Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. E. Mosyagin, Exact asymptotics for the distribution of the time of attaining the maximum for a trajectory of a compound Poisson process with linear drift, *Mat. Tr.*, 2019, Volume 22, Number 2, 134–156

DOI: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.208>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.234.156.22

April 26, 2023, 11:27:15

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ДОСТИЖЕНИЯ МАКСИМУМА ТРАЕКТОРИЕЙ ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ПУАССОНА С ЛИНЕЙНЫМ СНОСОМ

В. Е. Мосягин

При определенных условиях на параметры a, p, q изучается функция распределения $G(x)$ момента достижения максимума траекторией случайного процесса $at - \nu_+(pt) + \nu_-(-qt)$, $t \in (-\infty, \infty)$, где $\nu_-(t)$ и $\nu_+(t)$ — независимые стандартные пуассоновские процессы при $t \geq 0$ и равные нулю при $t < 0$. В работе найдена точная асимптотика хвостов распределения $G(x)$. Отмечается связь рассматриваемой задачи с задачей оценивания неизвестной точки разрыва плотности распределения по известной выборке.

Ключевые слова и фразы: пуассоновский процесс с линейным сносом, оценивание точки разрыва плотности распределения, точная асимптотика распределений.

§1. Введение и постановка задачи

Пусть $\nu_-(t)$ и $\nu_+(t)$ обозначают независимые стандартные процессы Пуассона при $t \geq 0$ и доопределенные нулем при $t < 0$.

Определим случайный процесс

$$Y(t) = at - \nu_+(pt) + \nu_-(-qt), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

параметры $a, p, q > 0$ которого удовлетворяют соотношениям

$$p > q, \quad a = \frac{p - q}{\ln(p/q)}. \quad (2)$$

Из равенства (2) и теоремы Лагранжа выводим неравенства

$$p > a = \frac{p - q}{\ln p - \ln q} > q, \quad (3)$$

обеспечивающие процессу (1) отрицательный средний снос

$$\mathbb{E}Y(t) = \begin{cases} (a - p)t < 0, & t > 0, \\ (a - q)t < 0, & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда и из [14, § 26] следует существование единственной (с вероятностью 1) собственной случайной величины $t^*(Y) = \operatorname{argmax} \{Y(t)\}$ с непрерывной функцией распределения $G(x)$, аналитический вид которой был найден в [10] и с некоторыми уточнениями в [11].

Определим положительную при $z \neq 1$ функцию

$$\Lambda(z) = z - 1 - \ln z, \quad z > 0, \quad (4)$$

заметив, что в силу равенства (2)

$$\Lambda(p/a) = \Lambda(q/a), \quad (5)$$

и это значение будем в дальнейшем обозначать через λ .

В работе [5] для хвостов распределения $G(x)$

$$\mathbb{P}(t^*(Y) < -x) = G(-x) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(t^*(Y) > x) = 1 - G(x)$$

получены точные асимптотические формулы

$$\begin{aligned} G(-x) &\sim \frac{c_-(p, q)}{x^{3/2}} e^{-\lambda a x}, \\ 1 - G(x) &\sim \frac{c_+(p, q)}{x^{3/2}} e^{-\lambda a x}, \end{aligned} \quad x \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где константы $c_{\pm}$ зависят только от параметров процесса (1). При этом в [5] отмечается, что найти в явном виде одну из этих констант не удастся, а другая может быть получена, если воспользоваться аналитическим аппаратом, приведенным в [3; 4].

Цель настоящей статьи состоит в нахождении явного вида констант $c_{\pm}$, а также в получении ряда результатов, уточняющих аналитический вид функции распределения $G(x)$.

В заключение параграфа отметим, что процессы вида (1) возникают в страховой математике [13, с. 719], а также в математической статистике [1; 2; 6–9] в задачах об оценке неизвестной точки разрыва плотности распределения по известной выборке. Действительно, если плотность $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$, абсолютно непрерывного распределения имеет единственный скачок в точке $x = \theta$:

$$0 < q(\theta) = f(\theta - 0, \theta) < f(\theta + 0, \theta) = p(\theta), \quad \theta \in \Theta,$$

а $\{\hat{\theta}_n\}$ — это оценки максимального правдоподобия (ОМП) истинного параметра θ_0 , то при $n \rightarrow \infty$ предельное распределение нормированных ОМП $n(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ совпадает с распределением момента достижения максимума траекторией процесса (см. [6, гл. 5]):

$$Z(t) = (p(\theta_0) - q(\theta_0))t - \ln(p(\theta_0)/q(\theta_0)) \left(\nu_+(p(\theta_0)t) - \nu_-(-q(\theta_0)t) \right).$$

Если здесь положим $p(\theta_0) = p$, $q(\theta_0) = q$, то $Z(t) = \ln(p/q)Y(t)$, а значит, $t^*(Z) = t^*(Y)$.

§2. Основные предположения и результаты

В целях упрощения формулировок утверждений и их доказательств сделаем в процессе (1) линейную замену времени $t := at$, приводящую к процессу

$$Y^*(t) = t - \nu_+(pt) + \nu_-(-qt), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (7)$$

в котором $p := p/a$, $q := q/a$. Тогда соответствующие процессу (7) условия (2)–(3) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} p &> a = 1 > q > 0, \\ p - q &= \ln(p/q), \end{aligned} \quad (8)$$

где последнее равенство представим в более удобной для дальнейшего применения форме

$$pe^{-p} = qe^{-q}. \quad (9)$$

Обозначим через $G^*(x)$ функцию распределения момента достижения максимума траекторией процесса (7). Тогда в силу (6) при $x \rightarrow \infty$ верны асимптотические формулы

$$\begin{aligned} G^*(-x) &\sim \frac{c_-^*(p, q)}{x^{3/2}} e^{-\lambda x}, \\ 1 - G^*(x) &\sim \frac{c_+^*(p, q)}{x^{3/2}} e^{-\lambda x}, \end{aligned} \quad (10)$$

где (см. (4–5))

$$\lambda = \Lambda(p) = \Lambda(q). \quad (11)$$

Константы $c_\pm^*$ из (10) будут найдены из анализа аналитических выражений для распределений $G^*(-x)$ и $G^*(x)$ при $x > 0$, полученных в [10, теорема 3] и [11, теорема 1]:

$$G^*(-x) = (1 - q)q \left(\int_x^\infty \sum_{k=[z]+1}^\infty \pi_k(q) dz - \int_x^\infty e^{bz} \sum_{k=[z]+1}^\infty \pi_k(q) e^{-bk} dz \right), \quad (12)$$

$$G^*(x) = \frac{(p-1)q}{(p-q)} + \beta \int_0^x e^{-pz} \sum_{k=0}^{[z]} \frac{p^k z^{k-1}}{k!} (z-k) \psi(z-k) dz, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \pi_k(q) &= (qk)^{k-1} e^{-qk} / k!, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b &= \beta(1 - q/p), \end{aligned} \quad (14)$$

β — единственный положительный корень уравнения

$$1 - e^{-\beta} = \beta/p, \quad (15)$$

а $[z]$ — целая часть числа z . Функция $\psi(\cdot)$ под интегралом в (13) является функцией распределения:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t < 0} Y^*(t) \leq x\right) \\ &= (1-q) \sum_{m=0}^{[x]} (-1)^m q^m \frac{(x-m)^m}{m!} e^{q(x-m)}, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

аналитический вид которой найден в [14, с. 167], а ее свойства изучены в [10, леммы 2, 4].

Следующие теоремы являются основными результатами работы.

Теорема 1. Константа c_-^* в асимптотическом представлении (10) имеет вид

$$c_-^* = \frac{(1-q)qe^{1-q}}{\sqrt{2\pi}(1-qe^{1-q})} \left(\frac{1}{1-qe^{1-q}} - \frac{p(\exp\{(p-q)^2/p\} - 1)}{(p-q)^2(\exp\{(p-q)^2/p\} - qe^{1-q})} \right).$$

Теорема 2. Константа c_+^* в асимптотическом представлении (10) имеет вид

$$c_+^* = \frac{p(1-q)}{\sqrt{2\pi}(p-1)^2} \left(\frac{1}{1-qe^{1-q}} + \frac{(p^2 - pq + q) \exp\{q(1-p)/p\} - 1}{(p \exp\{q(1-p)/p\} - 1)^2} \right).$$

§3. Доказательства

Лемма 1. Уравнение (15) имеет корень $\beta = p - q$, а константа b из (12) и (14) равна $(p - q)^2/p$.

Доказательство. Подстановка $\beta = p - q > 0$ в уравнение (15) приводит его к соотношению (9). $\square$

Лемма 2. Функция распределения (12) при любом натуральном значении n представима в виде

$$G^*(-n) = (1-q)q \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \pi_{k+n}(q) - \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-bk}) \pi_{k+n}(q) \right), \quad (17)$$

где последовательность $\{\pi_k(q)\}$ определена в (14), а константа b в лемме 1.

Доказательство. Введем обозначения для интегралов из (12):

$$A_n = \int_n^\infty \sum_{k=[z]+1}^\infty \pi_k(q) dz, \quad B_n = \int_n^\infty e^{bz} \sum_{k=[z]+1}^\infty \pi_k(q) e^{-bk} dz.$$

Тогда

$$G^*(-n) = (1-q)q(A_n - B_n), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{m=n}^\infty \int_m^{m+1} \sum_{k=[z]+1}^\infty \pi_k(q) dz = \sum_{m=n}^\infty \sum_{k=m+1}^\infty \pi_k(q) \\ &= \sum_{k=n+1}^\infty \sum_{m=n}^{k-1} \pi_k(q) = \sum_{k=n+1}^\infty (k-n)\pi_k(q) = \sum_{k=1}^\infty k\pi_{k+n}(q). \end{aligned}$$

Подобным образом находим

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{m=n}^\infty \int_m^{m+1} e^{bz} \sum_{k=[z]+1}^\infty \pi_k(q) e^{-bk} dz = \sum_{m=n}^\infty \sum_{k=m+1}^\infty \pi_k(q) e^{-bk} \int_m^{m+1} e^{bz} dz \\ &= \sum_{k=n+1}^\infty \pi_k(q) e^{-bk} \sum_{m=n}^{k-1} \int_m^{m+1} e^{bz} dz = \sum_{k=n+1}^\infty \pi_k(q) e^{-bk} \int_n^k e^{bz} dz \\ &= \sum_{k=n+1}^\infty \pi_k(q) e^{-bk} \frac{e^{bk} - e^{bn}}{b} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^\infty \pi_{k+n}(q) (1 - e^{-bk}). \end{aligned}$$

Подстановка окончательных выражений для A_n и B_n в (18) завершает доказательство. $\square$

Лемма 3. При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \pi_{k+n}(q) &\sim \frac{c_-^{(1)}}{\sqrt{2\pi q n^{3/2}}} e^{-\lambda n}, \\ \sum_{k=1}^\infty e^{-bk} \pi_{k+n}(q) &\sim \frac{c_-^{(2)}}{\sqrt{2\pi q n^{3/2}}} e^{-\lambda n}, \\ \sum_{k=1}^\infty k \pi_{k+n}(q) &\sim \frac{c_-^{(3)}}{\sqrt{2\pi q n^{3/2}}} e^{-\lambda n}, \end{aligned}$$

где $c_-^{(1)} = e^{-\lambda}/(1 - e^{-\lambda})$, $c_-^{(2)} = e^{-\lambda}/(e^b - e^{-\lambda})$, $c_-^{(3)} = e^{-\lambda}/(1 - e^{-\lambda})^2$, а константа λ определена в (11).

Доказательство. Преобразуем последовательность (14) с привлечением определений (4) и (11) следующим образом:

$$\pi_k(q) = \frac{k^{k-1}e^{-k}}{qk!}e^{-(q-1-\ln q)k} = \frac{k^{k-1}e^{-k}}{qk!}e^{-\lambda k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\pi_{k+n}(q) = \frac{e^{-\lambda n}}{\sqrt{2\pi}qn^{3/2}}C_k(n)e^{-\lambda k}, \quad (19)$$

где

$$C_k(n) = \frac{\sqrt{2\pi}n^{3/2}(k+n)^{k+n-1}e^{-(k+n)}}{(k+n)!}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k+n}(q) = \frac{e^{-\lambda n}}{\sqrt{2\pi}qn^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k(n)e^{-\lambda k}. \quad (21)$$

Применяя формулу Стирлинга $(k+n)! \sim \sqrt{2\pi}(k+n)^{k+n+1/2}e^{-(k+n)}$, $n \rightarrow \infty$, к последовательности (20), находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_k(n) = 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а так как $(k+n)! > \sqrt{2\pi}(k+n)^{k+n+1/2}e^{-(k+n)}$, то для всех k и n получаем

$$C_k(n) < \frac{n^{3/2}}{(k+n)^{3/2}} < 1.$$

Последние обстоятельства приводят к следующей цепочке равенств:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_k(n)e^{-\lambda k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} C_k(n)e^{-\lambda k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} = c_-^{(1)}.$$

Отсюда и из (21) получаем первую асимптотическую формулу леммы. Вторая и третья формулы доказываются аналогично из ключевого выражения (19). Например,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_{k+n}(q) &= \frac{e^{-\lambda n}}{\sqrt{2\pi}qn^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k(n)ke^{-\lambda k}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_k(n)ke^{-\lambda k} &= \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda k} = e^{-\lambda}/(1 - e^{-\lambda})^2 = c_-^{(3)}. \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Из представления (17) и леммы 3 получаем асимптотическое выражение

$$G^*(-n) \sim \frac{1-q}{\sqrt{2\pi}} \left(c_-^{(3)} - \frac{c_-^{(1)} - c_-^{(2)}}{b} \right) \frac{e^{-\lambda n}}{n^{3/2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда находим константу

$$\begin{aligned} c_-^* &= \frac{1-q}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2} - \frac{1}{b} \left(\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} - \frac{e^{-\lambda}}{e^b - e^{-\lambda}} \right) \right) \\ &= \frac{(1-q)e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}(1-e^{-\lambda})} \left(\frac{1}{1-e^{-\lambda}} - \frac{e^b - 1}{b(e^b - e^{-\lambda})} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

После замены $e^{-\lambda} = qe^{1-q} (= pe^{1-p})$, $b = (p-q)^2/p$ константа c_-^* принимает окончательный вид

$$c_-^*(p, q) = \frac{(1-q)qe^{1-q}}{\sqrt{2\pi}(1-qe^{1-q})} \left(\frac{1}{1-qe^{1-q}} - \frac{p(\exp\{(p-q)^2/p\} - 1)}{(p-q)^2(\exp\{(p-q)^2/p\} - qe^{1-q})} \right). \quad \square$$

Замечание 1. Нетрудно убедиться в том, что $c_-^* > 0$. Действительно, для выражения из последней скобки в (22) справедлива оценка снизу

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-e^{-\lambda}} - \frac{e^b - 1}{b(e^b - e^{-\lambda})} \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - \frac{e^b - 1}{be^b(1-e^{-\lambda-b})} > \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - \frac{e^b - 1}{be^b(1-e^{-\lambda})} \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \left(1 - \frac{1-e^{-b}}{b} \right) > 0, \end{aligned}$$

так как $e^{-b} > 1 - b$.

Определим при $z \geq 0$ следующие функции ($0^0 = 1!$):

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k (z+k)^k}{k!}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} J_k(z) &= \frac{(pe^{-p})^k (z+k)^k}{k!} e^{-pz}, \quad k = 0, 1, \dots, \\ J(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} J_k(z) = e^{-pz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pe^{-p})^k (z+k)^k}{k!}, \end{aligned} \quad (24)$$

где, напомним, p и q удовлетворяют соотношениям (8)–(9); следовательно,

$$J(z) = e^{-pz} \varphi(z). \quad (25)$$

Лемма 4. Справедлива формула

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k \varphi(k)}{k!} z^k.$$

Доказательство. Применяя в (23) формулу бинома Ньютона, находим

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m z^m k^{k-m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^m}{m!} z^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^{k-m} k^{k-m}}{(k-m)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^m}{m!} z^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k (m+k)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Последний ряд, очевидно, равен $\varphi(m)$. $\square$

Следующее утверждение представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 5. Если константы p и q связаны соотношениями (8), то для функций $\varphi(z)$ и $J(z)$ из (23) и (24) верны представления

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= e^{qz}/(1-q), \\ J(z) &= e^{-(p-q)z}/(1-q). \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство. Формальное дифференцирование ряда $\varphi(z)$ из (23)

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k (z+k)^{k-1}}{(k-1)!} = qe^{-q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k (z+1+k)^k}{k!} \quad (27)$$

приводит к формуле

$$\varphi'(z) = qe^{-q}\varphi(z+1), \quad (28)$$

справедливость которой вытекает из следующей оценки ряда в (27):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k (z+1+k)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k k^k (1+(z+1)/k)^k}{k!} \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k k^k e^{z+1}}{\sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k}} = \frac{e^{z+1}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda k}}{\sqrt{k}}, \end{aligned}$$

где, напомним, $\lambda = q - 1 - \ln q$ (см. (4), (11)).

Докажем сначала методом математической индукции первое равенство из (26) для целых значений аргумента:

$$\varphi(n) = e^{qn}/(1-q), \quad n = 0, 1, \dots \quad (29)$$

Начало индукции базируется на известном из [12, с. 707, формула (4)] ряде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k k^k}{k!} = \frac{q}{1-q}, \quad 0 < q < 1.$$

Отсюда и из (23) находим

$$\varphi(0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k k^k}{k!} = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q},$$

что соответствует формуле (29) при $n = 0$. Предполагая теперь, что равенство (29) верно для некоторого натурального числа n , из (28) получаем правильный индуктивный вывод:

$$\varphi(n+1) = \frac{\varphi'(n)}{qe^{-q}} = \frac{qe^{qn}}{(1-q)qe^{-q}} = \frac{e^{q(n+1)}}{(1-q)}.$$

Для завершения доказательства первого равенства из (26) подставим выражение (29) в представление для функции $\varphi(z)$ из леммы 4:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qe^{-q})^k e^{qk}/(1-q)}{k!} z^k = \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qz)^k}{k!} = \frac{e^{qz}}{1-q}.$$

Отсюда и из (25) вытекает второе равенство из (26). $\square$

Лемма 6. Для последовательности функций $\{J_k(z)\}$ из (24) верны равенства

$$z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_k(z)}{z+k} = (1-q)J(z) = e^{-(p-q)z}, \quad z \geq 0.$$

Доказательство. Проверим сначала справедливость равенства

$$z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_k(z)}{z+k} = J(z) - pJ(z+1). \quad (30)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{z+k} J_k(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} J_k(z) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{z+k} J_k(z) \\ &= J(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(pe^{-p})^k (z+k)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-pz} \\ &= J(z) - p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pe^{-p})^k (z+1+k)^k}{k!} e^{-p(z+1)} \\ &= J(z) - pJ(z+1). \end{aligned}$$

Воспользовавшись вторым равенством из (26) и соотношением (9), находим

$$pJ(z+1) = pe^{-(p-q)}J(z) = pe^{-p}e^qJ(z) = qJ(z).$$

Отсюда, а также из (30) и (26) получаем утверждение леммы. $\square$

Следующие результаты имеют отношение к интегралу из (13).

Лемма 7. Для любого натурального числа n верно представление

$$1 - G^*(n) = (p - q) \left(\int_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{z+k}{z+n} \psi(z+k) J_{n-k}(z+k) dz + \int_0^\infty z \psi(z) \sum_{k=n}^\infty \frac{J_k(z)}{z+k} dz \right). \quad (31)$$

Доказательство. Из (13) и леммы 1 следует, что

$$1 - G^*(n) = (p - q) \int_n^\infty e^{-pz} \sum_{k=0}^{[z]} \frac{p^k z^{k-1}}{k!} (z-k) \psi(z-k) dz = (p - q) I_n, \quad (32)$$

где через I_n обозначен интеграл из (32). Тогда

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{m=n}^\infty \int_m^{m+1} e^{-pz} \sum_{k=0}^m \frac{p^k z^{k-1}}{k!} (z-k) \psi(z-k) dz \\ &= \sum_{m=n}^\infty \sum_{k=0}^m \int_m^{m+1} (z-k) \psi(z-k) \frac{p^k z^{k-1}}{k!} e^{-pz} dz. \end{aligned}$$

Преобразуем последнее выражение, пропуская в выкладках (ради простоты) подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{m=n}^\infty \sum_{k=0}^m \int_m^{m+1} = \left(\sum_{m=0}^\infty - \sum_{m=0}^{n-1} \right) \sum_{k=0}^m \int_m^{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^m \int_m^{m+1} - \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m \int_m^{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{m=k}^\infty \int_m^{m+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=k}^{n-1} \int_m^{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_k^\infty - \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_n^\infty + \sum_{k=n}^\infty \int_k^\infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_n^\infty (z-k)\psi(z-k) \frac{p^k z^{k-1}}{k!} e^{-pz} dz + \sum_{k=n}^\infty \int_k^\infty (z-k)\psi(z-k) \frac{p^k z^{k-1}}{k!} e^{-pz} dz. \quad (33)$$

Первая сумма в (33) после замены $z := z - n$ в интегралах преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\infty \frac{z+n-k}{z+n} \psi(z+n-k) J_k(z+n-k) dz \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{z+k}{z+n} \psi(z+k) J_{n-k}(z+k) dz, \end{aligned} \quad (34)$$

а ряд из интегралов в (33) после замены $z := z - k$ приводится к интегралу

$$\sum_{k=n}^\infty \int_0^\infty z\psi(z) \frac{J_k(z)}{z+k} dz = \int_0^\infty z\psi(z) \sum_{k=n}^\infty \frac{J_k(z)}{z+k} dz.$$

Отсюда, а также из (34), (33) и (32) получаем утверждение (31). $\square$

Замечание 2. Интеграл I_n из (32) при $n = 0$ представляется как

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-pz} \sum_{k=0}^{[z]} \frac{p^k z^{k-1}}{k!} (z-k)\psi(z-k) dz = \frac{(1-q)p}{(p-q)^2}. \quad (35)$$

В самом деле, из представления (33) и леммы 6 находим

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_{k=0}^\infty \int_k^\infty (z-k)\psi(z-k) \frac{p^k z^{k-1}}{k!} e^{-pz} dz \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty z\psi(z) \frac{J_k(z)}{z+k} dz = \int_0^\infty z\psi(z) \sum_{k=0}^\infty \frac{J_k(z)}{z+k} dz \\ &= \int_0^\infty \psi(z) e^{-(p-q)z} dz = \frac{(1-q)p}{(p-q)^2}, \end{aligned}$$

где последнее равенство вытекает из [10, лемма 4]:

$$\int_0^\infty \psi(z) e^{-\beta z} dz = \frac{(1-q)p}{(p-q)\beta},$$

если учесть, что $\beta = p - q$ согласно лемме 1 (см. также лемму 9 ниже). В силу (35) и (13) приходим к ожидаемому результату:

$$G^*(+\infty) = \frac{(p-1)q}{p-q} + (p-q)\frac{(1-q)p}{(p-q)^2} = 1.$$

Следующие две леммы определяют точную асимптотику интегралов из (31) при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 8. При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{z+k}{z+n} \psi(z+k) J_{n-k}(z+k) dz \sim \frac{c_+^{(1)}}{n^{3/2}} e^{-\lambda n}, \quad (36)$$

где

$$c_+^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{(z+k)\psi(z+k)}{p^k} e^{-(p-1)z} dz. \quad (37)$$

Для константы $c_+^{(1)}$ справедлива оценка сверху

$$c_+^{(1)} < \frac{p+1}{\sqrt{2\pi}(p-1)^3}. \quad (38)$$

Доказательство. Оценка (38) вытекает из неравенства $0 < \psi(\cdot) < 1$ для функции распределения $\psi(\cdot)$ из (16):

$$\begin{aligned} c_+^{(1)} &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{z+k}{p^k} e^{-(p-1)z} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty p^{-k} \int_0^\infty z e^{-(p-1)z} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty k p^{-k} \int_0^\infty e^{-(p-1)z} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(p-1)^2} \sum_{k=1}^\infty p^{-k} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}(p-1)} \sum_{k=1}^\infty k p^{-k} \\ &= \frac{p+1}{\sqrt{2\pi}(p-1)^3}, \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{k=1}^\infty p^{-k} = 1/(p-1), \quad \sum_{k=1}^\infty k p^{-k} = p/(p-1)^2. \quad (39)$$

Обозначим через $f_n(z)$ подынтегральную функцию из (36) и преобразуем ее, воспользовавшись определением функций $J_k(z)$ из (24):

$$\begin{aligned}
f_n(z) &= \sum_{k=1}^n \frac{z+k}{z+n} \psi(z+k) J_{n-k}(z+k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+k)\psi(z+k)(pe^{-p})^{n-k}(z+n)^{n-k-1}}{(n-k)!} e^{-p(z+k)} \\
&= \frac{(pe^{-p})^n n^{n-1}}{n!} e^{-pz} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{(z+k)\psi(z+k)n!}{p^k(n-k)!(z+n)^k}. \quad (40)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(pe^{-p})^n n^{n-1}}{n!}, \\
B_n^k(z) &= \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!(z+n)^k}, & k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad (41)
\end{aligned}$$

где $k, n = 1, 2, \dots, z \geq 0$. Тогда из (40) и (41) получаем представление

$$\frac{f_n(z)}{a_n} = e^{-pz} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+k)\psi(z+k)}{p^k} B_n^k(z). \quad (42)$$

Асимптотика выражений из (41) при $n \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned}
a_n &\sim \frac{(pe^{-p})^n n^{n-1}}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} = \frac{e^{-\lambda n}}{\sqrt{2\pi} n^{3/2}}, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^k(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 1/n) \cdots (1 - (k-1)/n)}{(1 + z/n)^k} = 1, \quad (43)
\end{aligned}$$

причем $B_n^k(z) \leq 1$ при всех значениях $k, n = 1, 2, \dots$ и $z \geq 0$. Ввиду (43) и (39) заключаем, что у последовательности функций $f_n(z)/a_n$ из (42) существуют не зависящая от n интегрируемая мажоранта и предел:

$$\begin{aligned}
\frac{f_n(z)}{a_n} &\leq e^{-(p-1)z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+k)}{p^k} = e^{-(p-1)z} \left(\frac{z}{p-1} + \frac{p}{(p-1)^2} \right), \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(z)}{a_n} &= e^{-(p-1)z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+k)\psi(z+k)}{p^k}. \quad (44)
\end{aligned}$$

Тогда из (44) следует, что

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\infty} f_n(z) dz}{a_n} &= \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n(z)}{a_n} \right) dz \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(p-1)z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+k)\psi(z+k)}{p^k} dz.
\end{aligned}$$

Отсюда и из первого соотношения в (43) получаем (36)–(37). $\square$

Асимптотика второго интеграла из (31) представлена в следующей лемме.

Лемма 9. При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_0^\infty z\psi(z) \sum_{k=n}^\infty \frac{J_k(z)}{z+k} dz \sim \frac{c_+^{(2)}}{n^{3/2}} e^{-\lambda n}, \quad (45)$$

где

$$c_+^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-pe^{-p})} \int_0^\infty z\psi(z) e^{-(p-1)z} dz. \quad (46)$$

Для константы $c_+^{(2)}$ справедлива оценка сверху

$$c_+^{(2)} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-pe^{1-p})(p-1)^2}.$$

Доказательство. Обозначим

$$g_n(z) = \sum_{k=n}^\infty \frac{J_k(z)}{z+k}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (47)$$

Преобразуем последовательность функций из (47), используя определение (24):

$$\begin{aligned} g_n(z) &= \sum_{k=n}^\infty \frac{(pe^{-p})^k (z+k)^{k-1}}{k!} e^{-pz} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(pe^{-p})^{k+n} (z+k+n)^{k+n-1}}{(k+n)!} e^{-pz} \\ &= \frac{(pe^{-p})^n e^n}{n^{3/2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(pe^{-p})^k n^{3/2} (k+n)^{k+n-1} (1+z/(k+n))^{k+n-1}}{(k+n)! e^n} e^{-pz}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем представление

$$g_n(z) = \frac{e^{-\lambda n}}{n^{3/2}} \sum_{k=0}^\infty C_n^k(z), \quad (48)$$

где

$$C_n^k(z) = \frac{(pe^{-p})^k n^{3/2} (k+n)^{k+n-1} (1+z/(k+n))^{k+n-1}}{(k+n)! e^n} e^{-pz},$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда в силу (47) и (48) интеграл из (45) принимает вид

$$\int_0^\infty z\psi(z) \sum_{k=n}^\infty \frac{J_k(z)}{z+k} dz = \frac{e^{-\lambda n}}{n^{3/2}} \int_0^\infty z\psi(z) \sum_{k=0}^\infty C_n^k(z) dz. \quad (49)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} C_n^k(z) &\leq \frac{(pe^{-p})^k n^{3/2} (k+n)^{k+n-1} e^z}{\sqrt{2\pi} (k+n)^{k+n+1/2} e^{-k-n} e^n} e^{-pz} \\ &= \frac{e^{-\lambda k}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{k+n} \right)^{3/2} e^{-(p-1)z} \leq \frac{e^{-\lambda k}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(p-1)z}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

и при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k(z) = \frac{e^{-\lambda k}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(p-1)z}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Последние обстоятельства являются основанием для предельного перехода:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty z\psi(z) \sum_{k=0}^\infty C_n^k(z) dz &= \int_0^\infty z\psi(z) \sum_{k=0}^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k(z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda k} \int_0^\infty z\psi(z) e^{-(p-1)z} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-e^{-\lambda})} \int_0^\infty z\psi(z) e^{-(p-1)z} dz = c_+^{(2)}, \end{aligned}$$

где последнее равенство является следствием определений (4) и (11):

$$e^{-\lambda} = pe^{1-p} (= qe^{1-q}).$$

Отсюда и из (49) получаем утверждение (45).

Оценка сверху для константы $c_+^{(2)}$ вытекает из (46) и неравенства

$$c_+^{(2)} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-pe^{-p})} \int_0^\infty ze^{-(p-1)z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-pe^{1-p})(p-1)^2}. \quad \square$$

Лемма 10. Для любого $s > 0$ имеем

$$\int_0^\infty \psi(z) e^{-sz} dz = \frac{1-q}{s-q+qe^{-s}}, \quad (50)$$

$$\int_0^\infty z\psi(z)e^{-sz} dz = \frac{(1-q)(1-qe^{-s})}{(s-q+qe^{-s})^2}, \quad (51)$$

где функция $\psi(z)$ определена в (16).

Доказательство. Воспользуемся свойствами функции $\psi(z)$ (см. [10, лемма 2]):

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= q(\psi(z) - \psi(z-1)), & z \geq 1, \\ \psi(0) &= 1-q, \quad \psi(z) = 0, & z < 0, \end{aligned} \quad (52)$$

при интегрировании по частям:

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_0^\infty \psi(z)e^{-sz} dz = -\frac{1}{s} \int_0^\infty \psi(z) de^{-sz} \\ &= \frac{1-q}{s} + \frac{q}{s} \int_0^\infty (\psi(z) - \psi(z-1))e^{-sz} dz \\ &= \frac{1-q}{s} + \frac{q}{s} I(s) - \frac{q}{s} \int_1^\infty \psi(z-1)e^{-sz} dz \\ &= \frac{1-q}{s} + \frac{q}{s} I(s) - \frac{qe^{-s}}{s} I(s). \end{aligned}$$

Разрешая уравнение относительно $I(s)$, приходим к (50). Аналогично доказывается и равенство (51), в доказательстве которого используются то же самое обозначение $I(s)$, но уже для интеграла из (51):

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_0^\infty z\psi(z)e^{-sz} dz = -\frac{1}{s} \int_0^\infty z\psi(z) de^{-sz} \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sz} dz \psi(z) \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty \psi(z)e^{-sz} dz + \frac{q}{s} \int_0^\infty z(\psi(z) - \psi(z-1))e^{-sz} dz \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty \psi(z)e^{-sz} dz + \frac{q}{s} I(s) - \frac{q}{s} \int_1^\infty z\psi(z-1)e^{-sz} dz. \end{aligned}$$

Последний интеграл здесь равен

$$\int_0^\infty (z+1)\psi(z)e^{-s(z+1)} dz = e^{-s} I(s) + e^{-s} \int_0^\infty \psi(z)e^{-sz} dz,$$

что вместе с предыдущей цепочкой равенств приводит к уравнению

$$I(s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty \psi(z)e^{-sz} dz + \frac{q}{s} I(s) - \frac{qe^{-s}}{s} I(s) - \frac{qe^{-s}}{s} \int_0^\infty \psi(z)e^{-sz} dz.$$

Отсюда выражаем

$$I(s) = \frac{1 - qe^{-s}}{s - q + qe^{-s}} \int_0^\infty \psi(z) e^{-sz} dz$$

через интеграл из (50). □

Из (51) и (46) вытекает

Лемма 11. Константа $c_+^{(2)}$ из (45)–(46) имеет вид

$$c_+^{(2)} = \frac{(1 - q)(1 - qe^{1-p})}{\sqrt{2\pi}(1 - pe^{1-p})(p - q - 1 + qe^{1-p})^2}.$$

Следующие леммы потребуются для нахождения константы $c_+^{(1)}$ из (37).

Лемма 12. Функции

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(z+k)}{p^k}, \quad Q(+\infty) = \frac{1}{p-1}, \quad (53)$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+k)\psi(z+k)}{p^k}, \quad z \geq 0, \quad (54)$$

удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$Q'(z) = \frac{q(p-1)}{p} Q(z) - \frac{q}{p} \psi(z), \quad (55)$$

$$H'(z) = \frac{q(p-1)}{p} H(z) + \frac{p-q}{p} Q(z) - \frac{q}{p} z \psi(z) - \frac{q}{p} \psi(z), \quad (56)$$

и при этом

$$Q(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{p^k} = \frac{1-q}{p \exp\{q(1-p)/p\} - 1}, \quad (57)$$

$$H(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\psi(k)}{p^k} = \frac{(1-q)(p-q) \exp\{q(1-p)/p\}}{(p \exp\{q(1-p)/p\} - 1)^2}. \quad (58)$$

Доказательство. Ввиду того, что функция распределения $\psi(\cdot)$ ограничена вместе со своей производной (см. (52)), ряды (53)–(54) можно дифференцировать почленно. Применяя равенство (52) при дифференцировании ряда (53), приходим к линейному дифференциальному уравнению (55):

$$Q'(z) = q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(z+k)}{p^k} - q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(z+k-1)}{p^k}$$

$$\begin{aligned}
&= qQ(z) - \frac{q}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(z+k)}{p^k} = qQ(z) - \frac{q}{p}Q(z) - \frac{q}{p}\psi(z) \\
&= \frac{q(p-1)}{p}Q(z) - \frac{q}{p}\psi(z).
\end{aligned}$$

Подставляя функцию

$$Q(z) = \frac{q}{p} \int_0^{\infty} \psi(z+t) \exp \left\{ -\frac{q(p-1)}{p}t \right\} dt \quad (59)$$

в равенство (55), убеждаемся, что эта функция является решением линейного дифференциального уравнения (55):

$$\begin{aligned}
Q'(z) &= \frac{q}{p} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{q(p-1)}{p}t \right\} d\psi(z+t) \\
&= \frac{q}{p} \psi(z+t) \exp \left\{ -\frac{q(p-1)}{p}t \right\} \Big|_0^{\infty} \\
&\quad + \frac{q(p-1)}{p} \cdot \frac{q}{p} \int_0^{\infty} \psi(z+t) \exp \left\{ -\frac{q(p-1)}{p}t \right\} dt \\
&= -\frac{q}{p}\psi(0) + \frac{q(p-1)}{p}Q(z),
\end{aligned}$$

удовлетворяющим граничному условию из (53):

$$Q(+\infty) = \frac{q}{p} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{q(p-1)}{p}t \right\} dt = \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, из формул (59) и (50) выводим формулу (57):

$$Q(0) = \frac{q}{p} \int_0^{\infty} \psi(t) \exp \left\{ -\frac{q(p-1)}{p}t \right\} dt = \frac{1-q}{p \exp \{q(1-p)/p\} - 1},$$

а дифференцирование ряда (57) по параметру p приводит к формуле (58):

$$\begin{aligned}
H(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\psi(k)}{p^k} = -p \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{p^k} \right)'_p \\
&= -p \left(\frac{1-q}{p \exp \{q(1-p)/p\} - 1} \right)'_p \\
&= \frac{(1-q)(p-q) \exp \{q(1-p)/p\}}{(p \exp \{q(1-p)/p\} - 1)^2}.
\end{aligned}$$

Осталось проверить равенство (56). Из (54) и (52) находим

$$\begin{aligned}
 H'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(z+k)}{p^k} + q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+k)(\psi(z+k) - \psi(z+k-1))}{p^k} \\
 &= Q(z) + qH(z) - \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+k)\psi(z+k-1)}{p^{k-1}} \\
 &= Q(z) + qH(z) - \frac{q}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+k+1)\psi(z+k)}{p^k} \\
 &= Q(z) + qH(z) - \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+k+1)\psi(z+k)}{p^k} - \frac{q}{p}(z+1)\psi(z) \\
 &= Q(z) + qH(z) - \frac{q}{p}H(z) - \frac{q}{p}Q(z) - \frac{q}{p}z\psi(z) - \frac{q}{p}\psi(z) \\
 &= \frac{q(p-1)}{p}H(z) + \frac{p-q}{p}Q(z) - \frac{q}{p}z\psi(z) - \frac{q}{p}\psi(z). \quad \square
 \end{aligned}$$

Лемма 13. Для функции $Q(z)$ из (53) верна формула

$$\begin{aligned}
 A &:= \int_0^{\infty} Q(z)e^{-(p-1)z} dz \\
 &= \frac{1-q}{(p-1)(p-q)} \left(\frac{p}{p \exp \{q(1-p)/p\} - 1} - \frac{q}{p-q-1+qe^{1-p}} \right). \quad (60)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (55) при интегрировании по частям:

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{1}{p-1} \int_0^{\infty} Q(z) de^{-(p-1)z} = \frac{Q(0)}{p-1} + \frac{1}{p-1} \int_0^{\infty} Q'(z)e^{-(p-1)z} dz \\
 &= \frac{Q(0)}{p-1} + \frac{q}{p}A - \frac{q}{p(p-1)} \int_0^{\infty} \psi(z)e^{-(p-1)z} dz,
 \end{aligned}$$

а значит,

$$A = \frac{pQ(0)}{(p-1)(p-q)} - \frac{q}{(p-1)(p-q)} \int_0^{\infty} \psi(z)e^{-(p-1)z} dz.$$

Осталось воспользоваться формулами (50) и (57). □

Лемма 14. Константа $c_+^{(1)}$ из (36)–(37) представляется как

$$\begin{aligned}
 c_+^{(1)} &= \frac{1-q}{\sqrt{2\pi}(p-1)^2(p-q)} \left(\frac{p((p^2-pq+q)\exp\{q(1-p)/p\}-1)}{(p \exp\{q(1-p)/p\}-1)^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{q(p^2-pq-1+qe^{1-p})}{(p-q-1+qe^{1-p})^2} \right). \quad (61)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Из формул (37) и (54) получаем

$$c_+^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty H(z) e^{-(p-1)z} dz. \quad (62)$$

Интеграл из (62) находим, используя равенство (56):

$$\begin{aligned} B &:= \int_0^\infty H(z) e^{-(p-1)z} dz \\ &= -\frac{1}{p-1} \int_0^\infty H(z) d e^{-(p-1)z} \\ &= \frac{H(0)}{p-1} + \frac{1}{p-1} \int_0^\infty H'(z) e^{-(p-1)z} dz \\ &= \frac{H(0)}{p-1} + \frac{q}{p} B + \frac{p-q}{p(p-1)} \int_0^\infty Q(z) e^{-(p-1)z} dz \\ &\quad - \frac{q}{p(p-1)} \int_0^\infty z\psi(z) e^{-(p-1)z} dz - \frac{q}{p(p-1)} \int_0^\infty \psi(z) e^{-(p-1)z} dz. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\infty H(z) e^{-(p-1)z} dz \\ &= \frac{pH(0)}{(p-1)(p-q)} + \frac{1}{p-1} \int_0^\infty Q(z) e^{-(p-1)z} dz \\ &\quad - \frac{q}{(p-1)(p-q)} \int_0^\infty z\psi(z) e^{-(p-1)z} dz - \frac{q}{(p-1)(p-q)} \int_0^\infty \psi(z) e^{-(p-1)z} dz. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения для интегралов, найденные в леммах 10 и 13, а также выражение (58), находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty H(z) e^{-(p-1)z} dz &= \frac{p(1-q) \exp \{q(1-p)/p\}}{(p-1)(p \exp \{q(1-p)/p\} - 1)^2} \\ &\quad + \frac{p(1-q)}{(p-1)^2(p-q)(p \exp \{q(1-p)/p\} - 1)} \\ &\quad - \frac{q(1-q)}{(p-1)^2(p-q)(p-q-1+qe^{1-p})} \\ &\quad - \frac{q(1-q)(1-qe^{1-p})}{(p-1)(p-q)(p-q-1+qe^{1-p})^2} \\ &\quad - \frac{q(1-q)}{(p-1)(p-q)(p-q-1+qe^{1-p})}. \end{aligned}$$

После приведения к общему знаменателю положительных, а затем и отрицательных дробей, приходим к результату:

$$\int_0^\infty H(z)e^{-(p-1)z} dz = \frac{p(1-q)((p^2-pq+q)\exp\{q(1-p)/p\}-1)}{(p-1)^2(p-q)(p\exp\{q(1-p)/p\}-1)^2} - \frac{q(1-q)(p^2-pq-1+qe^{1-p})}{(p-1)^2(p-q)(p-q-1+qe^{1-p})^2}.$$

Отсюда и из (62) находим константу $c_+^{(1)}$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Из представления (31) и асимптотических формул (36) и (45) получаем асимптотическое выражение

$$1 - G^*(n) \sim (p-q) \frac{c_+^{(1)} + c_+^{(2)}}{n^{3/2}} e^{-\lambda n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Подставляя сюда найденные в леммах 11 и 14 константы $c_+^{(1)}$ и $c_+^{(2)}$, находим

$$c_+^* = \frac{(p-q)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p(1-q)((p^2-pq+q)\exp\{q(1-p)/p\}-1)}{(p-1)^2(p-q)(p\exp\{q(1-p)/p\}-1)^2} - \frac{q(1-q)(p^2-pq-1+qe^{1-p})}{(p-1)^2(p-q)(p-q-1+qe^{1-p})^2} + \frac{(1-q)(1-qe^{1-p})}{(1-pe^{1-p})(p-q-1+qe^{1-p})^2} \right).$$

Сумма последних двух дробей приводится к виду

$$\frac{p(1-q)(p-q-1+qe^{1-p})^2}{(p-1)^2(p-q)(1-pe^{1-p})(p-q-1+qe^{1-p})^2} = \frac{p(1-q)}{(p-1)^2(p-q)(1-pe^{1-p})}.$$

Следовательно,

$$c_+^* = \frac{p(1-q)}{\sqrt{2\pi}(p-1)^2} \left(\frac{(p^2-pq+q)\exp\{q(1-p)/p\}-1}{(p\exp\{q(1-p)/p\}-1)^2} + \frac{1}{1-pe^{1-p}} \right). \quad (63)$$

Остается заметить, что выражение pe^{1-p} в (63) можно заменить выражением qe^{1-q} . $\square$

В заключение выражаю глубокую благодарность И. С. Борисову за предложение заняться асимптотическим анализом функции распределения $G(x)$. Благодарю также рецензента статьи за полезные замечания.

Список литературы

1. Борисов И. С., Миронов Д. В. Асимптотическое представление отношения правдоподобия для многомерных выборок с разрывными плотностями // *ТВП*. 2000. Т. 45, № 2. С. 345–356.
2. Борисов И. С., Миронов Д. В. Асимптотическое представление отношения правдоподобия для нерегулярных семейств распределений в многомерном случае // *Сиб. матем. журн.* 2001. Т. 42, № 2. С. 275–288.
3. Боровков А. А. Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I; II // *ТВП*. 1960. Т. 5, № 2. С. 137–171; Т. 5, № 4. С. 377–392.
4. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // *Сиб. матем. журн.* 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
5. Боровков А. А. Об оценивании параметров в случае разрывных плотностей // *ТВП*. 2018. Т. 63, № 2. С. 211–239.
6. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. *Асимптотическая теория оценивания*. М.: Наука, 1979.
7. Мосягин В. Е. Оценка скорости сходимости распределения процесса максимального правдоподобия в нерегулярном случае // *Сиб. матем. журн.* 1991. Т. 32, № 4. С. 96–103.
8. Мосягин В. Е. Асимптотическое представление для процесса отношения правдоподобия в случае разрывной плотности // *Сиб. матем. журн.* 1994. Т. 35, № 2. С. 416–423.
9. Мосягин В. Е. Оценка скорости сходимости распределений нормированных оценок максимального правдоподобия в случае разрывной плотности // *Сиб. матем. журн.* 1996. Т. 37, № 4. С. 895–903.
10. Мосягин В. Е., Швемлер Н. А. Распределение момента максимума разности двух пуассоновских процессов с отрицательным линейным сносом // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2016. Т. 13. С. 1229–1248.
11. Мосягин В. Е., Швемлер Н. А. Локальные свойства предельного распределения статистической оценки точки разрыва плотности // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2017. Т. 14. С. 1307–1316.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. М.: Наука, 1981.
13. Ротарь В. И., Бенинг В. Е. Введение в математическую теорию страхования // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 1994. Т. 1, № 5. С. 698–779.

14. Скороход А. В. *Случайные процессы с независимыми приращениями*. М.: Наука, 1964.

Мосягин Вячеслав Евгеньевич
Тюменский гос. университет,
ул. Володарского, 6,
Тюмень, 625003 РОССИЯ.
E-mail: vmosyagin@mail.ru

Поступила в редакцию
30 марта 2019 г.
Получена после доработки
21 апреля 2019 г.
Принята к публикации
10 июня 2019 г.