Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Борисенко, О трансверсальных распавшихся латинских квадратов четного порядка, *Матем. вопр. криптогр.*, 2014, том 5, выпуск 1, 5–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:50:42

УДК: 519.143

О трансверселях распавшихся латинских квадратов четного порядка

В. В. Борисенко

ООО «Центр сертификационных исследований», г. Москва

Получено 22.IV.2013

Рассматриваются распавшиеся латинские квадраты, т. е. латинские квадраты порядка $2n$, построенные на множестве чисел $\{0, \dots, 2n - 1\}$, которые при приведении по модулю n дают $2n \times 2n$ -матрицу, состоящую из четырех латинских квадратов порядка n . Множество всех трансверселей распавшего латинского квадрата описано с помощью 2-сбалансированных мультимножеств позиций одного из упомянутых выше латинских квадратов порядка n . Приведен алгоритм, позволяющий (после некоторой предварительной работы) быстро строить множество трансверселей для любого распавшего латинского квадрата порядка $2n$, отвечающего произвольной четверке латинских квадратов порядка n .

Ключевые слова: латинский квадрат, трансверсаль, мультимножество

Transversals in splitted Latin squares of even order

V. V. Borisenko

LLC "Sertification Research Center", Moscow

Abstract. We consider the splitted Latin squares, i. e. Latin squares of order $2n$ with elements from $\{0, \dots, 2n - 1\}$ such that after reducing modulo n we obtain $2n \times 2n$ -matrix consisting of four Latin squares of order n . The set of all transversals of splitted Latin square is described by means of 2-balanced multisets of entries of one of Latin squares of order n mentioned above. A quick algorithm of construction (after some preliminary work) the set of all transversals for any splitted Latin square of order $2n$ corresponding to an arbitrary set of four Latin squares of order n is described.

Key words: Latin square, transversal, multise

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2014, vol. 5, no. 1, pp. 5–25 (Russian).

© 2014 В. В. Борисенко

1. Введение

Латинским квадратом (далее для краткости — ЛК) порядка $n \in \mathbb{N}$ на множестве $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ называется квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$, в которой все строки и столбцы являются перестановками элементов множества M . Далее всюду без ограничения общности будем полагать, что $M = \{0, 1, \dots, n-1\}$, и элементы этого множества при необходимости будут рассматриваться как наименьшие неотрицательные вычеты по модулю n .

Упорядоченную пару $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ будем рассматривать как позицию в ЛК A , а произвольное подмножество $\lambda \subset \{1, \dots, n\}^2$ — как множество позиций в этом квадрате. Множества позиций вида $\rho_s = \{(s, j) \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ и $\xi_t = \{(i, t) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ называются s -й строкой и t -м столбцом ЛК A соответственно.

Подстановка α степени n задает в ЛК A множество позиций вида $\{(i, \alpha(i)) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$, которое в данной работе для простоты будем также называть подстановкой и отождествлять с α . Для произвольного $a \in \{0, \dots, n-1\}$ множество позиций $\{(i, j) \mid a_{ij} = a\}$ является подстановкой и называется диагональю ЛК A с элементом a . Всего в любом ЛК порядка n имеется ровно n диагоналей, по одной для каждого $a \in \{0, \dots, n-1\}$. Подстановка $\alpha \subset \{1, \dots, n\}^2$ называется *трансверсалью* ЛК A , если $\{a_{ij} \mid (i, j) \in \alpha\} = \{0, \dots, n-1\}$, т. е. на позициях α встречаются все элементы из $\{0, \dots, n-1\}$.

Обобщением понятия трансверсали в латинском квадрате является понятие k -трансверсали (или k -плекса, см. [2, 3]).

Определение. Множество позиций $\tau \subset \{1, \dots, n\}^2$ называется k -трансверсалью ЛК A , $k \in \{1, \dots, n\}$, если τ имеет в каждой строке и каждом столбце ровно по k позиций и каждый элемент $a \in \{0, \dots, n-1\}$ встречается в ЛК A на позициях τ ровно k раз.

Очевидно, что понятия обычной трансверсали и 1-трансверсали совпадают. Множество всех k -трансверсалей ЛК A будем обозначать через $\text{Tr}_k(A)$ и при $k = 1$ индекс опускать: $\text{Tr}_1(A) = \text{Tr}(A)$.

С произвольным множеством позиций $\lambda \subset \{1, \dots, n\}^2$ будем связывать $(0,1)$ -матрицу $S = (s_{ij})_{n \times n}$ порядка n , в которой $s_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in \lambda$, т. е. единицы указывают позиции, принадлежащие λ . В данной работе будет использоваться операция поэлементного произведения целочисленных матриц одинакового порядка: $U = S * T \Leftrightarrow u_{ij} = s_{ij}t_{ij} \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

Преобразование ЛК A , состоящее в перестановке его строк, столбцов и взаимно однозначной замене его элементов, называется изотопией. Если

при некоторой изотопии ЛК A преобразуется в ЛК B , то такие квадраты называются изотопными. Изотопность является эквивалентностью на множестве всех ЛК одного порядка, заданных на одном и том же множестве элементов M . Изотопия называется *главной*, если она представляет собой только замену элементов квадрата без перестановки его строк или столбцов. Очевидно, что если ЛК A и B изотопны, то определена биекция между множествами $\text{Tr}_k(A)$ и $\text{Tr}_k(B)$, а если эти квадраты главно изотопны, то $\text{Tr}_k(A) = \text{Tr}_k(B)$.

Описание множеств трансверсалей для ЛК, относящихся к тем или иным классам, является актуальной задачей с точки зрения построения систем ортогональных латинских квадратов.

ЛК A и B одинакового порядка n на множестве $\{0, \dots, n-1\}$ называются *ортогональными*, если при их наложении друг на друга получается ровно n^2 различных упорядоченных пар (a_{ij}, b_{ij}) , $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. В этом случае будем писать $A \perp B$. Набор ЛК $\mathcal{L} = \{A_1, \dots, A_t\}$ называется *системой попарно ортогональных латинских квадратов* (сокращенно — СОЛК), если $A_s \perp A_r$ при любых $s \neq r$.

СОЛК $\mathcal{L}$ называется *максимальной*, если ее нельзя расширить присоединением нового квадрата, и *полной*, если $|\mathcal{L}| = t = n-1$ (большее числа квадратов в СОЛК быть не может, см. [1, с. 389]). Следующее легко доказываемое утверждение дает критерий того, что ЛК A входит в некоторую СОЛК, состоящую из t квадратов.

Утверждение 0. *ЛК A порядка n входит в СОЛК из t квадратов в том и только том случае, когда имеется $t-1$ наборов $T_1, \dots, T_{t-1}$, состоящих из n попарно не пересекающихся трансверсалей ЛК A каждый, причем любые две трансверсали из разных наборов пересекаются ровно по одному элементу.*

Обычно это утверждение приводится для $t = 2$ как критерий наличия у ЛК A ортогональной пары B . В работе [4] (теорема 7) оно сформулировано и доказано при $t = 3$ как критерий вхождения ЛК A в СОЛК из трех квадратов. В общем виде это утверждение автору в литературе не встретилось, что, по-видимому, объясняется очевидностью его доказательства: указанные наборы трансверсалей $T_1, \dots, T_{t-1}$ ЛК A являются соответственно наборами диагоналей ЛК $A_1, \dots, A_{t-1}$, взаимно ортогональных и ортогональных A .

Если теперь к семейству наборов $\{T_1, \dots, T_{t-1}\}$ добавить все строки $R = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$, столбцы $C = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ и диагонали $D = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ ЛК A , то получится семейство наборов $\{R, C, D, T_1, \dots, T_{t-1}\}$, которое естественно рассматривать как конечную геометрию $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{S})$ со множеством точек $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}^2$ и линий $\mathcal{S} = R \cup C \cup D \cup \bigcup_{i=1}^{t-1} T_i$. Тогда получается,

что всего линий ровно $(t + 2)n$, на каждой линии имеется ровно n точек, множество линий разбито на $t + 2$ пучков параллельных линий, и любые две линии из различных пучков имеют ровно одну общую точку. При $t = n - 1$ эта геометрия представляет собой конечную аффинную плоскость порядка n . При этом же условии СОЛК $\mathcal{L} = \{A = A_0, A_1, \dots, A_{t-1}\}$ является полной. Этот факт равносильно известной теореме Боуза о том, что полная СОЛК, состоящая из квадратов порядка n , существует тогда и только тогда, когда существует конечная проективная плоскость порядка n (см. [1, с. 393]).

Приведенные рассуждения указывают (по мнению автора) на более естественную связь полных СОЛК с конечными аффинными плоскостями, чем с конечными проективными плоскостями. Вся геометрия конечной аффинной плоскости уже имеется в ЛК A , входящем в полную СОЛК. Для получения же из нее конечной проективной плоскости в соответствии с известной стандартной процедурой необходимо добавление $n + 1$ несобственных точек и одной несобственной прямой, которые не имеют естественной интерпретации в ЛК A .

Таким образом, при решении задачи о том, входит ли заданный ЛК A в какую-нибудь СОЛК, прежде всего требуется построить все его трансверсали. Затем возникает задача о существовании во множестве $\text{Tr}(A)$ системы подмножеств $\{T_1, \dots, T_{t-1}\}$ с указанными в утверждении 0 свойствами, или, что то же самое, задача о существовании в $\text{Tr}(A)$ описанной выше конечной геометрии $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{S})$.

Целью настоящей работы является описание множеств трансверсали для латинских квадратов, относящихся к определяемому ниже классу распавшихся ЛК.

2. Распавшиеся латинские квадраты и их основные свойства

Определение. ЛК $F = (f_{ij})_{2n \times 2n}$ порядка $2n$ на множестве $\{0, \dots, 2n - 1\}$ будем называть *распавшимся*, если после приведения его элементов по модулю n из него получается матрица $G = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = (g_{ij})_{2n \times 2n}$, в которой матрицы A, B, C, D порядка n являются латинскими квадратами. Если при этом $A = B = C = D$, то ЛК F будем называть *однородным*.

По распавшемуся ЛК F построим $(0, 1)$ -матрицу $T_F = (t_{ij})_{2n \times 2n}$ порядка $2n$, в которой элемент $t_{ij} = 1 \Leftrightarrow f_{ij} \in \{0, \dots, n - 1\}$. Разобьем матрицу T_F на 4 матрицы порядка n аналогично разбиению матрицы G : $T_F = \begin{pmatrix} T_A & T_C \\ T_B & T_D \end{pmatrix}$. Очевидно, что по набору латинских квадратов и $(0, 1)$ -матриц порядка n :

$(A, B, C, D, T_A, T_B, T_C, T_D)$ однозначно восстанавливается исходный распавшийся ЛК F . Поэтому будем говорить, что распавшийся ЛК F задан набором ЛК (A, B, C, D) и *трафаретов* (T_A, T_B, T_C, T_D) , и обозначать этот факт равенством $F = (A, B, C, D, T_A, T_B, T_C, T_D)$.

Рассмотрим вопрос о том, сколько распавшихся ЛК порядка $2n$ можно построить, исходя из заданного набора (A, B, C, D) латинских квадратов порядка n , изменяя всевозможными допустимыми способами набор трафаретов (T_A, T_B, T_C, T_D) .

Определение. а) Пусть A, B — два ЛК порядка n на множестве $\{0, \dots, n-1\}$. Будем говорить, что они задают строчную подстановку σ_{AB} степени n^2 , действующую на множестве $\{1, \dots, n\}^2$, определяемую следующим образом:

$$\sigma_{AB}(i, j) = (i, k) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ik}.$$

Действие подстановки σ_{AB} изображено в виде схемы на рисунке 1.

Здесь ЛК A, B «состыкованы» построено, и σ_{AB} переводит позицию (i, j) в позицию (i, k) в случае совпадения элементов $a_{ij} = b_{ik}$.

Рис. 1

б) Аналогично два ЛК A, B порядка n на множестве $\{0, \dots, n-1\}$ определяют столбцовую подстановку κ_{AB} степени n^2 , действующую на множестве $\{1, \dots, n\}^2$, следующим образом: $\kappa_{AB}(i, j) = (k, j) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{kj}$. Действие κ_{AB} реализуется по схеме, изображенной на рисунке 2.

Здесь ЛК A, B «состыкованы» по столбцам, и κ_{AB} переводит позицию (i, j) в позицию (k, j) в случае совпадения элементов $a_{ij} = b_{kj}$.

в) Пусть A, B, C, D — 4 ЛК порядка n на множестве $\{0, \dots, n-1\}$. Они определяют действующую на множестве $\{1, \dots, n\}^2$ подстановку χ_{ACDB} степени n^2 как произведение строчных и столбцовых подстановок $\chi_{ACDB} = \sigma_{AC}\kappa_{CD}\sigma_{DB}\kappa_{BA}$, применяемых слева направо, и ей соответствует схема на рисунке 3, где $\chi_{ACDB}(i, j) = (l, t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что при действии строчных и столбцовых подстановок диагонали латинских квадратов переходят в диагонали. Поэтому циклы подстановки χ_{ACDB} являются подмножествами диагоналей ЛК A .

Рис. 2

Рис. 3

Определение. а) Пусть A, B — два ЛК порядка n на множестве $\{0, \dots, n-1\}$ и T_A, T_B — трафареты (т.е. $(0, 1)$ -матрицы) порядка n . Трафареты T_A, T_B называются *строчно согласованными*, если при действии подстановки σ_{AB} трафарет T_A переходит в инвертированный по отношению к T_B трафарет $\overline{T_B}$ ($\overline{T_B}$ получается из T_B заменой 0 на 1 и наоборот). Аналогично с помощью подстановки κ_{AB} определяется *столбцовая согласованность* трафаретов.

б) Пусть A, B, C, D — 4 ЛК порядка n на множестве $\{0, \dots, n-1\}$ и T_A, T_B, T_C, T_D — 4 трафарета порядка n . Будем говорить, что трафареты T_A, T_B, T_C, T_D *согласованы с набором* ЛК A, B, C, D , если строчно согласованы T_A, T_C и T_B, T_D и столбцово согласованы T_A, T_B и T_C, T_D .

Из этих определений и свойства подстановки χ_{ACDB} , сформулированного в замечании, очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1. Набор четырех ЛК и четырех трафаретов $(A, B, C, D, T_A, T_B, T_C, T_D)$ задает распахившийся латинский квадрат порядка $2n$ на множестве $\{0, \dots, 2n-1\}$ в том и только том случае, когда трафареты T_A, T_B, T_C, T_D согласованы с набором ЛК A, B, C, D . При этом:

а) трафареты T_B, T_C, T_D получаются из T_A с помощью строчных и столбцовых подстановок и инвертирования;

б) исходный трафарет T_A задает таким способом согласованный набор трафаретов T_A, T_B, T_C, T_D в том и только том случае, когда T_A постоянен на циклах подстановки χ_{ACDB} ;

в) существует ровно 2^k различных трафаретов T_A , порождающих согласованный набор трафаретов T_A, T_B, T_C, T_D , где k — число циклов в подстановке χ_{ACDB} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Далее будем использовать следующее обозначение для распавшегося ЛК F порядка $2n$: $F = (A, B, C, D, T_A)$, где A, B, C, D — латинские квадраты порядка n на множестве $\{0, \dots, n-1\}$ и T_A — трафарет, удовлетворяющий п. б) утверждения 1. Такой трафарет будем называть *согласованным с набором A, B, C, D* . Если F является однородным ЛК, т. е. $A = B = C = D$, то его будем обозначать так: $F = (A, T_A)$.

Итак, по любому заданному набору A, B, C, D ЛК порядка n на множестве $\{0, \dots, n-1\}$ можно построить ровно 2^k различных распавшихся ЛК F порядка $2n$ на множестве $\{0, \dots, 2n-1\}$, где k — число циклов в подстановке χ_{ACDB} , $n \leq k \leq n^2$.

Далее наряду с общим случаем распавшегося ЛК F будут рассматриваться два частных случая:

- 1) Распавшийся ЛК F имеет тождественную подстановку χ_{ACDB} .
- 2) Распавшийся ЛК является однородным: $F = (A, T_A)$; тогда, очевидно, подстановка χ_{ACDB} тождественна.

В указанных частных случаях любой трафарет T_A является согласованным и число различных распавшихся ЛК рассматриваемого вида максимально и равно 2^{n^2} (при фиксированном наборе четырех исходных ЛК порядка n).

Следующее утверждение непосредственно вытекает из утверждения 1.

Утверждение 2. Пусть $F = (A, B, C, D, T_A)$ — распавшийся ЛК порядка $2n$. Пусть $d_1, \dots, d_n$ — диагонали ЛК A . Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ трафарет $T_A^{(i)}$, получающийся из T_A инвертированием элементов, находящихся на диагонали d_i , является согласованным с набором ЛК A, B, C, D , и соответствующий ему распавшийся ЛК $F^{(i)} = (A, B, C, D, T_A^{(i)})$ главноизотопен исходному ЛК F .

Следствие. Пусть $\mathcal{M} = \{(A, B, C, D, T_A) \mid T_A \text{ согласован с } A, B, C, D\}$ — множество всех распавшихся ЛК, задаваемых четверкой A, B, C, D , $|\mathcal{M}| = 2^k$. Тогда $\mathcal{M}$ распадается на 2^{k-n} не пересекающихся между собой подмножеств мощности 2^n каждое, состоящих из главноизотопных между собой распавшихся ЛК. В частности, у любых двух ЛК из одного такого подмножества множества их трансверсалей совпадают.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если число k циклов подстановки χ_{ACDB} равно n , то все 2^n распавшихся ЛК порядка $2n$, соответствующих такому набору A, B, C, D , главноизотопны между собой и изотопны ЛК, определяемому трафаретом $T_A = (1)_{n \times n}$. Нетрудно видеть, что при нечетном n распавшийся ЛК с таким трафаретом вовсе не имеет трансверсалей.

2) Если число k циклов подстановки χ_{ACDB} равно $n+1$, то имеем 2 класса главноизотопных ЛК. В самом деле, если $d = c_1 \cup c_2$ — диагональ ЛК A , распадающаяся на 2 цикла подстановки χ_{ACDB} , то все распавшиеся ЛК $F = (A, B, C, D, T_A)$, у которых значения T_A на циклах c_1 и c_2 одинаковы, главноизотопны распавшемуся ЛК с трафаретом $T_A = (1)_{n \times n}$. При нечетном n такие ЛК трансверсалей не имеют. Второй класс главноизотопных ЛК определяется трафаретами T_A , у которых значения на c_1 и c_2 не совпадают.

3) В приложении приведены примеры (построенных с помощью вычислительной техники) наборов ЛК A, B, C, D порядка 5, порождающие подстановки χ_{ACDB} с любым наперед заданным числом циклов $k \in \{5, \dots, 25\}$.

3. Проекция трансверсалей распавшихся ЛК

Пусть $F = (A, B, C, D, T_A)$ — распавшийся ЛК порядка $2n$ на множестве $\{0, \dots, 2n-1\}$, определяемый четверкой A, B, C, D латинских квадратов порядка n на множестве $\{0, \dots, n-1\}$ и согласованным с ней трафаретом T_A .

Будем использовать обозначение $G = F \bmod n$ для результата приведения элементов F по модулю n .

Определение. Проекцией $\pi_A: \{1, \dots, 2n\}^2 \rightarrow \{1, \dots, n\}^2$ позиций $(i, j) \in \{1, \dots, 2n\}^2$ латинского квадрата F на позиции латинского квадрата A называется отображение

$$\pi_A(i, j) = \begin{cases} (i, j) & \text{при } (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \\ (l, t) & \text{при } (i, j) \notin \{1, \dots, n\}^2, \end{cases}$$

где во втором случае (l, t) получается из $(i, j) \notin \{1, \dots, n\}^2$ последовательным применением строчных и (или) столбцовых подстановок по часовой стрелке до первого попадания в ЛК A по схеме, изображенной на рисунке 4.

Пусть $\gamma \subseteq \{1, \dots, 2n\}^2$ — некоторое множество позиций ЛК F . Проекцию $\underline{\lambda} = \pi_A(\gamma)$ будем рассматривать как базовое множество для мультимножества $\lambda = (\underline{\lambda}, \Pi_\lambda)$, задаваемого с помощью целочисленной матрицы $\Pi_\lambda = (\pi_{ij})_{n \times n}$ порядка n , в которой элемент π_{ij} равен числу различных позиций из множества γ , проецирующихся на позицию $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\pi_{ij} = |\{m \in \gamma \mid \pi_A(m) = (i, j)\}|.$$

Мультимножество λ содержит элемент (i, j) с кратностью π_{ij} . В описанной ситуации будем говорить, что мультимножество λ является проекцией множества γ , и обозначать $\lambda = \pi_A(\gamma)$. При этом λ будет обычным множеством тогда и только тогда, когда Π_λ является $(0, 1)$ -матрицей.

Определение. Пусть заданы ЛК U порядка m на $\{0, \dots, m-1\}$ и некоторое мультимножество λ , $\underline{\lambda} \subseteq \{1, \dots, m\}^2$ его позиций. Будем говорить, что λ является k -сбалансированным, $k \in \{1, \dots, m\}$, если каждый элемент $a \in \{0, \dots, m-1\}$ встречается на позициях этого мультимножества ровно k раз с учетом кратности вхождения позиций в λ .

Следующее утверждение характеризует мультимножества, получающиеся при проецировании трансверсалей распадавшегося ЛК F .

Утверждение 3. Пусть $\tau \subset \{1, \dots, 2n\}^2$ — трансверсаль ЛК $F = (A, B, C, D, T_A)$. Тогда ее проекция $\pi_A(\tau)$ является 2-сбалансированным мультимножеством позиций ЛК A , удовлетворяющим следующим дополнительным условиям:

1) Любой элемент $(i, j) \in \pi_A(\tau)$, принадлежащий циклу длины 1 подстановки χ_{ACDB} , имеет в $\pi_A(\tau)$ кратность 1.

2) Элемент $(i, j) \in \pi_A(\tau)$ кратности больше 1 имеет кратность 2. В этом случае (i, j) принадлежит циклу длины $r \geq 2$ подстановки χ_{ACDB} , и в него проецируются 2 элемента трансверсали τ : сам $(i, j) \in \tau$ и элемент (l, t) из подматрицы C матрицы G , как показано на рисунке 5.

3) Два элемента $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \pi_A(\tau)$ кратностей 1 каждый и лежащие на одном цикле подстановки χ_{ACDB} , являются результатами проецирования элементов $(l_1, t_1), (l_2, t_2) \in \tau$, лежащих в смежных латинских квадратах матрицы G .

Доказательство. Мультимножество $\pi_A(\tau)$ позиций ЛК A является 2-сбалансированным, так как на позициях трансверсали τ в ЛК F каждое

Рис. 4

Рис. 5

число $a \in \{0, \dots, 2n - 1\}$ встречается по одному разу, и поэтому на позициях $\pi_A(\tau)$ в ЛК A каждое число $b \in \{0, \dots, n - 1\}$ встречается по два раза (с учетом кратности позиций). Справедливость свойства 1) легко видна из приведенной на рисунке 6 схемы, показывающей, как образуется цикл длины 1 подстановки χ_{ACDB} .

Рис. 6

Покажем, что если τ является трансверсалью в F , то элемент $(i, j) \in \pi_A(\tau)$ не может иметь кратность больше 1. Действительно, два различных элемента τ не могут проецироваться в (i, j) , поскольку если они находятся в смежных квадратах, то это противоречит тому, что τ является подстановкой, а если они находятся в несмежных квадратах, то на их местах в ЛК F стоят одинаковые элементы и τ — не трансверсаль.

П. 2) также вытекает из того, что τ является трансверсалью в F . Действительно, $\pi_A(\tau)$ не может иметь элементов кратности больше 2.

Рассмотрение схемы, приведенной в формулировке этого пункта, показывает, что на ней изображен единственный вариант, не противоречащий тому, что τ — трансверсаль.

Для доказательства п. 3) заметим, что так как $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \pi_A(\tau)$ лежат на одном цикле подстановки χ_{ACDB} , то они принадлежат одной и той же диагонали ЛК A , т. е. $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}$. Если бы позиции $(l_1, t_1), (l_2, t_2) \in \tau$, проецирующиеся на $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \pi_A(\tau)$, лежали бы в несмежных подматрицах матрицы G , то по построению распавшегося ЛК F имело бы место равенство двух элементов трансверсали τ : $f_{l_1 t_1} = f_{l_2 t_2}$. ■

Следствие. 1) Если подстановка χ_{ACDB} тождественна и $\tau \in \text{Tr}(F)$, то $\pi_A(\tau)$ является 2-сбалансированным множеством позиций ЛК A .

2) Если подстановка χ_{ACDB} тождественна и трансверсаль τ такова, что множество $(\kappa_{BA}, \kappa_{DC})(\tau \cap (\{n + 1, \dots, 2n\} \times \{1, \dots, 2n\}))$ представляет все строки, в $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, 2n\}$, а $(\sigma_{CA}, \sigma_{DB})(\tau \cap (\{1, \dots, 2n\} \times \{n + 1, \dots, 2n\}))$ — все столбцы в $\{1, \dots, 2n\} \times \{1, \dots, n\}$, то $\pi_A(\tau)$ является 2-трансверсалью ЛК A .

3) Если $F = (A, T_A)$ — однородный ЛК и $\tau \in \text{Tr}(F)$, то $\pi_A(\tau)$ является 2-трансверсалью ЛК A .

Доказательство. 1) Поскольку на трансверсали τ в ЛК F каждый элемент из $\{0, \dots, 2n - 1\}$ встречается ровно один раз, то в проекции $\pi_A(\tau)$ каждый элемент из $\{0, \dots, n - 1\}$ встретится ровно два раза.

2) Действительно, в этом случае $\pi_A(\tau)$ — 2-сбалансированное множество позиций ЛК A , которое содержит ровно по две позиции из каждого столбца и каждой строки этого латинского квадрата, т.е. является его 2-трансверсалью.

3) Очевидным образом вытекает из пункта 2). ■

Определение. Назовем 2-сбалансированное мультимножество λ , $\underline{\lambda} \subset \{1, \dots, n\}^2$, подстановочным 2-сбалансированным мультимножеством позиций ЛК A (для заданного набора ЛК A, B, C, D), порожденным подстановкой $\alpha \subset \{1, \dots, 2n\}^2$ степени $2n$, если $\pi_A(\alpha) = \lambda$ и пара (λ, α) обладает свойствами 1)–3) из утверждения 3. Если при этом λ является множеством, то будем говорить о подстановочном 2-сбалансированном множестве, порожденном подстановкой $\alpha \subset \{1, \dots, 2n\}^2$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если F — распавшийся ЛК с тождественной подстановкой χ_{ACDB} , то этому определению удовлетворяют все 2-сбалансированные множества позиций ЛК A , являющиеся проекциями подстановок степени $2n$.

2) Легко видеть, что в случае однородного ЛК $F = (A, T_A)$ 2-сбалансированными подстановочными множествами могут быть только 2-трансверсали ЛК A , поскольку если проекция $\pi_A(\alpha) = \lambda$ подстановки α на ЛК A является множеством, то λ имеет ровно по 2 элемента в каждой строке и в каждом столбце ЛК A ; а поскольку λ является 2-сбалансированным, то оно — 2-трансверсаль в A .

Следующее утверждение показывает, что верно и обратное: в однородном случае любая 2-трансверсаль ЛК A является 2-сбалансированным подстановочным множеством.

Утверждение 4. Пусть $F = (A, T_A)$ — однородный ЛК порядка $2n$ и λ — произвольная 2-трансверсаль ЛК A . Тогда существует ровно 2^{2n} подстановок $\alpha \subset \{1, \dots, 2n\}^2$ степени $2n$, проецирующихся в λ : $|\{\alpha \in S_{2n} \mid \pi_A(\alpha) = \lambda\}| = 2^{2n}$.

Доказательство. Рассмотрим $(0, 1)$ -матрицу $S = (s_{ij})_{n \times n}$ порядка n , в которой $s_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in \lambda$; матрица S соответствует 2-трансверсали λ ЛК A . В этой матрице в каждой строке и каждом столбце ровно по две единицы, поэтому $S = \Pi_1 + \Pi_2$ — сумма двух подстановочных матриц. Рассмотрим $(0, 1)$ -матрицу порядка $2n$, в которой в первых n строках и столбцах стоит подматрица, равная S , а остальные элементы равны 0 (см. рис. 7):

S	$0_{n \times n}$
$0_{n \times n}$	$0_{n \times n}$

Рис. 7

Теперь для доказательства утверждения необходимо перераспределить единицы из S на одноименные места в четырех подматрицах порядка n так, чтобы в итоге получилась подстановочная матрица. Единицы, входящие в Π_1 , распределяем по подматрицам на одноименные места произвольным образом. Всего получается $4^n = 2^{2n}$ вариантов. Очевидно, что для каждого такого варианта существует единственный вариант распределения единиц из подстановки Π_2 , в результате которого получается подстановочная матрица порядка $2n$. ■

Пусть $\lambda (\underline{\lambda} \subset \{1, \dots, n\}^2)$ – 2-сбалансированное мультимножество, порожденное подстановкой $\alpha \subset \{1, \dots, 2n\}^2$ степени $2n$: $\pi_A(\alpha) = \lambda$. Будем изучать множество $\text{Tr}(F, \lambda)$ всех трансверсалей τ латинского квадрата $F = (A, B, C, D, T_A)$, порождающих λ :

$$\text{Tr}(F, \lambda) = \{\tau \in \text{Tr}(F) \mid \pi_A(\tau) = \lambda\}.$$

Пусть $C_1, \dots, C_k \subset \{1, \dots, n\}^2$ – все циклы подстановки χ_{ACDB} и $\eta = \bigcup_{\substack{\nu \in \{1, \dots, k\}: \\ C_\nu \cap \lambda \neq \emptyset}} C_\nu$ – объединение тех и только тех циклов, которые имеют общие элементы с λ .

Через $H = (h_{ij})_{n \times n}$ обозначим $(0, 1)$ -матрицу порядка n , соответствующую η :

$$h_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in \eta.$$

Рассмотрим новый трафарет $T'_A = T_A * H$. Тогда очевидно, T'_A согласован с четверкой ЛК A, B, C, D , и они совместно задают новый распавшийся ЛК $F' = (A, B, C, D, T'_A)$. Очевидно также, что множества трансверсалей латинских квадратов F и F' , проецирующихся на λ , совпадают: $\text{Tr}(F, \lambda) = \text{Tr}(F', \lambda)$. Поэтому при изучении множества $\text{Tr}(F, \lambda)$ для произвольных распавшихся ЛК F полезно следующее понятие.

Определение. 1) Пусть λ – произвольное мультимножество позиций ЛК A и $T'_A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ – произвольный трафарет. Трафарет T'_A называется *накрывающим мультимножеством* λ , если его элементы t'_{ij} удовлетворяют

условию

$$t'_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \setminus \eta, \quad \text{где} \quad \eta = \bigcup_{\substack{\nu \in \{1, \dots, k\}: \\ C_\nu \cap \lambda \neq \emptyset}} C_\nu.$$

2) Трафарет T'_A , накрывающий мультимножество λ и построенный по трафарету T_A в рассуждении перед данным определением, будем называть *трафаретом, накрывающим мультимножество λ и соответствующим исходному трафарету T_A* .

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) При изучении множеств $\text{Tr}(F, \lambda)$ для всевозможных распавшихся ЛК $F = (A, B, C, D, T_A)$ достаточно ограничиться рассмотрением только трафаретов T_A , накрывающих λ .

2) Если подстановка χ_{ACDB} тождественна, то накрывающим для λ будет любой трафарет, в котором на позициях $(i, j) \notin \lambda$ стоят нули.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть для заданной четверки ЛК A, B, C, D порядка n задано также подстановочное 2-сбалансированное мультимножество позиций λ ЛК A вместе с любой из порождающих его подстановок $\alpha \subset \{1, \dots, 2n\}^2$ степени $2n$: $\pi_A(\alpha) = \lambda$. Можно ли так подобрать трафарет T_A , согласованный с набором A, B, C, D , чтобы подстановка α была трансверсалью в ЛК $F = (A, B, C, D, T_A)$, т.е. $\alpha \in \text{Tr}(F)$? Если да, то сколько таких трафаретов существует? Как было отмечено выше, достаточно ограничиться рассмотрением только трафаретов T_A , накрывающих λ .

В следующем определении вводятся наборы, являющиеся как бы маркерами того, что $\alpha \in \text{Tr}(F)$.

Определение. Пусть $F = (A, B, C, D, T_A)$ — распавшийся ЛК, $G = F \bmod n = (g_{ij})_{2n \times 2n} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$ — результат приведения элементов F по модулю n , $\alpha \subset \{1, \dots, 2n\}^2$ — подстановка степени $2n$. Рассмотрим следующие упорядоченные наборы:

$$\begin{aligned} L_1 &= (i_1, \dots, i_r) : f_{is\alpha(i_s)} = g_{is\alpha(i_s)} \in \{0, \dots, n-1\}, \quad s \in \{1, \dots, r\}, \\ L_2 &= (j_1, \dots, j_{2n-r}) : f_{js\alpha(j_s)} = g_{js\alpha(j_s)} + n \in \{n, \dots, 2n-1\}, \quad s \in \{1, \dots, 2n-r\}, \\ M_1 &= (m_1, \dots, m_r) : m_s = f_{is\alpha(i_s)} = g_{is\alpha(i_s)} \in \{0, \dots, n-1\}, \quad s \in \{1, \dots, r\}, \\ M_2 &= (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{2n-r}) : \\ &\quad \bar{m}_s = g_{js\alpha(j_s)} = r_n(f_{js\alpha(j_s)}) \in \{0, \dots, n-1\}, \quad s \in \{1, \dots, 2n-r\}. \end{aligned}$$

Здесь r_n означает взятие остатка от деления на n .

Через $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ обозначим множества элементов, встречающихся в наборах M_1 и M_2 соответственно.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Подстановка α является трансверсалью в ЛК F тогда и только тогда, когда $\tilde{M}_1 = \tilde{M}_2 = \{0, \dots, n-1\}$.

2) Для того, чтобы α была трансверсалью в F , необходимо, чтобы $r = n$.

Следующая лемма показывает, каким образом изменяются наборы L_1, L_2, M_1, M_2 при изменении значений трафарета T_A на местах, соответствующих одному произвольному циклу C_ν подстановки χ_{ACDB} .

Лемма 1. Пусть λ — подстановочное 2-сбалансированное мультимножество позиций ЛК A , порожденное подстановкой α степени $2n$, для которой построены указанные в предыдущем определении наборы L_1, L_2, M_1, M_2 . Пусть C_ν — произвольный цикл подстановки χ_{ACDB} и T'_A — трафарет, полученный из T_A изменением значений его элементов на позициях цикла C_ν на противоположные. Пусть $F' = (A, B, C, D, T'_A)$ — соответствующий распавшийся ЛК и L'_1, L'_2, M'_1, M'_2 — новые наборы из определения, соответствующие подстановке α . Тогда:

1) Если $C_\nu \cap \lambda = \emptyset$, то $(L_1, L_2, M_1, M_2) = (L'_1, L'_2, M'_1, M'_2)$.

2) Пусть $C_\nu \cap \lambda \neq \emptyset$. Тогда возможны следующие варианты:

2.1. $C_\nu \cap \lambda = \{p\}$, где p — элемент кратности 1, $p = (l, s) \in \{1, \dots, n\}^2$. Тогда при переходе от F к F' происходит переход одного элемента из наборов с номером 1 в наборы с номером 2 или наоборот.

2.2. $C_\nu \cap \lambda = \{p\}$, где p — элемент кратности 2. Тогда при переходе от F к F' происходит переход одного элемента из наборов с номером 1 в наборы с номером 2 и переход одного элемента из наборов с номером 2 в наборы с номером 1. При этом наборы M_1 и M_2 обмениваются одинаковыми элементами, т. е. $\tilde{M}_1 = \tilde{M}'_1$, $\tilde{M}_2 = \tilde{M}'_2$.

2.3. $C_\nu \cap \lambda = \{p_1, p_2\}$, $p_1 \neq p_2$ — элементы λ кратности 1. В этом случае при переходе от F к F' происходит такой же обмен элементами между наборами с номерами 1 и 2, как и в случае 2.2.

Доказательство. 1) Очевидно, так как в этом случае значения трафаретов T_A и T'_A на позициях, входящих в λ , одинаковы.

2) Этот пункт распадается на три подпункта, поскольку цикл является подмножеством некоторой диагонали ЛК A .

2.1. Пусть $(i, \alpha(i)) \in \alpha$ — единственный элемент подстановки α , проецирующийся в p . Если в ЛК $F = (f_{ij})_{2n \times 2n}$ для элемента $f_{i\alpha(i)}$ справедливо включение $f_{i\alpha(i)} \in \{0, \dots, n-1\}$, то в ЛК $F' = (f'_{ij})_{2n \times 2n}$ элемент $f'_{i\alpha(i)} \in \{n, \dots, 2n-1\}$ и наоборот, т. е. происходит указанный в этом пункте леммы переход элементов.

2.2. Пусть в элемент $p \in \lambda$ кратности 2 проецируются 2 элемента из подстановки α : $(i_1, \alpha(i_1)), (i_2, \alpha(i_2))$, $i_1 \neq i_2$, причем в соответствии с п. 2) утверждения 3 выполнены включения $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$. Тогда по построению распавшегося ЛК F его элементы $\hat{f}_{i_1\alpha(i_1)}, \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)}$, лежащие в двух смежных верхних подматрицах, удовлетворяют соотношениям $\hat{f}_{i_1\alpha(i_1)} \equiv \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)} \pmod{n}$, $\hat{f}_{i_1\alpha(i_1)} \neq \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)}$. Поэтому при переходе от F к F' происходит переход элементов между наборами, указанный в п. 2.2 леммы.

2.3. В данном случае согласно определению порождающей подстановки, подстановка α удовлетворяет п. 3) утверждения 3, а ее элементы $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$, проецирующиеся в p_1 и p_2 , лежат в смежных подматрицах матрицы G и, следовательно, $\hat{f}_{i_1\alpha(i_1)} \equiv \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)} \pmod{n}$, $\hat{f}_{i_1\alpha(i_1)} \neq \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)}$, т. е. при переходе от F к F' происходит переход элементов между наборами такой же, как и в п. 2.2 леммы. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Если F — распавшийся ЛК с тождественной подстановкой χ_{ACDB} , то в п. 2) леммы возможен только подпункт 2.1.

Утверждение 5. Пусть A, B, C, D — набор ЛК порядка n , λ — подстановочное 2-сбалансированное мультимножество позиций ЛК A и α — порождающая его подстановка степени $2n$. Тогда существует ровно 2^n таких согласованных с A, B, C, D и накрывающих λ трафаретов T_A , что для латинского квадрата $F = (A, B, C, D, T_A)$ подстановка α является трансверсалью: $\alpha \in \text{Tr}(F, \lambda)$.

Доказательство. 1) Сначала построим один трафарет T_A , обладающий указанным в утверждении свойством. Пусть $T_A = (0)_{n \times n}$. Если $\alpha \in \text{Tr}(F)$, то этот трафарет — искомым. Если $\alpha \notin \text{Tr}(F)$, то $\tilde{M}_1 \neq \tilde{M}_2$ для подстановки α . В 2-сбалансированном мультимноестве λ позиций ЛК A переберем пары элементов, на местах которых в A стоят одинаковые значения (при этом элемент кратности 2 считается «парой элементов»). Для любой такой пары возможны следующие варианты:

а) Если $p \in \lambda$ — элемент кратности 2, то, согласно определению подстановочного 2-сбалансированного мультимноества, для него выполнен п. 2) утверждения 3, т. е. в него проецируются 2 элемента из α : $(i_1, \alpha(i_1)) = p$ и $(i_2, \alpha(i_2))$: $i_2 \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha(i_2) \in \{n+1, \dots, 2n\}$. Тогда $\hat{f}_{i_1\alpha(i_1)} \equiv \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)} \pmod{n}$, $\hat{f}_{i_1\alpha(i_1)} \neq \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)}$, т. е. либо $i_1 \in L_1 \wedge i_2 \in L_2$, либо $i_2 \in L_1 \wedge i_1 \in L_2$; это означает, что элементу $p \in \lambda$ соответствуют два равных элемента, один из которых лежит в наборе M_1 , а другой — в M_2 .

б) Пусть $p_1, p_2 \in \lambda$ — элементы кратности 1, лежащие на одном цикле подстановки χ_{ACDB} ; стоящие на этих местах элементы ЛК A равны

между собой: $a_{p_1} = a_{p_2}$. Тогда, согласно определению подстановочного 2-сбалансированного мультимножества, для p_1, p_2 выполнен п. 3) утверждения 3, т. е. p_1, p_2 являются результатами проецирования элементов $(i_1, \alpha(i_1))$ и $(i_2, \alpha(i_2))$ подстановки α , лежащих в смежных подматрицах матрицы G . Тогда, как и в предыдущем случае, $\hat{f}_{i_1\alpha(i_1)} \equiv \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)} \pmod n$, $\hat{f}_{i_1\alpha(i_1)} \neq \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)}$, т. е. либо $i_1 \in L_1 \wedge i_2 \in L_2$, либо $i_2 \in L_1 \wedge i_1 \in L_2$. Это означает, что элементам $p_1, p_2 \in \lambda$ соответствуют два равных элемента, один из которых лежит в наборе M_1 , а другой — в M_2 .

в) Если бы перебор пар элементов из λ с одинаковым заполнением в ЛК A исчерпывался только предыдущими двумя случаями, то α была бы трансверсалью в F . По предположению это не так, значит существуют элементы $p_1, p_2 \in \lambda$ кратности 1, принадлежащие различным циклам подстановки χ_{ACDB} и удовлетворяющие условию $a_{p_1} = a_{p_2}$. Пусть $\pi_A(i_1, \alpha(i_1)) = p_1$ и $\pi_A(i_2, \alpha(i_2)) = p_2$. Тогда $a_{p_1} = a_{p_2} \equiv \hat{f}_{i_1\alpha(i_1)} \equiv \hat{f}_{i_2\alpha(i_2)} \pmod n$. Если i_1 и i_2 лежат в различных наборах L_1 и L_2 , то и в M_1 , и в M_2 входит элемент $h = a_{p_1} = a_{p_2}$. Если i_1 и i_2 лежат в одном и том же наборе, например в L_1 , то в M_1 имеется два одинаковых элемента, равных $h = a_{p_1} = a_{p_2}$. В этом случае воспользуемся п. 2.1 леммы 1 и изменим значения трафарета T_A на местах цикла подстановки χ_{ACDB} , которому принадлежит p_1 , на противоположные. Тогда один из элементов, равных $h = a_{p_1} = a_{p_2}$, покинет набор M_1 и перейдет в M_2 .

После завершения описанного перебора получим накрывающий λ трафарет T'_A , задающий распавшийся ЛК $F' = (A, B, C, D, T'_A)$, для которого $\alpha \in \text{Tr}(F', \lambda)$.

2) Теперь в нашем распоряжении имеется по крайней мере один накрывающий λ трафарет T_A , для которого $\alpha \in \text{Tr}(F, \lambda)$, $F = (A, B, C, D, T_A)$.

Рассмотрим $h \in \{0, \dots, n-1\}$ и места $p_1, p_2 \in \lambda$ с условием $h = a_{p_1} = a_{p_2}$.

Если $p_1 = p_2 = p$ — элемент кратности 2, лежащий на цикле C_ν подстановки χ_{ABCD} , или $p_1 \neq p_2$ — элементы кратности 1, лежащие на одном цикле C_ν подстановки χ_{ACDB} , то, заменяя значения T_A на C_ν противоположными, получаем трафарет T'_A , накрывающий λ , для которого выполняется условие $\alpha \in \text{Tr}(F', \lambda)$, $F' = (A, B, C, D, T'_A)$. Если же $p_1 \in C_\nu, p_2 \in C_\mu$ — элементы кратности 1, лежащие на различных циклах $C_\nu \neq C_\mu$ подстановки χ_{ACDB} , то, заменяя одновременно значения T_A на циклах C_ν и C_μ противоположными, также получим трафарет T'_A , накрывающий λ , для которого выполняется условие $\alpha \in \text{Tr}(F', \lambda)$, $F' = (A, B, C, D, T'_A)$. Таким образом всего можно построить 2^n трафаретов с указанным свойством. Очевидно, что таким способом получаются все такие трафареты. ■

Следствие. Пусть A, B, C, D — ЛК порядка n и $\lambda \subseteq \{1, \dots, n\}^2$ — подстановочное 2-сбалансированное мультимножество позиций ЛК A . Пусть $S_{2n}(\lambda)$ — множество всех подстановок степени $2n$, порождающих λ . Тогда $S_{2n}(\lambda)$ разбивается на такие подмножества $N_1, \dots, N_t$: $S_{2n}(\lambda) = \bigcup_{i=1}^t N_i$, $N_i \cap N_j = \emptyset$ при $i \neq j$, что для любого трафарета T_A , согласованного с набором A, B, C, D , и любой подстановки $\alpha \in S_{2n}(\lambda)$ из условия $\alpha \in \text{Tr}(F)$, $F = (A, B, C, D, T_A)$, вытекает, что $\text{Tr}(F, \lambda) = N_i$, где i определяется условием $\alpha \in N_i$.

Доказательство. Пусть для трафарета $T_A^{(1)}$ выполняются условия $\alpha, \beta \in \text{Tr}(F^{(1)}, \lambda)$, $F^{(1)} = (A, B, C, D, T_A^{(1)})$, $\alpha \neq \beta$. Пусть для другого трафарета $T_A^{(2)}$ выполнено $\alpha \in \text{Tr}(F^{(2)}, \lambda)$, $F^{(2)} = (A, B, C, D, T_A^{(2)})$. Докажем, что $\beta \in \text{Tr}(F^{(2)}, \lambda)$.

Перейдем от трафаретов $T_A^{(1)}, T_A^{(2)}$ к соответствующим им накрывающим λ трафаретам $(T_A^{(1)})', (T_A^{(2)})'$. Тогда $\alpha \in \text{Tr}((F^{(1)})', \lambda)$, $F^{(1)} = (A, B, C, D, (T_A^{(1)})')$ и одновременно $\alpha \in \text{Tr}((F^{(2)})', \lambda)$, $F^{(2)} = (A, B, C, D, (T_A^{(2)})')$, поэтому, в соответствии с п. 2) доказательства утверждения 3, трафарет $(T_A^{(2)})'$ получается из трафарета $(T_A^{(1)})'$ указанными в этом пункте преобразованиями, и, следовательно, $\beta \in \text{Tr}((F^{(2)})', \lambda) = \text{Tr}(F^{(2)}, \lambda)$. ■

Определение. Пусть λ — подстановочное 2-сбалансированное мультимножество позиций ЛК A и $T_A = (t_{ij})_{n \times n}$ — произвольный трафарет. Весом трафарета T_A относительно λ называется $\omega_\lambda(T_A) = \sum_{p \in \lambda} t_p \pi_p$, где t_p — значение T_A на позиции p , π_p — кратность p в λ , $\pi_p \in \{1, 2\}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если T'_A — накрывающий λ трафарет, соответствующий трафарету T_A , то $\omega_\lambda(T_A) = \omega_\lambda(T'_A)$.

2) $\omega_\lambda(T_A) = \omega(T_A * \Pi_\lambda)$ — вес трафарета T_A относительно λ равен весу (сумме элементов) целочисленной матрицы $T_A * \Pi_\lambda$.

Лемма 2. Пусть $\alpha \subset \{1, \dots, 2n\}^2$ — подстановка степени $2n$, порождающая подстановочное 2-сбалансированное мультимножество позиций λ , $\Delta \subseteq \{1, \dots, n\}^2$, в ЛК A и T_A — согласованный с набором A, B, C, D трафарет. Тогда длины наборов L_1, L_2, M_1, M_2 , построенных для подстановки α , имеют одинаковую четность с весом $\omega = \omega_\lambda(T_A)$.

Доказательство. В силу замечания 1), сформулированного перед леммой, ее достаточно доказать для трафаретов, накрывающих λ . Пусть сначала

$w = w_\lambda(T_A) = 0$, т. е. $T_A = (0)_{n \times n}$, а число позиций подстановки α , попадающих в ЛК A , равно t . Тогда в каждый из ЛК B и C попадает по $n - t$ позиций α , а в ЛК D попадает также t позиций. Элементы ЛК $F = (A, B, C, D, T_A)$, находящиеся на позициях α из A и D , лежат во множестве $\{n, \dots, 2n - 1\}$, поэтому номера их строк попадают в набор L_2 . Таким образом, этот набор имеет длину $2t$. Аналогично, элементы F , находящиеся на позициях α в латинских квадратах B и C , лежат во множестве $\{0, \dots, n - 1\}$, их номера строк попадают в набор L_1 , который тем самым имеет длину $2n - 2t$. Итак, при $w = w_\lambda(T_A) = 0$ лемма доказана.

Пусть теперь T'_A — произвольный трафарет, накрывающий λ и согласованный с набором ЛК A, B, C, D . Пусть $w' = w_\lambda(T'_A)$, а $C_1, \dots, C_s$ — все те циклы подстановки χ_{ACDB} , которые имеют непустое пересечение с λ и на позициях которых в трафарете T'_A стоят единицы. Переберем по очереди эти циклы и для каждого из них обнулим соответствующие им позиции в T'_A . В результате получим рассмотренный ранее трафарет $T_A = (0)_{n \times n}$. С помощью леммы 1 проследим, что при этом происходит с длинами наборов L_1, L_2, M_1, M_2 . Если очередной цикл C_i , $i \in \{1, \dots, s\}$, содержит элемент $p \in \lambda$ кратности 2 или два элемента $p_1, p_2 \in \lambda$, $p_1 \neq p_2$, кратностей 1, то, согласно пп. 2.2 и 2.3 леммы 1, при обнулении элементов трафарета на местах цикла C_i не изменяются длины наборов L_1, L_2, M_1, M_2 . При этом вес трафарета уменьшается на 2. Если же очередной C_i , $i \in \{1, \dots, s\}$, содержит единственный элемент $p \in \lambda$ кратности 1, то по п. 2.1 леммы 1 длина одного из наборов L_1 или L_2 увеличится на 1, а другого уменьшится на 1. При этом вес трафарета уменьшается на 1. Лемма 2 доказана. ■

Следствие. Пусть A, B, C, D — ЛК порядка n , λ — подстановочное 2-сбалансированное мультимножество позиций ЛК A и T_A — трафарет, согласованный с набором A, B, C, D , $F = (A, B, C, D, T_A)$, — расправившийся ЛК порядка $2n$, $w = w_\lambda(T_A)$. Если числа n и w имеют различную четность, то $\text{Tr}(F, \lambda) = \emptyset$.

Доказательство. Действительно, в этом случае длины наборов L_1, L_2, M_1, M_2 , построенных для любой подстановки α , порождающей λ , имеют одинаковую с w четность. А для того, чтобы α была трансверсалью, как указано выше, необходимо равенство этих длин числу n . ■

В качестве итога опишем метод, позволяющий быстро строить множество трансверселей для любого расправившегося ЛК $F = (A, B, C, D, T_A)$, задаваемого фиксированным набором A, B, C, D ЛК порядка n и произвольным согласованным с этим набором трафаретом T_A .

Сначала для заданного набора ЛК A, B, C, D проведем следующую предварительную работу.

1) Перебором всех подстановок $\alpha \in S_{2n}$ степени $2n$ построим совокупность $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_V\}$ всех подстановочных 2-сбалансированных мультимножеств позиций ЛК A и наборы порождающих их подстановок $\{S_{2n}(\lambda_1), \dots, S_{2n}(\lambda_V)\}$.

2) Для каждого $i \in \{1, \dots, V\}$ и каждой подстановки $\alpha \in S_{2n}(\lambda_i)$, в соответствии с утверждением 5, строим 2^n накрывающих λ_i трафаретов T_A таких, что $\alpha \in \text{Tr}(F)$, $F = (A, B, C, D, T_A)$.

3) Для каждого $i \in \{1, \dots, V\}$, в соответствии со следствием к утверждению 5, разобьем множество $S_{2n}(\lambda_i)$ подстановок, порождающих λ_i , на непересекающиеся подмножества: $S_{2n}(\lambda_i) = \bigcup_{j=1}^{k_i} N_j(\lambda_i)$. При этом подстановки $\alpha \in S_{2n}(\lambda_i)$, у которых в п. 2) получаются одинаковые множества накрывающих λ_i трафаретов, попадают в одно подмножество $N_j(\lambda_i)$, $j \in \{1, \dots, k_i\}$.

На этом предварительная работа завершается, в результате чего получаются три массива:

1) массив $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_V\}$ подстановочных 2-сбалансированных мультимножеств позиций ЛК A ;

2) массив $S_{2n}(\Lambda) = \bigcup_{i=1}^V S_{2n}(\lambda_i) = \bigcup_{i=1}^V \bigcup_{j=1}^{k_i} N_j(\lambda_i)$ подстановок степени $2n$;

3) массив $\{W_1(\lambda_1), \dots, W_{k_1}(\lambda_1), \dots, W_1(\lambda_V), \dots, W_{k_V}(\lambda_V)\}$ множеств трафаретов, для которых выполнены условия: $|W_{k_j}(\lambda_i)| = 2^n$ ($i \in \{1, \dots, V\}$, $j \in \{1, \dots, k_i\}$), все трафареты из $W_j(\lambda_i)$ накрывают λ_i и множеству трафаретов $W_{k_j}(\lambda_i)$ соответствует множество $N_j(\lambda_i)$ подстановок степени $2n$, причем для любого трафарета $T_A \in W_{k_j}(\lambda_i)$ имеет место равенство $\text{Tr}(F, \lambda_i) = N_j(\lambda_i)$, где $F = (A, B, C, D, T_A)$.

Теперь с помощью построенных массивов легко строится множество трансверсалей для любого распавшегося ЛК $F = (A, B, C, D, T_A)$:

1) Для каждого $i \in \{1, \dots, V\}$ по трафарету T_A строится соответствующий ему трафарет $(T_A)'_{\lambda_i}$, накрывающий λ_i .

2) Для каждого $i \in \{1, \dots, V\}$ находим номер $j(T_A, i) \in \{1, \dots, k_i\}$, удовлетворяющий условию $(T_A)'_{\lambda_i} \in W_{j(T_A, i)}(\lambda_i)$. Если такой номер $j(T_A, i)$ существует, то $\text{Tr}(F, \lambda_i) = N_{j(T_A, i)}(\lambda_i)$. Если такого номера нет (в частности, это может произойти, если $\omega_{\lambda_i}(T_A)$ и n разной четности), то $\text{Tr}(F, \lambda_i) = \emptyset$.

3) В итоге получаем $\text{Tr}(F) = \bigcup_{i=1}^V \text{Tr}(F, \lambda_i) = \bigcup_{i=1}^V N_{j(T_A, i)}(\lambda_i)$.

Автор благодарен Ф. М. Малышеву за полезные замечания по данной работе и, в частности, за формулировку п. 2) следствия к утверждению 3.

Приложение

Примеры наборов латинских квадратов A, B, C, D порядка 5 с различными числами циклов k в подстановках χ_{ACDB} :

$$1) k \in \{5, \dots, 25\} \setminus \{24\}, A = B = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

k	5	6	7	8
D	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
k	9	10	11	12
D	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
k	13	14	15	16
D	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
k	17	18	19	20
D	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
k	21	22	23	25
D	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) Набор латинских квадратов A, B, C, D порядка 5 с 24 циклами в подстановке χ_{ACDB} :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

1. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: МЦНМО, 2004.
2. Wanless I. M. A generalisation of transversals for Latin squares // Electron. J. Comb. — 2002. — V. 9. — P. 12.
3. Wanless I. M. Transversals in Latin squares // In: Quasigroups and Related Systems. — Inst. of Mathematics, Academy of Sciences of Moldova. — 2007. — V. 15. — P. 169–190.
4. McKay B. D., Meynert A., Myrvold W. J. Small Latin squares, quasigroups and loops // J. Combin. Des. — 2007. — V. 15. № 2. — P. 98–119.