Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Круглов, Оценка скорости сходимости к равномерному распределению для произведений элементов конечной группы, управляемых цепью Маркова, *Матем. вопр. криптогр.*, 2014, том 5, выпуск 1, 85–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 02:14:28

**Оценка скорости сходимости
к равномерному распределению
для произведений элементов конечной
группы, управляемых цепью Маркова**

И. А. Круглов

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 22.IV.2013

Для произведений случайных подстановок, управляемых цепью Маркова, получена верхняя оценка среднеквадратического отклонения матриц вероятностей переходов, порожденных этими произведениями, от стохастической матрицы с одинаковыми элементами.

Ключевые слова: цепи Маркова, группы подстановок, матрицы вероятностей переходов

**The estimate of the convergence rate to the uniform distribution
for products of elements of finite group controlled by a Markov chain**

I. A. Kruglov

LLC "Certification Research Center", Moscow

Abstract. For products of random substitutions controlled by a Markov chain we obtain an upper bound for the mean-square deviation of transition matrices corresponding to these products from the stochastic matrix with equal elements.

Key words: Markov chain, substitution groups, transition probability matrices

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2014, vol. 5, no. 1, pp. 85–94 (Russian).

Рассмотрим конечную простую однородную цепь Маркова

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \alpha_{N+1}, \dots$$

со множеством состояний $\{1, 2, \dots, n\}$, матрицей переходных вероятностей $P = [p(i, j)]_{i,j=1}^n$ и вектором начального распределения $\bar{p}_0$. Рассмотрим также произвольную конечную группу G с групповой операцией «*» и предположим, что для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ задана последовательность $\{\xi_{i,j}^{(N)}\}_{N \geq 1}$ одинаково распределенных случайных элементов со значениями в группе G , распределения которых совпадают с распределением случайного элемента $\xi_{i,j}$, причем случайные элементы $\xi_{i,j}^{(N)}$, $N \geq 1$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, независимы между собой и не зависят от цепи Маркова $\{\alpha_N\}_{N \geq 1}$. При любом $N \geq 1$ определим произведение случайных элементов

$$\eta^{(N)} = \xi_{\alpha_1, \alpha_2}^{(1)} * \xi_{\alpha_2, \alpha_3}^{(2)} * \dots * \xi_{\alpha_N, \alpha_{N+1}}^{(N)}.$$

Пусть q — произвольное подстановочное представление группы G подстановками непустого конечного множества S , $m = |S|$ — степень представления q . Для любого случайного элемента ξ со значениями в группе G определена матрица переходных вероятностей (см. [1, § 1])

$$\Pi_{\xi}^{(q)} = \left[p_{\xi}^{(q)}(\alpha, \beta) \right]_{\alpha, \beta \in S},$$

где для любых $\alpha, \beta \in S$

$$p_{\xi}^{(q)}(\alpha, \beta) = \sum_{\tau \in G_{\alpha, \beta}} \mathbf{P}(\xi = \tau), \quad G_{\alpha, \beta} = \left\{ \tau \in G \mid \alpha^{q(\tau)} = \beta \right\}.$$

Автором в § 3 работы [1] было показано, что при выполнении широких условий последовательность матриц переходных вероятностей $\left\{ \Pi_{\eta^{(N)}}^{(q)} \right\}_{N \geq 1}$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к матрице $\left[\frac{1}{m} \right]$ размеров $m \times m$, все элементы которой равны $\frac{1}{m}$. При этом из доказательства следует, что в случае наличия такой сходимости для величин

$$\varepsilon_N = \max_{\alpha \in S} \left(\sum_{\beta \in S} \left(p_{\xi}^{(q)}(\alpha, \beta) - \frac{1}{m} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad N \geq 1,$$

справедлива экспоненциальная оценка порядка скорости сходимости к 0 при $N \rightarrow \infty$. Оценке порядка скорости сходимости величин ε_N к нулю в одном

частном случае посвящена также работа автора [2]. Однако ее результаты имеют лишь качественный характер.

В настоящей работе получена явная экспоненциальная оценка сверху для величины ε_N в виде неравенства. Найдены дополнительные условия, при выполнении которых основание экспоненты строго меньше единицы. Основные из них состоят в том, что матрица P переходных вероятностей цепи Маркова должна быть дважды стохастической и вполне неразложимой (т.е. при вычеркивании любой строки и любого столбца перманент получающейся матрицы должен быть положительным). Отметим, что впервые такие условия для доказательства сходимости к матрице вида $[\frac{1}{m}]$ (в том числе и для неоднородных цепей Маркова) были эффективно использованы В. Н. Сачковым [3].

Введем обозначения, необходимые для формулировки основного результата работы. Пусть для любого $\sigma \in G$ и любых $\alpha, \beta \in S$

$$Q_{\alpha, \beta}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \alpha^{q(\sigma)} = \beta, \\ 0, & \alpha^{q(\sigma)} \neq \beta. \end{cases}$$

Рассмотрим матричное представление Q группы G , где

$$Q(\sigma) = [Q_{\alpha, \beta}(\sigma)]_{\alpha, \beta \in S}, \quad \sigma \in G,$$

соответствующее подстановочному представлению q . Выберем произвольное множество $\widehat{G}^{(q)}$ попарно неэквивалентных неприводимых унитарных матричных представлений группы G над полем комплексных чисел, для которого любая неприводимая компонента представления Q группы G эквивалентна ровно одному представлению из множества $\widehat{G}^{(q)}$. Для любого случайного элемента ξ со значениями в группе G определена матричная характеристическая функция матрицы переходных вероятностей $\Pi_{\xi}^{(q)}$ (см. [1]):

$$\Phi_{\xi}(U) = \sum_{\sigma \in G} \mathbf{P}(\xi = \sigma) U(\sigma), \quad U \in \widehat{G}^{(q)}.$$

Рассмотрим произвольное представление $U \in \widehat{G}^{(q)}$ степени n_U . Определим блочную квадратную матрицу

$$\Phi(U) = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1}(U) & \Phi_{1,2}(U) & \dots & \Phi_{1,n}(U) \\ \Phi_{2,1}(U) & \Phi_{2,2}(U) & \dots & \Phi_{2,n}(U) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{n,1}(U) & \Phi_{n,2}(U) & \dots & \Phi_{n,n}(U) \end{bmatrix}$$

порядка nn_U с n^2 квадратными блоками порядка n_U , у которой для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ на месте i, j стоит блок

$$\Phi_{i,j}(U) = p(i, j)\Phi_{\xi_{i,j}}(U). \quad (1)$$

Для произвольного вектора α унитарного пространства над полем комплексных чисел через $\|\alpha\|$ обозначим его евклидову норму, порожденную скалярным произведением в данном пространстве. При любом $U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$ обозначим через $\|\Phi(U)\|$ эрмитову норму матрицы $\Phi(U)$ как линейного преобразования унитарного пространства вектор-столбцов длины nn_U над полем комплексных чисел. Пусть $U_0 \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$ — (одномерное) единичное представление группы G , определяемое соотношением

$$U_0(g) = 1 \quad \forall g \in G.$$

Положим

$$\lambda = \max \left\{ \|\Phi(U)\| : U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}, U \neq U_0 \right\}. \quad (2)$$

Для произвольного случайного элемента ξ со значениями в группе G обозначим

$$\Omega(\xi) = \{\sigma \in G : P(\xi = \sigma) > 0\}$$

носитель его распределения. Рассмотрим множество Z последовательностей вида

$$z = (j_0 = 1, i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, j_{s-1}, i_s, j_s, \dots, i_{N-1}, j_{N-1}, i_N, j_N = 1), \quad (3)$$

$$N \geq 1, \quad i_s, j_s \in \{1, \dots, n\},$$

удовлетворяющих условиям

$$p(i_s, j_{s-1})p(i_s, j_s) > 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, N\}.$$

Для любой последовательности вида (3) определим следующее множество элементов группы G :

$$\Omega(z) = \Omega(\xi_{i_1,1})^{-1} * \Omega(\xi_{i_1,j_1}) * \dots * \Omega(\xi_{i_s,j_{s-1}})^{-1} * \Omega(\xi_{i_s,j_s}) * \dots$$

$$\dots * \Omega(\xi_{i_N,j_{N-1}})^{-1} * \Omega(\xi_{i_N,1}).$$

Для любых последовательностей $z_1, z_2 \in Z$ рассмотрим последовательность $z \in Z$, полученную путем удаления из z_2 первого элемента, равного 1,

и приписывания результата к z_1 справа. Имеет место равенство множеств $\Omega(z) = \Omega(z_1) * \Omega(z_2)$. Следовательно, объединение множеств

$$H = \bigcup_{z \in Z} \Omega(z)$$

замкнуто относительно групповой операции и поэтому является подгруппой конечной группы G .

Используя введенные обозначения, сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. 1) Справедливо неравенство

$$\varepsilon_N \leq \sqrt{n} \|\bar{p}_0\| \lambda^N \quad \forall N \geq 1. \quad (4)$$

2) Если P — вполне неразложимая дважды стохастическая матрица и группа подстановок $q(H)$ транзитивна на множестве S , то

$$0 \leq \lambda < 1. \quad (5)$$

Доказательство. 1) Пусть вектор начальных вероятностей цепи Маркова $\{\alpha_N\}_{N \geq 1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{p}_0 = (p_0(1), p_0(2), \dots, p_0(n)), \quad p_0(1) + \dots + p_0(n) = 1, \\ p_0(i) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Для любого представления $U \in \widehat{G}^{(q)}$ степени n_U определим следующие блочные матрицы $A(U), B(U)$ размеров $n_U \times (nn_U)$, $(nn_U) \times n_U$ соответственно:

$$A(U) = \begin{bmatrix} p_0(1)E_{n_U} & p_0(2)E_{n_U} & \dots & p_0(n)E_{n_U} \end{bmatrix},$$

$$B(U) = \begin{bmatrix} E_{n_U} \\ E_{n_U} \\ \vdots \\ E_{n_U} \end{bmatrix},$$

где E_{n_U} — единичная квадратная матрица порядка n_U . Покажем, что для любых $N \geq 1, U \in \widehat{G}^{(q)}$ имеет место равенство

$$\Phi_{\eta^{(N)}}(U) = A(U)\Phi(U)^N B(U). \quad (6)$$

Для любой последовательности

$$l_1, l_2, \dots, l_N, l_{N+1} \in \{1, \dots, n\}$$

условное распределение случайного элемента $\eta^{(N)}$ при условии

$$\alpha_1 = l_1, \alpha_2 = l_2, \dots, \alpha_N = l_N, \alpha_{N+1} = l_{N+1},$$

совпадает с распределением произведения независимых случайных элементов

$$\xi_{l_1, l_2}^{(1)} * \xi_{l_2, l_3}^{(2)} * \dots * \xi_{l_N, l_{N+1}}^{(N)}.$$

Из формулы полной вероятности и теоремы умножения для матричных характеристических функций (см. [1]) следует равенство

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta^{(N)}}(U) &= \sum_{l_1, \dots, l_{N+1}=1}^n p_0(l_1) p(l_1, l_2) \Phi_{\xi_{l_1, l_2}^{(1)}}(U) \times \\ &\times p(l_2, l_3) \Phi_{\xi_{l_2, l_3}^{(2)}}(U) \dots p(l_N, l_{N+1}) \Phi_{\xi_{l_N, l_{N+1}}^{(N)}}(U). \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства, в соответствии с соотношением (1) и правилами умножения блочных матриц, совпадает с правой частью равенства (6).

Для любых $N \geq 1$, $U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$ из соотношения (6) и свойства мультипликативности эрмитовой нормы линейных отображений унитарных пространств следует неравенство

$$\left\| \Phi_{\eta^{(N)}}(U) \right\| \leq \|A(U)\| \cdot \|\Phi(U)\|^N \cdot \|B(U)\|. \quad (7)$$

Можно показать, что при любом $U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$

$$\|A(U)\| = \|\bar{p}_0\|, \quad \|B(U)\| = n^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Обозначим через k_U кратность неприводимой компоненты $U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$ представления Q . Доказываемое соотношение (4) следует из соотношений (7), (2), (8), равенства для степени представления Q

$$m = \sum_{U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}} n_U k_U,$$

и следующего неравенства, доказанного в [4]:

$$\varepsilon_N^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}, U \neq U_0} n_U k_U \|\Phi_{\eta(N)}(U)\|^2.$$

2) Для любой комплексной матрицы C обозначим через $C^\top$ транспонированную матрицу к матрице C и для любого представления $U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$ обозначим через $\Phi(U)^*$ сопряженную матрицу к матрице $\Phi(U)$, где

$$\Phi(U)^* = \overline{\Phi(U)}^\top,$$

черта сверху обозначает взятие комплексно сопряженных элементов к элементам матрицы. Известно (см., например, [5]), что величина $\|\Phi(U)\|^2$ равна максимальному из модулей собственных чисел матрицы

$$\Lambda(U) = \Phi(U)^* \Phi(U). \quad (9)$$

Следовательно, для доказательства неравенства (5) достаточно показать, что для любого представления $U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$, $U \neq U_0$, все собственные числа матрицы $\Lambda(U)$ по модулю строго меньше 1.

Введем матрицу $R = P^\top P = [r(i, j)]$. Из условия пункта 2) теоремы на матрицу P и результатов работы [3] следует, что R — (вполне) неразложимая дважды стохастическая матрица.

Для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих условию $r(i, j) > 0$, рассмотрим непустое множество

$$L_{i,j} = \{l \in \{1, \dots, n\} : p(l, i)p(l, j) > 0\},$$

а также случайный элемент $\zeta_{i,j}$ со значениями в группе G с распределением

$$\mathbf{P}(\zeta_{i,j} = \sigma) = \frac{1}{r(i, j)} \sum_{l \in L_{i,j}} p(l, i)p(l, j) \mathbf{P}\left((\xi_{l,i}^{(1)})^{-1} * \xi_{l,j}^{(2)} = \sigma\right) \quad \forall \sigma \in G \quad (10)$$

и носителем распределения

$$\Omega(\zeta_{i,j}) = \bigcup_{l \in L_{i,j}} \left(\Omega(\xi_{l,i})^{-1} * \Omega(\xi_{l,j}) \right). \quad (11)$$

Из соотношений (1), (10), свойства унитарности представлений U и теоремы умножения для матричных характеристических функций для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $U \in \widehat{G}^{(q)}$ следуют равенства

$$r(i, j)\Phi_{\zeta_{i,j}}(U) = \sum_{l=1}^n p(l, i)\Phi_{\xi_{l,i}}(U)^* p(l, j)\Phi_{\xi_{l,j}}(U) = \sum_{l=1}^n \Phi_{l,i}(U)^* \Phi_{l,j}(U). \quad (12)$$

Вследствие соотношений (9) и (12) матрица $\Lambda(U)$ является блочной матрицей

$$\Lambda(U) = \begin{bmatrix} \Lambda_{1,1}(U) & \Lambda_{1,2}(U) & \dots & \Lambda_{1,n}(U) \\ \Lambda_{2,1}(U) & \Lambda_{2,2}(U) & \dots & \Lambda_{2,n}(U) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{n,1}(U) & \Lambda_{n,2}(U) & \dots & \Lambda_{n,n}(U) \end{bmatrix}$$

с n^2 квадратными блоками порядка n_U , у которой для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ на месте i, j стоит блок

$$\Lambda_{i,j}(U) = r(i, j)\Phi_{\zeta_{i,j}}(U).$$

Необходимые и достаточные условия существования у таких блочных матриц собственных чисел, по модулю равных 1, получены автором в лемме из § 3 работы [1]. Эти условия сформулированы в терминах свойств некоторой подгруппы группы G , которая, в свою очередь, описывается в терминах ненулевых элементов матрицы R и множеств $\Omega(\zeta_{i,j})$ для $i, j \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих неравенству $r(i, j) > 0$. Используя равенства (11), можно показать, что в нашем случае эта подгруппа совпадает с определенной выше подгруппой H .

Таким образом, по лемме из § 3 работы [1] для любого представления $U \in \widehat{G}^{(q)}$ матрица $\Lambda(U)$ имеет собственное число, по модулю большее или равное 1, тогда и только тогда, когда U является неприводимой компонентой индуцированного представления группы G единичным представлением ее подгруппы H . Это условие по теореме взаимности Фробениуса равносильно наличию единичной неприводимой компоненты у ограничения представления U на подгруппу H . Следовательно, количество представлений $U \in \widehat{G}^{(q)}$ с рассматриваемым свойством матрицы $\Lambda(U)$ не превосходит числа единичных компонент ограничения представления Q на подгруппу H , т. е. числа орбит группы подстановок $q(H)$ на множестве S . Это число равно единице, так как по условию 2) формулировки теоремы группа подстановок $q(H)$ транзитивна на множестве S . Итак, матрица $\Lambda(U)$ может иметь собственное число,

по модулю большее или равное 1, не более чем для одного представления $U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$.

С другой стороны, единичное представление $U_0 \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$, а матрица $\Lambda(U_0) = R$ имеет собственное число, равное 1. Следовательно, для любого представления $U \in \widehat{\mathbf{G}}^{(q)}$, $U \neq U_0$, все собственные числа матрицы $\Lambda(U)$ строго меньше 1. Согласно соотношению (2), имеет место двойное неравенство (5). Теорема доказана.

Приведем условия, при выполнении которых проверка соотношения (5) несколько упрощается. Предположим, что имеет место соотношение

$$\bigcap_{j \in \{1, \dots, n\} : p(i, j) > 0} \Omega(\xi_{i, j}) \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (13)$$

В частности, условие (13) выполняется в случае, когда распределения сомножителей в произведениях $\eta^{(N)}$ определяются состояниями (а не переходами) цепи Маркова $\{\alpha_N\}_{N \geq 1}$, т. е. при выполнении соотношений

$$\xi_{i, j} = \xi_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

для некоторых случайных элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$ со значениями в группе G .

Зафиксируем произвольные элементы

$$\sigma_{i, j} \in \Omega(\xi_{i, j}) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

и рассмотрим следующее множество элементов группы G :

$$\Omega = \bigcup_{i, j \in \{1, \dots, n\} : p(i, j) > 0} \sigma_{i, j}^{-1} * \Omega(\xi_{i, j}).$$

Следствие. Если P — вполне неразложимая дважды стохастическая матрица и множество подстановок $q(\Omega)$ порождает транзитивную группу подстановок на множестве S , то верно неравенство (5).

Доказательство. Согласно п. 2) теоремы достаточно показать, что группа подстановок $q(H)$ транзитивна на множестве S . Как уже упоминалось, R — вполне неразложимая дважды стохастическая матрица. Из соотношений (11) и (13) следует, что

$$e_G \in \Omega(\xi_{i, j}) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : r(i, j) > 0.$$

Из результатов работы [6] следует, что при этих условиях множество

$$\bigcup_{i,j \in \{1, \dots, n\}: r(i,j) > 0} \Omega(\xi_{i,j})$$

является системой порождающих элементов подгруппы H группы G . Однако при любом $j \in \{1, \dots, n\}$ имеет место неравенство $r(j, j) > 0$, и, согласно соотношению (11),

$$\sigma_{i,j}^{-1} * \Omega(\xi_{i,j}) \subseteq \Omega(\zeta_{j,j}) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}: p(i, j) > 0.$$

Следовательно, $\Omega \subseteq H$, и по условию следствия группа подстановок $q(H)$ транзитивна на множестве S . Следствие доказано.

Список литературы

1. Горчинский Ю.Н., Круглов И.А., Капитонов В.М. Вопросы теории распределений на конечных группах // В сб.: Труды по дискретной математике, т. 1. — 1997. — С. 85–112.
2. Круглов И.А. Оценка среднеквадратического отклонения от равновероятной матрицы для матриц переходных вероятностей произведений случайных величин со значениями в конечных группах, распределения которых определяются цепью Маркова // Обозр. прикл. и промышл. матем.— 2006. — Т. 13. Вып. 3. — С. 507–509.
3. Сачков В.Н. Вероятностные преобразователи и правильные мультиграфы.1 // В сб.: Труды по дискретной математике, т. 1. — 1997. — С. 227–250.
4. Горчинский Ю.Н., Капитонов В.М. О средних квадратических отклонениях в строках матриц переходных вероятностей на конечных группах подстановок // В сб.: Труды по дискретной математике, т. 2. — 1998. — С. 88–100.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
6. Круглов И.А. Принцип сходимости Б.М. Клосса для произведений случайных величин со значениями в компактной группе, распределения которых определяются цепью Маркова // Дискретная математика. — 2008. — Т. 20. Вып. 1. — С. 38–51.