Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Меженная, В. Г. Михайлов, О распределении числа единиц в выходной последовательности генератора Пола над полем $GF(2)$, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 4, 95–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 11:58:13

УДК: 519.212.2

О распределении числа единиц в выходной последовательности генератора Пола над полем $GF(2)$

Н. М. Меженная¹, В. Г. Михайлов²

¹МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва

²Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 20.IV.2012

Доказаны оценки точности аппроксимации распределения числа единиц в полном цикле выходной последовательности генератора Пола над полем $GF(2)$ распределениями нормального типа. Выведены достаточные условия сходимости в соответствующих предельных теоремах.

Ключевые слова: мультициклический генератор Пола, нормальная аппроксимация, логарифмически нормальное распределение

**On the distribution of the number of ones in the output sequence
of the MCV-generator over $GF(2)$**

N. M. Mezhenneya¹, V. G. Mikhailov²

¹*Bauman State Technical University, Moscow*

²*Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow*

Abstract. For the distribution of the number of ones in the whole cycle of the output sequence of the MCV-generator over the field $GF(2)$ we obtain estimates of the accuracy of normal-like approximations.

Key words: the MCV-generator, the normal approximation, the log-normal distribution

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 4, pp. 95–107 (Russian).

1. Введение

В работе П. Пола [1] был предложен генератор псевдослучайных чисел, состоящий из r циклических регистров сдвига взаимно простых длин $m_1, \dots, m_r$ над кольцом вычетов по некоторому модулю M . Обозначим через $(x_0^{(k)}, \dots, x_{m_k-1}^{(k)})$, $k = 1, \dots, r$, векторы заполнений ячеек регистров. Будем использовать в индексах обозначение $t(m) = t \bmod m$. Знаки выходной последовательности генератора образуются по формуле

$$z_t = x_{t(m_1)}^{(1)} + \dots + x_{t(m_r)}^{(r)} \bmod M. \quad (1)$$

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда $M = 2$, а заполнения всех r регистров представляют собой независимые наборы независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на множестве $\{0, 1\}$. Исследуется распределение числа единиц ξ_r на отрезке длины $L = m_1 m_2 \dots m_r$ выходной последовательности генератора из r регистров.

В работе получены:

1) Представление распределения величины ξ_r в виде распределения произведения r независимых случайных величин, имеющих биномиальные распределения.

2) Оценки точности аппроксимации распределения величины ξ_r распределением произведения r независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, и условия сходимости распределения величины ξ_r к такому распределению при $m_1, \dots, m_r \rightarrow \infty$, $r = \text{const}$.

3) Оценки точности аппроксимации распределения величины ξ_r логнормальным распределением и условия сходимости распределения величины ξ_r к этому распределению при $m_1, \dots, m_r, r \rightarrow \infty$.

В меньшей степени изучен случай, когда число регистров генератора растет, а длины некоторых из них могут оставаться фиксированными. В этом случае удалось лишь указать условия сходимости распределения величины ξ_r к логнормальному распределению.

2. Формулировки

Рассмотрим генератор с r регистрами взаимно простых длин $m_1, \dots, m_r$. Пусть $X^{(i)} = (X_1^{(i)}, \dots, X_{m_i}^{(i)})$ — случайное заполнение i -го регистра. Все случайные величины в наборах $X^{(1)}, \dots, X^{(r)}$ независимы в совокупности и имеют равномерное распределение на множестве $\{0, 1\}$.

Нас интересуют свойства распределения числа ξ_r единиц в выходной последовательности генератора

$$Z_t = \left(X_{t(m_1)}^{(1)} + \dots + X_{t(m_r)}^{(r)} \right) \bmod 2, \quad t = 0, 1, \dots, L-1. \quad (2)$$

Условимся использовать обозначение $\mathcal{L}(W)$ для распределения случайной величины W , обозначение $B(m)$ — для распределения числа успехов в равновероятной последовательности Бернулли длины m , централизованного своим математическим ожиданием $m/2$ и нормированного корнем из дисперсии $\sqrt{m}/2$, и обозначение $B(m_1, \dots, m_r)$ — для распределения произведения r независимых случайных величин, имеющих распределения $B(m_1), \dots, B(m_r)$.

Теорема 1. Пусть $r \geq 2$, числа $m_1, \dots, m_r$ взаимно просты, а случайные величины в наборах $X^{(1)}, \dots, X^{(r)}$ независимы в совокупности и имеют равномерное распределение на множестве $\{0, 1\}$. Тогда

$$\mathcal{L} \left(\frac{2\xi_r - m_1 \dots m_r}{\sqrt{m_1 \dots m_r}} \right) = B(m_1, \dots, m_r). \quad (3)$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$\mathbf{E}\xi_r = \frac{m_1 \dots m_r}{2}, \quad \mathbf{D}\xi_r = \frac{m_1 \dots m_r}{4}, \quad (4)$$

$$\mathbf{E}(\xi_r - \mathbf{E}\xi_r)^4 = \frac{1}{16} \prod_{i=1}^r m_i (3m_i - 2), \quad (5)$$

$$\mathbf{E}(\xi_r - \mathbf{E}\xi_r)^{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$\mathbf{E} \left(\xi_r - \frac{m_1 m_2 \dots m_r}{2} \right)^{2k} = 2^{2k(r-1)} \prod_{j=1}^r \mu(m_j, 2k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $\mu(m_j, k) = \frac{1}{2^{m_j}} \frac{d^k}{dt^k} (1 + e^t)^{m_j} e^{-tm_j/2} \Big|_{t=0}$ — k -й центральный момент биномиального распределения с параметрами m_j и $1/2$.

Равенство (3) показывает, что от ξ_r полезно перейти к изучению величины

$$\tilde{\xi}_r = \frac{2\xi_r - m_1 \dots m_r}{\sqrt{m_1 \dots m_r}}. \quad (8)$$

Будем использовать обозначение F_X для функции распределения случайной величины X , обозначение Φ для стандартной нормальной функции распределения и обозначение Φ_r для функции распределения произведения r независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение. Тогда $\Phi_1 = \Phi$. Введем еще обозначение $d(U, V)$ для расстояния в равномерной метрике между функциями распределения U и V на прямой:

$$d(U, V) = \sup_{-\infty < y < \infty} |U(y) - V(y)|.$$

Теорема 2. Пусть $r \geq 2$, числа $m_1, \dots, m_r$ нечетны, взаимно просты, а случайные величины в наборах $X^{(1)}, \dots, X^{(r)}$ независимы в совокупности и имеют равномерное распределение на множестве $\{0, 1\}$. Тогда

$$d(F_{\xi_r}, \Phi_r) \leq C_{BE} \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{m_i}}, \quad (9)$$

где C_{BE} — константа из неравенства Берри–Эссеена для распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для константы C_{BE} из неравенства Берри–Эссеена (см., например, [2]) для распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, обладающих нулевыми средними и конечными третьими абсолютными моментами, в настоящее время доказана оценка $C_{BE} < 0,4774$ (см. [3]).

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 2, $m_1, \dots, m_r \rightarrow \infty$, а $r = \text{const}$. Тогда при всех $-\infty < y < \infty$

$$F_{\xi_r}(y) \rightarrow \Phi_r(y). \quad (10)$$

Нам удобно еще раз преобразовать исследуемую случайную величину ξ_r . Пусть

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \ln x e^{-x^2/2} dx = -0,6352 \dots, \quad (11)$$

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\ln x - a)^2 e^{-x^2/2} dx = 1,2337 \dots, \quad (12)$$

$$c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} |\ln x - a|^3 e^{-x^2/2} dx = 2,9607 \dots \quad (13)$$

Если η имеет стандартное нормальное распределение, то $a = \mathbf{E} \ln |\eta|$, $\sigma^2 = \mathbf{D} \ln |\eta|$, $c = \mathbf{E} |\ln |\eta| - a|^3$.

Положим

$$\zeta_r = e^{-\frac{a}{\sigma}\sqrt{r}} |\tilde{\xi}_r|^{\frac{1}{\sigma\sqrt{r}}} = e^{-\frac{a}{\sigma}\sqrt{r}} \left(\frac{|2\xi_r - m_1 \dots m_r|}{\sqrt{m_1 \dots m_r}} \right)^{\frac{1}{\sigma\sqrt{r}}}. \quad (14)$$

Введем обозначение Υ для функции стандартного логарифмически нормального распределения. Имеем

$$\Upsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{y} e^{-\ln^2 y/2} dy.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$d(F_{\zeta_r}, \Upsilon) \leq C_{BE} \left(2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{m_i}} + \frac{c}{\sigma^3 \sqrt{r}} \right). \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если подставить в оценку (15) численные значения констант, приведенные в замечании 1 и формулах (11)–(13), то (15) преобразуется к виду

$$d(F_{\zeta_r}, \Upsilon) \leq 0,96 \left(\sum_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{m_i}} + \frac{2,27}{\sqrt{r}} \right). \quad (16)$$

Воспользуемся теоремой 3 для описания свойств величин $\tilde{\xi}_r$ и ξ_r .

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. При $-\infty < x < \infty$

$$\begin{aligned} \left| F_{\tilde{\xi}_r}(x) - \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{sign}(x) \Phi \left(\frac{\ln |x|}{\sigma\sqrt{r}} - \frac{a}{\sigma}\sqrt{r} \right) \right) \right| &\leq \\ &\leq C_{BE} \left(\sum_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{m_i}} + \frac{c}{2\sigma^3 \sqrt{r}} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\operatorname{sign}(x) = x/|x|$, если $x \neq 0$, и $\operatorname{sign}(0) = 0$, $\Phi(-\infty) = 0$.

Следствие 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при $0.5 < \alpha < 1$

$$\mathbf{P} \left\{ \xi_r < \frac{1}{2} \left(m_1 \dots m_r + e^{ar+u_{2\alpha-1}\sigma\sqrt{r}} \sqrt{m_1 \dots m_r} \right) \right\} \rightarrow \alpha, \quad (18)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \xi_r < \frac{1}{2} \left(m_1 \dots m_r - e^{ar+u_{2\alpha-1}\sigma\sqrt{r}} \sqrt{m_1 \dots m_r} \right) \right\} \rightarrow 1 - \alpha, \quad (19)$$

где $u_{2\alpha-1}$ — квантиль уровня $2\alpha - 1$ стандартного нормального закона распределения, определяемая уравнением $\Phi(u_{2\alpha-1}) = 2\alpha - 1$.

Наконец, рассмотрим более общий случай, когда длины некоторых регистров при переходе к пределу могут оставаться фиксированными.

Теорема 4. Пусть $r \rightarrow \infty$, при каждом r числа $m_1, \dots, m_r$ взаимно просты, $3 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_r$, а случайные величины в наборах $X^{(1)}, \dots, X^{(r)}$ независимы в совокупности и имеют равномерное распределение на множестве $\{0, 1\}$. Тогда при всех $0 < y < \infty$

$$\mathbf{P} \left\{ |\tilde{\xi}_r| < e^{\mathbf{E} \ln |\tilde{\xi}_r|} y^{\sigma\sqrt{r}} \right\} \rightarrow \Upsilon(y). \quad (20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $r, m_1, \dots, m_r \rightarrow \infty$ так, что

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=1}^r \frac{\ln m_j}{\sqrt{m_j}} \rightarrow 0,$$

то $\mathbf{E} \ln |\tilde{\xi}_r| = ar + o(\sqrt{r})$, а соотношение (20) в теореме 4 принимает вид

$$\mathbf{P} \{ |\tilde{\xi}_r| < e^{ar} y^{\sigma\sqrt{r}} \} \rightarrow \Upsilon(y) \quad \text{при всех } 0 < y < \infty. \quad (21)$$

При условии

$$\sum_{j=1}^r \frac{1}{\sqrt{m_j}} \rightarrow 0,$$

соотношение (21) вытекает непосредственно из теоремы 3.

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Введем обозначение s_i для числа единиц в заполнении i -го регистра, $i = 1, \dots, r$ (в условиях теоремы это случайные величины).

Лемма 1. Пусть $r \geq 2$. Тогда

$$m_1 \dots m_r - 2\xi_r = (m_1 - 2s_1) \dots (m_r - 2s_r). \quad (22)$$

Доказательство леммы проводится индукцией по r . Сначала рассмотрим случай $r = 2$. Из свойств сложения по модулю 2 следует, что

$$\xi_2 = (m_1 - s_1)s_2 + s_1(m_2 - s_2) = \frac{m_1 m_2}{2} - \frac{1}{2}(m_1 - 2s_1)(m_2 - 2s_2).$$

Значит,

$$m_1 m_2 - 2\xi_2 = (m_1 - 2s_1)(m_2 - 2s_2), \quad (23)$$

и равенство (22) при $r = 2$ доказано.

Выходную последовательность генератора с тремя регистрами можно рассматривать как выходную последовательность генератора с двумя регистрами, один из которых имеет длину $m_1 m_2$ и заполнен выходной последовательностью генератора из первых двух регистров, а другим является третий регистр исходного генератора. Тогда согласно (23)

$$\begin{aligned} (m_1 m_2 m_3 - 2\xi_3) &= (m_1 m_2 - 2\xi_2)(m_3 - 2s_3) = \\ &= (m_1 - 2s_1)(m_2 - 2s_2)(m_3 - 2s_3). \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично проводится индуктивный переход при любом $r \geq 3$. Лемма доказана.

Из (22) следует, что

$$\frac{2\xi_r - m_1 \dots m_r}{\sqrt{m_1 \dots m_r}} = (-1)^{r-1} \frac{2s_1 - m_1}{\sqrt{m_1}} \dots \frac{2s_r - m_r}{\sqrt{m_r}}. \quad (25)$$

Из (25) и симметричности относительно нуля распределений случайных величин, стоящих в скобках в правой части (25), вытекает (3). Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Вычислим центральные моменты случайной величины ξ_r . Для этого преобразуем равенство (22) к виду

$$\frac{m_1 m_2 \dots m_r}{2} - \xi_r = 2^{r-1} \left(\frac{m_1}{2} - s_1 \right) \left(\frac{m_2}{2} - s_2 \right) \dots \left(\frac{m_r}{2} - s_r \right).$$

В условиях следствия величины $s_1, \dots, s_r$ независимы между собой, а закон распределения случайной величины s_j является биномиальным с параметрами m_j и $1/2$. Поэтому применяя оператор математического ожидания к обеим частям последнего равенства, получаем первое из равенств (4).

Так как распределение случайной величины s_j симметрично относительно математического ожидания $m_j/2$, то $\mathbf{E}\left(\frac{m_j}{2} - s_j\right)^{2k-1} = 0$. Отсюда следует (6).

Производящая функция моментов для случайной величины $s_j - \frac{m_j}{2}$ равна

$$\mathbf{E}e^{t\left(s_j - \frac{m_j}{2}\right)} = e^{-\frac{tm_j}{2}} \mathbf{E}e^{ts_j} = e^{-\frac{tm_j}{2}} (1 + e^t)^{m_j} \frac{1}{2^{m_j}}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\left(\frac{m_j}{2} - s_j\right)^{2k} = \mu(m_j, 2k).$$

Отсюда в силу независимости случайных величин $s_1, \dots, s_r$ получаем (7). Формула (5) следует из (7), где надо положить $k = 2$. Следствие 1 доказано.

Доказательство теоремы 2. Определим случайные величины

$$\tilde{s}_i = \frac{2s_i - m_i}{\sqrt{m_i}}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Так как распределения дробей в правой части (25) симметричны относительно нуля, то из этого равенства следует, что

$$\mathcal{L}(\tilde{\xi}_r) = \mathcal{L}\left(\prod_{k=1}^r \tilde{s}_i\right). \quad (26)$$

Перейдем к распределениям логарифмов абсолютных значений случайных величин, указанных в равенстве (26). Этот переход выражается в замене аргумента функций распределения y на e^y . Кроме этого распределение произведения сменяется распределением суммы логарифмов.

Пусть

$$\varsigma_j = \ln |\tilde{s}_j|, \quad j = 1, \dots, r.$$

Из (26) с учетом независимости сомножителей в правой части следует, что

$$F_{\ln |\tilde{\xi}_r|}(y) = F_{\varsigma_1} * \dots * F_{\varsigma_r}(y), \quad (27)$$

где знак $*$ обозначает операцию свертки функций распределения.

Пусть случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_r$ независимы, имеют стандартное нормальное распределение и

$$\delta_i = \ln |\eta_i|, \quad i = 1, \dots, r.$$

Тогда

$$F_{\sum_{i=1}^r \delta_i}(y) = F_{\delta_1} * \dots * F_{\delta_r}(y) = F_{\delta_1}^{*r}(y). \quad (28)$$

В силу симметричности распределений имеем

$$\begin{aligned} F_{|\tilde{s}_i|}(y) &= 0, \quad y < 0, \quad F_{|\tilde{s}_i|}(y) = 2F_{\tilde{s}_i}(y) - 1, \quad y \geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ F_{|\tilde{\xi}_r|}(y) &= 0, \quad y < 0, \quad F_{|\tilde{\xi}_r|}(y) = 2F_{\tilde{\xi}_r}(y) - 1, \quad y \geq 0, \\ F_{|\eta_k|}(y) &= 0, \quad y < 0, \quad F_{|\eta_k|}(y) = 2\Phi(y) - 1, \quad y \geq 0, \quad k = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя эти равенства, получаем

$$\begin{aligned} 2d(F_{\tilde{s}_i}, \Phi) &= 2 \sup_{0 \leq y < \infty} |F_{\tilde{s}_i}(y) - \Phi(y)| = \\ &= \sup_{0 \leq y < \infty} |F_{|\tilde{s}_i|}(y) - F_{|\eta_i|}(y)| = \sup_{-\infty \leq y < \infty} |F_{|\tilde{s}_i|}(e^y) - F_{|\eta_i|}(e^y)|. \end{aligned} \quad (30)$$

Кроме этого, $d(U * W, V * W) \leq d(U, V)$ для любых функций распределения U, V и W . Поэтому из (27), (28) и (30) следует, что

$$\begin{aligned} d(F_{\ln |\tilde{\xi}_r|}, F_{\delta_1}^{*r}) &= d(F_{\zeta_1} * \dots * F_{\zeta_r}, F_{\delta_1}^{*r}) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{r-1} d(F_{\zeta_1} * \dots * F_{\zeta_{r-k}} * F_{\delta_1}^{*k}, F_{\zeta_1} * \dots * F_{\zeta_{r-k-1}} * F_{\delta_1}^{*k+1}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^r d(F_{\zeta_k}, F_{\delta_k}) = \sum_{k=1}^r d(F_{|\tilde{s}_k|}, F_{|\eta_k|}) = 2 \sum_{k=1}^r d(F_{\tilde{s}_k}, \Phi). \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично равенствам (30) выводится равенство

$$2d(F_{\tilde{\xi}_r}, \Phi_r) = \sup_{-\infty \leq y < \infty} |F_{|\tilde{\xi}_r|}(e^y) - F_{\prod_{k=1}^r |\eta_k|}(e^y)| = d(F_{\ln |\tilde{\xi}_r|}, F_{\delta_1}^{*r}). \quad (32)$$

Из этого равенства и (31) следует, что

$$d(F_{\tilde{\xi}_r}, \Phi_r) = \sum_{k=1}^r d(F_{\tilde{s}_k}, \Phi). \quad (33)$$

Воспользуемся теперь тем, что расстояние в равномерной метрике между функциями распределения $F_{\tilde{s}_i}(y)$ и $\Phi(y)$ допускает оценку (она следует из неравенства Берри – Эссеена)

$$d(F_{\tilde{s}_i}, \Phi) \leq \frac{C_{BE}}{\sqrt{m_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (34)$$

Из (33) и (34) следует (9). Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 2. В условиях следствия выражение в правой части неравенства (9) стремится к нулю. Отсюда вытекает (10). Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 3. С учетом (34) можем записать

$$\begin{aligned} |F_{\zeta_j}(x) - F_{\delta_j}(x)| &= |F_{\tilde{\zeta}_j}(e^x) - F_{\tilde{\zeta}_j}(-e^x) - \Phi(e^x) + \Phi(-e^x)| = \\ &= |F_{\tilde{\zeta}_j}(e^x) - \Phi(e^x)| + |F_{\tilde{\zeta}_j}(-e^x) - \Phi(-e^x)| \leq \frac{2C_{BE}}{\sqrt{m_j}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Пусть

$$\tilde{\delta}_i = (\delta_i - a)/\sigma\sqrt{r}, \quad \tilde{\zeta}_i = (\zeta_i - a)/\sigma\sqrt{r}.$$

Из (35) следует, что

$$|F_{\tilde{\zeta}_j}(x) - F_{\tilde{\delta}_j}(x)| \leq \frac{2C_{BE}}{\sqrt{m_j}}. \quad (36)$$

Используя (36), получим:

$$\begin{aligned} |F_{\sum_{j=1}^r \tilde{\zeta}_j}(x) - F_{\sum_{j=1}^r \tilde{\delta}_j}(x)| &\leq |F_{\tilde{\zeta}_1} * \dots * F_{\tilde{\zeta}_r}(x) - F_{\tilde{\delta}_1} * \dots * F_{\tilde{\delta}_r}(x)| \leq \\ &\leq |F_{\tilde{\zeta}_1} * \dots * F_{\tilde{\zeta}_r}(x) - F_{\tilde{\zeta}_1} * \dots * F_{\tilde{\zeta}_{r-1}} * F_{\tilde{\delta}_r}(x) + \\ &+ F_{\tilde{\zeta}_1} * \dots * F_{\tilde{\zeta}_{r-1}} * F_{\tilde{\delta}_r}(x) - F_{\tilde{\delta}_1} * \dots * F_{\tilde{\delta}_r}(x)| \leq \\ &\leq |F_{\tilde{\zeta}_r}(x) - F_{\tilde{\delta}_r}(x)| + |F_{\tilde{\zeta}_1} * \dots * F_{\tilde{\zeta}_{r-1}}(x) - F_{\tilde{\delta}_1} * \dots * F_{\tilde{\delta}_{r-1}}(x)| \leq \dots \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^r |F_{\tilde{\zeta}_i}(x) - F_{\tilde{\delta}_i}(x)| \leq 2C_{BE} \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{m_i}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Согласно определениям $\mathbf{E}\delta_i = a$, $\mathbf{D}\delta_i = \sigma^2$, $\mathbf{E}|\delta_i - \mathbf{E}\delta_i|^3 = c$, где величины a , σ^2 и c определены равенствами (11), (12) и (13). Поэтому по неравенству Берри – Эссеена имеем

$$|F_{\sum_{j=1}^r \tilde{\delta}_j}(x) - \Phi(x)| \leq C_{BE} \frac{\mathbf{E}|\delta_j - \mathbf{E}\delta_j|^3}{(\mathbf{D}\delta_i)^{3/2}\sqrt{r}} = C_{BE} \frac{c}{\sigma^3\sqrt{r}}. \quad (38)$$

Таким образом, в силу (37) и (38)

$$\begin{aligned} |F_{\sum_{j=1}^r \tilde{\zeta}_j}(x) - \Phi(x)| &\leq |F_{\sum_{j=1}^r \tilde{\zeta}_j}(x) - F_{\sum_{j=1}^r \tilde{\delta}_j}(x)| + \\ &+ |F_{\sum_{j=1}^r \tilde{\delta}_j}(x) - \Phi(x)| \leq C_{BE} \left(2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{m_i}} + \frac{c}{\sigma^3\sqrt{r}} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Из формулы (25) следует, что

$$\ln |m_1 m_2 \dots m_r - 2\xi_r| = \sum_{j=1}^r \ln |m_j - 2s_j|. \quad (40)$$

Преобразуем последнее равенство к виду

$$\ln |m_1 m_2 \dots m_r - 2\xi_r| - \frac{1}{2} \ln (m_1 m_2 \dots m_r) = \sum_{j=1}^r \ln \frac{|m_j - 2s_j|}{\sqrt{m_j}}. \quad (41)$$

Из (41) следует, что

$$\ln |m_1 m_2 \dots m_r - 2\xi_r| - \frac{1}{2} \ln (m_1 m_2 \dots m_r) = \sum_{j=1}^r \varsigma_j.$$

Значит,

$$\ln \zeta_r = \frac{\ln |m_1 m_2 \dots m_r - 2\xi_r| - \frac{1}{2} \ln (m_1 m_2 \dots m_r) - ra}{\sigma \sqrt{r}} = \sum_{j=1}^r \tilde{\varsigma}_j.$$

Из (39) с учетом последнего равенства получаем (15):

$$|F_{\zeta_r}(x) - \Upsilon(x)| = |F_{\ln \zeta_r}(\ln x) - \Phi(\ln x)| \leq C_{BE} \left(2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{m_i}} + \frac{c}{\sigma^3 \sqrt{r}} \right).$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство следствия 3. Достаточно рассмотреть случай $x > 0$. Из (29) следует, что в данном случае $F_{\tilde{\zeta}_r}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F_{|\tilde{\zeta}_r|}(x)$. С учетом этого равенства получаем

$$\begin{aligned} & \left| F_{\tilde{\zeta}_r}(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\ln x}{\sigma \sqrt{r}} - \frac{a}{\sigma} \sqrt{r} \right) \right) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{2} F_{|\tilde{\zeta}_r|}(x) - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\ln x}{\sigma \sqrt{r}} - \frac{a}{\sigma} \sqrt{r} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \mathbf{P}\{|\tilde{\xi}_r| < x\} - \Upsilon \left(e^{-\frac{a}{\sigma} \sqrt{r}} x^{\frac{1}{\sigma \sqrt{r}}} \right) \right| = \\ & = \frac{1}{2} \left| \mathbf{P}\{\zeta_r < e^{-\frac{a}{\sigma} \sqrt{r}} x^{\frac{1}{\sigma \sqrt{r}}}\} - \Upsilon \left(e^{-\frac{a}{\sigma} \sqrt{r}} x^{\frac{1}{\sigma \sqrt{r}}} \right) \right|. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и (15) имеем (17) для $x > 0$. В силу симметричности распределения случайной величины $\tilde{\xi}_r$ оценка (18) выполнена и при $x < 0$. Следствие 3 доказано.

Доказательство следствия 4. В условиях следствия правая часть (17) стремится к нулю. Найдём такое число x_α , для которого $F_{\tilde{\xi}_r}(x_\alpha) \rightarrow \alpha$.

Обозначим $\frac{\ln x}{\sigma\sqrt{r}} - \frac{a}{\sigma}\sqrt{r} = u$. Тогда $x = x_u = e^{u\sigma\sqrt{r}+ar}$. Выберем величину u так, чтобы $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(u) = \alpha$, т. е. $\Phi(u) = 2\alpha - 1$ и $u = u_{2\alpha-1}$. При таком выборе параметров из (17) имеем $F_{\tilde{\xi}_r}(x_{u_{2\alpha-1}}) \rightarrow \alpha$. Последнее соотношение эквивалентно тому, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_r < e^{u_{2\alpha-1}\sigma\sqrt{r}+ar}\} \rightarrow \alpha.$$

Тем самым, соотношение (18) доказано. Из (18) и симметричности распределения случайной величины $\tilde{\xi}_r$ вытекает соотношение (19). Следствие 4 доказано.

Доказательство теоремы 4. Используя наши определения, независимость заполнений регистров и равенство (22), получаем

$$\frac{\ln |\tilde{\xi}_r| - \mathbf{E} \ln |\tilde{\xi}_r|}{\sqrt{\mathbf{D} \ln |\tilde{\xi}_r|}} = \sum_{k=1}^r \frac{\varsigma_k - \mathbf{E} \varsigma_k}{\sqrt{\sum_{j=1}^r \mathbf{D} \varsigma_j}}, \quad (42)$$

где, напомним,

$$\varsigma_j = \ln |\tilde{s}_j| = \ln \left| \frac{2s_j - m_j}{\sqrt{m_j}} \right|, \quad j = 1, \dots, r.$$

Так как все числа $m_1, \dots, m_r$ четны и взаимно просты, то моменты

$$\mathbf{E} \varsigma_j^k = \frac{1}{2m_j} \sum_{i=0}^{m_j} C_{m_j}^i \ln^k \left(\frac{|2i - m_j|}{\sqrt{m_j}} \right)$$

конечны при всех $k = 1, 2, \dots$. Более того, из свойств биномиального распределения, которому подчинены случайные величины s_j , и неравенств $3 \leq m_1 < m_2 < \dots$ следует, что при $j \rightarrow \infty$ моменты $\mathbf{E} \varsigma_j^k$ сходятся к соответствующим моментам логарифма модуля случайной величины со стандартным нормальным распределением (которые тоже конечны). Поэтому все эти моменты равномерно (по j) ограничены. То же самое, разумеется, относится и к центральным моментам.

Из этого, в частности, следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$\mathbf{D} \ln |\tilde{\xi}_r| = \sum_{j=1}^r \mathbf{D} \varsigma_j = r\sigma^2(1 + o(1)) \quad (43)$$

(величина σ^2 определена в (12)).

К распределению суммы (42) независимых случайных величин с равномерно ограниченными моментами применим неравенство Берри – Эссеена, но для неодинаково распределенных случайных величин:

$$\left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\ln |\tilde{\xi}_r| - \mathbf{E} \ln |\tilde{\xi}_r|}{\sqrt{\mathbf{D} \ln |\tilde{\xi}_r|}} < x \right\} - \Phi(x) \right| < \frac{C}{\sqrt{\mathbf{D} \ln |\tilde{\xi}_r|}}, \quad (44)$$

где $C < \infty$.

Из (44) и (43) вытекает соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\ln |\tilde{\xi}_r| - \mathbf{E} \ln |\tilde{\xi}_r|}{\sigma \sqrt{r}} < x \right\} \rightarrow \Phi(x), \quad r \rightarrow \infty. \quad (45)$$

В свою очередь, из (45) следует (20). Теорема 4 доказана.

Авторы благодарны А. М. Зубкову и А. М. Шойтову за полезные замечания.

Список литературы

1. *Pohl P.* Description of MCV, a pseudo-random number generator // Scand. Actuarial J. — 1976. — № 1. — P. 1–14.
2. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. — М.: Наука, 1972.
3. *Тюрин И. С.* Уточнения остаточного члена в теореме Ляпунова // Теория вероятн. и применен. — 2011. — Т. 56. Вып. 3. — С. 808–811.