Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

G. A. Karapetyan, Fractional multianisotropic spaces and embedding theorems, *Mat. Tr.*, 2019, Volume 22, Number 2, 76–89

DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.205>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.198.187.58

April 26, 2023, 13:17:46

ДРОБНЫЕ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ НИХ

Г. А. Карапетян

В работе вводятся мультианизотропные функциональные пространства с дробными производными, изучаются мультианизотропные бесселевы потенциалы и для них доказываются теоремы вложения.

Ключевые слова и фразы: дробные мультианизотропные пространства, интегральное представление, теоремы вложения, бесселевы потенциалы.

Введение

Теория вложений функциональных пространств берет свое начало от работ С. Л. Соболева, в которых введены пространства функций W_p^l , имеющих обобщенные производные. Для этих пространств С. Л. Соболевым доказаны первые теоремы вложения [19; 20]. В дальнейшем были введены и детально изучены классы $H_p^{(r)}$ (см. [13]), $W_p^{(r)}$, $B_p^{(r)}$, L_p^r (см. [22], [8], [18], [23], [3], [1], [17], [21], [9–11]). Эти классы достаточно глубоко изучены в монографиях [2; 15], где также можно найти историю вопроса. В изучаемых пространствах основную роль играют понятия дробной производной Лиувилля [27] и Римана [28]. Подробную историю развития теории в данном направлении можно найти, например, в книге [16]. В дальнейшем, когда Л. Хёрмандер ввел класс гипоэллиптических операторов (см. [25]), оказалось, что, в отличие от эллиптических, характеристический многогранник данных операторов не обязательно должен быть треугольной пирамидой, а может быть более общим многогранником. Следовательно, нужно было определить новые функциональные пространства, которые позволили бы более адекватно описывать свойства гипоэллиптических операторов. Первые исследования в этом направлении были проведены С. М. Никольским [14] и В. П. Михайловым [12] (см., например, [24]). В дальнейшем Г. Г. Казаряном изучались классы функций, которые сегодня принято называть мультианизотропными классами С. Л. Соболева (см., например, [4]). С одной стороны, данный класс является естественным обобщением обычного векторного класса С. Л. Соболева, с другой стороны, изучение такого класса представляет дополнительные трудности, потому что

функции из этого класса по разным направлениям имеют разную регулярность. В частности, долгое время не удавалось получить «удачное» интегральное представление для таких функций. Недавно (см. [5–7; 26]) получено интегральное представление, с помощью которого доказаны теоремы вложения для таких функций. Но все эти исследования проведены для обобщенных производных целого порядка. В данной работе по идеям работ П. И. Лизоркина [10; 11] впервые вводятся мультианизотропные пространства с производными дробного порядка, а также изучаются мультианизотропные бесселевы потенциалы и для них доказываются теоремы вложения. В частности, некоторые результаты работы улучшают результаты для классов с производными целого порядка.

§1. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

В современной литературе существуют разные подходы для определения дробных производных и дробного интегрирования, мы для определенности будем использовать подход П. И. Лизоркина [10; 11]. Другие определения интеграла и производной дробных порядков и библиографию по этим вопросам можно найти в [16].

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство, а $\mathbb{Z}_+^n$ — множество мультииндексов из $\mathbb{R}^n$. Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $t > 0$ введем следующие обозначения:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad t^\eta = (t^{\eta_1}, \dots, t^{\eta_n}),$$

$$|\xi|^\alpha = |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_n|^{\alpha_n}, \quad D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, n);$$

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ — обобщенная производная по С. Л. Соболеву порядка α .

Для преобразования Фурье функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ будем использовать следующее обозначение:

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = F[\varphi](\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda x} \varphi(x) dx.$$

Аналогично для обратного преобразования Фурье функции $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ положим

$$\hat{\psi}(x) = F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\lambda} \psi(\lambda) d\lambda.$$

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^n)$ определяются соответственно формулами

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \langle \hat{g}, \psi \rangle = \langle g, \hat{\psi} \rangle.$$

Пусть имеем набор векторов из $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами. Обозначим через $\mathfrak{N}$ наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки этого набора. Многогранник $\mathfrak{N}$ называется *вполне правильным*, если имеет вершину в начале координат и на всех координатных осях, а внешние нормали всех $(n-1)$ -мерных некоординатных граней имеют положительные координаты. Через $\mathfrak{N}_i^{n-1}$ ($i = 1, \dots, I_{n-1}$) обозначим $(n-1)$ -мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{N}$ и положим

$$\partial' \mathfrak{N} = \bigcup_{i=1}^{I_{n-1}} \mathfrak{N}_i^{n-1}, \quad \mathfrak{N}^{(0)} = \mathfrak{N} \setminus \partial' \mathfrak{N}.$$

Пусть μ^i ($i = 1, \dots, I_{n-1}$) — такая внешняя нормаль грани $\mathfrak{N}_i^{n-1}$, для которой уравнение гиперплоскости, содержащей данную грань, задается формулой $(\alpha, \mu^i) = 1$ ($i = 1, \dots, I_{n-1}$). Обозначим через r^i ($i = 1, \dots, M$) вершины многогранника $\mathfrak{N}$, отличные от нуля. Пусть m — наименьшее общее кратное знаменателей r_j^i ($j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, M$). Многогранник $\mathfrak{N}_m$ называется *модельным многогранником*, если он подобен многограннику $\mathfrak{N}$ и является наименьшим многогранником, все вершины которого четные. Обозначим их через $\alpha^i = mr^i$ ($i = 1, \dots, M$).

Пусть $\alpha > 0$, а $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция. По Лиувиллю *интеграл порядка α* для данной функции $f(x)$ определяется формулой (см. [10; 11])

$$[I_\alpha f](x) \equiv f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^{1-\alpha}}, \quad (1)$$

а *производная порядка α* функции $f(x)$ формулой

$$[D^\alpha f](x) \equiv f^\alpha(x) = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} f_{[\alpha]+1-\alpha}(x), \quad (2)$$

где $[\alpha] = ([\alpha_1], \dots, [\alpha_n])$, а $[a]$ — целая часть числа a . Символами $[I_\alpha f](x)$ и $[D^\alpha f](x)$ обозначены соответственно интеграл порядка α и производная порядка α , где интегрирование берется от x до $+\infty$. Аналогично (см. [16]) определяются правосторонние и левосторонние интегралы и производные порядка α . Так как исследования пространств функций, имеющих левосторонний или правосторонний дробные интегралы (производные) порядка α , схожи, то в дальнейшем будем рассматривать пространства функций, где интегралы или производные порядка α определяются по формулам (1) или (2).

Пусть имеем вектор $l = (l_1, \dots, l_n)$ с рациональными компонентами. Тогда производная $D^l f(x_1, \dots, x_n)$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ определяется следующим образом (см. [10; 11]):

$$D^l f(x_1, \dots, x_n) = A_l \frac{\partial^{[l_1]+\dots+[l_n]+n}}{\partial x_1^{[l_1]+1} \dots \partial x_n^{[l_n]+1}} \times \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{f(t) dt_n}{(x_1 - t_1)^{l_1 - [l_1]} \dots (x_n - t_n)^{l_n - [l_n]}}, \quad (3)$$

где

$$A_l = \left(\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - [l_j] - l_j) \right)^{-1}.$$

Свойства операторов $[D^\alpha]f(x)$ и $[I_\alpha]f(x)$ достаточно подробно изучены в работах [10; 11; 16]. Для определения лиувиллевской производной функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, как и в работах [10; 11], введем основное пространство Φ . Так как оператор дробного дифференцирования не сохраняет класс Шварца S , при определении лиувиллевской производной берется наибольшее подпространство $\Phi \in S$, инвариантное относительно лиувиллевской производной. Через Φ (см. [10; 11]) обозначим класс тех функций $\phi \in S$, которые ортогональны к многочленам, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) x^l dx' = 0,$$

где dx' — элемент объема $\mathbb{R}^m$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Класс Φ не содержит бесконечно дифференцируемых финитных функций, отличных от нуля. Пусть Φ' — сопряженное пространство пространства Φ ; Φ' получается из S' в результате отождествления дистрибуций, отличающихся на многочлен.

Для функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *слабой лиувиллевской производной* порядка α называется такая функция $D^\alpha f$, что для любой функции $\phi \in \Phi$ имеет место равенство

$$\langle D^\alpha f; \phi \rangle = \langle f; D^{(\alpha)} \phi \rangle. \quad (4)$$

Сильной лиувиллевской производной порядка α для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ называется такая функция $\omega(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, что существует последовательность $\varphi_k \in C_0^\infty$, для которой

$$\|f - \varphi_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \quad \|\omega - D^{(\alpha)} \varphi_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Как показано в [11], для функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ сильная и слабая производные Лиувилля совпадают.

Пусть $\mathfrak{N}$ — вполне правильный многогранник с вершинами r^i ($i = 1, \dots, M$), где r_j^i ($i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, n$) — рациональные числа.

Определение 1. Будем говорить, что обобщенная функция f из Φ' принадлежит пространству $L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и ее производные порядка r^i ($i = 1, \dots, M$) также являются функциями из $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Пространство $L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ назовем *мультианизотропным пространством Лиувилля*.

§2. Свойства пространства $L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$

Теорема 1. *Нормировка*

$$\|f\|_{L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^M \|D^{r_i} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad (5)$$

превращает $L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ в банахово пространство.

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 4 из [10], но для полноты изложения приведем его. Выполнения аксиом нормы очевидны. Докажем полноту. Пусть $\{U_k\}$ — фундаментальная в $L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ последовательность. Из полноты $L_p(\mathbb{R}^n)$ вытекает существование таких функций $U, V_1, \dots, V_M$, принадлежащих $L_p(\mathbb{R}^n)$, что при $k \rightarrow \infty$

$$\|U_k - U\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0; \quad \|D^{r_i} U_k - V_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (i = 1, \dots, M). \quad (6)$$

В силу совпадения сильной и слабой обобщенной лувилевской производной из формулы (4) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} U_k(x) D^{r_i} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} D^{r_i} U_k(x) \varphi(x) dx$$

для любого $\varphi \in \Phi$. Ввиду наличия сильной сходимости (6), переходя к пределу справа и слева, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(x) D^{r_i} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} V_i(x) \varphi(x) dx,$$

т. е. $D^{r_i} U = V_i$ ($i = 1, \dots, M$), и теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Бесконечно дифференцируемые финитные функции плотны в $L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2 в [11, гл. II, § 5].

§3. Мультианизотропные бесселевы потенциалы и пространства $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$

Пусть $\mathfrak{N}$ — вполне правильный многогранник с рациональными вершинами, а $\mathfrak{N}_m$ — модельный многогранник многогранника $\mathfrak{N}$ с четными вершинами α^i ($i = 1, \dots, M$). Предположим, что $\mathfrak{N}_m = m\mathfrak{N}$. Обозначим

$$G_{\mathfrak{N}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ix\lambda} d\lambda}{(1 + \lambda^{\alpha^1} + \dots + \lambda^{\alpha^M})^{1/m}} \quad (7)$$

и назовем $G_{\mathfrak{N}}(x)$ мультианизотропным бesselевым потенциалом. Заметим, что если $\mathfrak{N}_m$ — треугольная пирамида с вершинами $\alpha^i = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$, то бesselевый потенциал $G_{\mathfrak{N}}(x)$ совпадает с обычным однородным бesselевым потенциалом, а если многогранник $\mathfrak{N}_m$ — треугольная пирамида с вершинами $\alpha^i = (0, \dots, 0, 2l_i, 0, \dots, 0)$, $l_i \in \mathbb{N}$, то получаются неизотропные бesselевы потенциалы, которые изучены в [10].

Обозначим также через $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$ класс функций, которые представляются в виде

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} G_{\mathfrak{N}}(x-t) F(t) dt \quad (8)$$

для некоторой функции $F \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Норму функции f в классе $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$ введем следующим образом:

$$\|f\|_{L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)} = \|F\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (9)$$

Теорема 3. Классы $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$ и $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть функция f принадлежит пространству $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$. Тогда по определению пространства $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$ функции $\tilde{f}$ и $(i\lambda)^{r^k} \tilde{f}$ ($k = 1, \dots, M$) являются образами Фурье функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$ (см. [10; 11]). Так как $(i\lambda)^{r^k} \tilde{f}$ ($k = 1, \dots, M$) — образ Фурье некоторой функции из $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $|\lambda|^{r^k} / (i\lambda)^{r^k} = (L_p, L_p)$ -мультипликатор, ввиду линейности преобразования Фурье отсюда следует, что

$$\left(1 + \sum_{k=1}^M |\lambda|^{r^k}\right) \tilde{f}$$

также является образом Фурье для некоторой функции из $L_p(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим выражение

$$\left(\frac{(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k})^{1/m}}{1 + \sum_{k=1}^M |\lambda|^{r^k}}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^M |\lambda|^{r^k}\right) \tilde{f} = \left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m} \tilde{f} = \tilde{F},$$

которое тоже является преобразованием Фурье функции $F \in L_p(\mathbb{R}^n)$, так как

$$\frac{(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k})^{1/m}}{1 + \sum_{k=1}^M |\lambda|^{r^k}}$$

является (L_p, L_p) -мультипликатором. Отсюда вытекает

$$\tilde{f} = \left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{-1/m} \tilde{F}, \quad F \in L_p(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, по теореме о свертках (см. [10]) имеем

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} G_{\mathfrak{N}}(x-t)F(t) dt.$$

Докажем обратное. Пусть $f \in L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$, т. е.

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} G_{\mathfrak{N}}(x-t)F(t) dt, \quad F \in L_p(\mathbb{R}^n).$$

Покажем, что функция f принадлежит пространству $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$. Для этого докажем, что функция f принадлежит $L_p(\mathbb{R}^n)$ и обобщенные лиувилевские производные $D^{r^k}f$ ($k = 1, \dots, M$) тоже принадлежат $L_p(\mathbb{R}^n)$. По теореме о свертках из представления $f(x)$ выводим

$$\tilde{f} = \frac{\tilde{F}}{\left(1 + \sum_{j=1}^M \lambda^{\alpha_j}\right)^{1/m}}, \quad \widetilde{D^{r^k}f} = \frac{(i\lambda)^{r^k}}{\left(1 + \sum_{j=1}^M \lambda^{\alpha_j}\right)^{1/m}} \tilde{F}.$$

Так как функции

$$\frac{1}{\left(1 + \sum_{j=1}^M \lambda^{\alpha_j}\right)^{1/m}}, \quad \frac{(i\lambda)^{r^k}}{\left(1 + \sum_{j=1}^M \lambda^{\alpha_j}\right)^{1/m}}$$

являются (L_p, L_p) -мультипликаторами, то $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и $D^{r^k}f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ($k = 1, \dots, M$) и

$$\|f\|_{L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|F\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (10)$$

Следовательно, при $1 < p < \infty$ пространства $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$ и $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны. $\square$

Теорема 4. Любая функция f из $L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$ обладает всеми производными порядка α , $\alpha \in \mathfrak{N}$, причем с некоторой, не зависящей от f , постоянной $C > 0$ имеет место неравенство

$$\|D^\alpha f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)}. \quad (11)$$

Доказательство. Из интегрального представления (8) для $f \in L_p^{(\mathfrak{N})}(\mathbb{R}^n)$ находим

$$\widetilde{D^\alpha f} = \frac{(i\lambda)^\alpha}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha_k}\right)^{1/m}} \tilde{F}.$$

Остается доказать, что для любого $\alpha \in \mathfrak{N}$ функция

$$\mu(\lambda) = \frac{(i\lambda)^\alpha}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}}$$

является (L_p, L_p) -мультипликатором, а это непосредственно следует из того, что если $\mathfrak{N}$ — вполне правильный многогранник, то для любого вектора α с рациональными координатами, $\alpha \in \mathfrak{N}$,

$$\frac{|\lambda|^\alpha}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}}$$

является мультипликатором. Проверим последний факт. Заметим, что

$$|\mu(\lambda)| = \frac{|\lambda|^\alpha}{\left(1 + \sum_{k=1}^M |\lambda|^{\alpha^k}\right)^{1/m}} \sim \frac{|\lambda|^\alpha}{1 + \sum_{k=1}^M |\lambda|^{r^k}},$$

где r^k — вершины многогранника $\mathfrak{N}$. Ограниченность $|\mu(\lambda)|$ непосредственно следует из вполне правильности многогранника $\mathfrak{N}$. Действительно, если многогранник $\mathfrak{N}$ вполне правильный, то, как известно (см. [12]), существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $\alpha \in \mathfrak{N}$

$$|\lambda|^\alpha \leq C \left(1 + \sum_{k=1}^M |\lambda|^{r^k}\right). \quad (12)$$

Ограниченность $|\lambda^k D^k \mu(\lambda)|$ при $k = (k_1, \dots, k_n)$, где k_i равняется 0 или 1 ($i = 1, \dots, n$), доказывается непосредственно с применением неравенства (12). Следовательно, по теореме П. И. Лизоркина [10] $\mu(\lambda)$ является (L_p, L_p) -мультипликатором и имеет место оценка (11). $\square$

§4. Теоремы вложения для общих мультианизотропных пространств

Пусть $\mathfrak{N}$ — вполне правильный многогранник с вершинами $\{r^1, \dots, r^M\}$, а μ^i ($i = 1, \dots, I_{n-1}$) — внешние нормали i -й $(n-1)$ -мерной грани такие, что уравнение данной грани задается формулой $(\alpha, \mu^i) = 1$. Тогда имеет место

Теорема 5. Оператор дифференцирования D^l непрерывно переводит $L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $L_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathfrak{M} = (1 - \chi)\mathfrak{N}$,

$$\chi = \max_{i=1, \dots, I_{n-1}} (l, \mu^i) \leq 1.$$

Доказательство. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n)$ — произвольный вектор с рациональными координатами, для которого $\max_{i=1, \dots, I_{n-1}} (l, \mu^i) \leq 1$; тогда $l \in \mathfrak{N}$.

Из теоремы 3 следует, что для любого элемента f из класса $L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ имеет место

$$\tilde{f} = \frac{\tilde{g}}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}},$$

где $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Для производной $D^l f$ имеем

$$\widetilde{D^l f} = (i\lambda)^l \tilde{f} = \frac{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{(1-\chi)/m} (i\lambda)^l}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}} \times \frac{1}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{(1-\chi)/m}} \tilde{g}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что выражение

$$\Phi(\lambda) = \frac{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{(1-\chi)/m} (i\lambda)^l}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}}$$

является (L_p, L_p) -мультипликатором, т. е. доказать, что выражение

$$\Phi(\lambda) = \frac{(i\lambda)^l}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{\chi/m}}$$

является (L_p, L_p) -мультипликатором. Докажем ограниченность $\Phi(\lambda)$ вне координатных плоскостей. Имеем

$$|\Phi(\lambda)| = \frac{|\lambda_1|^{l_1} \dots |\lambda_n|^{l_n}}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{\chi/m}} = \left(\frac{|\lambda_1|^{\beta_1} \dots |\lambda_n|^{\beta_n}}{1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}} \right)^{\chi/m},$$

где $\beta_i = ml_i/\chi$ ($i = 1, \dots, n$).

Вектор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ принадлежит $\mathfrak{N}_m$. Действительно, если

$$\chi = \max_{k=1, \dots, I_{n-1}} (\mu^k, l) = (\mu^{k_0}, l),$$

то

$$(\beta, \mu^{k_0}) = \left(\frac{ml}{\chi}, \mu^{k_0} \right) = m, \quad \text{а } (\beta, \mu^k) \leq m, \quad \text{если } k \neq k_0;$$

следовательно, вектор β принадлежит $\mathfrak{N}_m$. Так как $\mathfrak{N}_m$ — вполне правильный многогранник, из неравенства (12) следует ограниченность $\Phi(\lambda)$. Аналогично доказывается ограниченность выражений

$$|\lambda_1|^{k_1} \dots |\lambda_n|^{k_n} |D^{(k_1, \dots, k_n)} \Phi(\lambda)|,$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ — вектор с координатами 0 или 1. Следовательно, по теореме П. И. Лизоркина [10] $\Phi(\lambda)$ будет (L_p, L_p) -мультипликатором. $\square$

Имеет место следующая теорема вложения.

Теорема 6. Пусть $1 < p \leq q$, а вектор $l = (l_1, \dots, l_n)$ такой, что

$$\chi = \max_{i=1, \dots, I_{n-1}} \left(|\mu^i| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + (l, \mu^i) \right) \leq 1.$$

Тогда если $f \in L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, то $D^l f \in L_q^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathfrak{M} = (1 - \chi)\mathfrak{N}$, причем

$$\|D^l f\|_{L_q^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)} \quad (13)$$

с некоторой постоянной $C > 0$.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, если $f \in L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\tilde{f} = \frac{\tilde{g}}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}}, \quad \widetilde{D^l f} = \frac{(i\lambda)^l \cdot \tilde{g}}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}}.$$

Представим

$$\frac{(i\lambda)^l}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}}$$

в виде

$$\frac{(i\lambda)^l}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}} = \frac{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{(1-\chi)/m} (i\lambda)^l}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m} \left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{(1-\chi)/m}}$$

и докажем, что

$$\Phi(\lambda) = \frac{(i\lambda)^l \left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{(1-\chi)/m}}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{1/m}}$$

является (L_p, L_q) -мультипликатором. Ограниченность $\Phi(\lambda)$ доказывается точно так же, как в теореме 5. Докажем ограниченность выражения

$$|\lambda_1|^{k_1+(1/p-1/q)} \dots |\lambda_n|^{k_n+(1/p-1/q)} |D^{(k_1, \dots, k_n)} \Phi(\lambda)|,$$

где координаты вектора $(k_1, \dots, k_n)$ равны 0 или 1.

Пусть $k = (1, 0, \dots, 0)$ (остальные случаи доказываются аналогично). Рассмотрим

$$\begin{aligned} & |\lambda_1|^{1+(1/p-1/q)} |\lambda_2|^{1/p-1/q} \dots |\lambda_n|^{1/p-1/q} \\ & \times \left(|\lambda_1|^{l_1-1} |\lambda_2|^{l_2} \dots |\lambda_n|^{l_n} \left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k} \right)^{-\chi/m} + |\lambda_1|^{l_1} |\lambda_2|^{l_2} \dots |\lambda_n|^{l_n} \frac{\chi}{m} \right. \\ & \left. \times \left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k} \right)^{-\chi/m-1} \sum_{k=1}^M \alpha_1^k |\lambda_1|^{\alpha_1^k-1} |\lambda_2|^{\alpha_2^k} \dots |\lambda_n|^{\alpha_n^k} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где при $\alpha_1^k = 0$ считаем, что $\alpha_1^k - 1$ равен 0.

Представим (14) в виде

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= |\lambda_1|^{l_1+1/p-1/q} |\lambda_2|^{l_2+1/p-1/q} \dots |\lambda_n|^{l_n+1/p-1/q} \left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k} \right)^{-\chi/m} \\ &+ \frac{\chi}{m} \left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k} \right)^{-\chi/m-1} |\lambda_1|^{l_1+1/p-1/q} |\lambda_2|^{l_2+1/p-1/q} \dots |\lambda_n|^{l_n+1/p-1/q} \\ &\times \sum_{k=1}^M \alpha_1^k |\lambda_1|^{\alpha_1^k-1} |\lambda_2|^{\alpha_2^k} \dots |\lambda_n|^{\alpha_n^k}. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Для оценки A_1 рассмотрим вектор

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) = \frac{m}{\chi} \left(l_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \dots, l_n + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

и докажем, что $\beta \in \mathfrak{N}_m$. Пусть k_0 ($1 \leq k_0 \leq I_{n-1}$) — число, для которого

$$\max_{i=1, \dots, I_{n-1}} \left(|\mu^i| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + (l, \mu^i) \right) = |\mu^{k_0}| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + (l, \mu^{k_0}) = \chi.$$

Тогда для вектора β имеем

$$(\beta, \mu^{k_0}) = \frac{m}{\chi} \left((l, \mu^{k_0}) + |\mu^{k_0}| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right) = m,$$

следовательно, $\beta \in \mathfrak{N}_m$. Если $k \neq k_0$, то $(\beta, \mu^k) \leq m$ и тогда $\beta \in \mathfrak{N}_m$. Поскольку

$$A_1 = \left(\frac{|\lambda_1|^{\beta_1} \dots |\lambda_n|^{\beta_n}}{1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}} \right)^{\chi/m}$$

и $\mathfrak{N}_m$ — вполне правильный многогранник, то A_1 ограничено.

Оценим A_2 . Имеем

$$A_2 \leq C \frac{|\lambda_1|^{l_1+1/p-1/q} \dots |\lambda_n|^{l_n+1/p-1/q}}{\left(1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}\right)^{\chi/m}} \times \frac{\sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}}{1 + \sum_{k=1}^M \lambda^{\alpha^k}}.$$

Первый множитель уже оценили при рассмотрении A_1 , а второй ограничен, т. е. $\Phi(\lambda)$ по теореме П. И. Лизоркина является (L_p, L_q) -мультипликатором. Отсюда следует, что $D^l f \in L_q^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ и имеет место оценка (13). $\square$

Замечание. Результаты в теоремах 5 и 6 являются новыми также в том случае, когда $L_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) = W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, т. е. когда вершины многогранника $\mathfrak{N}$ являются мультииндексами.

Список литературы

1. Бесов О. В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*. 1961. Т. 60. С. 42–81.
2. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения*. М.: Наука, 1975.
3. Ильин В. П. Обобщение одного интегрального неравенства // *Успехи мат. наук*. 1956. Т. 11, Вып. 4 (70). С. 131–138.
4. Казарян Г. Г. Оценки дифференциальных операторов и гипоеллиптические операторы // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*. 1976. Т. 140. С. 130–161.
5. Карапетян Г. А. Интегральное представление и теоремы вложения для n -мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности // *Сиб. матем. журн.* 2017. Т. 58, № 3. С. 573–590.
6. Карапетян Г. А., Аракелян М. К. Теоремы вложения для общих мультианизотропных пространств // *Матем. заметки*. 2018. Т. 104, № 3. С. 422–438.
7. Карапетян Г. А., Хачатурян М. А. Предельные теоремы вложения для мультианизотропных функциональных пространств // *Изв. НАН Армении*. 2019. Т. 54, № 2. С. 54–64.
8. Кондрашов В. И. О некоторых свойствах функций из пространств L_p // *ДАН СССР*. 1945. Т. 48, № 8. С. 563–566.

9. Лизоркин П. И. Теоремы вложения для функций из пространств L_p^r // *ДАН СССР*. 1962. Т. 143, № 5. С. 1042–1045.
10. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // *Матем. сб.* 1963. Т. 60 (102), № 3. С. 325–353.
11. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*. 1969. Т. 105. С. 89–167.
12. Михайлов В. П. О поведении на бесконечности одного класса многочленов // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*. 1967. Т. 91. С. 58–80.
13. Никольский С. М. Об одном семействе функциональных пространств // *Успехи мат. наук*. 1956. Т. 11, Вып. 6 (72). С. 203–212.
14. Никольский С. М. Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных // *Матем. сб.* 1963. Т. 61 (103), № 2. С. 224–252.
15. Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*. М.: Наука, 1969.
16. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения*. Минск: Наука и техника, 1987.
17. Семянистый В. И. О некоторых интегральных преобразованиях в евклидовом пространстве // *ДАН СССР*. 1960. Т. 134, № 3. С. 536–539.
18. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // *Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та*. 1958. Т. 197. С. 54–112.
19. Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа // *Матем. сб.* 1938. Т. 4 (34), № 3. С. 471–497.
20. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
21. Успенский С. В. О теоремах вложения для обобщенных классов W_p^r Соболева // *Сиб. матем. журн.* 1962. Т. 3, № 3. С. 418–445.
22. Aronszajn N. and Smith K. T. Theory of Bessel potentials (I) // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 1961. V. 11. P. 385–475.
23. Calderon A. P. and Zygmund A. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations // *Studia Math.* 1961. V. 20, N 2. P. 171–225.

24. Gindikin S. and Volevich L. R. *The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations*. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. V. 86.
25. Hörmander L. Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions // *Comm. Pure. Appl. Math.* 1959. V. 12. P. 37–66.
26. Karapetyan G. A. Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces for the three-dimensional case // *Eurasian Math. J.* 2016. V. 7, N 4. P. 19–39.
27. Liouville I. Sure le calcul des differentielles a indice quelconques // *Jorn. de l'Ecole Polytechn.* 1832. V. 13. P. 1–69.
28. Riemann B. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation // *Ges. Werke*. Leipzig: Teubner, 1876. P. 331–344.

Карпетян Гарник Альбертович

Российско-Армянский университет,
ул. Овсепа Эмина, 123,
Ереван, 0051 Армения.

Поступила в редакцию
7 февраля 2019 г.

Получена после доработки
7 февраля 2019 г.

Принята к публикации
27 февраля 2019 г.