Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. L. Kazakov, Construction and investigation of exact solutions with free boundary to a nonlinear heat equation with source, *Mat. Tr.*, 2019, Volume 22, Number 2, 54–75

DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.204>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.227.88.159

April 26, 2023, 07:04:53

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКОМ

А. Л. Казаков

Статья посвящена построению и исследованию точных решений со свободной границей нелинейного параболического уравнения второго порядка. Решения относятся к классам обобщенно-автомодельных и обобщенных бегущих волн, их построение сводится к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, для которых доказаны теоремы существования и единственности решений. Проведен качественный анализ ОДУ путем перехода к динамической системе, построения и исследования ее фазового портрета, выполнены геометрические иллюстрации.

Ключевые слова и фразы: нелинейное уравнение теплопроводности с источником, тепловая волна, точное решение, теорема существования, качественный анализ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введение

Работа посвящена исследованию нелинейного (квазилинейного) уравнения с частными производными параболического типа

$$T_t = \operatorname{div}(K(T)\nabla T) + L(T). \quad (1)$$

Здесь $T(t, \mathbf{x})$ — температура среды в момент времени t в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$; div и ∇ — операторы дивергенции и градиента по пространственным переменным; $K(T) \geq 0$ — монотонная достаточно гладкая функция, определяющая коэффициент теплопроводности; $L(T)$ — непрерывная функция, определяющая источник (сток).

Поскольку функция $K(T)$ монотонная, в (1) можно сделать замену переменных $T = K^{-1}(U) = \phi(U)$ и привести уравнение к виду

$$U_t = U\Delta U + F(U)(\nabla U)^2 + \Phi(U), \quad (2)$$

где

$$F(U) = U\phi''(U)/\phi'(U) + 1, \quad \Phi(U) = L(\phi(U))/\phi'(U).$$

Рассмотрим наиболее часто встречающийся в приложениях случай, когда $K(T) = \lambda T^\sigma$, где $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ — константы; $L(T) = \mu T^\theta$, где $\theta \geq 1$ и μ — константы, $\mu < 0$ при наличии стока, $\mu > 0$ — источника. Тогда (2) примет вид

$$U_t = U\Delta U + \frac{(\nabla U)^2}{\sigma} + \alpha U^\beta, \quad (3)$$

где $\alpha = \sigma\mu\lambda^{(1-\theta)/\sigma}$, $\alpha > 0$ — источник, $\alpha < 0$ — сток; $\beta = (\sigma + \theta - 1)/\sigma$, если $\sigma > 0$, $\theta \geq 1$, то $\beta \geq 1$. Уравнение (3) в отечественной литературе называют «уравнением нелинейной теплопроводности со степенной нелинейностью и источником (стоком)» [17], в зарубежной — “the generalized porous medium equation” [25]. Оно интересно как с математической точки зрения, будучи типичным представителем нелинейных уравнений математической физики, так и с точки зрения приложений, поскольку описывает различные процессы в задачах тепло- и массопереноса, теории горения и взрыва, фильтрации, химической кинетике, популяционной биологии (см., например, [15; 25]).

Интересной разновидностью решений (1) со свободной границей является тепловая волна, под которой понимается конфигурация, состоящая из двух гиперповерхностей: $T(t, \mathbf{x}) \geq 0$ (возмущенное решение) и $T(t, \mathbf{x}) \equiv 0$ (фоновое нулевое решение), непрерывно состыкованных вдоль некоторой достаточно гладкой гиперповерхности $\Gamma(t, \mathbf{x}) = 0$, определяющей фронт тепловой волны (тепловой фронт). Первые примеры решений типа тепловой волны, распространяющейся в абсолютно холодной среде (по нулевому фону) с конечной скоростью, впервые были приведены в статье Я. Б. Зельдовича и А. С. Компанейца [5]. Близкие результаты для задач фильтрации были вскоре получены Г. И. Баренблаттом [1]. Позднее, в исследованиях А. Ф. Сидорова и его учеников [19], рассматривались вопросы разрешимости в классе аналитических функций специальных краевых задач для уравнения теплопроводности, имеющих решения типа тепловой волны. Был предложен и развит оригинальный подход к исследованию задач с заданными краевым режимом и тепловым фронтом (метод специальных рядов). С использованием этой методологии был доказан ряд теорем, обеспечивающих существование и единственность локально-аналитических решений упомянутых краевых задач как в одномерной [22; 23], так и в неограниченной [6; 8] постановках, в том числе с подвижной границей [7; 9]. В отдельных случаях аналитическое исследование было дополнено численным с использованием гранично-элементного [8; 22; 23]. Отметим, что в упомянутых в этом абзаце работах рассматривалось уравнение без источника (стока).

Для исследования свойств тепловых волн эффективным инструментом являются точные решения, так как они позволяют выйти за пределы ма-

лой окрестности, в которой обычно удается доказать сходимость рядов. Так, в теории режимов с обострением, построенной в школе А. А. Самарского, точные (в частности, типа бегущей волны и автомодельные) решения применяются в качестве иллюстрирующих примеров [17]. В статье [11] получены новые классы точных решений нелинейного уравнения теплопроводности без источников (стоков), имеющих тип тепловой волны.

Данная работа является прямым продолжением исследований [11], проведенных нами ранее. Рассматривается более общая постановка задачи, предусматривающая наличие источника (стока) со степенной зависимостью последнего от температуры. Решения описываются с помощью функций, которые определяются из начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с особенностью перед старшей производной. В отличие от ранее изученных случаев, уравнения, вообще говоря, не являются автономными. Тем не менее для рассмотренных задач удалось доказать теоремы существования и единственности нетривиальных решений. Проведено подробное исследование свойств тепловых волн, имеющих вид обобщенной бегущей волны, для чего выполнен переход к динамической системе и построены ее фазовые портреты при различных значениях входных параметров.

§1. Постановка задачи

Уравнение (3) при наличии пространственных симметрий может быть преобразовано к виду

$$u_t = u \left(u_{\rho\rho} + \frac{\nu u_\rho}{\rho} \right) + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \alpha u^\beta. \quad (4)$$

Здесь параметр ν принимает значения 0 в случае плоской, 1 — круговой и 2 — сферической симметрии; $\rho = (\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2)^{1/2}$ — расстояние до начала координат; $u(t, \rho)$ — искомая функция. Для уравнения (4) будем искать нетривиальные точные решения со свободной границей, имеющие тип тепловой волны, распространяющейся с конечной скоростью по холодному фону, т. е. удовлетворяющие условию

$$u|_{\rho=a(t)} = 0, \quad (5)$$

где $a(t) > 0$ — достаточно гладкая функция. Линию $\rho = a(t)$ называют *фронтом тепловой волны*. На ней тепловая волна стыкуется с тривиальным решением $u \equiv 0$, при этом искомая функция, очевидно, непрерывна, а производные терпят разрыв.

Отметим, что на фронте тепловой волны в уравнении (4) обращается в нуль множитель перед старшей производной $u_{\rho\rho}$, что приводит к вырождению уравнения с понижением порядка. Такие математические объекты

относят к неклассическим уравнениям математической физики [3]. К этому классу принадлежат также уравнения, не разрешенные относительно старшей производной [20], которые с учетом их специфики называют в литературе *уравнениями соболевского типа* [4; 12; 18] или *не типа Коши* — Ковалевской [21].

§2. Построение точных решений

Будем искать решение задачи (4), (5) в следующем виде:

$$u = \psi(t)v(z), \quad z = \varphi(t, \rho), \quad (6)$$

где $\psi(t)$ и $v(z)$ определяется при решении обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Подобный подход к поиску решений иногда называют методом Клаксона — Крускала [16; 24]. По сути дела он представляет собой обобщение классического метода разделения переменных.

Будем рассматривать следующие способы задания функции $\varphi(t, \rho)$:

$$\varphi_1(t, \rho) = \rho - a(t), \quad \varphi_2(t, \rho) = \rho/a(t). \quad (7)$$

Выбор обоснован тем, что это две наиболее естественные разновидности переменной z , при которых условие (5) переписывается как $v(z_0) = 0$: в первом случае $z_0 = 0$, во втором случае $z_0 = 1$.

Решения вида (6), (7) близки к классическим типам точных решений нелинейных уравнений математической физики: в первом случае прослеживается аналогия с бегущими волнами, во втором — с автомодельными решениями. Будем, следуя [16], называть решения (6) первого типа ($z = \varphi_1(t, \rho)$) *обобщенными бегущими волнами*, второго ($z = \varphi_2(t, \rho)$) — *обобщенно-автомодельными*.

Теперь сформулируем и докажем две основные теоремы данного раздела. Рассмотрим последовательно случаи обобщенно-автомодельного решения и обобщенной бегущей волны.

Теорема 1. *Задача (4), (5) имеет обобщенно-автомодельные решения в следующих случаях:*

- 1) $\nu = 0, 1, 2$, $\beta = 1$, $\varphi_2(t, \rho) = \rho/[C_1 \exp(C_2 t)]$, $\psi(t) = C_1^2 C_2 \exp(2C_2 t)$, а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(z + \frac{\nu v}{z}\right)v' + \left(\frac{\alpha}{C_2} - 2\right)v = 0, \quad v(1) = 0; \quad (8)$$

- 2) $\nu = 0, 1, 2$, $\beta \neq 1, 2$, $\varphi_2(t, \rho) = \rho/(C_3 t + C_4)^\omega$,

$$\psi(t) = \omega C_3 (C_3 t + C_4)^{2/(2-2\beta)}, \quad \text{где } \omega = (\beta - 2)/(2\beta - 2),$$

а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(z + \frac{\nu v}{z}\right)v' + \frac{2}{\beta - 2}v + \alpha(\omega C_3)^{\beta-2}v^\beta = 0, \quad v(1) = 0. \quad (9)$$

Иных решений данного типа задача (4), (5) не имеет.

Доказательство. Пусть $z = \rho/a(t)$. Подставим выражение $u = \psi(t)v(z)$ в уравнение (4). После приведения подобных слагаемых и умножения обеих частей на $a^2(t)/\psi^2(t)$ получим

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \frac{a(t)a'(t)}{\psi(t)}zv' + \frac{\nu vv'}{z} - \frac{a^2(t)\psi'(t)}{\psi^2(t)}v + \alpha \frac{a^2(t)\psi^\beta(t)}{\psi^2(t)}v^\beta = 0. \quad (10)$$

Так как функции a и ψ не зависят от z , условием превращения (10) в ОДУ является система

$$\frac{a(t)a'(t)}{\psi(t)} = A_1 = \text{const}, \quad \frac{a^2(t)\psi'(t)}{\psi^2(t)} = A_2 = \text{const}, \quad \frac{a^2(t)\psi^\beta(t)}{\psi^2(t)} = A_3 = \text{const}. \quad (11)$$

Система (11) является переопределенной. Найдём условия ее совместности.

Вначале обратим внимание на случай $A_1 = 0$. Он возможен тогда и только тогда, когда $a = \text{const}$, $z = \rho/a$. Случай соответствует так называемой «остановившейся тепловой волне» [17, с. 68], однако поскольку нас в рамках данного исследования интересуют движущиеся тепловые волны, здесь он не рассматривается.

Пусть теперь $A_1 \neq 0$. Тогда, выразив $\psi(t)$ через $a(t)$ из первого уравнения (11) и подставив во второе, получим

$$\frac{(a')^2 + aa''}{(a')^2} = \frac{A_2}{A_1^2}.$$

Отсюда следует

$$\left(\frac{a}{a'}\right)' = 2 - \frac{A_2}{A_1^2}.$$

Примем для определенности $A_1 = 1$ (это можно сделать, не теряя общности рассмотрения). Возможны два случая.

1. Если $2 - A_2 = 0$, то

$$a(t) = C_1 \exp(C_2 t), \quad \psi(t) = aa' = C_1^2 C_2 \exp(2C_2 t).$$

2. Если $2 - A_2 = 1/\omega \neq 0$, то

$$a(t) = (C_3 t + C_4)^\omega, \quad \psi(t) = aa' = \omega C_3 (C_3 t + C_4)^{2\omega-1}.$$

Теперь рассмотрим третье уравнение (11). В первом случае, в котором функции $a(t)$ и $\psi(t)$ показательные, оно, очевидно, обращается в верное равенство тогда и только тогда, когда $\beta = 1$; $A_3 = 1/C_2$.

Во втором случае, где функции $a(t)$ и $\psi(t)$ степенные, оно обращается в верное равенство тогда и только тогда, когда $\omega = (\beta - 2)/(2 - 2\beta)$. Отсюда $\beta \neq 1$; $A_3 = (\omega C_3)^{\beta-2}$. Кроме того, $\beta \neq 2$, поскольку иначе вновь получаем $a = \text{const}$.

Можно видеть, что при подстановке полученных выражений для $a(t)$ и $\psi(t)$ в уравнение (10) первом случае получается уравнение (8), а во втором — (9). Таким образом, установлено, что в рассмотренных случаях задача (4), (5) действительно имеет обобщенно-автомодельные решения указанного в условии теоремы вида. С другой стороны, поскольку в ходе доказательства были рассмотрены все возможные случаи, иных подобных решений не существует. $\square$

Теорема 2. Задача (4), (5) имеет решения типа обобщенной бегущей волны в следующих случаях:

- 1) $\nu = 0$, $\beta = 2$, $\varphi_1(t, \rho) = \rho - \ln(C_5 t + C_6)$, $\psi(t) = \omega C_5 / (C_5 t + C_6)$,
а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + v' + \frac{1}{\omega}v + \alpha v^2 = 0, \quad v(0) = 0; \quad (12)$$

- 2) $\nu = 0$, $\beta > 0$, $\varphi_1(t, \rho) = \rho - (C_7 t - C_8)$, $\psi(t) = C_7$,
а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + v' + \alpha v^\beta = 0, \quad v(0) = 0. \quad (13)$$

Иных решений данного типа задача (4), (5) не имеет.

Доказательство. Пусть $z = \rho - a(t)$. Подставим выражение $u = \psi(t)v(z)$ в уравнение (4). После приведения подобных слагаемых и деления обеих частей на $\psi^2(t)$ получим

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \frac{a'(t)}{\psi(t)}v' - \frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)}v + \alpha\psi^{\beta-2}(t)v^\beta = 0. \quad (14)$$

Поскольку функции a и ψ не зависят от z , условием превращения (14) в ОДУ является система

$$\frac{a'(t)}{\psi(t)} = B_1 = \text{const}, \quad \frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)} = B_2 = \text{const}, \quad \psi^{\beta-2}(t) = B_3 = \text{const}. \quad (15)$$

Первое уравнение системы (15) содержит только одну искомую функцию, поэтому проинтегрируем его отдельно.

Вначале рассмотрим случай $B_1 \neq 0$. Вновь, не теряя общности рассмотрения, положим $B_1 = 1$. Тогда $\psi(t) = C_5/(C_5t + C_6)$. Подставив это выражение в первое уравнение (15), получим, что $a(t) = \ln(C_5t + C_6)^\omega$, где $\omega = -1/B_2$.

Пусть теперь $B_1 = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\psi = C_7$, где C_7 — произвольная константа. Тогда из второго уравнения (15) следует, что $a(t) = C_7t + C_8$.

Теперь рассмотрим третье уравнение (15). В первом случае оно обращается в верное равенство тогда и только тогда, когда $\beta = 2$. Во втором случае оно всегда справедливо.

Можно видеть, что при подстановке полученных выражений для $a(t)$ и $\psi(t)$ в уравнение (14) в первом случае получается уравнение (12), а во втором — (13). Таким образом, установлено, что в рассмотренных случаях задача (4), (5) действительно имеет решения в виде обобщенной бегущей волны с логарифмическим и линейным фронтом. С другой стороны, поскольку в ходе доказательства рассмотрены все возможные случаи, иных подобных решений не существует. $\square$

Отметим важный частный случай рассматриваемой задачи. Пусть $\alpha = 0$ (источника или стока нет). Тогда уравнение (4) имеет вид

$$u_t = u \left(u_{\rho\rho} + \frac{\nu u_\rho}{\rho} \right) + \frac{u_\rho^2}{\sigma} \quad (16)$$

и является классическим одномерным уравнением фильтрации [19] (или “the porous medium equation” [25]).

Справедливы нижеследующие утверждения.

Следствие 1. Задача (16), (5) имеет обобщенно-автомодельные решения в следующих случаях:

- 1) $\nu = 0, 1, 2$, $\varphi_2(t, \rho) = \rho/[C_1 \exp(C_2t)]$, $\psi(t) = C_1^2 C_2 \exp(2C_2t)$,
а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(z + \frac{\nu v}{z} \right) v' - 2v = 0, \quad v(1) = 0; \quad (17)$$

- 2) $\nu = 0, 1, 2$, $\varphi_2(t, \rho) = \rho/(C_3t + C_4)^\omega$, $\psi(t) = \omega C_3(C_3t + C_4)^{2\omega-1}$,
а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(z + \frac{\nu v}{z} \right) v' - \frac{2\omega - 1}{\omega} v = 0, \quad v(1) = 0. \quad (18)$$

Следствие 2. Задача (16), (5) имеет решения типа обобщенной бегущей волны в следующих случаях:

- 1) $\nu = 0$, $\varphi_1(t, \rho) = \rho - \ln(C_5 t + C_6)^\omega$, $\psi(t) = \omega C_5 / (C_5 t + C_6)$,
а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + v' + \frac{1}{\omega}v = 0, \quad v(0) = 0; \quad (19)$$

- 2) $\nu = 0$, $\varphi_1(t, \rho) = \rho - (C_7 t - C_8)$, $\psi(t) = C_7$, а $v(z) = -\sigma z$.

Справедливость данных утверждений вытекает из доказательств теорем 1 и 2 соответственно: за счет того, что $\alpha = 0$, в системах (11) и (15) пропадает третье уравнение, что снимает дополнительные ограничения на параметры. Особого упоминания заслуживает п. 2 из следствия 2: в этом случае уравнение (13) интегрируется в квадратурах. В результате получается линейное решение уравнения (16) — простейшая бегущая волна.

Замечание 1. Решения (16), (17)–(19) представляют собой наиболее естественные виды решений задачи (16), (5), полученных ранее в [11]. Попытка использовать в качестве z выражение $\varphi_3(t, \rho) = \rho/a_1(t) + a_2(t)$, которое обобщает (7), приводит к уже полученным в следствиях 1 и 2 решениям.

Замечание 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, полученные в ходе доказательств теорем 1 и 2, иногда называют обобщенными уравнениями Льебара (см., например, [14]).

§3. Теоремы существования и единственности аналитических решений

Начальные задачи (8), (9), (12), (13) обладают весьма специфическими свойствами, которые они наследуют от исходной задачи (4), (5). В частности, для всех них задано нулевое начальное условие, которое приводит к тому, что в начальной точке ($z = 0$ либо $z = 1$) обращается в нуль множитель перед старшей производной, т. е. задачи не могут быть записаны в нормальной форме и для них не применимы классические теоремы существования решений задачи Коши. Вопросы существования и единственности решений в данном случае требуют специального исследования, которое и является содержанием настоящего параграфа.

Вначале рассмотрим задачи (8) и (9). Очевидно, что первая из них является частным случаем второй (при $\beta = 1$).

Теорема 3. Пусть $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \neq 2$. Тогда у (9) существует единственное нетривиальное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $z = 1$.

Доказательство. Под аналитическим мы понимаем решение, совпадающее в окрестности некоторой точки со своим тейлоровским разложением. Соответственно, решение (9) будем строить в виде степенного ряда

$$v(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n(z-1)^n}{n!}, \quad v_n = \left. \frac{d^n v(z)}{dz^n} \right|_{z=1}. \quad (20)$$

В данном случае $v_0 = 0$. Для того чтобы найти v_1 , положим в уравнении (9) $v = 0$, $z = 1$. Получим квадратное уравнение, имеющее два корня:

- 1) $v_1 = 0$, который приводит к тривиальному решению $v \equiv 0$;
- 2) $v_1 = -\sigma$, которое будем рассматривать далее.

Прочие коэффициенты ряда (20) при $n \geq 2$ однозначно определяются индукцией по n из рекуррентных соотношений

$$v_{n+1} = \frac{1}{(\sigma n + 1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} C_n^k v_{k+2} v_{n-k} + \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k v_{k+1} v_{n-k+1} + \frac{\nu}{2} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} (-1)^{n-k} \left(\sum_{i=1}^k C_{k+1}^i v_i v_{k+1-i} \right) + \left(n + \frac{2}{\beta-2} \right) v_n + \alpha F_n \right],$$

где

$$F_n = \left. \frac{d^n (v^\beta)}{dz^n} \right|_{z=1}.$$

Выражение для F_n здесь не приводится, так как в общем случае является громоздким. Принципиальным здесь является то, что при $\beta \in \mathbb{N}$ каждое F_n определяется однозначно, причем зависит от коэффициентов v_k при $k \leq n$.

Сходимость ряда (20) доказывается методом мажорант. Для построения мажорантной задачи перейдем к новой независимой переменной s новой неизвестной функции $v_*(s)$ по формулам

$$s = z - 1, \quad v(z) = -\sigma s + s^2 v_*(s). \quad (21)$$

Подставляя (21) в (9), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} D_1 v_* + D_2 s v_*' + D_3 s^2 v_*'' \\ = D_4 + s g_1(z, v_*) + s^2 g_2(s, v_*, v_*') + s^3 g_3(s, v_*, v_*', v_*''), \end{aligned} \quad (22)$$

где $D_1, D_2, D_3 > 0$, $D_4 \in \mathbb{R}$, а g_1, g_2, g_3 являются аналитическими функциями своих аргументов, их конкретный вид для доказательства несуществен. Из (22) можно получить значения $v_*(0)$ и $v_*'(0)$.

Мажорантная задача для уравнения (22) имеет вид

$$V'' = E \left(\frac{\partial G_1}{\partial s} + \frac{\partial G_1}{\partial V} V' + G_2 + s G_3 \right), \quad V(0) = V_0, \quad V'(0) = V_1, \quad (23)$$

где

$$E = \sup_n \left\{ \frac{(n-1)n+1}{D_1 + nD_2 + (n-1)nD_3} \right\}, \quad V_0 > |v_*(0)|, \quad V_1 > |v'_*(0)|,$$

$$G_1 = G_1(s, V), \quad G_2 = G_2(s, V, V'), \quad G_3 = G_3(s, V, V', V''), \quad G_i \gg g_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Докажем, что у задачи (23) имеется аналитическое мажорирующее нуль решение. Положим $s = 0$ и подставим в правую часть уравнения (23) V_0, V_1 ; тогда $V_2 = V''(0)$ выражается однозначно, причем $V_2 > 0$.

Дифференцируя (23) по s , а затем выражая V''' , приходим к дифференциальному уравнению третьего порядка с аналитической мажорирующей нуль правой частью:

$$V''' = \frac{E}{1 - E s (G_3)_{V''}} \left[(G_1)_{sV} + 2(G_1)_{sVV'} V' + (G_1)_{ssVV} V_s + (G_1)_{VV} V_{ss} + (G_2)_s + (G_2)_V V' + (G_2)_{V'} V'' + (G_3)_s + s(G_3)_{ss} + s(G_3)_{sV} V' + s(G_3)_{V'} V'' \right]. \quad (24)$$

Величины V_0, V_1, V_2 — начальные условия для уравнения (24) — являются строго положительными; значит, по теореме Коши о существовании аналитического решения, в некоторой окрестности точки $s = 0$ у задачи (23) существует единственное решение — аналитическая мажорирующая нуль функция $V(s)$. Следовательно, функции $v_*(z)$ и $v(z)$ также являются аналитическими. $\square$

Уравнения (12), (13) могут быть записаны совместно в виде

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + v' + \kappa v + \alpha v^2 = 0, \quad (25)$$

где $\kappa = 1/\omega$ в случае (12), либо $\kappa = 0$ в случае (13).

Теорема 4. Пусть $v(0) = 0, v'(0) = -\sigma$. Тогда у (25) существует единственное нетривиальное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $z = 0$.

Справедливость данного утверждения следует из ранее доказанной теоремы в [10].

§4. Исследование особых точек

Начиная с этого параграфа, рассмотрим более подробно случай обобщенной бегущей волны. Для этого сначала выполним качественное исследование уравнения (25). Поскольку оно является автономным, перейдем к рассмотрению фазовой плоскости $(v, v' = w)$. Будем использовать технику, предложенную в [2] (см. также [11]).

Уравнению (25) соответствует динамическая система

$$\frac{dv}{dz} = w, \quad \frac{dw}{dz} = -\frac{w^2/\sigma + w + \alpha v^2 + \kappa v}{v}. \quad (26)$$

Изменим в системе (26) параметризацию, полагая $dz = v d\zeta$. В результате получим

$$\frac{dv}{d\zeta} = vw, \quad \frac{dw}{d\zeta} = -\frac{w^2}{\sigma} - w - \alpha v^2 - \kappa v, \quad (27)$$

доопределив тем самым (26) в точках $v = 0$ по непрерывности.

Всюду, где $v \neq 0$, траектории систем (26) и (27) совпадают, хотя параметры на них различны. При $v > 0$ направления по ζ и z совпадают, а при $v < 0$ они противоположны. Точки, в которых $v = 0$, не принадлежат траекториям системы (26). Таким образом, мы перешли от уравнения (25) к динамической системе (27). Исследуем теперь состояния равновесия (особые точки) системы (27).

Возможны следующие случаи:

- 1) если $\kappa \neq 0$, то имеется три состояния равновесия: $(0, -\sigma)$, $(0, 0)$ и $(-\kappa/\alpha, 0)$;
- 2) если $\kappa = 0$, то имеется два состояния равновесия: $(0, -\sigma)$ и $(0, 0)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P(v, w) &= vw, \quad Q(v, w) = -w^2/\sigma - w - \alpha v^2 - \kappa v, \\ M(v, w) &= \begin{pmatrix} P_v & P_w \\ Q_v & Q_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & v \\ -2\alpha v - \kappa & -2w/\sigma - 1 \end{pmatrix}, \\ \Delta(v, w) &= \det M(v, w) = -\frac{2w^2}{\sigma} - w + 2\alpha v^2 + \kappa v, \\ \delta(v, w) &= \text{Tr } M(v, w) = \frac{(\sigma - 2)w}{\sigma} - 1. \end{aligned}$$

Определим последовательно тип каждой особой точки.

1. Рассмотрим точку $(0, -\sigma)$. Поскольку $\Delta(0, -\sigma) = -\sigma \neq 0$, то это простое состояние равновесия;

$$\det(M - \lambda E)|_{v=0, w=-\sigma} = (\lambda + \sigma)(\lambda - 1),$$

т. е. корнями характеристического уравнения являются $\lambda_1 = -\sigma$ и $\lambda_2 = 1$. Так как здесь $\Delta < 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, точка $(0, -\sigma)$ имеет топологический тип седло.

2. Рассмотрим точку $(0, 0)$. Поскольку $\Delta(0, 0) = 0$, то это сложное состояние равновесия. Здесь $\delta(0, 0) = -1 \neq 0$, уравнение, которое получается из системы (27) при исключении независимой переменной ζ , представимо в виде

$$vw dw - [lw - w^2/\sigma - \alpha v^2 - \kappa v] dv = 0,$$

где $l = -1$. Далее отдельно рассмотрим случаи $\kappa = 1/\omega$ и $\kappa = 0$.

2.1. Пусть $\kappa = 1/\omega \neq 0$. Представим решение уравнения

$$-lw + w^2/\sigma + \alpha v^2 + \kappa v = 0$$

в виде ряда по степеням v , который подставим в vw . Получим

$$w = \phi(v) = -v/\omega + \dots, \quad \xi(v) = (vw)|_{w=\phi(v)} = -v^2/\omega + \dots$$

Поскольку младшая степень v в разложении $\xi(v)$ равна двум, точка $(0, 0)$ является седло-узлом с одним узловым сектором и двумя седловыми; так как $l < 0$, узловой сектор устойчивый. При этом если $\omega < 0$, то траектории узлового сектора стремятся к $(0, 0)$ при $\zeta \rightarrow -\infty$ слева от оси Ow , а если $\omega > 0$, то справа от оси Ow при $\zeta \rightarrow +\infty$.

2.2. Пусть $\kappa = 0$. Тогда разложения из п. 2.1 примут вид

$$w = \phi(v) = -\frac{\alpha}{2}v^2 + \dots, \quad \xi(v) = -\frac{\alpha}{2}v^3 + \dots$$

Младшая степень v в разложении $\xi(v)$ равна трем, поэтому при $\alpha > 0$ точка $(0, 0)$ является сложным узлом (устойчивым), а при $\alpha < 0$ — сложным седлом.

3. Рассмотрим точку $(-\kappa/\alpha, 0)$. Поскольку

$$\Delta(-\kappa/\alpha, 0) = \kappa^2/\alpha \neq 0,$$

то это простое состояние равновесия;

$$\det(M - \lambda E)|_{v=-\kappa/\alpha, w=0} = \lambda^2 + \lambda + \kappa^2/\alpha,$$

т. е. корнями характеристического уравнения будут

$$\lambda_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{1/4 - \kappa^2/\alpha} = -1/2 \pm \sqrt{1/4 - 1/(\alpha\omega^2)}.$$

В зависимости от значений параметров α и ω рассматриваемое состояние равновесия может являться либо устойчивым фокусом, если $1/4 < 1/(\alpha\omega^2)$, либо устойчивым узлом, если $1/4 > 1/(\alpha\omega^2)$. Случай $1/4 = 1/(\alpha\omega^2)$ требует особого рассмотрения, которое здесь не проводится.

§5. Исследование фазового портрета

Построим и исследуем фазовый портрет системы (27) в случае, когда $\alpha > 0$. Не теряя общности рассмотрения, можем принять $\omega > 0$, поскольку решения (25) обладают симметрией $v(z, -\omega) = -v(-z, \omega)$. Рассмотрим сначала тепловую волну с логарифмическим фронтом, а затем — с линейным. Отметим, чтобы не повторяться, что во всех рассмотренных случаях

1) фазовые траектории меняют направление движения при переходе через ось Ov , а также при пересечении эллипса $w^2/\sigma + w + \alpha v^2 + \kappa v = 0$, на котором, в частности, лежат все особые точки (он изображен пунктирной линией);

2) особые точки, лежащие на оси Ow , обладают вертикальными полу-сепаратрисами.

5.1. Три особых точки, случай фокуса. На рис. 1 представлен фазовый портрет системы (27) в случае, когда $1/4 < 1/(\alpha\omega^2)$. Система в данном случае, как показано выше, имеет три особые точки: $M_0(0, 0)$, $M_1(0, -\sigma)$ и $M_2(-\kappa/\alpha, 0)$, представляющие собой седло-узел (с одним узловым и двумя седловыми секторами), седло и устойчивый фокус соответственно.

Рис. 1. Фазовый портрет системы (27) в случае, когда M_2 — фокус

Помимо сепаратрис, лежащих на оси Ow , имеются еще три, которые не совпадают с координатными осями. Из них S_1 и S_2 стремятся к точке M_1 при $\zeta \rightarrow -0$ с положительным наклоном; S_3 стремится

- а) к точке M_0 при $\zeta \rightarrow +0$ с отрицательным наклоном;
- б) к точке M_2 при $\zeta \rightarrow +\infty$.

Сепаратриса S_1 отделяет узловый сектор особой точки M_0 , S_3 разделяет седловые сектора той же точки, S_2 окружает область закрутки фокуса.

Выполнив обратную параметризацию, т. е. вернувшись к системе (26), можно убедиться, что сепаратрисами S_1^* , S_2^* и S_3^* , в которые в этом случае перейдут S_1 , S_2 и S_3 , исчерпывается набор траекторий, стремящихся при $z \rightarrow 0$ к точкам $(0, -\sigma)$ и $(0, 0)$, следовательно, они отвечают решениям уравнения (25) с соответствующими начальными условиями.

Таким образом, по виду фазовых траекторий S_1 , S_2 и S_3 можно описать поведение решений задачи Коши (зК) для (25): $S_1 \cup S_2$ соответствует решению при

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = -\sigma \quad (28)$$

(см. рис. 2 (а)); решение зК (25), (28) существует на некотором интервале $(-z_*, z^*)$ и не может быть продолжено за его границы, при этом

$$v|_{z=z^*} = v|_{z=-z_*} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -z_*+0} v'(z) = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow -z^*-0} v'(z) = -\infty. \quad (29)$$

Отметим, что на графике (рис. 2 (а)) имеется точка перегиба $z_e > 0$, слева от которой график является выпуклым вверх ($v'' < 0$), а справа — выпуклым вниз ($v'' > 0$).

Рис. 2. График решения задачи Коши (25), (28):
(а) при $\omega\alpha > 0$; (б) при $\kappa = 0$

Сепаратриса S_3 соответствует нетривиальному решению при

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \quad (30)$$

(см. рис. 3 (а)); решение зК (25), (30) на интервале $(-z_\alpha, 0)$ монотонно возрастает, а далее при $z < -z_\alpha$, $z \rightarrow -\infty$ немонотонно приближается к горизонтальной асимптоте $v = -1/(\alpha\omega)$.

Рис. 3. График решения задачи Коши (25), (30):
(а) при $0 < \omega^2 \alpha < 4$; (б) при $\omega^2 \alpha > 4$

5.2. Три особых точки, случай узла. На рис. 4 представлен фазовый портрет системы (27) в случае, когда $1/4 > 1/(\alpha\omega^2) > 0$. Система также имеет три особые точки: $M_0(0, 0)$, $M_1(0, -\sigma)$ и $M_2(-\kappa/\alpha, 0)$, представляющие собой седло-узел, седло и устойчивый узел соответственно.

Рис. 4. Фазовый портрет системы (27) в случае, когда M_2 — узел

Помимо сепаратрис, лежащих на оси Ow , имеются еще три, которые не совпадают с координатными осями. Из них S_1 и S_2 стремятся к точке M_1 при $\zeta \rightarrow -0$ с положительным наклоном; S_3 стремится

а) к точке M_0 при $\zeta \rightarrow +0$ с отрицательным наклоном;

б) к точке M_2 при $\zeta \rightarrow +\infty$.

Сепаратриса S_1 отделяет узловый сектор особой точки M_0 , S_3 разделяет седловые сектора той же точки (закрутки при этом, в отличие от предыдущего случая, не будет), S_2 окружает область притяжения особой точки M_1 .

Аналогично предыдущему случаю устанавливаем, что сепаратрисы S_1 , S_2 и S_3 отвечают решениям уравнения (25) с соответствующими начальными условиями: $S_1 \cup S_2$ — решению зК (25), (28), при этом последнее существует на некотором интервале $(-z_*, z^*)$ и не может быть продолжено за его пределы (качественное поведение данной кривой описывает рис. 2 (а), предельные свойства (29) сохраняются); сепаратриса S_3 соответствует нетривиальному решению зК (25), (30) (см. рис. 3 (b)), при этом решение на интервале $(-z_\omega, 0)$ монотонно возрастает, а далее при $z > -z_\omega$ может быть продолжено прямой $v = -1/(\alpha\omega)$ (с непрерывными производными).

5.3. Две особых точки. На рис. 5 представлен фазовый портрет системы (27) в случае, когда $\kappa = 0$. Система имеет две особые точки: $M_0(0, 0)$ и $M_1(0, -\sigma)$, представляющие собой устойчивый узел и седло соответственно.

Рис. 5. Фазовый портрет системы (27) в случае, когда точки M_2 и M_0 совпадают

Помимо сепаратрис, лежащих на оси Ow , имеются еще две, которые не совпадают с координатными осями. При этом S_1 и S_2 стремятся к точке M_1 при $\zeta \rightarrow -0$ с положительным наклоном и отделяют область притяжения узловой особой точки M_0 ; $S_1 \cup S_2$ соответствует решению зК (25), (28), причем последнее существует на некотором симметричном интервале $(-z_*, z_*)$ и не может быть продолжено за его пределы (см. рис. 2 (б)), $v(z) = -v(-z)$; более того, $v|_{z=\pm z_*} = 0$, $\lim_{z \rightarrow \pm z_* \mp 0} v'(z) = \mp \infty$. Точкой переги-

ба здесь является $z_e = 0$. К особой точке M_0 стремятся только полусепаратрисы, совпадающие с осью Ow , поэтому зК (25), (30) в данном случае имеет только тривиальное решение.

Из рассуждений, приведенных в настоящем разделе, вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. 1. Задача Коши (25), (28) в случае $\alpha > 0$ имеет единственное решение $v(z) \in C_{[-z_*, z^*)} \cap C_{(-z_*, z^*)}^2$.

2. Задача Коши (25), (30) в случае $\alpha > 0$, $\kappa > 0$ имеет единственное нетривиальное решение $v(z) \in C_{(-\infty, 0]} \cap C_{(-\infty, 0)}^2$.

§6. Поведение тепловых волн

С использованием полученных ранее результатов можно более детально исследовать поведение решений типа обобщенной бегущей волны. Как и в предыдущем разделе, полагаем, что $\alpha > 0$.

6.1. Тепловая волна с логарифмическим фронтом. Пусть для определенности фронт тепловой волны движется из начала координат в первый квадрант, т. е. для функции, определяющей закон его движения, справедливы соотношения $a(t) = \ln(c_5 t + 1)^\omega$, $\omega c_5 > 0$. Тогда по теореме 2 имеем

$$u(t, \rho) = \frac{\omega c_5 v(z)}{c_5 t + 1}, \quad (31)$$

где $z = \rho - \omega \ln(c_5 t + 1)$. Так как, не теряя общности рассмотрения, можно принять $\omega > 0$, возможны два случая.

1. Пусть $c_5 > 0$. Очевидно, что в данном случае $u(t, \rho) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $v(z) \geq 0$, поэтому рассмотрим неотрицательную часть решения задачи (25), (28) (см. рис. 2 (а)). Из результатов предыдущего параграфа известно, что в данном случае область распространения тепловой волны в любой момент времени определяется неравенствами

$$\ln(c_5 t + 1)^\omega - z_* \leq \rho \leq \ln(c_5 t + 1)^\omega,$$

т. е. имеем уединенную волну с задним фронтом $\rho = \ln(c_5 t + 1)^\omega - z_*$. При этом из (31) следует, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, \rho) = 0$ для всех ρ в силу ограниченности $v(\xi)$ на $[-z_*, 0]$, т. е. полное остывание нагретого полупространства происходит за бесконечное время. Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 6 (а).

2. Пусть $c_5 < 0$. Тогда $0 \leq t < -1/c_5$, причем $t = -1/c_5$ — вертикальная асимптота фронта тепловой волны. Очевидно, что в данном случае $u(t, \rho) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $v(\xi) \leq 0$, поэтому возможны следующие подслучаи.

Рис. 6. Тепловая волна с логарифмическим фронтом:
(а) затухание; (б) обострение

2.1. Пусть $v(z) \leq 0$, $v'(0) = -\sigma$ (см. рис. 2 (а)). Из результатов предыдущего параграфа следует, что область, в которой задана тепловая волна, определяется неравенством

$$\ln(c_5 t + 1)^\omega - z^* \leq \rho \leq \ln(c_5 t + 1)^\omega,$$

т. е. вновь имеем уединенную волну с задним фронтом $\rho = \ln(c_5 t + 1)^\omega - z^*$, форма и поведение которой отличаются от предыдущего случая. В частности, бесконечно растет амплитуда, причем нагрев до сколь угодно большой температуры происходит за конечное время. Такое поведение соответствует HS-режиму с обострением [17, с. 69]. Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 6 (б).

2.2. Пусть $v(z) \leq 0$, $v'(0) = 0$. Рассмотрим нетривиальное решение зК (25), (30) (см. рис. 3). Поскольку здесь $z \leq 0$, из результатов предыдущего параграфа следует, что область распространения тепловой волны определяется неравенством $\rho \geq \ln(c_1 t + 1)^\omega$. Такая тепловая волна, очевидно, не может быть порождена каким-либо краевым режимом при $\rho = 0$, однако построенное решение, по-видимому, может быть полезно при исследовании обратных задач теплопроводности [13].

Замечание 3. Наиболее интересным из рассмотренных в данном пункте случаев представляется случай 2.1, поскольку здесь поведение тепловой волны принципиально отличается от рассмотренного ранее случая, когда источник отсутствует: как явствует из результатов работы [11], при $\alpha = 0$ в режиме с обострением не происходит локализации теплового воздействия.

6.2. Тепловая волна с линейным фронтом. Пусть фронт тепловой волны движется из начала координат в первый квадрант, т. е. для функции, определяющей закон его движения, справедливы соотношения $a(t) = c_7 t$, $c_7 > 0$. Тогда по теореме 2 имеем

$$u(t, \rho) = c_7 v(z), \quad (32)$$

где $z = \rho - c_7 t$. Так как в данном случае $u(t, \rho) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $v(z) \geq 0$, рассмотрим неотрицательную часть решения задачи (25), (28) при $\kappa = 0$ (см. рис. 2(а)). Из результатов предыдущего параграфа известно, что в данном случае область распространения тепловой волны в любой момент времени определяется неравенствами $c_7 t - z_* \leq \rho \leq c_7 t$, т. е. имеем уединенную волну с задним фронтом $\rho = c_7 t - z_*$. При этом из (32) следует, что данная волна движется, не меняя своей формы, иначе говоря, является солитоном в классическом понимании этого термина. Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 7.

Рис. 7. Тепловая волна с линейным фронтом — солитон

Замечание 4. Здесь поведение тепловой волны также принципиально отличается от рассмотренного ранее случая, когда источник отсутствует: при $\alpha = 0$ имеет место простейшее линейное решение задачи (4), (5) (см. следствие 2). Таким образом, в обоих случаях (с источником и без него) функция $u = u(t, \rho)$ определяет линейчатую поверхность в пространстве переменных t, ρ, u , однако в первом из них решение, очевидно, является более содержательным.

Заключение

В настоящей работе получены новые классы точных (обобщенно-автомодельных и типа обобщенной бегущей волны) решений нелинейного

уравнения теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры при наличии источника (стока) со степенной зависимостью последнего от температуры. Найденные решения имеют вид тепловой волны, распространяющейся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью. Определены семейства допустимых фронтов, являющихся логарифмическими, степенными и показательными функциями. Исходная задача построения решений нелинейного параболического уравнения второго порядка с частными производными сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с начальными условиями, предполагающими вырождение уравнений. Обоснованы теоремы существования и единственности локально-аналитических решений указанных начальных задач.

Проведено специальное исследование решений, имеющих тип обобщенной бегущей волны (с логарифмическим и линейным фронтом), при наличии источника. Методами качественной теории дифференциальных уравнений установлена нелокальная разрешимость соответствующих задач Коши в классе функций конечной гладкости, изучены поведение и глобальные свойства решений.

Полученные результаты интерпретированы с точки зрения исходной задачи о движении тепловой волны. Показано, что в случае логарифмического теплового фронта решение имеет вид уединенной волны, амплитуда которой (в зависимости от выбора направления движения) может либо затухать, стремясь к нулю при $t \rightarrow +\infty$, либо возрастет, стремясь к бесконечности при $t \rightarrow \text{const}$ (НС-режим с обострением). В случае линейного теплового фронта решение имеет вид солитона, движущегося по холодному фону с постоянной скоростью.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть следующими. Во-первых, интерес представляет получение оценок радиуса сходимости построенных степенных рядов. Во-вторых, целесообразно выполнить качественное исследование обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым сводится построение обобщенно-автомодельных решений.

Список литературы

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. *Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа*. М.: Недра, 1972.
2. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. М.: Наука, 1990.
3. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.

4. Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа // *Сиб. матем. журн.* 2008. Т. 49, № 5. С. 1064–1076.
5. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // *Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе*. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
6. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2014. Т. 17, № 1(57). С. 46–54.
7. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2018. Т. 21, № 2(74). С. 56–65.
8. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Слевак Л. Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.
9. Казаков А. Л., Лемперт А. А. О существовании и единственности краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // *Прикл. мех. и техн. физ.* 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
10. Казаков А. Л., Орлов Св. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2016. Т. 22, № 1. С. 112–123.
11. Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // *Сиб. матем. журн.* 2018. Т. 59, № 3. С. 544–560.
12. Кожанов А. И., Пинигина Н. Р. Краевые задачи для некоторых классов уравнений составного типа высокого порядка // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2015. Т. 12. С. 842–853.
13. Короткий А. И., Стародубцева Ю. В. *Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса*. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015.
14. Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И. Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции-диффузии с нелинейными источниками // *Моделир. и анал. инф. систем.* 2016. Т. 23, № 3. С. 309–316.
15. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. *Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур*. М.: Наука, 1987.

16. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. *Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения*. М.: Изд-во Юрайт, 2017.
17. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*. М.: Наука, 1987.
18. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*. М.: Физматлит, 2007.
19. Сидоров А. Ф. *Избранные труды: Математика. Механика*. М.: Физматлит, 2001.
20. Demidenko G. V. Quasielliptic operators and equations not solvable with respect to the higher order derivative // *J. Math. Sci. (United States)*. 2018. Т. 230, № 1. P. 25–35.
21. Demidenko G. V. and Uspenskii S. V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. New York, Basel: Marcel Dekker, 2003.
22. Kazakov A. L. and Spevak L. F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // *Appl. Math. Modelling*. 2013. V. 37, N 10–11. P. 6918–6928.
23. Kazakov A. L. and Spevak L. F. An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry // *Appl. Math. Modelling*. 2016. V. 40, N 2. P. 1333–1343.
24. Olver P. J. Direct reduction and differential constraints // *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*. 1994. V. 444, N 1922. P. 509–523.
25. Vazquez J. L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford: Clarendon Press, 2007.

Казakov Александр Леонидович

Институт динамики систем и теории управления
им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134,
Иркутск, 664033 РОССИЯ.
E-mail: kazakov@icc.ru.

Поступила в редакцию
21 ноября 2018 г.

Получена после доработки
26 января 2019 г.

Принята к публикации
27 февраля 2019 г.