Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

K. Zh. Kudaĭbergenov, On groups carrying homogeneous weakened pregeometries,
Mat. Tr., 2019, Volume 22, Number 2, 90–105

DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.206>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.81.55.215

April 26, 2023, 12:19:16

О ГРУППАХ, НЕСУЩИХ ОДНОРОДНЫЕ ОСЛАБЛЕННЫЕ ПРЕДГЕОМЕТРИИ

К. Ж. Кудайбергенов

Изучается вопрос о существовании и свойствах групп, несущих однородные ослабленные предгеометрии.

Ключевые слова и фразы: группа, однородная предгеометрия, однородная слабая предгеометрия, квази-однородная предгеометрия.

В современной теории моделей важное место занимает геометрическая теория стабильности [4], в которой наряду с теорией стабильности, развитой Шелахом [5], большую роль играют комбинаторные структуры такие, как геометрии и предгеометрии.

В [3] геометрическая теория стабильности, где универсальной областью является большая насыщенная модель, распространяется на случай, когда универсальной областью является большая однородная модель $\mathfrak{C}$. Основным результатом работы [3] утверждает, что при некоторых условиях в модели $\mathfrak{C}$ интерпретируется группа G , действующая на некоторой предгеометрии, и либо в $\mathfrak{C}$ интерпретируется неклассическая (в смысле [3]) группа, либо действие группы G имеет хорошее описание. Естественно возникает вопрос, который и был задан в [3, Question 1.12]: существуют ли неклассические группы (так названы в [3] неабелевы группы, несущие ω -однородную предгеометрию)?

Мы покажем, что если немного ослабить понятие предгеометрии, то любая группа вкладывается в неабелеву группу, несущую однородную ослабленную предгеометрию; а если немного ослабить понятие однородности предгеометрии (мы будем называть соответствующее понятие квази-однородностью), то любая группа вкладывается в неабелеву группу, несущую квази-однородную предгеометрию. Это будет сделано в § 3 и § 5. Группа в § 3 определяется просто, но довольно близко к абелевой — имеет большой центр. В § 5 мы построим группу без центра.

Кроме того, мы проверим, что некоторые утверждения первого раздела работы [3], сформулированные в [3] для предгеометрий, на самом деле выполняются для некоторых ослабленных вариантов понятия предгеометрии. Это будет сделано в § 2 и § 6 для того, чтобы показать, что

Работа частично поддержана грантом AP05130852 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

ослабленные предгеометрии тоже могут представлять интерес. Помимо этого в § 2 даются основные определения данной работы, включая определение понятия s -структуры, частным случаем которого является понятие предгеометрии.

В § 4 мы напомним определение и некоторые свойства понятий HNN-расширения и свободного произведения, которые будут использоваться в § 5.

§1. Предварительные сведения

В дальнейшем $\mathcal{M}$ будет обозначать бесконечную модель, а M — ее основное множество (для групп мы не будем делать такого различия в обозначениях). Через $|A|$ обозначим мощность множества (или порядок группы) A . Через $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \tau$ будем обозначать кардиналы, через $i, j, k, m, n, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ — ординалы. Первый бесконечный кардинал (ординал) обозначаем через ω , а иногда через $\aleph_0$, первый несчетный кардинал — через ω_1 .

Подмножество A модели $\mathcal{M}$ и кардинал λ назовем *ограниченными*, если $|A| < |M|$ и $\lambda < |M|$. Множество $Z \subseteq M$ называется *A -инвариантным*, если любой автоморфизм модели $\mathcal{M}$, поточечно фиксирующий A , фиксирует Z как множество.

Через $\text{acl}(A)$ обозначим *алгебраическое замыкание* множества $A \subseteq M$, т. е. объединение множества всех конечных A -определимых подмножеств модели $\mathcal{M}$. Через $\text{bdcl}(A)$ обозначим объединение множества всех A -определимых подмножеств ограниченной размерности модели $\mathcal{M}$.

Пусть G — группа. Для элемента $a \in G$ через $|a|$ обозначим его порядок. Для $X \subseteq G$ через $\langle X \rangle$ обозначим подгруппу группы G , порожденную множеством X . Для краткости вместо $\langle X \cup \{a\} \rangle$ будем писать $\langle X, a \rangle$. Группы будем записывать мультипликативно с единицей 1.

Пусть $\bar{a} = (a_i : i < n)$, $\bar{b} = (b_i : i < n)$, $\bar{c} = (c_i : i < m)$.
Полагаем

$$\ell(\bar{a}) = n, \quad \bar{a} \cup A = A \cup \bar{a} = A \cup \{a_i : i < n\}, \quad \bar{a} \subseteq A \Leftrightarrow \{a_i : i < n\} \subseteq A$$

(аналогичным образом определяем $\bar{a} \subseteq \bar{c}$), $\bar{a} \hat{\ } \bar{c} = (a_i : i < n + m)$, где $a_{n+i} = c_i$ для всех $i < m$. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — кортежи элементов некоторой группы, то полагаем $\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_i b_i : i < n)$.

§2. Предгеометрии и s -структуры

Определение 2.1. Пару (X, cl) , состоящую из множества X и оператора $\text{cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ на множестве всех подмножеств множества X , назовем *s -структурой*, где $s \subseteq \{1, 2, 2_\lambda, 2_*, 3, 4, 5\}$, если для любого $k \in s$ в (X, cl) выполняется условие (k) из следующего списка:

- (1) $A \subseteq \text{cl}(A)$ для любого $A \subseteq X$;
- (2) $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$ для любых $A \subseteq B \subseteq X$;
- (2_λ) $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$ для любых $A \subseteq B \subseteq X$ таких, что $|B| < \lambda$ или $\lambda \leq |A|$;
- (2_{*}) $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$ для любых $A \subseteq B \subseteq X$ таких, что $|B| < |X|$ или $|X| = |A|$;
- (3) для любых $A \subseteq X$ и $a \in \text{cl}(A)$ существует конечное $B \subseteq A$ такое, что $a \in \text{cl}(B)$;
- (4) $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$ для любого $A \subseteq X$;
- (5) для любых $A \subseteq X$ и $a, b \in X$ условие $a \in \text{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \text{cl}(A)$ влечет $b \in \text{cl}(A \cup \{a\})$.

Предгеометрией называется $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ -структура.

Слабой предгеометрией назовем $\{1, 2, 3, 5\}$ -структуру.

Почти-λ предгеометрией назовем $\{1, 2_\lambda, 3, 4, 5\}$ -структуру.

Для s -структуры (X, cl) будем называть cl *оператором слабого замыкания* (для предгеометрии — *оператором замыкания*).

Определение 2.2. В s -структуре (X, cl) множество $A \subseteq X$ назовем *независимым над* $B \subseteq X$, если $a \notin \text{cl}((A \setminus \{a\}) \cup B)$ для любого $a \in A$. Множество A назовем *независимым*, если оно независимо над $\emptyset$.

Известно, что для любого множества A в предгеометрии любые два его максимальных независимых над B подмножества имеют одинаковую мощность (и эта мощность называется размерностью множества A над B). Для слабой предгеометрии это, вообще говоря, неверно.

Пример. Для любого $x \in \mathbb{Z}$ полагаем $\text{cl}(x) = \{x-1, x, x+1\}$. Полагаем $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ и $\text{cl}(X) = \bigcup \{\text{cl}(x) : x \in X\}$ для любого непустого $X \subseteq \mathbb{Z}$. Тогда $(\mathbb{Z}, \text{cl})$ — слабая предгеометрия, не являющаяся предгеометрией. Ее подмножество $\{1, 2, 3\}$ имеет максимальные независимые подмножества $\{1, 3\}$ и $\{2\}$ различной мощности.

Таким образом, мы, вообще говоря, не можем определить размерность множества в s -структуре так, как это делается для множеств в предгеометрии. Сделаем это следующим образом.

Определение 2.3. Для s -структуры (X, cl) и множеств $A, B \subseteq X$ определим *размерность* A над B и просто *размерность* A , полагая

$$\dim(A/B) = \min \{|Y| : Y \subseteq M, A \subseteq \text{cl}(Y \cup B)\},$$

$$\dim(A) = \dim(A/\emptyset).$$

Предложение 2.0. (1) Если (M, cl) — предгеометрия и $A, B \subseteq M$, то $\dim(A/B)$ совпадает с мощностью любого максимального независимого над B подмножества множества A .

(2) Если в $\{2\}$ -структуре (M, cl) выполняются $B \subseteq B'$ и $A' \subseteq A$, то $\dim(A/B) \geq \dim(A'/B')$.

(3) Если $\dim(A/B) > \dim(C/B)$ в $\{1, 2, 4\}$ -структуре (M, cl) , то $A \not\subseteq \text{cl}(B \cup C)$.

Доказательство. (1) Пусть Z — максимальное независимое над B подмножество в A . Тогда $A \subseteq \text{cl}(Z \cup B)$, и потому $|Z| \geq \dim(A/B)$. Пусть $Y \subseteq M$ таково, что $A \subseteq \text{cl}(Y \cup B)$ и $\dim(A/B) = |Y|$. Пусть Y' — максимальное независимое над B подмножество в Y . Тогда Y' — максимальное независимое над B подмножество в $\text{cl}(Y \cup B)$ и $\text{cl}(Y' \cup B) = \text{cl}(Y \cup B)$. Расширим Z до максимального независимого над B множества $Z' \subseteq \text{cl}(Y \cup B)$. Так как (M, cl) — предгеометрия, то $|Z'| = |Y'|$. Имеем

$$|Y| \leq |Z| \leq |Z'| = |Y'| \leq |Y|,$$

откуда $|Z| = |Y| = \dim(A/B)$.

(2) Пусть $B \subseteq B'$, $A' \subseteq A$ и $A \subseteq \text{cl}(Y \cup B)$, где $|Y| = \dim(A/B)$. Так как (M, cl) является $\{2\}$ -структурой, то

$$\text{cl}(Y \cup B) \subseteq \text{cl}(Y \cup B').$$

Поэтому $A' \subseteq \text{cl}(Y \cup B')$, откуда $\dim(A'/B') \leq |Y|$.

(3) Пусть $\dim(C/B) = |Y|$, где $C \subseteq \text{cl}(Y \cup B)$. Так как (M, cl) является $\{1\}$ -структурой, то

$$B \subseteq Y \cup B \subseteq \text{cl}(Y \cup B).$$

Поэтому $B \cup C \subseteq \text{cl}(Y \cup B)$. Так как (M, cl) является $\{2, 4\}$ -структурой, то

$$\text{cl}(B \cup C) \subseteq \text{cl}(\text{cl}(Y \cup B)) = \text{cl}(Y \cup B).$$

Так как $\dim(A/B) > \dim(C/B)$, то $A \not\subseteq \text{cl}(Y \cup B)$, и потому $A \not\subseteq \text{cl}(B \cup C)$. $\square$

В работе [3] дано определение модели, несущей ω -однородную предгеометрию. Мы его немного обобщим.

Определение 2.4. (1) Бесконечная модель $\mathcal{M}$ несет s -структуру, если существует оператор $\text{cl} : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ такой, что (M, cl) является s -структурой.

(2) Бесконечная модель $\mathcal{M}$ несет λ -однородную s -структуру, если $\mathcal{M}$ несет s -структуру (M, cl) такую, что $\dim(M) = |M|$ и для любого $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ и любых $a, b \in M \setminus \text{cl}(A)$ существует автоморфизм модели $\mathcal{M}$, сохраняющий cl , тождественный на A и переводящий a в b .

(3) Бесконечная модель $\mathcal{M}$ несет квази- λ -однородную s -структуру, если $\mathcal{M}$ несет s -структуру (M, cl) размерности $\dim(M) = |M|$ и для любого $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ найдется $B \subseteq M$ такое, что $|B| < \lambda$ и для любых $a, b \in M \setminus (\text{cl}(A) \cup B)$ существует автоморфизм модели $\mathcal{M}$, сохраняющий cl , тождественный на A и переводящий a в b .

(4) Бесконечная модель $\mathcal{M}$ несет (квази-) однородную s -структуру, если она несет (квази-) $|M|$ -однородную s -структуру.

Заметим, что в силу предложения 2.0 (1) понятие модели, несущей ω -однородную предгеометрию, в смысле определения 2.4 эквивалентно соответствующему понятию из [3].

Предложение 2.1. (1) Если модель $\mathcal{M}$ несет λ -однородную $\emptyset$ -структуру и множество $Z \subseteq M$ является A -инвариантным, где $A \subseteq M$ и $|A| < \lambda$, то либо $Z \subseteq \text{cl}(A)$, либо $M \setminus Z \subseteq \text{cl}(A)$.

(2) В $\{2_*\}$ -структуре (M, cl) неограниченной размерности если множество $Z \subseteq M$ имеет ограниченную размерность, то $M \setminus Z$ имеет неограниченную размерность.

(3) Если модель $\mathcal{M}$ несет λ -однородную $\{2_*\}$ -структуру и $Z \subseteq M$ является A -инвариантным множеством ограниченной размерности, где $A \subseteq M$ и $|A| < \lambda$, то $Z \subseteq \text{cl}(A)$.

(4) Пусть модель $\mathcal{M}$ несет ω -однородную $\{2\}$ -структуру и $A \subseteq M$, либо $\mathcal{M}$ несет ω -однородную $\{2_*\}$ -структуру и множество $A \subseteq M$ ограничено. Тогда $\text{acl}(A) \subseteq \text{bdcl}(A) \subseteq \text{cl}(A)$.

Доказательство. (1) Допустим противное и выберем $a \in Z \setminus \text{cl}(A)$ и $b \in (M \setminus Z) \setminus \text{cl}(A)$. В силу λ -однородности существует автоморфизм f модели $\mathcal{M}$, тождественный на A и переводящий a в b . Тогда $f(Z) \neq Z$, что противоречит A -инвариантности Z .

(2) Если это не так, то существуют ограниченные $A, B \subseteq M$ такие, что $Z \subseteq \text{cl}(A)$ и $M \setminus Z \subseteq \text{cl}(B)$. Тогда $A \cup B$ ограничено и

$$M = Z \cup (M \setminus Z) \subseteq \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A \cup B),$$

что противоречит неограниченности размерности M .

(3) В силу (2) $M \setminus Z$ имеет неограниченную размерность, и потому $M \setminus Z \not\subseteq \text{cl}(A)$. Тогда в силу (1) $Z \subseteq \text{cl}(A)$.

(4) Рассмотрим A -определимое множество $Z \subseteq M$ ограниченной размерности. Существует конечное $A' \subseteq A$ такое, что Z A' -определимо. В силу (3) имеем $Z \subseteq \text{cl}(A') \subseteq \text{cl}(A)$. $\square$

Предложение 2.2. Если в $\{1, 2, 3\}$ -структуре $\text{cl}(\text{cl}(A')) = \text{cl}(A')$ для любого конечного $A' \subseteq A$, то $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$.

Доказательство. Включение $\text{cl}(\text{cl}(A)) \supseteq \text{cl}(A)$ выполняется по определению $\{1, 2\}$ -структуры. Докажем обратное включение. В силу определения $\{3\}$ -структуры достаточно доказать, что если $B \subseteq \text{cl}(A)$ конечно, то $\text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A)$. Но если $B \subseteq \text{cl}(A)$ конечно, то в силу определения $\{2, 3\}$ -структуры имеем $B \subseteq \text{cl}(A')$ для некоторого конечного $A' \subseteq A$, и тогда

$$\text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(\text{cl}(A')) = \text{cl}(A') \subseteq \text{cl}(A),$$

что завершает доказательство. $\square$

Допустим, что мы хотим построить модель, несущую ω -однородную предгеометрию, определив оператор слабого замыкания, не обладающим свойством (4) из определения 2.1. Что делать в этом случае? Можно попробовать проитерировать оператор слабого замыкания, но следующее предложение показывает, что это не всегда приводит к цели.

Предложение 2.3. Пусть модель $\mathcal{M}$ несет ω -однородную $\{1, 2, 3\}$ -структуру (M, cl) такую, что любой автоморфизм модели $\mathcal{M}$ сохраняет cl . Тогда для любого $A \subseteq M$ имеем либо $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$, либо $\text{cl}(\text{cl}(A)) = M$.

Доказательство. Пусть $A \subseteq M$ конечно. По условию предложения $\text{cl}(\text{cl}(A))$ является A -инвариантным. Тогда по предложению 2.1 (1) либо $\text{cl}(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(A)$, и потому $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$, либо $M \setminus \text{cl}(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(A)$, и потому $\text{cl}(\text{cl}(A)) = M$, так как $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(\text{cl}(A))$ в силу определения $\{1, 2\}$ -структуры.

Пусть теперь $A \subseteq M$ произвольно и $\text{cl}(\text{cl}(A)) \neq M$. Покажем, что $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$. В силу определения $\{3\}$ -структуры достаточно доказать, что если $B \subseteq \text{cl}(A)$ конечно, то $\text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A)$. Но если $B \subseteq \text{cl}(A)$ конечно, то по определению $\{2, 3\}$ -структуры имеем $B \subseteq \text{cl}(A')$ для некоторого конечного $A' \subseteq A$, и тогда

$$\text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(\text{cl}(A')) \subseteq \text{cl}(\text{cl}(A)).$$

Так как $\text{cl}(\text{cl}(A)) \neq M$, то $\text{cl}(\text{cl}(A')) \neq M$. Отсюда в силу конечности A' получаем $\text{cl}(\text{cl}(A')) = \text{cl}(A')$. Так как $A' \subseteq A$, то $\text{cl}(A') \subseteq \text{cl}(A)$. Следовательно, $\text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A)$. $\square$

§3. Существование групп, несущих однородные ослабленные предгеометрии

Теорема 3.1. Любая группа H_0 вкладывается в неабелеву группу G , имеющую порядок κ для любого кардинала $\kappa \geq |H_0| + \omega_1$ и несущую однородную слабую предгеометрию, τ -однородную почти- τ предгеометрию и квази- λ -однородную предгеометрию для любых кардиналов τ и λ таких, что $\omega \leq \tau \leq \kappa$ и $\omega < \lambda \leq \kappa$.

Доказательство. Группы записываем мультипликативно с единицей 1. Вложим H_0 в неабелеву группу H порядка κ . Пусть A — делимая абелева группа порядка κ без кручения, $G = H \times A$ — прямое произведение. Ясно, что $|G| = \kappa$. Отображение $x \mapsto (x, 1)$ вкладывает H_0 в G . Покажем, что группа G искомая.

Так как A — делимая абелева группа без кручения, для любого целого $n > 0$ и любого $a \in A$ уравнение $x^n = a$ имеет в A единственное решение; это решение называется корнем n -й степени из a и обозначается через $a^{1/n}$.

Для непустого $B \subseteq A$ пусть $\sqrt{B}$ — подгруппа в A , порожденная корнями всевозможных степеней из элементов множества B . Пусть $\sqrt{\emptyset} = \{1\}$.

Для $X \subseteq G$ полагаем

$$X_A = \left\{ a \in A : (\exists h \in H) [(h, a) \in X] \right\},$$

$$\text{cl}(X) = \left((H \setminus \{1\}) \times A \right) \cup (\{1\} \times \sqrt{X_A}).$$

(1) Покажем, что (G, cl) — слабая предгеометрия. Пусть $X \subseteq G$.

- (i) Ясно, что $X \subseteq \text{cl}(X)$.
- (ii) Если $X \subseteq Y \subseteq G$, то $X_A \subseteq Y_A$, и потому $\text{cl}(X) \subseteq \text{cl}(Y)$.
- (iii) Пусть $\bar{a} \in \text{cl}(X)$. Покажем, что $\bar{a} \in \text{cl}(X')$ для некоторого конечного $X' \subseteq X$. Если $\bar{a} \notin \text{cl}(\emptyset)$, то $\bar{a} = (1, a)$, где $a \in \sqrt{X_A}$. Существует конечное $X' \subseteq X$ такое, что $a \in \sqrt{X'_A}$. Тогда

$$\bar{a} \in \{1\} \times \sqrt{X'_A},$$

и потому $\bar{a} \in \text{cl}(X')$.

- (iv) Пусть $\bar{a} \in \text{cl}(X \cup \{\bar{b}\}) \setminus \text{cl}(X)$. Тогда $\bar{a} = (1, a)$, $\bar{b} = (h, b)$ для некоторого $h \in H$ и $a \in \sqrt{X_A \cup \{b\}}$. Следовательно, a можно представить в виде $a = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m} y^n$, где $x_i^{k_i} \in X_A$ и $y^k = b$ для некоторых k_i и k . Тогда

$$b = y^k = (a^{1/n} x_1^{-n_1/n} x_2^{-n_2/n} \dots x_m^{-n_m/n})^k \in \sqrt{X_A \cup \{a\}},$$

и потому $\bar{b} \in \text{cl}(X \cup \{\bar{a}\})$.

(2) Покажем, что $\dim(G) = |G|$. Если $X \subseteq G$, то $|\sqrt{X_A}| \leq |X| + \omega$. Для любого $a \in A \setminus \{1\}$ имеем $(1, a) \notin \text{cl}(\emptyset)$. Поэтому в силу несчетности A индукцией по $i < |A|$ можно выбрать

$$(1, a_i) \in G \setminus \text{cl}\left(\{(1, a_j) : j < i\}\right).$$

Тогда для любого $X \subseteq G$ если $G = \text{cl}(X)$, то $(1, a_i) \in \{1\} \times \sqrt{X_A}$, т. е. $a_i \in \sqrt{X_A}$ для всех $i < |A|$. Следовательно, $|X| \geq |A| = |G|$, и потому $\dim(G) = |G|$.

(3) Покажем, что слабая предгеометрия (G, cl) однородна. Для $X \subseteq G$ мощности $|X| < |G|$ и $\bar{a}, \bar{b} \in G \setminus \text{cl}(X)$ имеем $\bar{a} = (1, a)$, $\bar{b} = (1, b)$ и $a, b \in A \setminus \sqrt{X_A}$.

Группа A делима, абелева и без кручения, поэтому ее теория $\text{Th}(A)$ ω_1 -категорична и допускает элиминацию кванторов. В силу элиминации кванторов элементы a и b реализуют в группе A один и тот же тип над $\sqrt{X_A}$. Ввиду ω_1 -категоричности группа A однородна (в общепринятом теоретико-модельном смысле), поэтому существует автоморфизм f группы A , переводящий a в b и тождественный на $\sqrt{X_A}$.

Тогда отображение $g : G \rightarrow G$ по правилу $g((x, y)) = (x, f(y))$ будет автоморфизмом группы G , переводящим $\bar{a}$ в $\bar{b}$, тождественным на X и сохраняющим cl , поскольку

$$\begin{aligned} g(\text{cl}(X)) &= g\left(\{(x, y) \in G : x \neq 1\} \cup (\{1\} \times \sqrt{X_A})\right) \\ &= \{(x, f(y)) : x \in H \setminus \{1\}, y \in A\} \cup (\{1\} \times f(\sqrt{X_A})) \\ &= \{(x, y) \in G : x \neq 1\} \cup (\{1\} \times \sqrt{g(X)_A}) \\ &= \text{cl}(g(X)). \end{aligned}$$

Мы доказали, что группа G несет однородную слабую предгеометрию (G, cl) . Заметим, что (G, cl) не является предгеометрией, так как $\text{cl}(\text{cl}(X)) = G$ для всех $X \subseteq G$, но $\text{cl}(X) \neq G$ для некоторых $X \subseteq G$.

Покажем, что группа G несет квази- λ -однородную предгеометрию, где λ — произвольный кардинал такой, что $\omega < \lambda \leq |G|$. Для $X \subseteq G$ полагаем

$$\begin{aligned} X_{1,A} &= \{a \in A : (1, a) \in X\}, \\ \text{cl}_1(X) &= ((H \setminus \{1\}) \times A) \cup (\{1\} \times \sqrt{X_{1,A}}). \end{aligned}$$

Точно так же, как для (G, cl) , доказывается, что (G, cl_1) — слабая предгеометрия и $\dim(G) = |G|$. Для любого $X \subseteq G$ имеем

$$\text{cl}_1(\text{cl}_1(X)) = ((H \setminus \{1\}) \times A) \cup (\{1\} \times \sqrt{\sqrt{X_{1,A}}}).$$

Отсюда и из равенства $\sqrt{\sqrt{X_{1,A}}} = \sqrt{X_{1,A}}$ получаем $\text{cl}_1(\text{cl}_1(X)) = \text{cl}_1(X)$. Значит, (G, cl_1) — предгеометрия. Покажем, что она квази- λ -однородна. Для $X \subseteq G$ мощности $|X| < \lambda$ пусть $B = \{1\} \times \sqrt{X_A}$. Тогда $|B| < \lambda$ и для

$\bar{a}, \bar{b} \in G \setminus (\text{cl}(X) \cup B)$ имеем $\bar{a} = (1, a)$, $\bar{b} = (1, b)$ и $a, b \in A \setminus \sqrt{X_A}$. Точно так же, как для (G, cl) , находим автоморфизм f группы A , переводящий a в b и тождественный на $\sqrt{X_A}$. Тогда отображение $g : G \rightarrow G$ по правилу $g((x, y)) = (x, f(y))$ будет автоморфизмом группы G , переводящим $\bar{a}$ в $\bar{b}$, тождественным на X и сохраняющим cl_1 . (Заметим, что множество B нам понадобилось для того, чтобы f было тождественным на $\sqrt{X_A}$, а не только на $\sqrt{X_{1,A}}$, что не гарантировало бы тождественности g на X .)

Осталось показать, что группа G несет τ -однородную почти- τ предгеометрию, где τ — произвольный кардинал такой, что $\omega \leq \tau \leq \kappa$. Для $X \subseteq G$ полагаем $\text{cl}_2(X) = \text{cl}(X)$, если $|X| < \tau$, и $\text{cl}_2(X) = X$, если $\tau \leq |X|$. Тот факт, что (G, cl_2) является τ -однородной почти- τ предгеометрией, следует из определения cl_2 и соответствующих свойств (G, cl) .

Теорема 3.1 доказана. $\square$

§4. HNN-расширения и свободные произведения

Группы без центра, несущие λ -однородные слабые предгеометрии, будут построены с помощью расширений Хигмана — Неймана — Неймана (HNN-расширений) и свободных произведений. Напомним соответствующие определения из [2].

Пусть G — группа с порождающим множеством X и множеством определяющих соотношений R (определяющие соотношения записываем в виде равенств, а не слов). Пусть A_i, B_i — изоморфные подгруппы группы G , $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$ — изоморфизм, $i \in I$. Тогда HNN-расширением группы G относительно A_i, B_i, φ_i называется группа G^* , заданная порождающим множеством $X \cup \{t_i : i \in I\}$ и множеством определяющих соотношений

$$R \cup \{t_i^{-1}at_i = \varphi_i(a) : a \in A_i, i \in I\}.$$

Предполагается, что $X \cap \{t_i : i \in I\} = \emptyset$.

Как доказали Г. Хигман, Х. Нейман и Б. Нейман, группа G вкладывается в HNN-расширение G^* с помощью отображения $x \mapsto x$ (см. [2, теорема 2.1]).

Пусть G_i — группа с порождающим множеством X_i и множеством определяющих соотношений R_i , $i = 0, 1$, причем $X_0 \cap X_1 = \emptyset$. Свободным произведением групп G_0 и G_1 называется группа $G_0 * G_1$ с порождающим множеством $X_0 \cup X_1$ и множеством определяющих соотношений $R_0 \cup R_1$.

Приведенной (относительно G_0, G_1) последовательностью называется последовательность $g_1, \dots, g_n$ элементов группы $G_0 * G_1$ такая, что $g_i \in (G_0 \cup G_1) \setminus \{1\}$ для любого i , причем если $g_i \in G_j$, то $g_{i+1} \in G_{1-j}$.

Согласно [2, гл. IV, теорема 1.2] если последовательность $g_1, \dots, g_n$ приведена относительно G_0, G_1 , то $g_1 \cdots g_n \neq 1$ в $G_0 * G_1$.

В силу [2, гл. IV, теорема 2.6] группы G и H вкладываются в $G * H$ посредством отображений $g \mapsto g$ и $h \mapsto h$.

Лемма 1.7 из [2, гл. IV] утверждает следующее. Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $\langle A, B \rangle = G$ и $A \cap B = \{1\}$, и если последовательность $g_1, \dots, g_n$ приведена относительно A, B , то $g_1 \cdots g_n \neq 1$. Тогда $G \cong A * B$.

§5. Существование групп без центра, несущих однородные ослабленные предгеометрии

Теорема 5.1. (1) Для любого бесконечного кардинала λ любая группа вкладывается в группу без центра, несущую λ -однородную слабую предгеометрию и τ -однородную почти- τ предгеометрию для любого кардинала τ такого, что $\omega \leq \tau \leq \lambda$.

(2) Если $\lambda^{<\lambda} = \lambda$, то любая группа порядка не более λ вкладывается в группу порядка λ без центра, несущую однородную слабую предгеометрию и τ -однородную почти- τ предгеометрию для любого кардинала τ такого, что $\omega \leq \tau \leq \lambda$.

Для доказательства теоремы 5.1 нам понадобится

Лемма 5.2. Для любых бесконечных кардиналов ρ и λ существует регулярный кардинал $\mu = \mu(\rho, \lambda)$ такой, что

$$\mu = \sum_{\alpha < \mu} (\rho + |\alpha|)^\lambda.$$

Доказательство. Пусть $\mu = (2^\nu)^+$, где $\nu \geq \rho + \lambda$. Тогда

$$\mu \leq \sum_{\alpha < \mu} (\rho + |\alpha|)^\lambda \leq \sum_{\alpha < \mu} \mu^\lambda = \mu \cdot \mu^\lambda = \mu^\lambda,$$

и для завершения доказательства достаточно показать, что $\mu^\lambda = \mu$. По теореме Хаусдорфа (см. [1, теорема 10]) $(\kappa^+)^{\lambda} = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$ для любых бесконечных кардиналов κ и λ . Поэтому

$$\mu^\lambda = ((2^\nu)^+)^{\lambda} = (2^\nu)^+ \cdot (2^\nu)^\lambda = \mu \cdot 2^{\nu \cdot \lambda}.$$

Так как $\lambda \leq \nu$, то $2^{\nu \cdot \lambda} = 2^\nu < \mu$, и потому $\mu^\lambda = \mu$. $\square$

Доказательство теоремы 5.1. Если K — группа, $a \in K$ и $B \subseteq K$, то полагаем $a \perp B$, если $\langle a, B \rangle = \langle a \rangle * \langle B \rangle$. Тогда если $a \perp B$, $a' \perp B$ и $|a| = |a'|$, то существует изоморфизм $\varphi : \langle a, B \rangle \rightarrow \langle a', B \rangle$, тождественный на B и переводящий a в a' .

Пусть H — произвольная группа. Для доказательства утверждения (1) индукцией по α построим группы G_α следующим образом.

Полагаем $G_0 = H$. Допустим, что группа G_α построена и α — четный ординал. Пусть $\{(a_i, a'_i, B_i) : i < \lambda_\alpha\}$ — множество всех троек (a, a', B) таких, что

$$a, a' \in G_\alpha, \quad B \subseteq G_\alpha, \quad |B| < \lambda, \quad a \perp B, \quad a' \perp B, \quad |a| = |a'|,$$

и пусть $\varphi_i : \langle a_i, B_i \rangle \rightarrow \langle a'_i, B_i \rangle$ — изоморфизм, тождественный на B_i и переводящий a_i в a'_i .

Если указанное множество троек пусто, то полагаем $G_{\alpha+1} = G_\alpha$. В противном случае в качестве $G_{\alpha+1}$ берем HNN-расширение группы G_α относительно $\langle a_i, B_i \rangle, \langle a'_i, B_i \rangle$ и $\varphi_i, i < \lambda_\alpha$.

В качестве $G_{\alpha+2}$ берем свободное произведение группы $G_{\alpha+1}$ и бесконечной циклической группы.

Отображение $x \mapsto x$ вкладывает G_α в $G_{\alpha+1}$. Аналогичным образом $G_{\alpha+1}$ вкладывается в $G_{\alpha+2}$. Таким образом, $G_\alpha \subseteq G_{\alpha+1} \subseteq G_{\alpha+2}$.

Для предельных δ полагаем $G_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} G_\alpha$.

Пусть $\rho = |H| + \aleph_0$. Индукцией по α докажем, что

$$|G_\alpha| \leq (\rho + |\alpha|)^\lambda.$$

Это очевидно для $\alpha = 0$. Если для четного α указанное неравенство доказано, то

$$\begin{aligned} |G_{\alpha+1}| &\leq |G_\alpha|^{<\lambda} \leq \left((\rho + |\alpha|)^\lambda\right)^{<\lambda} = \sum_{\kappa < \lambda} \left((\rho + |\alpha|)^\lambda\right)^\kappa = \sum_{\kappa < \lambda} (\rho + |\alpha|)^\lambda \\ &\leq \lambda \cdot (\rho + |\alpha|)^\lambda = (\rho + |\alpha|)^\lambda \end{aligned}$$

и

$$|G_{\alpha+2}| \leq (|G_{\alpha+1}| + \aleph_0)^{<\aleph_0} \leq (\rho + |\alpha|)^\lambda.$$

Для предельных δ имеем

$$|G_\delta| = \sum_{\alpha < \delta} |G_\alpha| \leq \sum_{\alpha < \delta} (\rho + |\alpha|)^\lambda \leq |\delta| \cdot (\rho + |\delta|)^\lambda = (\rho + |\delta|)^\lambda.$$

Пусть $\mu = \mu(\rho, \lambda)$ — регулярный кардинал, о котором идет речь в лемме 5.2. Тогда

$$\mu \leq |G_\mu| = \sum_{\alpha < \mu} |G_\alpha| \leq \sum_{\alpha < \mu} (\rho + |\alpha|)^\lambda = \mu,$$

откуда $|G_\mu| = \mu$. Полагаем $G = G_\mu$. Для $X \subseteq G$ пусть

$$\text{cl}(X) = \{a \in G : a \not\perp X\} \cup \{a \in G : |a| < \omega\}.$$

Ясно, что (G, cl) является $\{1, 2, 3\}$ -структурой. Покажем, что (G, cl) — слабая предгеометрия. Пусть $a \in \text{cl}(X \cup \{b\}) \setminus \text{cl}(X)$. Тогда $a \not\perp (X \cup \{b\})$ (случай $|a| < \omega$ невозможен, так как $a \notin \text{cl}(X)$). Поэтому существует приведенная относительно $\langle a \rangle, \langle X, b \rangle$ последовательность

(*) $g_1, \dots, g_n$ такая, что $g_1 \cdots g_n = 1$.

Для любого $g_i \in \langle X, b \rangle$ существует приведенная относительно $\langle X \rangle, \langle b \rangle$ последовательность

(**) $g_1^{(i)}, \dots, g_{m_i}^{(i)}$ такая, что $g_1^{(i)} \cdots g_{m_i}^{(i)} = g_i$.

Заменив в последовательности (*) каждый элемент $g_i \in \langle X, b \rangle$ последовательностью (**), получаем приведенную относительно $\langle a, X \rangle, \langle b \rangle$ последовательность, произведение элементов которой равно 1. Следовательно, $b \not\perp (X \cup \{a\})$, откуда $b \in \text{cl}(X \cup \{a\})$, что доказывает свойство замены.

Покажем, что $\dim(G) = |G|$. Действительно, пусть $X \subseteq G$, $|X| < |G|$. Так как $|G| = \mu$ — регулярный кардинал, то существует четный ординал $\alpha < \mu$ такой, что $X \subseteq G_{\alpha+1}$. По построению существует элемент $a \in G_{\alpha+2}$ такой, что $a \perp G_{\alpha+1}$ и $|a| = \omega$. Поэтому $G \not\subseteq \text{cl}(G_{\alpha+1})$ и тем более $G \not\subseteq \text{cl}(X)$. Следовательно, $\dim(G) = |G|$.

Для любого $b \in G \setminus \{1\}$ имеем $b \in G_{\alpha+1}$ для некоторого четного $\alpha < \mu$. Тогда b не коммутирует с элементом $a \in G_{\alpha+2}$ таким, что $a \perp G_{\alpha+1}$. Поэтому G — группа без центра.

Наконец, слабая предгеометрия (G, cl) λ -однородна. Действительно, пусть $B \subseteq G$, $|B| < \lambda$ и $a, a' \in G \setminus \text{cl}(B)$. Так как $\lambda \leq \mu$ и кардинал μ регулярен, существует четный ординал $\alpha < \mu$ такой, что $B \subseteq G_\alpha$. По построению существует элемент $t \in G_{\alpha+1}$ такой, что внутренний автоморфизм $x \mapsto t^{-1}xt$ группы $G_{\alpha+1}$ (который естественным образом продолжается до внутреннего автоморфизма группы G) тождественен на B и переводит a в a' . Осталось показать, что любой автоморфизм f группы G сохраняет cl .

Действительно, f сохраняет порядок элементов, поэтому достаточно доказать, что если $a \in G$ и $X \subseteq G$, то

$$a \not\perp X \Leftrightarrow f(a) \not\perp f(X).$$

Если $a \not\perp X$, то существует приведенная относительно $\langle X \rangle, \langle a \rangle$ последовательность $g_1, \dots, g_n$ такая, что $g_1 \cdots g_n = 1$. Так как $f \in \text{Aut}(G)$, то $f(g_1) \cdots f(g_n) = 1$, где последовательность $f(g_1), \dots, f(g_n)$ приведена относительно $\langle f(X) \rangle, \langle f(a) \rangle$, т. е. $f(a) \not\perp f(X)$.

Если $f(a) \not\perp f(X)$, то, поскольку $f^{-1} \in \text{Aut}(G)$, имеем

$$a = f^{-1}(f(a)) \not\perp f^{-1}(f(X)) = X.$$

Для завершения доказательства утверждения (1) теоремы осталось показать, что группа G несет τ -однородную почти- τ предгеометрию, где τ — произвольный кардинал такой, что $\omega \leq \tau \leq \lambda$. Для $X \subseteq G$ полагаем $\text{cl}_1(X) = \text{cl}(X)$, если $|X| < \tau$, и $\text{cl}_1(X) = X$, если $\tau \leq |X|$. Тот факт, что (G, cl_1) является τ -однородной почти- τ предгеометрией, следует из определения cl_1 и соответствующих свойств (G, cl) .

Доказательство утверждения (2) почти дословно повторяет доказательство утверждения (1). Единственное отличие состоит в том, что теперь мы полагаем $G = G_\lambda$ и показываем, что $|G| = \lambda$. Для этого индукцией по $\alpha \leq \lambda$ доказываем, что $|G_\alpha| \leq \lambda$. Имеем $|G_0| = |H| \leq \lambda$. Если α — четный ординал и уже доказано, что $|G_\alpha| \leq \lambda$, то

$$\begin{aligned} |G_{\alpha+1}| &\leq |G_\alpha|^{<\lambda} \leq \lambda^{<\lambda} = \lambda, \\ |G_{\alpha+2}| &\leq (|G_{\alpha+1}| + \aleph_0)^{<\aleph_0} \leq \lambda. \end{aligned}$$

Для предельных $\delta \leq \lambda$ имеем

$$|G_\delta| = \sum_{\alpha < \delta} |G_\alpha| \leq \sum_{\alpha < \delta} \lambda = |\delta| \cdot \lambda = \lambda.$$

Тогда

$$\lambda \leq \sum_{\alpha < \lambda} |G_\alpha| = |G| = |G_\lambda| \leq \lambda,$$

откуда получаем $|G| = \lambda$. Теорема 5.1 доказана. $\square$

§6. Группы, несущие ω -однородную s -структуру

Определение 6.1. (1) Кортеж $\bar{a} \in M^n$ элементов s -структуры назовем *генерическим над A* , где $n < \omega$ и $A \subseteq M$, если $\dim(\bar{a}/A) = n$.

(2) Назовем s -структуру (M, cl) (и модель, несущую эту структуру) *генерически n -богатой*, если для любого конечного $A \subseteq M$ существует генерический над A кортеж $\bar{a} \in M^n$.

(3) Назовем s -структуру (и модель, несущую эту структуру) *генерически богатой*, если она генерически n -богата для любого $n < \omega$.

Как отмечено в [3], предгеометрия бесконечной размерности является генерически богатой.

С другой стороны, существуют модели (например, группы, построенные в теоремах 3.1 и 5.1), которые несут генерически богатые s -структуры, не являющиеся предгеометриями.

Лемма 6.1. (1) Любая $\emptyset$ -структура бесконечной размерности генерически 1-богата.

(2) Если кортеж $\bar{a}'$ получен из кортежа $\bar{a}$ перестановкой элементов, то $\dim(\bar{a}'/A) = \dim(\bar{a}/A)$. В частности, если $\bar{a}$ генеричен над A , то и $\bar{a}'$ генеричен над A .

(3) В $\{2\}$ -структуре если кортеж $\bar{a}$ генеричен над A и $A' \subseteq A$, то $\bar{a}$ генеричен над A' .

(4) В $\{1, 2\}$ -структуре если кортеж $\bar{a} \wedge \bar{b}$ генеричен над A , то $\bar{a}$ генеричен над $A \cup \bar{b}$.

(5) Пусть модель $\mathcal{M}$ несет ω -однородную $\{1, 2\}$ -структуру, $A \subseteq M$ конечно и кортежи $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ генеричны над A . Тогда $\bar{a}$ и $\bar{b}$ автоморфны над A .

(6) Пусть модель $\mathcal{M}$ несет ω -однородную $\{1, 2\}$ -структуру, $A \subseteq M$ конечно и $Z \subseteq M^n$ является A -инвариантным. Тогда если Z содержит генерический над A кортеж, то Z содержит все генерические над A кортежи длины n .

Доказательство. Утверждения (1) и (2) следуют из определений, а (6) следует из (5).

(3) Допустим противное. Тогда найдется Y такое, что

$$|Y| < \ell(\bar{a}) \quad \text{и} \quad \bar{a} \subseteq \text{cl}(Y \cup A') \subseteq \text{cl}(Y \cup A),$$

что противоречит генеричности $\bar{a}$ над A .

(4) Допустим противное. Тогда найдется Y такое, что

$$|Y| < \ell(\bar{a}) \quad \text{и} \quad \bar{a} \subseteq \text{cl}(Y \cup A \cup \bar{b}).$$

Тогда

$$\bar{a} \wedge \bar{b} \subseteq \text{cl}(Y \cup A \cup \bar{b}) \quad \text{и} \quad |Y \cup \bar{b}| < \ell(\bar{a} \wedge \bar{b}),$$

что противоречит генеричности $\bar{a} \wedge \bar{b}$ над A .

(5) Пусть $\bar{a} = (a_i : i \leq n)$, $\bar{b} = (b_i : i \leq n)$. Индукцией по $k < n$ докажем, что существует автоморфизм f_k модели $\mathcal{M}$, тождественный на A и переводящий a_i в b_i для всех $i \leq k$. Случай $k = 0$ следует из ω -однородности. Если $k < n$ и f_k существует, то в силу (4) и ω -однородности существует автоморфизм g_k модели $\mathcal{M}$, тождественный на $A \cup \{b_i : i \leq k\}$ и переводящий $f_k(a_{k+1})$ в b_{k+1} . Полагаем $f_{k+1} = g_k \circ f_k$. Тогда f_{k+1} тождественен на A , $f_{k+1}(a_i) = g_k(f_k(a_i)) = g_k(b_i) = b_i$ для всех $i \leq k$ и $f_{k+1}(a_{k+1}) = g_k(f_k(a_{k+1})) = b_{k+1}$. $\square$

Лемма 6.2. Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in G^n$, где G — группа, несущая ω -однородную $\{1, 2, 4\}$ -структуру. Тогда если кортеж $\bar{a}$ генеричен над $A \cup \bar{b}$, то $\bar{a} \cdot \bar{b}$ генеричен над A .

Доказательство. Допустим противное. Тогда по предложению 2.0 (2) имеем

$$\dim(\bar{a}/A \cup \bar{b}) = n > \dim(\bar{a} \cdot \bar{b}/A) \geq \dim(\bar{a} \cdot \bar{b}/A \cup \bar{b}),$$

откуда согласно предложению 2.0 (3) следует, что $\bar{a} \notin \text{cl}(\bar{a} \cdot \bar{b} \cup A \cup \bar{b})$; но $\bar{a} \subseteq \text{acl}(\bar{a} \cdot \bar{b} \cup A \cup \bar{b})$ и по предложению 2.1 (4)

$$\text{acl}(\bar{a} \cdot \bar{b} \cup A \cup \bar{b}) \subseteq \text{cl}(\bar{a} \cdot \bar{b} \cup A \cup \bar{b}).$$

Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Лемма 6.3. Пусть G — группа, несущая ω -однородную генерически n -богатую $\{1, 2, 4\}$ -структуру. Пусть H является A -инвариантной подгруппой в G^n , где A конечно и $n < \omega$. Тогда если H содержит генерический над A кортеж, то $H = G^n$.

Доказательство. Пусть $\bar{b} \in G^n$. Так как группа G генерически n -богата, то существует генерический над $A \cup \bar{b}$ кортеж $\bar{a} \in G^n$. По лемме 6.1 (6) $\bar{a} \in H$. По лемме 6.2 $\bar{a} \cdot \bar{b}$ генеричен над A , и потому $\bar{a} \cdot \bar{b} \in H$ по лемме 6.1 (6). Следовательно, $\bar{b} \in H$. $\square$

Следствие 6.4. Пусть G — группа, несущая ω -однородную $\{1, 2, 4\}$ -структуру. Пусть H — собственная A -инвариантная подгруппа в G , где A конечно. Тогда $H \subseteq \text{cl}(A)$.

Доказательство следует из лемм 6.1 (1) и 6.3. $\square$

Определение 6.2. Группа G называется *связной*, если она не содержит собственной подгруппы ограниченного индекса, инвариантной над конечным множеством.

Предложение 6.5. Если G — группа, несущая ω -однородную $\{1, 2, 4\}$ -структуру, то G связна.

Доказательство. Допустим противное. Пусть H — A -инвариантная собственная подгруппа ограниченного индекса в G , где $A \subseteq G$ конечно. По следствию 6.4 $H \subseteq \text{cl}(A)$. Имеем $G = \bigcup_{a \in B} aH$, где B ограничено. Так как $aH \subseteq \text{acl}(H \cup \{a\})$, то $G \subseteq \text{acl}(H \cup B)$. По предложению 2.1 (4) и так как G несет $\{1, 2, 4\}$ -структуру, то

$$G \subseteq \text{acl}(H \cup B) \subseteq \text{cl}(H \cup B) \subseteq \text{cl}(\text{cl}(A) \cup B) \subseteq \text{cl}(\text{cl}(A \cup B)) = \text{cl}(A \cup B),$$

где $A \cup B$ ограничено, откуда $\dim(G) < |G|$, что противоречит определению модели, несущей ω -однородную s -структуру. $\square$

Список литературы

1. Йех Т. *Теория множеств и метод форсинга*. М.: Мир, 1973.
2. Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп*. М.: Мир, 1980.
3. Hyttinen T., Lessmann O., and Shelah S. Interpreting groups and fields in some nonelementary classes // *J. Math. Logic*. 2005. V. 5, N 1. P. 1–47.
4. Pillay A. *Geometric Stability Theory*. Oxford: Clarendon Press, 1996.
5. Shelah S. *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models* / Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 92. Amsterdam, New York: North-Holland Publishing Co., 1978.

Кудайбергенов Канат Жанзакович

Department of Economics,
KIMEP University,
пр. Абая, 4,
Алматы, 050010 КАЗАХСТАН.
Институт математики
и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125,
Алматы, 050010 КАЗАХСТАН.
E-mail: kanat@kimep.kz

Поступила в редакцию

6 июня 2018 г.

Получена после доработки

20 декабря 2018 г.

Принята к публикации

27 февраля 2019 г.