Spec}(G, \nu)$ групп Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и метрикой ν .

Замечание 1. В формулах (4) и (5), применяемых в п. 4 и п. 8 теоремы 1, вместо $(\cdot, \cdot)$ можно использовать любое пропорциональное ему скалярное произведение, в частности, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из п. 1 теоремы 1.

Основную роль в классификации простых групп с заданной алгеброй Ли играет максимальная фундаментальная группа $\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda_0(\Gamma)$. Справедливо следующее утверждение (см., например, [1]).

Предложение 2. Предположим, что максимальная фундаментальная группа $\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda_0(\Gamma)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет простой порядок. Тогда семейство неизоморфных связных компактных групп Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ состоит из двух групп: односвязной группы Ли G_1 с центром $\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda_0(\Gamma)$ и решеткой весов $\Lambda_1(\Gamma)$, совпадающей с решеткой весов алгебры Ли $\Lambda(\mathfrak{g})$, и группы Ли G_0 без центра с фундаментальной группой $\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda_0(\Gamma)$ и решеткой весов $\Lambda_0(\Gamma)$.

Из описания всех неприводимых систем корней в [4, табл. I–IX] видим, что различных неприводимых систем ранга четыре всего пять: A_4 , B_4 , C_4 , D_4 , F_4 .

Таблица 1. Связные компактные простые группы Ли ранга четыре, отвечающие системам корней A_4 , F_4

Группа Ли G	Γ	$\Lambda(G)$	$\pi_1(G)$	$C(G)$	$\dim G$
$SU(5)$	A_4	Λ_1	0	$\mathbb{Z}_5$	24
$PSU(5) := SU(5)/C(SU(5))$	A_4	Λ_0	$\mathbb{Z}_5$	0	24
F_4	F_4	Λ_1	0	0	52

Используя теорему 1 и табл. 1, в следующих разделах найдем спектры лапласиана всех связных компактных простых групп Ли ранга четыре, отвечающих системам корней A_4 и F_4 .

§2. Вычисление спектра лапласиана групп $SU(5)$ и $PSU(5)$

Из табл. 1 следует, что рассматриваемым группам Ли отвечает система корней A_4 . Применяем табл. I из [4].

Простые корни:

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

максимальный корень $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_5$.

Положительные корни:

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 5.$$

Сумма положительных корней равна $2\beta = 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_4 - 4\varepsilon_5$, откуда

$$\beta = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - 2\varepsilon_5, \quad \tilde{\alpha} + \beta = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - 3\varepsilon_5. \quad (6)$$

Действуем согласно алгоритму, приведенному в теореме 1.

$$1) b = \langle \tilde{\alpha} + \beta, \tilde{\alpha} + \beta \rangle - \langle \beta, \beta \rangle = 20 - 10 = 10.$$

$$2) (\cdot, \cdot) = \frac{1}{10} \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

3) Фундаментальные веса имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \frac{4\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5}{5}, & \bar{\omega}_2 &= \frac{3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 - 2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_5}{5}, \\ \bar{\omega}_3 &= \frac{2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 - 3\varepsilon_4 - 3\varepsilon_5}{5}, & \bar{\omega}_4 &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - 4\varepsilon_5}{5}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\tilde{\alpha} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_4, \quad \beta = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4.$$

4) Пусть

$$\Lambda = \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \bar{\omega}_i, \quad \text{где } \Lambda_i \in \mathbb{Z}, \quad \Lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda + \beta &= \sum_{i=1}^4 (\Lambda_i + 1) \bar{\omega}_i \\ &= \frac{1}{5} [(4\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)\varepsilon_1 + (-\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)\varepsilon_2 \\ &\quad + (-\nu_1 - 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)\varepsilon_3 + (-\nu_1 - 2\nu_2 - 3\nu_3 + \nu_4)\varepsilon_4 \\ &\quad - (\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + 4\nu_4)\varepsilon_5], \end{aligned} \quad (7)$$

где $\nu_i = \Lambda_i + 1$, $\nu_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, 4$,

Найдем собственное значение $\lambda(\Lambda)$, соответствующее старшему весу Λ , по формуле (3):

$$\begin{aligned} \lambda(\Lambda) &= -\frac{1}{250\gamma} [(4\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 + (-\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 \\ &\quad + (-\nu_1 - 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 + (-\nu_1 - 2\nu_2 - 3\nu_3 + \nu_4)^2 \\ &\quad + (\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + 4\nu_4)^2 - 250]. \end{aligned}$$

Проводя рутинные вычисления, получаем, что

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{50\gamma} [4\nu_1^2 + 6\nu_1\nu_2 + 4\nu_1\nu_3 + 2\nu_1\nu_4 + 6\nu_2^2 + 8\nu_2\nu_3 + 4\nu_2\nu_4 + 6\nu_3^2 + 6\nu_3\nu_4 + 4\nu_4^2 - 50]. \quad (8)$$

Вычислим размерность $d(\Lambda + \beta)$ представления $\rho(\Lambda)$, отвечающего старшему весу Λ , по формуле (4):

$$\begin{aligned} d(\Lambda + \beta) &= \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_4)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_5)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_5)} \\ &\times \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_3)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_5)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_5)} \\ &\times \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_4)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_5)}{(\beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_5)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_4 - \varepsilon_5)}{(\beta, \varepsilon_4 - \varepsilon_5)}. \end{aligned}$$

На основании (6) и (7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)} &= \nu_1, & \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_3)} &= \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \\ \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_4)} &= \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{3}, & \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_5)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_5)} &= \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4}{4}, \\ \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_3)} &= \nu_2, & \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)} &= \frac{\nu_2 + \nu_3}{2}, \\ \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_5)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_5)} &= \frac{\nu_2 + \nu_3 + \nu_4}{3}, & \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_4)} &= \nu_3, \\ \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_5)}{(\beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_5)} &= \frac{\nu_3 + \nu_4}{2}, & \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_4 - \varepsilon_5)}{(\beta, \varepsilon_4 - \varepsilon_5)} &= \nu_4. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d(\Lambda + \beta) &= \frac{1}{288} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 (\nu_1 + \nu_2) (\nu_2 + \nu_3) (\nu_3 + \nu_4) (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) \\ &\times (\nu_2 + \nu_3 + \nu_4) (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4). \end{aligned} \quad (9)$$

Замечание 2. Из (8) и (9) вытекает, что

$$\lambda(\Lambda) = 0 \Leftrightarrow \Lambda = 0 \Leftrightarrow \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4,$$

и, следовательно, $\sigma(\lambda_0) = d^2(0 + \beta) = 1$, что соответствует формуле (1). Кроме того, на основании предложения 1 старшим весом присоединенного представления Ad является максимальный корень $\tilde{\alpha} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_4$, для

которого $\nu_1 = \nu_4 = 2$ и $\nu_2 = \nu_3 = 1$. Поэтому собственное значение и размерность представления Ad можно вычислить следующим образом:

$$\lambda_{\text{Ad}} = \lambda(\tilde{\alpha}) = -\frac{1}{50\gamma}(16 + 12 + 8 + 8 + 6 + 8 + 8 + 6 + 12 + 16 - 50) = -\frac{1}{\gamma},$$

$$\dim \text{Ad} = d(\tilde{\alpha} + \beta) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}{288} = 24,$$

что соответствует формуле (2) при $\gamma = 1$ с учетом равенства $\dim \text{SU}(5) = 24$ из табл. 1.

5) Указанные выше простые корни и фундаментальные веса алгебры Ли $\mathfrak{su}(5)$ задают решетки $\Lambda_0(A_4)$ и $\Lambda_1(A_4)$ соответственно следующим образом:

$$\Lambda_0(A_4) = \left\{ \sum_{i=1}^4 \Psi_i \alpha_i \mid \Psi_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \right\},$$

$$\Lambda_1(A_4) = \left\{ \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \bar{\omega}_i \mid \Lambda_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \right\}. \quad (10)$$

После выражения корней через фундаментальные веса

$$\alpha_1 = 2\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2, \quad \alpha_2 = -\bar{\omega}_1 + 2\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3, \quad \alpha_3 = -\bar{\omega}_2 + 2\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_4, \quad \alpha_4 = -\bar{\omega}_3 + 2\bar{\omega}_4$$

и замены переменных:

$$\begin{cases} \Psi_1 = 4\Omega_1 - \Omega_2 - 2\Omega_3 - 3\Omega_4, \\ \Psi_2 = 3\Omega_1 - \Omega_3 - 2\Omega_4, \\ \Psi_3 = 2\Omega_1 - \Omega_4, \\ \Psi_4 = \Omega_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega_1 = \Psi_4, \\ \Omega_2 = -\Psi_1 + 2\Psi_2 - \Psi_3, \\ \Omega_3 = -\Psi_2 + 2\Psi_3 - \Psi_4, \\ \Omega_4 = -\Psi_3 + 2\Psi_4; \end{cases}$$

решетка $\Lambda_0(A_4)$ приобретает следующий вид:

$$\Lambda_0(A_4) = \left\{ 5\Omega_1 \bar{\omega}_1 + \Omega_2(\bar{\omega}_2 - 2\bar{\omega}_1) + \Omega_3(\bar{\omega}_3 - 3\bar{\omega}_1) + \Omega_4(\bar{\omega}_4 - 4\bar{\omega}_1) \mid \Omega_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \right\}. \quad (11)$$

Определим решетку $\Lambda_1(A_4)$ в базисе $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 - 2\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3 - 3\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_4 - 4\bar{\omega}_1\}$ посредством замены переменных $\Lambda_1 = \Omega_1 - 2\Omega_2 - 3\Omega_3 - 4\Omega_4$, $\Lambda_2 = \Omega_2$, $\Lambda_3 = \Omega_3$, $\Lambda_4 = \Omega_4$:

$$\Lambda_1(A_4) = \left\{ \Omega_1 \bar{\omega}_1 + \Omega_2(\bar{\omega}_2 - 2\bar{\omega}_1) + \Omega_3(\bar{\omega}_3 - 3\bar{\omega}_1) + \Omega_4(\bar{\omega}_4 - 4\bar{\omega}_1) \mid \Omega_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \right\}. \quad (12)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\Lambda_0(A_4) \subset \Lambda_1(A_4) \quad \text{и} \quad \Lambda_1(A_4)/\Lambda_0(A_4) \cong \mathbb{Z}_5,$$

т. е. $\Lambda_1(A_4)/\Lambda_0(A_4)$ имеет простой порядок. Отсюда на основании следствия 2 заключаем, что других решеток нет. Группы Ли, отвечающие данным характеристическим решеткам, приведены в табл. 1.

а) Приведем формулы, задающие спектр лапласиана группы Ли $SU(5)$.

6а) Множество старших весов группы Ли $SU(5)$ получаем из формулы (10):

$$\Lambda^+(SU(5)) = \left\{ \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \bar{\omega}_i \mid \Lambda_i \in \mathbb{Z}, \Lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

7а) Пусть

$$\Lambda = \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \bar{\omega}_i \in \Lambda^+(SU(5)).$$

Тогда на основании п. 4 собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda + \beta)$ вычисляются по формулам (8) и (9) соответственно, где $\nu_i = \Lambda_i + 1$, $\nu_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

8а) Применяя формулу (5) и результаты предыдущего пункта, получаем кратность собственного значения λ :

$$\sigma(\Lambda) = \frac{1}{288^2} \sum_{\Xi_1} \nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2 \nu_4^2 (\nu_1 + \nu_2)^2 (\nu_2 + \nu_3)^2 (\nu_3 + \nu_4)^2 (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)^2 \times (\nu_2 + \nu_3 + \nu_4)^2 (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4)^2,$$

где

$$\Xi_1 = \{ 4\nu_1^2 + 6\nu_1\nu_2 + 4\nu_1\nu_3 + 2\nu_1\nu_4 + 6\nu_2^2 + 8\nu_2\nu_3 + 4\nu_2\nu_4 + 6\nu_3^2 + 6\nu_3\nu_4 + 4\nu_4^2 = 50 - 50\gamma\lambda \mid \nu_i \in \mathbb{N} \}. \quad (13)$$

Наименьшее по модулю ненулевое значение лапласиана равно $-\frac{12}{25\gamma}$ и соответствует неприводимым представлениям группы Ли $SU(5)$ со старшими весами $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_4$. Размерности этих представлений равны 5. Следовательно, кратность собственного значения $-\frac{12}{25\gamma}$ равна $5^2 + 5^2 = 50$.

б) Ниже приводим формулы, которые задают спектр лапласиана группы Ли $PSU(5)$.

6б) Множество старших весов группы Ли $PSU(5)$ получаем из формулы (11):

$$\Lambda^+(PSU(5)) = \{ (5\Omega_1 - 2\Omega_2 - 3\Omega_3 - 4\Omega_4) \bar{\omega}_1 + \Omega_2 \bar{\omega}_2 + \Omega_3 \bar{\omega}_3 + \Omega_4 \bar{\omega}_4 \mid \Omega_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, 4; 5\Omega_1 - 2\Omega_2 - 3\Omega_3 - 4\Omega_4 \geq 0, \Omega_2 \geq 0, \Omega_3 \geq 0, \Omega_4 \geq 0 \}.$$

7б) Пусть

$$\Lambda = \Omega_1 \bar{\omega}_1 + \Omega_2 \bar{\omega}_2 + \Omega_3 \bar{\omega}_3 + 2\Omega_4 \bar{\omega}_4 \in \Lambda^+(PSU(5)).$$

Тогда на основании п.4 собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda + \beta)$ вычисляются по формулам (8) и (9) соответственно, где

$$\nu_1 = 5\Omega_1 - 2\Omega_2 - 3\Omega_3 - 4\Omega_4 + 1, \quad \nu_2 = \Omega_2 + 1, \quad \nu_3 = \Omega_3 + 1, \quad \nu_4 = \Omega_4 + 1, \\ \nu_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + 4\nu_4 \equiv 0.$$

8b) Применяя формулу (5) и результаты предыдущего пункта, получаем кратность собственного значения λ :

$$\sigma(\Lambda) = \frac{1}{288^2} \sum_{\Xi_2} \nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2 \nu_4^2 (\nu_1 + \nu_2)^2 (\nu_2 + \nu_3)^2 (\nu_3 + \nu_4)^2 (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)^2 \\ \times (\nu_2 + \nu_3 + \nu_4)^2 (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4)^2,$$

где

$$\Xi_2 = \{4\nu_1^2 + 6\nu_1\nu_2 + 4\nu_1\nu_3 + 2\nu_1\nu_4 + 6\nu_2^2 + 8\nu_2\nu_3 + 4\nu_2\nu_4 + 6\nu_3^2 + 6\nu_3\nu_4 + 4\nu_4^2 \\ = 50 - 50\gamma\lambda \mid \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + 4\nu_4 \equiv 0 \pmod{5}, \nu_i \in \mathbb{N}\}. \quad (14)$$

Наименьшее по модулю ненулевое собственное значение лапласиана равно -1 и соответствует неприводимому комплексному представлению группы Ли $\text{PSU}(5)$ со старшим весом $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_4$. Размерность этого представления равна 24. Следовательно, кратность собственного значения $-\frac{23}{25\gamma}$ равна $24^2 = 576$.

§3. Вычисление спектра лапласиана для группы F_4

Группе F_4 с алгеброй Ли $\mathfrak{f}_4$ соответствует система корней F_4 . Применим табл. VIII из [4].

Простые корни:

$$\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad \alpha_3 = \varepsilon_4, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4);$$

максимальный корень $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Положительные корни:

$$\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4; \quad \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

Сумма положительных корней равна $2\beta = 11\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4$, откуда

$$\beta = \frac{11\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2}, \quad \tilde{\alpha} + \beta = \frac{13\varepsilon_1 + 7\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2}. \quad (15)$$

Действуем согласно алгоритму, приведенному в теореме 1.

1) $b = \langle \tilde{\alpha} + \beta, \tilde{\alpha} + \beta \rangle - \langle \beta, \beta \rangle = 57 - 39 = 18.$

2) $(\cdot, \cdot) = \frac{1}{18} \langle \cdot, \cdot \rangle.$

3) Фундаментальные веса имеют вид

$$\bar{\omega}_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \bar{\omega}_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \bar{\omega}_3 = \frac{3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2}, \quad \bar{\omega}_4 = \varepsilon_1.$$

Легко видеть, что

$$\tilde{\alpha} = \bar{\omega}_1, \quad \beta = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4.$$

4) Пусть

$$\Lambda = \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \bar{\omega}_i, \quad \text{где } \Lambda_i \in \mathbb{Z}, \quad \Lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda + \beta &= \sum_{i=1}^4 (\Lambda_i + 1) \bar{\omega}_i = \sum_{i=1}^4 \nu_i \bar{\omega}_i \\ &= \frac{1}{2} \left[(2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + 2\nu_4) \varepsilon_1 + (2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3) \varepsilon_2 \right. \\ &\quad \left. + (2\nu_2 + \nu_3) \varepsilon_3 + \nu_3 \varepsilon_4 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\nu_i = \Lambda_i + 1$, $\nu_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Найдем собственное значение $\lambda(\Lambda)$, соответствующее старшему весу Λ , по формуле (3):

$$\begin{aligned} \lambda(\Lambda) &= -\frac{1}{18\gamma} [\langle \Lambda + \beta, \Lambda + \beta \rangle - \langle \beta, \beta \rangle] \\ &= -\frac{1}{72\gamma} \left[(2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + 2\nu_4)^2 + (2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3)^2 \right. \\ &\quad \left. + (2\nu_2 + \nu_3)^2 + \nu_3^2 - 156 \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь вычислим размерность $d(\Lambda + \beta)$ представления $\rho(\Lambda)$, отвечающего старшему весу Λ , по формуле (4):

$$\begin{aligned} d(\Lambda + \beta) &= \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1)}{(\beta, \varepsilon_1)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2)}{(\beta, \varepsilon_2)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_3)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_4)} \\ &\times \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_4)} \\ &\times \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_3)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_4)} \\ &\times \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(\beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_2 + \varepsilon_3)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 + \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_2 + \varepsilon_4)} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_3 + \varepsilon_4)} \\
& \times \frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4))} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4))} \\
& \times \frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4))} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4))} \\
& \times \frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4))} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4))} \\
& \times \frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4))} \cdot \frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4))}.
\end{aligned}$$

На основании (15) и (16) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1)}{(\beta, \varepsilon_1)} &= \frac{2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + 2\nu_4}{11}, \quad \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2)}{(\beta, \varepsilon_2)} = \frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3}{5}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_3)} &= \frac{2\nu_2 + \nu_3}{3}, \quad \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_4)} = \nu_3, \quad \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)} = \frac{\nu_2 + \nu_3 + \nu_4}{3}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_3)} &= \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4}{4}, \quad \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_1 - \varepsilon_4)} = \frac{\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3 + \nu_4}{5}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_3)} &= \nu_1, \quad \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \quad \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_3 - \varepsilon_4)} = \nu_2, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(\beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)} &= \frac{2\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4}{8}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)} &= \frac{\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4}{7}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_1 + \varepsilon_4)} &= \frac{\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4}{6}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{(\beta, \varepsilon_2 + \varepsilon_3)} &= \frac{\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3}{4}, \quad \frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_2 + \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_2 + \varepsilon_4)} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{3}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{(\beta, \varepsilon_3 + \varepsilon_4)} &= \frac{\nu_2 + \nu_3}{2}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4))} &= \frac{2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + \nu_4}{10}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4))} &= \frac{2\nu_1 + 4\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4}{9}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4))} &= \frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4}{7},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4))} &= \frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3 + \nu_4}{6}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4))} &= \frac{2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4}{5}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4))} &= \frac{\nu_3 + \nu_4}{2}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4))} &= \frac{2\nu_2 + \nu_3 + \nu_4}{4}, \\
\frac{(\Lambda + \beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4))}{(\beta, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4))} &= \nu_4.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
d(\Lambda + \beta) &= \frac{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}{2414168064 \cdot 10^4} (\nu_1 + \nu_2)(\nu_2 + \nu_3)(\nu_3 + \nu_4)(2\nu_2 + \nu_3) \\
&\quad \times (2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3)(\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3)(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)(\nu_2 + \nu_3 + \nu_4) \\
&\quad \times (2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)(2\nu_2 + \nu_3 + \nu_4)(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4) \\
&\quad \times (\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3 + \nu_4)(2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + 2\nu_4) \\
&\quad \times (2\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)(\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4) \\
&\quad \times (\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)(2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + \nu_4) \\
&\quad \times (2\nu_1 + 4\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)(2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3 + \nu_4) \\
&\quad \times (2\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4). \tag{18}
\end{aligned}$$

Замечание 3. Из (17) и (18) вытекает, что

$$\lambda(\Lambda) = 0 \Leftrightarrow \Lambda = 0 \Leftrightarrow \nu_i = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

и, следовательно, $\sigma(\lambda_0) = d^2(0 + \beta) = 1$, что соответствует формуле (1). Кроме того, на основании предложения 1 старшим весом присоединенного представления Ad является максимальный корень $\tilde{\alpha} = \bar{\omega}_1$, для которого $\nu_1 = 2$ и $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$. Поэтому собственное значение и размерность представления Ad можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{Ad}} = \lambda(\tilde{\alpha}) &= -\frac{1}{72\gamma}(13^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2 - 156) = -\frac{1}{\gamma}, \\
\dim \text{Ad} &= d(\tilde{\alpha} + \beta) = 52,
\end{aligned}$$

что соответствует формуле (2) при $\gamma = 1$ с учетом равенства $\dim F_4 = 52$ из табл. 1.

5) Указанные выше простые корни и фундаментальные веса алгебры Ли $\mathfrak{f}_4$ задают решетки $\Lambda_0(F_4)$ и $\Lambda_1(F_4)$ соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned}\Lambda_0(F_4) &= \left\{ \sum_{i=1}^4 \Psi_i \alpha_i \mid \Psi_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, 4 \right\}, \\ \Lambda_1(F_4) &= \left\{ \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \bar{\omega}_i \mid \Lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, 4 \right\}.\end{aligned}\tag{19}$$

После выражения корней через фундаментальные веса

$$\alpha_1 = 2\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2, \quad \alpha_2 = -\bar{\omega}_1 + 2\bar{\omega}_2 - 2\bar{\omega}_3, \quad \alpha_3 = -\bar{\omega}_2 + 2\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_4, \quad \alpha_4 = -\bar{\omega}_3 + 2\bar{\omega}_4$$

получим

$$\begin{aligned}\Lambda_0(F_4) &= \left\{ (2\Psi_1 - \Psi_2)\bar{\omega}_1 + (-\Psi_1 + 2\Psi_2 - \Psi_3)\bar{\omega}_2 + (-2\Psi_2 + 2\Psi_3 - \Psi_4)\bar{\omega}_3 \right. \\ &\quad \left. + (-\Psi_3 + 2\Psi_4)\bar{\omega}_4 \mid \Psi_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, 4 \right\}.\end{aligned}$$

Пусть $\theta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ — линейное преобразование, заданное следующим образом:

$$(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4) \rightarrow (2\Psi_1 - \Psi_2, -\Psi_1 + 2\Psi_2 - \Psi_3, -2\Psi_2 + 2\Psi_3 - \Psi_4, -\Psi_3 + 2\Psi_4).$$

Так как θ задается целочисленной матрицей с единичным определителем, то θ является изоморфизмом решетки $\mathbb{Z}^4$ на себя. Поэтому

$$\Lambda_0(F_4) = \Lambda_1(F_4),$$

решетка $\Lambda(F_4)$, удовлетворяющая соотношению $\Lambda_0(F_4) \subseteq \Lambda(G) \subseteq \Lambda_1(F_4)$, единственна и совпадает с $\Lambda_1(F_4)$.

Таким образом, нужно вычислить спектр только для группы F_4 с характеристической решеткой $\Lambda_1(F_4)$.

6) Из формулы (19) получаем множество старших весов группы F_4

$$\Lambda^+(F_4) = \left\{ \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \bar{\omega}_i \mid \Lambda_i \in \mathbb{Z}, \Lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \right\}.$$

7) Пусть

$$\Lambda = \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \bar{\omega}_i \in \Lambda^+(F_4).$$

Тогда на основании п.4 собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda + \beta)$ вычисляются по формулам (17) и (18) соответственно, где $\nu_i = \Omega_i + 1$, $\nu_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

8) Применяя формулу (5) и полученные до этого результаты, находим кратность собственного значения λ :

$$\begin{aligned} \sigma(\Lambda) = \frac{1}{2414168064^2 \cdot 10^8} \sum_{\Xi_{12}} & \nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2 \nu_4^2 (\nu_1 + \nu_2)^2 (\nu_2 + \nu_3)^2 (2\nu_2 + \nu_3 + \nu_4)^2 \\ & \times (\nu_3 + \nu_4)^2 (2\nu_2 + \nu_3)^2 (2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3)^2 (\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3)^2 \\ & \times (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)^2 (\nu_2 + \nu_3 + \nu_4)^2 (2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 \\ & \times (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4)^2 (\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3 + \nu_4)^2 \\ & \times (2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + 2\nu_4)^2 (2\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 \\ & \times (\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 (\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 \\ & \times (2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + \nu_4)^2 (2\nu_1 + 4\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 \\ & \times (2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3 + \nu_4)^2 (2\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_{12} = \{ & (2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + 2\nu_4)^2 + (2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3)^2 + (2\nu_2 + \nu_3)^2 + \nu_3^2 \\ & = 156 - 72\gamma\lambda \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Наименьшее по модулю ненулевое значение лапласиана равно $-\frac{2}{3\gamma}$ и соответствует неприводимому представлению группы Ли со старшим весом $\overline{\omega}_4$. Размерность этого представления равна 26. Следовательно, кратность собственного значения $-\frac{2}{3\gamma}$ равна $26^2 = 676$.

§4. Теоретико-числовые критерии собственных значений лапласиана

В табл. 2–4 представлены (по убыванию) 10 наибольших отрицательных собственных значений лапласиана на группах (с биинвариантной метрикой ν) $SU(5)$, $PSU(5)$ и F_4 соответственно.

Теорема 2. Пусть G — это $SU(5)$ с биинвариантной римановой метрикой ν такой, что $\nu(e) = -k_{\text{ад}}$. Число $\lambda < 0$ является собственным значением лапласиана на (G, ν) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $-50\lambda \in \mathbb{N}$;
- 2) выполнено хотя бы одно из следующих условий:

2.1) натуральное число $200 - 200\lambda$ можно представить в виде

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + v^2, \quad \text{причем } x, y, z, v \in \mathbb{N},$$

и

$$\begin{aligned} x \equiv y \equiv z \pmod{2}, \quad v \equiv x + y + z \pmod{4}, \\ x < y < z, \quad v \geq 4 + x + y + z \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\text{или(и)} \\ &x \equiv y \equiv z \pmod{2}, \quad v + x \equiv y + z \pmod{4}, \\ &x < y < z, \quad v + x \geq 4 + y + z; \end{aligned} \quad (22)$$

2.2) натуральное число $50 - 50\lambda$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\text{и} \\ &5x^2 + 5y^2 + z^2, \quad \text{причем } x, y, z \in \mathbb{N}, \\ &z \equiv x + y \pmod{2}, \quad x < y, \quad z \geq 2 + x + y. \end{aligned} \quad (23)$$

При этом число старших векторов Λ таких, что $\lambda(\Lambda) = \lambda$, равно $n_1 + n_2 + n_3$, где n_1 (n_2) — число решений уравнения

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + v^2 = 200 - 200\lambda, \quad x, y, z, v \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

удовлетворяющих условию (21) ((22) соответственно), n_3 — число решений уравнения

$$5x^2 + 5y^2 + z^2 = 50 - 50\lambda, \quad x, y, z \in \mathbb{N}, \quad (25)$$

удовлетворяющих условию (23).

Доказательство. Следуя (13), рассмотрим диофантово уравнение $4\nu_1^2 + 6\nu_1\nu_2 + 4\nu_1\nu_3 + 2\nu_1\nu_4 + 6\nu_2^2 + 8\nu_2\nu_3 + 4\nu_2\nu_4 + 6\nu_3^2 + 6\nu_3\nu_4 + 4\nu_4^2 = 50 - 50\lambda$, которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &(4\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 + 5(\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)^2 + 5(\nu_2 - \nu_4)^2 + 5(\nu_2 + \nu_4)^2 \\ &= 200 - 200\lambda, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\nu_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Ясно, что если уравнение (26) разрешимо, то $-50\lambda \in \mathbb{N}$.

Предположим сначала, что (26) имеет решение $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{N}^4$ такое, что $\nu_2 > \nu_4$. После замены переменных:

$$x = \nu_2 - \nu_4, \quad y = \nu_2 + \nu_4, \quad z = \nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4, \quad v = 4\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4;$$

уравнение (26) примет вид (24), причем будут выполнены условия (21). При этом число решений $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{N}^4$ уравнения (26), удовлетворяющих условию $\nu_2 > \nu_4$, равно числу решений уравнения (24) с условием (21).

Пусть теперь уравнение (26) имеет решение $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{N}^4$, где $\nu_2 < \nu_4$. После замены переменных:

$$x = \nu_4 - \nu_2, \quad y = \nu_2 + \nu_4, \quad z = \nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4, \quad v = 4\nu_1 + 3\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4;$$

уравнение (26) примет вид (24), причем будут выполнены условия (22). При этом число решений $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{N}^4$ уравнения (26), удовлетворяющих условию $\nu_2 < \nu_4$, равно числу решений уравнения (24) с условием (22).

Таблица 2. Собственные значения лапласиана на $(\mathrm{SU}(5), \nu)$

№	λ	$(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$	$\sigma(\lambda)$
1	$-\frac{12}{25}$	$(2, 1, 1, 1)$ $(1, 1, 1, 2)$	50
2	$-\frac{18}{25}$	$(1, 2, 1, 1)$ $(1, 1, 2, 1)$	200
3	-1	$(2, 1, 1, 2)$	576
4	$-\frac{28}{25}$	$(3, 1, 1, 1)$ $(1, 1, 1, 3)$	450
5	$-\frac{32}{25}$	$(2, 1, 2, 1)$ $(1, 2, 1, 2)$	4050
6	$-\frac{33}{25}$	$(2, 2, 1, 1)$ $(1, 1, 2, 2)$	3200
7	$-\frac{8}{5}$	$(1, 2, 2, 1)$	5625
8	$-\frac{42}{25}$	$(1, 3, 1, 1)$ $(1, 1, 3, 1)$ $(3, 1, 1, 2)$ $(2, 1, 1, 3)$	14800
9	$-\frac{48}{25}$	$(1, 1, 1, 4)$ $(2, 1, 2, 2)$ $(2, 2, 1, 2)$ $(4, 1, 1, 1)$	63700
10	-2	$(3, 1, 2, 1)$ $(1, 2, 1, 3)$	31752

Таблица 4. Собственные значения лапласиана на (F_4, ν)

№	λ	$(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$	$\sigma(\lambda)$
1	$-\frac{2}{3}$	$(1, 1, 1, 2)$	676
2	-1	$(2, 1, 1, 1)$	2704
3	$-\frac{4}{3}$	$(1, 1, 2, 1)$	74529
4	$-\frac{13}{9}$	$(1, 1, 1, 3)$	104976
5	$-\frac{16}{9}$	$(2, 1, 1, 2)$	1108809
6	-2	$(1, 2, 1, 1)$	1623076
7	$-\frac{13}{6}$	$(1, 1, 2, 2)$	16777216
8	$-\frac{20}{9}$	$(3, 1, 1, 1)$	1108809
9	$-\frac{7}{3}$	$(1, 1, 1, 4)$	7033104
10	$-\frac{23}{9}$	$(2, 1, 2, 1)$	70963776

Таблица 3. Собственные значения лапласиана на $(\mathrm{PSU}(5), \nu)$

№	λ	$(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$	$\sigma(\lambda)$
1	-1	$(2, 1, 1, 2)$	576
2	$-\frac{8}{5}$	$(1, 2, 2, 1)$	5625
3	-2	$(3, 1, 2, 1)$ $(1, 2, 1, 3)$	31752
4	$-\frac{12}{5}$	$(2, 3, 1, 1)$ $(1, 1, 3, 2)$ $(3, 1, 1, 3)$	101250
5	-3	$(4, 2, 1, 1)$ $(1, 1, 2, 4)$ $(2, 2, 2, 2)$	1148928
6	$-\frac{18}{5}$	$(2, 1, 4, 1)$ $(1, 4, 1, 2)$ $(4, 1, 2, 2)$ $(2, 2, 1, 4)$	3185000
7	-4	$(6, 1, 1, 1)$ $(1, 3, 3, 1)$ $(3, 3, 1, 2)$ $(2, 1, 3, 3)$ $(1, 1, 1, 6)$	7201530
8	$-\frac{21}{5}$	$(4, 1, 1, 4)$	1000000
9	$-\frac{22}{5}$	$(1, 3, 2, 3)$	7290000
10	$-\frac{24}{5}$	$(5, 2, 1, 2)$ $(3, 2, 2, 3)$ $(2, 1, 2, 5)$	43640625

Пусть, наконец, уравнение (26) имеет решение $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{N}^4$, где $\nu_2 = \nu_4$. После замены переменных:

$$x = \nu_2, \quad y = \nu_2 + \nu_3, \quad z = 2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3;$$

уравнение (26) запишется в виде (25), причем будут выполнены условия (23). При этом число решений $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{N}^4$ уравнения (25), удовлетворяющих условию $\nu_2 = \nu_4$, равно числу решений уравнения (25) с условием (23). $\square$

Теорема 3. Пусть G — это $\text{PSU}(5)$ с биинвариантной римановой метрикой ν такой, что $\nu(e) = -k_{\text{ad}}$. Число $\lambda < 0$ является собственным значением лапласиана на (G, ν) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $-10\lambda \in \mathbb{N}$;

2) выполнено хотя бы одно из следующих условий:

2.1) натуральное число $40 - 40\lambda$ можно представить в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5u^2, \quad \text{причем } x, y, z, u \in \mathbb{N},$$

и

$$\begin{aligned} x \equiv y \equiv z \equiv u \pmod{2}, \quad u \equiv x + y + z \pmod{4}, \\ x < y < z, \quad 5u \geq 4 + x + y + z \end{aligned} \quad (27)$$

или(и)

$$\begin{aligned} x \equiv y \equiv z \equiv u \pmod{2}, \quad u + x + y + z \equiv 0 \pmod{4}, \\ x < y < z, \quad 5u + x \geq 4 + y + z; \end{aligned} \quad (28)$$

2.2) натуральное число $10 - 10\lambda$ можно представить в виде

$$x^2 + y^2 + 5u^2, \quad \text{причем } x, y, u \in \mathbb{N},$$

и

$$u \equiv x + y \pmod{2}, \quad x < y, \quad 5u \geq 2 + x + y. \quad (29)$$

При этом число старших векторов Λ таких, что $\lambda(\Lambda) = \lambda$, равно $n_1 + n_2 + n_3$, где n_1 (n_2) — число решений уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5u^2 = 40 - 40\lambda, \quad x, y, z, u \in \mathbb{N}, \quad (30)$$

удовлетворяющих условиям (27) (условиям (28) соответственно), n_3 — число решений уравнения

$$x^2 + y^2 + 5u^2 = 10 - 10\lambda, \quad x, y, u \in \mathbb{N}, \quad (31)$$

удовлетворяющих условиям (29).

Доказательство. Следуя (14), рассмотрим диофантово уравнение

$$4\nu_1^2 + 6\nu_1\nu_2 + 4\nu_1\nu_3 + 2\nu_1\nu_4 + 6\nu_2^2 + 8\nu_2\nu_3 + 4\nu_2\nu_4 + 6\nu_3^2 + 6\nu_3\nu_4 + 4\nu_4^2 = 50 - 50\lambda,$$

которое можно переписать в виде (26), причем

$$\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + 4\nu_4 \equiv 0 \pmod{5}. \quad (32)$$

Если уравнение (26) имеет решение $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{N}^4$ такое, что $\nu_2 > \nu_4$, то, как показано в доказательстве теоремы 2, его можно записать в виде (24), причем будет выполнено условие (21). При этом условие (32) будет эквивалентно условию

$$v - 5x + 5y + 5z \equiv 0 \pmod{20}.$$

Отсюда следует, что $v = 5u$, $u \in \mathbb{N}$, и $u + y + z \equiv x \pmod{4}$; легко видеть, что последнее сравнение вместе с условием (21) образует условие (27). При этом уравнение (24) можно записать в виде (30). Тогда $-40\lambda \in \mathbb{N}$, что в совокупности с условием $-50\lambda \in \mathbb{N}$ теоремы 2 дает условие $-10\lambda \in \mathbb{N}$.

Если уравнение (26) имеет решение $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{N}^4$, где $\nu_2 < \nu_4$, то, как показано в доказательстве теоремы 2, его можно записать в виде (24), причем будет выполнено условие (22). При этом условие (32) будет эквивалентно условию

$$v + 5x + 5y + 5z \equiv 0 \pmod{20}.$$

Отсюда следует, что $v = 5u$, $u \in \mathbb{N}$, и

$$u + x + y + z \equiv x \pmod{4};$$

легко видеть, что последнее сравнение вместе с условием (22) образует условие (28). При этом уравнение (24) можно записать в виде (30). Тогда $-40\lambda \in \mathbb{N}$, что в совокупности с условием $-50\lambda \in \mathbb{N}$ теоремы 2 дает условие $-10\lambda \in \mathbb{N}$.

Если уравнение (26) имеет решение $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{N}^4$, где $\nu_2 = \nu_4$, то, как показано в доказательстве теоремы 2, его можно записать в виде (25), причем будет выполнено условие (23). При этом условие (32) будет эквивалентно условию

$$z + 5x + 5y \equiv 0 \pmod{20}.$$

Отсюда следует, что $z = 5u$, $u \in \mathbb{N}$, и

$$u + x + y \equiv 0 \pmod{2};$$

последнее равенство вместе с условием (23) образует условие (29). При этом уравнение (25) можно записать в виде (31), и $-10\lambda \in \mathbb{N}$. $\square$

Теорема 4. Пусть G — это F_4 с бинвариантной римановой метрикой ν такой, что $\nu(e) = -k_{\text{ад}}$. Число $\lambda < 0$ является собственным значением лапласиана на (G, ν) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $-72\lambda \in \mathbb{N}$;
- 2) натуральное число $156 - 72\lambda$ можно представить в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2, \quad x, y, z, v \in \mathbb{N},$$

причем

$$x \equiv y \equiv z \equiv v \pmod{2}, \quad x < y < z, \quad v \geq 2 + x + y + z. \quad (33)$$

При этом число старших векторов Λ таких, что $\lambda(\Lambda) = \lambda$, равно количеству таких представлений, удовлетворяющих условию (33).

Доказательство. Следуя (20), рассмотрим диофантово уравнение

$$(2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + 2\nu_4)^2 + (2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3)^2 + (2\nu_2 + \nu_3)^2 + \nu_3^2 = 156 - 72\lambda, \quad (34)$$

где $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in \mathbb{N}$.

Ясно, что если уравнение (34) разрешимо, то $-72\lambda \in \mathbb{N}$. Если ввести следующие обозначения:

$$x = \nu_3, \quad y = 2\nu_2 + \nu_3, \quad z = 2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3, \quad v = 2\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3 + 2\nu_4;$$

то уравнение (34) запишется в виде $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 156 - 72\lambda$, причем будут выполнены условия (33). $\square$

Автор благодарна профессору В. Н. Берестовскому за постановку задачи и полезные замечания.

Список литературы

1. Берестовский В. Н., Зубарева И. А., Сvirкин В. М. Спектр оператора Лапласа на связных компактных простых группах Ли ранга три // *Матем. тр.* 2016. Т. 19, № 1. С. 3–45.
2. Берестовский В. Н., Сvirкин В. М. Оператор Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях // *Матем. тр.* 2009. Т. 12, № 2. С. 3–40.
3. Берестовский В. Н., Сvirкин В. М. Спектр оператора Лапласа на компактных односвязных простых группах Ли ранга два // *Физико-математические науки / Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2009. Т. 151, № 4. С. 15–35.

4. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли*. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
5. Зубарева И. А. Спектр оператора Лапласа на некоторых связных компактных простых группах Ли ранга четыре // *Матем. тр.* 2016. Т. 19, № 2. С. 42–85.
6. Сvirкин В. М. Спектр оператора Лапласа связных компактных простых групп Ли ранга один и два // *Физико-математические науки / Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2010. Т. 152, № 1. С. 219–234.

Зубарева Ирина Александровна

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
Омский филиал, ул. Певцова, 13,
Омск, 644099 РОССИЯ.
E-mail: i_gribanova@mail.ru

Поступила в редакцию

10 сентября 2018 г.

Получена после доработки

10 сентября 2018 г.

Принята к публикации

27 февраля 2019 г.