Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Балакин, Линейные псевдобулевы неравенства, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1, выпуск 3, 5–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk12>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 02:23:08

Линейные псевдобулевы неравенства

Балакин Г. В.

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 22.IV.2010

В работе рассматриваются случайные и заведомо совместные системы из линейных псевдобулевых неравенств. Найдены оценки вероятности совместности и апостериорные распределения неизвестных.

Ключевые слова: линейные псевдобулевы неравенства

Linear pseudo-Boolean inequalities

G. V. Balakin

Academy of Cryptography of Russian Federation, Moscow

Abstract. Systems of random linear pseudo-Boolean inequalities are considered. Probability of solvability is estimated. Conditional distributions of solutions of solvable systems are investigated.

Key words: linear pseudo-Boolean inequalities, solvability probability

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 3, pp. 5–18 (Russian).

1. Введение

Рассмотрим над кольцом целых чисел систему неравенств

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i=1, \dots, t, \quad (1)$$

с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$, принимающими только два значения: 0 или 1. Заметим, что к системе вида (1) сводятся другие системы линейных неравенств. Действительно, знаки в правой части $<$ и $\leq$ всегда можно поменять на противоположные, а знак $>$ можно заменить на знак $\geq$, если подходящим образом увеличить правую часть неравенства.

По мнению автора, в общем случае труднее всего решать системы неравенств (1), которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) в каждом неравенстве присутствуют все n неизвестных;
- 2) каждому неравенству удовлетворяет примерно половина векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ из некоторого множества возможных решений $X \subseteq \{0, 1\}^n$;
- 3) среди коэффициентов в левых частях неравенств (1) нет выделяющихся.

Если система (1) заведомо совместна, то предполагаем, что в истинном решении x^0 содержится примерно половина нулей и единиц.

Автору пока удалось найти только один класс систем (1), неравенства в которых строго удовлетворяют перечисленным выше условиям. Этот класс систем характеризуется следующими параметрами:

- число неизвестных $n = 2m$, m — нечётное число;
- все коэффициенты в левых частях неравенств (1) равны 1 или -1 ;
- m коэффициентов равны 1 и m коэффициентов равны -1 ;
- множество возможных решений X состоит из векторов x нечетного веса;
- все правые части в неравенствах (1) равны 1.

Если система (1) заведомо совместна, то истинное решение x^0 имеет вес $|x^0| = m$.

Заметим, что в случае, когда n — нечётное число или m — чётное число, то, перебрав определённые значения некоторого числа неизвестных, мы получим в итоге чётное число оставшихся неизвестных и нечётный вес соответствующего им истинного решения. Но при этой процедуре возможны изменения в правой части исходной системы неравенств.

Следует ещё отметить, что неравенства с коэффициентами, равными 1 или -1 , могут быть преобразованы в неравенства, в которых коэффициенты принимают значения 0 или 1. Для этого зададим вес вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$|x| = x_1 + x_2 + \dots + x_n = k,$$

сложим это равенство с неравенством из системы (1), полученное неравенство разделим на 2, в итоге имеем неравенство с коэффициентами в левой части, равными 1 и 0. Обратное преобразование выполняется следующим образом: и итоговое неравенство умножаем на 2 и вычитаем из него заданное равенство. Эту процедуру проводим $(n+1)$ раз при $k = 0, 1, \dots, n$, причём случаи $k = 0$ и $k = n$ непосредственно проверяются.

2. Случайные системы неравенств

Пусть коэффициенты a_{ij} , $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, t$, являются реализациями независимых случайных величин ξ_{ij} , $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, t$, принимающих значения $+1$ и -1 с одинаковой вероятностью $1/2$. Выбор правой части не зависит от выбора левой части, причём с вероятностью $1/2$ выбирается правая часть вида ≥ 1 или вида ≤ -1 . Меняем знак у неравенств второго вида и приходим к системе неравенств (1) с $b_i = 1$, $i = 1, \dots, t$.

Пусть множество возможных решений X содержит только векторы нечётного веса. Тогда $|X| = 2^{n-1}$ и среднее число решений случайной системы неравенств равно 2^{n-1-t} .

Попытаемся алгебраическим способом, применяя метод выделения и оценки отдельных неизвестных [1], определить факт несовместности системы неравенств либо определить значения отдельных неизвестных. Для этого сложим все t_{1i} неравенств, в которых коэффициент при x_i равен 1, и t_{0i} неравенств с коэффициентом при x_i равном -1 , $t_{1i} + t_{0i} = t$. В итоге получим два неравенства следующего вида:

$$t_{1i}x_i + L_{1i} + L_{2i} - L_{3i} - L_{4i} \geq t_{1i}, \quad (2)$$

$$-t_{0i}x_i + Q_{1i} - Q_{2i} + Q_{3i} - Q_{4i} \geq t_{0i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь линейные формы L_{ji} и Q_{ji} имеют неотрицательные коэффициенты и зависят от общих n_{ji} неизвестных, $j = 1, 2, 3, 4$, $n_{1i} + n_{2i} + n_{3i} + n_{4i} = n - 1$. Обозначим $|L_{ji}|(|Q_{ji}|)$ сумму коэффициентов в линейных формах $L_{ji}(Q_{ji})$, $j = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, \dots, n$.

Для рассматриваемого примера справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Рассматриваемая случайная система неравенств несовместна, если найдётся такое $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которого выполняется хотя бы одно из двух условий:*

- 1) $|Q_{1i}| + |Q_{3i}| < t_{0i}$;
- 2) $|L_{1i}| + |L_{2i}| < t_{1i}$, $t_{0i} \leq |Q_{1i}| + |Q_{3i}| < 2 \cdot t_{0i}$.

Доказательство. Система из двух неравенств (2) и (3) при $x_i = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} L_{1i} + L_{2i} - L_{3i} - L_{4i} &\geq t_{1i}, \\ Q_{1i} - Q_{2i} + Q_{3i} - Q_{4i} &\geq t_{0i} \end{aligned}$$

и не имеет решений, если справедливо одно из неравенств

$$|L_{1i}| + |L_{2i}| < t_{1i}, \quad |Q_{1i}| + |Q_{3i}| < t_{0i}.$$

Аналогично для $x_i = 1$ система из неравенств

$$\begin{aligned} L_{1i} + L_{2i} - L_{3i} - L_{4i} &\geq 0, \\ Q_{1i} - Q_{2i} + Q_{3i} - Q_{4i} &\geq 2t_{0i} \end{aligned}$$

не имеет решения, если выполняется неравенство

$$|Q_{1i}| + |Q_{3i}| < 2t_{0i}.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы 1.

Из доказательства теоремы 1 следует, что $x_i = 0$, если выполняются неравенства

$$|L_{1i}| + |L_{2i}| \geq t_{1i}, \quad t_{0i} \leq |Q_{1i}| + |Q_{3i}| < 2t_{0i}, \quad (4)$$

и $x_i = 1$, если

$$|L_{1i}| + |L_{2i}| < t_{1i}, \quad |Q_{1i}| + |Q_{3i}| \geq 2t_{0i}. \quad (5)$$

В случае нахождения значений отдельных неизвестных поступаем следующим образом. Подставляем значения этих неизвестных в неравенства (2), (3). Это приведёт к изменению некоторых линейных форм и правых частей неравенств (2), (3) и соответственно линейных форм и правых частей неравенств, приведённых в теореме 1. Далее применяем теорему 1 к изменённой системе, находим значения ещё нескольких неизвестных либо устанавливаем факт несовместности системы неравенств, либо ничего не находим. В первом случае процесс продолжается, во втором случае он останавливается, а в третьем случае, по-видимому, следует перейти к подбору значений для нескольких неизвестных.

Теорема 1 верна и для произвольной системы неравенств (1). Для этого достаточно заменить $t_{1i} (t_{0i})$ суммой правых частей уравнений, в которых коэффициент при x_i равен неотрицательному (неположительному) числу. Но при этом коэффициент при x_i может отличаться от значения правой части.

Исследуем поведение вероятностей выполнения неравенств (4) и (5) и неравенств из условий теоремы 1. Пусть $n, t \rightarrow \infty$. Очевидно, что в этом случае $t_{1i} \approx t_{0i} \approx t/2$, $n_{1i} \approx n_{2i} \approx n_{3i} \approx n_{4i} \approx n/4$ и предельным распределением случайных величин $\eta_{1i}, \eta_{2i}, \nu_{1i}, \nu_{3i}$, реализациями которых являются $|L_{1i}|, |L_{2i}|, |Q_{1i}|, |Q_{3i}|$ соответственно, после соответствующей их центрировки и нормировки является нормальный закон с параметрами $(0,1)$. При любых фиксированных $i, t_{1i}, t_{0i}, n_{1i}, n_{2i}, n_{3i}, n_{4i}$ рассматриваемые четыре случайные величины независимы в совокупности.

Рассмотрим случайную величину

$$\eta_i = \sum_{j=1}^T \xi_{ji}.$$

Легко видеть, что при $T \rightarrow \infty$ предельным распределением случайной величины η_i является нормальное распределение с параметрами

$$\mathbf{E} \eta_i = 0, \quad \mathbf{D} \eta_i = T,$$

поэтому

$$m_i = \mathbf{E} |\eta_i| / \sqrt{\mathbf{D}(\eta_i)} \sim 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z e^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$\mathbf{E} \left(\frac{\eta_i}{\sqrt{T}} \right)^2 \sim 1, \quad \sigma_i^2 = \mathbf{D} \left| \frac{\eta_i}{\sqrt{T}} \right| \sim 1 - \frac{2}{\pi}.$$

При $T = t_{1i}$ случайная величина η_{1i} является суммой n_{1i} независимых случайных величин, у которых математическое ожидание m_{1i} эквивалентно $\sqrt{\frac{2}{\pi}} t_{1i}$, а дисперсия σ_{1i}^2 эквивалентна $t_{1i} \left(\frac{\pi-2}{\pi} \right)$. Следовательно, распределение случайной величины

$$\left(\eta_{1i} - n_{1i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} t_{1i} \right) / \sqrt{n_{1i} t_{1i} \left(\frac{\pi-2}{\pi} \right)}$$

при $n_{1i}, t_{1i} \rightarrow \infty$ стремится к нормальному закону с параметрами $(0,1)$. То же самое можно сказать о случайных величинах $\eta_{2i}, \nu_{1i}, \nu_{3i}$. Для $T = t_{0i}$ применяем обозначения m_{i0}, σ_{i0} .

Приведём конкретные выражения для трёх первых моментов случайной величины $|\eta_i|$ при нечётном T . Так как

$$p_j = \mathbf{P}\{|\eta_i| = j\} = C_T^{(T+j)/2} / 2^{T-1}, \quad j \in I = \{1, 3, 5, \dots, T\},$$

то очевидно, что

$$\mathbf{E}|\eta_i| = \sum_{j \in I} j C_T^{(T+j)/2} / 2^{T-1}, \quad (6)$$

$$\mathbf{D}|\eta_i| = \sum_{j \in I} j^2 C_T^{(T+j)/2} / 2^{T-1} - (\mathbf{E}|\eta_i|)^2, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}|\eta_i|^3 = \sum_{j \in I} j^3 C_T^{(T+j)/2} / 2^{T-1}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\| \eta_i | - \mathbf{E}|\eta_i| \|^3 &= \sum_{k \in I, k \geq M|\eta_i|} (k - \mathbf{E}|\eta_i|)^3 C_T^{(T+k)/2} / 2^{T-1} + \\ &+ \sum_{1 \leq k < M|\eta_i|, k \in I} (\mathbf{E}|\eta_i| - k)^3 C_T^{(T+k)/2} / 2^{T-1} = \mathbf{E}(|\eta_i| - \mathbf{E}|\eta_i|)^3 + \\ &+ 2 \sum_{1 \leq k < M|\eta_i|, k \in I} (\mathbf{E}|\eta_i| - k)^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Величину

$$\mathbf{E}\left(|\eta_i| - \mathbf{E}|\eta_i|\right) / \sqrt{\mathbf{D}|\eta_i|}$$

при $T = t_{0i}(t_{1i})$ обозначим $\mu_{0i}(\mu_{1i})$.

Введём обозначения:

- A_i есть событие, заключающееся в выполнении хотя бы одного из двух условий теоремы 1;
- B_{0i} есть событие, при котором выполняются неравенства (4);
- B_{1i} есть событие, при котором выполняются неравенства (5).

Напомним, что при осуществлении события A_i система неравенств не имеет решений, а при осуществлении события B_{1i} (B_{0i}) находится значение $x_i = 1(0)$.

Теорема 2. Пусть для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ известны n_{1i}, n_{2i}, n_{3i} и нечётные числа t_{0i}, t_{1i} . Тогда справедливы следующие оценки:

$$\mathbf{P}\{A_i\} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot (1 - \alpha_0 - \beta) + \varepsilon_1,$$

$$\mathbf{P}\{B_{1i}\} = \alpha_1 \beta + \varepsilon_2,$$

$$\mathbf{P}\{B_{0i}\} = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_0 - \beta) + \varepsilon_3,$$

$$\mathbf{P}\{\overline{A_i \cup B_{1i} \cup B_{0i}}\} = (1 - \alpha_1) \beta + \varepsilon_4,$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \Phi \left(\frac{1}{\sigma_i} \sqrt{\frac{t_{0i}}{(n_{1i} + n_{3i})}} - \frac{m_i}{\sigma_i} \sqrt{(n_{1i} + n_{3i})} \right), \\ \alpha_1 &= \Phi \left(\frac{1}{\sigma_i} \sqrt{\frac{t_{1i}}{(n_{1i} + n_{2i})}} - \frac{m_i}{\sigma_i} \sqrt{(n_{1i} + n_{2i})} \right), \\ \beta &= 1 - \Phi \left(\frac{1}{\sigma_i} \sqrt{\frac{2t_{0i}}{(n_{1i} + n_{3i})}} - \frac{m_i}{\sigma_i} \sqrt{(n_{1i} + n_{3i})} \right), \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz.\end{aligned}$$

Величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 &= 0, \quad |\varepsilon_1| \leq C_0 + C_1, \quad |\varepsilon_2| \leq \alpha_1 C_0 + C_1, \\ |\varepsilon_3| &\leq 2(1 - \alpha_0) C_0 + C_1, \quad |\varepsilon_4| \leq (1 - \alpha_1) C_0 + C_1, \\ C_0 &= C \mu_{0i} / \sqrt{(n_{1i} + n_{3i})}, \quad C_1 = C \mu_{1i} / \sqrt{(n_{1i} + n_{2i})}, \quad C \leq 0,79,\end{aligned}$$

конкретные значения $m_{i0}, m_{i1}, \sigma_{i0}, \sigma_{i1}, \mu_{0i}, \mu_{1i}$ находятся по формулам (6), (7), (8), (9).

Доказательство. Рассмотрим вероятность

$$\mathbf{P}\{v_{1i} + v_{3i} < t_{0i}\}.$$

Случайные величины $v_{1i}(v_{3i})$ есть суммы $n_{1i}(n_{3i})$ независимых случайных величин, имеющих такое же распределение, как и случайная величина

$$|\eta_i| = \left| \sum_{j=1}^T \xi_{ji} \right|$$

при $T = t_{0i}$. Поэтому для функции распределения $F(y)$ случайной величины

$$\frac{v_{1i} + v_{3i} - \mathbf{E}(v_{1i} + v_{3i})}{\sqrt{\mathbf{D}(v_{1i} + v_{3i})}}$$

согласно теореме Берри–Эссена (см. [2], стр. 46) имеет место неравенство

$$\max_y |F(y) - \Phi(y)| \leq C \mathbf{E} \left| \frac{|\eta_i| - \mathbf{E}|\eta_i|}{\sqrt{\mathbf{D}|\eta_i|}} \right|^3 / \sqrt{(n_{1i} + n_{3i})}, \quad C \leq 0,79. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{v_{1i} + v_{3i} < t_{0i}\} &= \\ = \mathbf{P} \left\{ \frac{v_{1i} + v_{3i} - m_i(n_{1i} + n_{3i})\sqrt{t_{0i}}}{\sigma_i \sqrt{t_{0i}(n_{1i} + n_{3i})}} < \frac{1}{\sigma_i} \left[\sqrt{\frac{t_{0i}}{n_{1i} + n_{3i}}} - m_i \sqrt{(n_{1i} + n_{3i})} \right] \right\} &= \alpha_0 + \delta_0,\end{aligned}$$

$$\delta_0 \leq C \cdot \mu_{0i} / \sqrt{(n_{li} + n_{3i})} = C_0.$$

Аналогично находим

$$\mathbf{P}\{\eta_{li} + \eta_{2i} < t_{li}\} = \alpha_1 + \delta_1, \quad \delta_1 < C \cdot \mu_{li} / \sqrt{(n_{li} + n_{2i})} = C_1.$$

Вероятности событий $\{\nu_{li} + \nu_{3i} \geq 2t_{0i}\}, \{\eta_{li} + \eta_{2i} \geq t_{li}\}, \{t_{0i} \leq \nu_{li} + \nu_{3i} < 2 \cdot t_{0i}\}$ оцениваются следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\nu_{li} + \nu_{3i} \geq 2t_{0i}\} = 1 - \mathbf{P}\{\nu_{li} + \nu_{3i} < 2t_{0i}\} = \beta + \delta_2, \quad \delta_2 \leq C_0,$$

$$\mathbf{P}\{\eta_{li} + \eta_{2i} \geq t_{li}\} = 1 - \mathbf{P}\{\eta_{li} + \eta_{2i} < t_{li}\} = 1 - \alpha_1 - \delta_1,$$

$$\mathbf{P}\{t_{0i} \leq \nu_{li} + \nu_{3i} < 2t_{0i}\} = 1 - \beta - \delta_2 - \alpha_0 - \delta_0.$$

Таким образом, находим

$$\varepsilon_1 = \delta_0(1 - \alpha_1) - \alpha_1\delta_2 + \delta_1(1 - \alpha_0 - \beta - \delta_0 - \delta_2), \quad |\varepsilon_1| \leq C_0 + C_1,$$

$$\varepsilon_2 = \alpha_1\delta_2 + \beta\delta_1 + \delta_1\delta_2, \quad |\varepsilon_2| \leq \alpha_1 C_0 + C_1,$$

$$\varepsilon_3 = \delta_1(1 - \alpha_0 - \beta - \delta_0 - \delta_2) - (\delta_0 + \delta_2) \cdot (1 - \alpha_0), \quad |\varepsilon_3| \leq C_1 + 2(1 - \alpha_0) \cdot C_0,$$

$$\varepsilon_4 = \delta_2(1 - \alpha_1) - \delta_1(\beta + \delta_2), \quad |\varepsilon_4| \leq C_1 + (1 - \alpha_1) \cdot C_0.$$

Принимая во внимание независимость рассматриваемых случайных величин и неравенства (10), приходим к утверждению теоремы.

3. Заведомо совместная система неравенств

Пусть исходной системе линейных псевдобулевых неравенств (1) при любом значении числа неравенств t удовлетворяет вектор $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. В этом случае скалярное произведение

$$(\overline{a_i}, x^0) \geq b_i, \quad \overline{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Многие результаты, полученные в п. 2, переносятся и на этот случай. В частности, результаты по нахождению значений отдельных неизвестных (неравенства (4), (5)).

Как и в п. 2, рассмотрим пример, в котором коэффициенты в неравенствах независимы и принимают только два значения 1 и -1 с равной вероятностью. Считаем, что множество возможных решений X состоит из векторов фиксированного нечётного веса, $x^0 \in X, |x^0| = 2k + 1, b_i = 1, i = 1, 2, \dots, t$.

Лемма 1. Если $x_1^0 = 1$, то

$$\mathbf{P}\{(\overline{a_i}, x^0) \geq 1 \mid a_{i1} = 1\} = \mathbf{P}\{(\overline{a_i}, x^0) \leq -1 \mid a_{i1} = -1\} = \frac{1}{2} + \frac{C_{2k}^k}{2^{2k+1}},$$

$$\mathbf{P}\{(\overline{a_i}, x^0) \geq 1 \mid a_{i1} = -1\} = \mathbf{P}\{(\overline{a_i}, x^0) \leq -1 \mid a_{i1} = 1\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\right).$$

Для $x_1^0 = 0$ имеют место равенства

$$\mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i}, x^0\right) \geq 1 \mid a_{i1} = 1\right\} = \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i}, x^0\right) \leq -1 \mid a_{i1} = -1\right\} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i}, x^0\right) \geq 1 \mid a_{i1} = -1\right\} = \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i}, x^0\right) \leq -1 \mid a_{i1} = 1\right\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, t.$$

Доказательство. Второе утверждение очевидно, а первое утверждение следует из формул

$$\mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i}, x^0\right) \geq 1 \mid a_{i1} = 1\right\} = \mathbf{P}\left\{a_{i2}x_2^0 + \dots + a_{in}x_n^0 \geq 0\right\} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \sum_{j \geq 0} C_{2k}^{k+j} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\right),$$

$$\mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i}, x^0\right) \geq 1 \mid a_{i1} = -1\right\} = \mathbf{P}\left\{a_{i2}x_2^0 + \dots + a_{in}x_n^0 \geq 2\right\} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \sum_{j \geq 1} C_{2k}^{k+j} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\right).$$

Очевидны следующие утверждения.

Лемма 2. При $x_j^0 = 1$ случайная величина

$$t_{1j} = \left| \left\{ i : a_{ij} = 1, i \in \{1, 2, \dots, t\} \right\} \right|$$

имеет биномиальное распределение с параметрами $\left(t, \frac{1}{2} + C_{2k}^k / 2^{2k+1}\right)$,

а случайная величина

$$t_{0j} = \left| \left\{ i : a_{ij} = -1, i \in \{1, 2, \dots, t\} \right\} \right|$$

распределена по биномиальному закону с параметрами $\left(t, \frac{1}{2} - C_{2k}^k / 2^{2k+1}\right)$.

Для $x_j^0 = 0$ обе случайные величины имеют одинаковое биномиальное распределение с параметрами $(t, 1/2)$. Во всех случаях $t_{0j} + t_{1j} = t$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. По существу, утверждения лемм 1, 2 позволяют строить критерий отличия случайной системы неравенств от заведомо совместной случайной системы неравенств.

Лемма 3. Пусть известны $t_{1j}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда апостериорная вероятность

$$\overline{p_j} = \mathbf{P}\left\{x_j^0 = 1 \mid t_{1j}, t\right\} = \left[1 + \frac{n-2k-1}{2k+1} \left(1 - \left(\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\right)^2\right)^{-t/2} \left(\frac{2^{2k} - C_{2k}^k}{2^{2k} + C_{2k}^k}\right)^{\zeta_j}\right]^{-1}, \quad (11)$$

$$\zeta_j = t_{1j} - t/2, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Доказательство. Так как априорная вероятность

$$p = \mathbf{P}\left\{x_j^0 = 1\right\} = (2k+1)/n, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

то, используя леммы 1,2 и идею, предложенную в [3], находим

$$\overline{p_j} = \frac{pp_1^{t_{1j}}(1-p_1)^{t-t_{1j}}}{pp_1^{t_{1j}}(1-p_1)^{t-t_{1j}} + (1-p)2^{-t}}, \quad p_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \right).$$

Поделим числитель и знаменатель этой дроби на числитель и придём к выражению (11).

Следствие 1. *Апостериорная вероятность*

$$\mathbf{P}\{x_j^0 = 0 | t_{1j}, t\} = 1 - \overline{p_j} = \left[1 + \frac{2k+1}{n-2k-1} \left(1 - \left(\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \right)^2 \right)^{t/2} \left(\frac{2^{2k} - C_{2k}^k}{2^{2k} + C_{2k}^k} \right)^{-\zeta_j} \right]^{-1}.$$

Для иллюстрации утверждений лемм 1–3 приведем конкретный пример. Пусть $n = 6$, $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 1$, $x_4^0 = x_5^0 = x_6^0 = 0$. При наших предположениях о коэффициентах существует 32 неравенства вида $a_1x_1 + \dots + a_6x_6 \geq 1$ и 32 неравенства вида $b_1x_1 + \dots + b_6x_6 \leq -1$. Найдем число неравенств с $a_1 = 1$ и $b_1 = -1$. В нашем случае эти неравенства выглядят следующим образом:

$$a_2 + a_3 \geq 0, \quad b_2 + b_3 \leq 0.$$

Число таких неравенств для каждого вида равно $2^3 (1 + 2) = 24$. Следовательно, вероятность появления в заведомо совместной системе (1) неравенства с $a_1 = 1$ равна $48/64 = 3/4$ и число таких неравенств имеет биномиальное распределение с параметрами $(t, 3/4)$.

Пусть $t = 8$, $t_{11} = 7$. Тогда

$$\overline{p_1} = \mathbf{P}(x_1^0 = 1 | t_{11} = 7, t = 8) = \left[1 + \left(\frac{3}{4} \right)^4 \frac{1}{3} \right]^{-1} \approx 0,9.$$

Для случайной системы неравенств $\mathbf{E}t_{11} = 4$, а вероятность события $\{t_{11} = 7\}$ равна $C_8^7 \left(\frac{1}{2} \right)^8 = \frac{1}{32}$.

Пусть $H_{0j}(H_{1j})$ обозначает гипотезу, по которой $x_j^0 = 0(1)$, а $I_{0j}(I_{1j})$ — индикатор этой гипотезы, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Гипотезу $H_{0j}(H_{1j})$ считаем справедливой, если $\zeta_j < Q > 0 (\zeta_j \geq Q)$. При $n \rightarrow \infty$ найдем такие $k(n), t(n), Q(n)$, для которых

$$\sum_{j \in \{1, \dots, n\}: x_j^0 = 0} I_{0j} \sim n - 2k - 1, \quad \sum_{j \in \{1, \dots, n\}: x_j^0 = 1} I_{1j} \sim 2k + 1,$$

и суммарная ошибка стремится к нулю.

Теорема 3. Пусть $n \rightarrow \infty$, $t = 2Q\sqrt{\pi\theta n} + O(1) = o(n^2)$, $\theta = (2k+1)/n + O\left(\frac{1}{n}\right)$, $0 < \varepsilon < \theta < 1 - \varepsilon$. Тогда среднее число неправильно принятых гипотез $H_{0j}(H_{1j})$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, эквивалентно величине $(1 - \theta)n\beta(\theta n\alpha)$,

$$\alpha \sim \beta \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_\alpha}^{\infty} e^{-z^2/2} dz, \quad t_\alpha = \sqrt{\frac{t}{\pi\theta n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Доказательство. Согласно утверждению леммы 2

$$\mathbf{E}_0 \zeta_j = \mathbf{E}_0 \left(t_{1j} - \frac{t}{2} \right) = 0, \quad \mathbf{D}_0 \zeta_j = \frac{t}{4},$$

$$\mathbf{E}_1 \zeta_j = \frac{t}{2} C_{2k}^k / 2^{2k}, \quad \mathbf{D}_1 \zeta_j = \frac{t}{4} \left[1 - \left(\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \right)^2 \right], \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Далее находим

$$(\mathbf{E}_1 \zeta_j - \mathbf{E}_0 \zeta_j) / 2 = \frac{t}{4} \sqrt{\frac{1}{\pi\theta n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{Q}{2} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

$$t_\alpha = \frac{Q}{2} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] / \sqrt{\frac{t}{4}} = \sqrt{\frac{t}{\pi\theta n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

$$t_\beta - t_\alpha = O\left(\sqrt{\frac{t}{\pi\theta n^3}} \right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Этим заканчивается доказательство теоремы.

Следствие 2. Если $t = 2\pi\theta n \ln n + O(1)$, то для всех $j = 1, 2, \dots, n$ будет принята правильная гипотеза с вероятностью, стремящейся к единице при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно теореме 3 в этом случае

$$t_\alpha = \sqrt{2 \ln n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right],$$

поэтому

$$\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_\alpha}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \sim \frac{1}{t_\alpha \sqrt{2\pi}} e^{-t_\alpha^2/2} \sim \frac{1}{n \sqrt{4\pi \ln n}}, \quad n\alpha \rightarrow 0.$$

В условиях теоремы 3 найдём асимптотическое представление формулы (11). Очевидны следующие асимптотические выкладки:

$$\frac{n - 2k - 1}{2k + 1} = \frac{1 - \theta}{\theta} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \Delta = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\theta n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

$$(1 - \Delta^2)^{-1/2} = \exp \left\{ \frac{t}{2} \cdot \left(\Delta^2 + \frac{\Delta^4}{2} + \dots \right) \right\} = \exp \left\{ \frac{t}{2\pi\theta n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right\},$$

$$\left(\frac{1 - \Delta}{1 + \Delta} \right)^{\zeta_j} = \exp \left\{ -2\zeta_j \left(\Delta + \frac{\Delta^3}{3} + \dots \right) \right\} = \exp \left\{ -2\zeta_j \sqrt{\frac{1}{\pi\theta n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right\}.$$

Таким образом,

$$\overline{p_j} = \left[1 + \frac{1 - \theta}{\theta} \exp \left\{ \frac{Q}{\sqrt{\pi\theta n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] - 2\zeta_j \sqrt{\frac{1}{\pi\theta n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\} \right]^{-1},$$

$$1 - \overline{p_j} = \left[1 + \frac{\theta}{1 - \theta} \exp \left\{ -\frac{Q}{\sqrt{\pi\theta n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] + 2\zeta_j \sqrt{\frac{1}{\pi\theta n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\} \right]^{-1}.$$

Если верна гипотеза H_{1j} , то в худшем случае $\zeta = Q + O(1)$

и

$$1 - \overline{p_j} \sim \frac{1 - \theta}{\theta} \exp \left\{ -\frac{t}{2\pi\theta n} \right\}.$$

Это означает, что $\overline{p_j} \rightarrow 1$ при $t/n \rightarrow \infty$.

4. Неравенства с искажениями

Приведём три возможных вида искажений для рассмотренного в п. 3 примера.

1) Знаки неравенства и правые части меняются на противоположные с вероятностью $p < 1/2$, т. е. с вероятностью p истинное решение x^0 не удовлетворяет новому неравенству. Найдём вероятность ошибки для суммы двух неравенств

$$(\overline{a_i}, x) \geq 1, \quad (\overline{a_j}, x) \geq 1.$$

Лемма 4. Вероятность того, что истинное решение x^0 не удовлетворяет неравенству

$$(\overline{a_i} + \overline{a_j}, x^0) \geq 2,$$

равна выражению

$$\mathbf{P}\{(\overline{a_i} + \overline{a_j}, x^0) \leq 0\} = p \left[1 + (1 - p) C_{4k+2}^{2k+1} / 2^{4k+1} \right].$$

Доказательство. По формуле полной вероятности находим

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i} + \overline{a_j}, x^0\right) \leq 0\right\} = \\ & = (1-p)^2 \cdot 0 + p^2 \cdot 1 + 2p(1-p) \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i} + \overline{a_j}, x^0\right) \leq 0 \mid \left(\overline{a_i}, x^0\right) \leq -1, \left(\overline{a_j}, x^0\right) \geq 1\right\}. \end{aligned}$$

Далее, учитывая симметрию в распределениях рассматриваемых случайных величин, приходим к формулам

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i} + \overline{a_j}, x^0\right) \leq 0 \mid \left(\overline{a_i}, x^0\right) \leq -1, \left(\overline{a_j}, x^0\right) \geq 1\right\} = \\ & = \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i}, x^0\right) \geq \left(\overline{a_j}, x^0\right) \mid \left(\overline{a_i}, x^0\right) \geq 1, \left(\overline{a_j}, x^0\right) \geq 1\right\} = \\ & = 4 \sum_{l \geq 1} \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_j}, x^0\right) = l\right\} \sum_{h \geq l} \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i}, x^0\right) = h\right\} = \\ & = 2 \left[\frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} \left(\mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_j}, x^0\right) = l\right\} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{l \geq 1} \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_j}, x^0\right) = l\right\} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Так как $|x^0| = 2k+1$, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_j}, x^0\right) = l\right\} = C_{2k+1}^{(2k+1+l)/2} / 2^{2k+1}, \quad l = 1, 3, \dots, 2k+1, \\ & \sum_{l \geq 1} \left(\mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_j}, x^0\right) = l\right\} \right)^2 = \sum_{h=1}^{k+1} \left(C_{2k+1}^{k+h} / 2^{2k+1} \right)^2 = \frac{1}{2} C_{4k+2}^{2k+1} / 2^{4k+2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i} + \overline{a_j}, x^0\right) \leq 0\right\} = p \left[p + (1-p) \left(1 + \frac{C_{4k+2}^{2k+1}}{2^{4k+1}} \right) \right] = \\ & = p \left[1 + (1-p) \frac{C_{4k+2}^{2k+1}}{2^{4k+1}} \right], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2) В правые части неравенств добавляем две единицы. Тем самым допускаем возможность в каждом неравенстве ошибки, но делаем более эффективным применение метода выделения и оценки отдельных неизвестных (см. п. 2).

Лемма 5. Вероятность того, что истинное решение x^0 не удовлетворяет неравенству

$$\left(\overline{a_i} + \overline{a_j}, x^0\right) \geq 6,$$

равна выражению

$$\mathbf{P}\left\{\left(\overline{a_i} + \overline{a_j}, x^0\right) \leq 4\right\} = C_{2k+1}^k \left(C_{2k+1}^k + 2C_{2k+1}^{k-1} \right) / 2^{4k}.$$

Доказательство. Учитывая исходные неравенства

$$(\bar{a}_i, x^0) \geq 1, \quad (\bar{a}_j, x^0) \geq 1,$$

находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(\bar{a}_i + \bar{a}_j, x^0) \leq 4\} &= \mathbf{P}\{(\bar{a}_i, x^0) = 1\} \left[\mathbf{P}\{(\bar{a}_j, x^0) = 1\} + \mathbf{P}\{(\bar{a}_j, x^0) = 3\} \right] + \\ &+ \mathbf{P}\{(\bar{a}_i, x^0) = 3\} \mathbf{P}\{(\bar{a}_j, x^0) = 1\} = \\ &= 4C_{2k+1}^{k+1} (C_{2k+1}^{k+1} + 2C_{2k+1}^{k+2}) / 2^{4k+2}. \end{aligned}$$

3) Возможны случаи, когда одновременно могут присутствовать два вида искажений. Для подсчёта $\mathbf{P}\{(\bar{a}_i + \bar{a}_j, x^0) \leq 4\}$ используем леммы 4, 5. С вероятностью $(1-p)^2$ удовлетворялись неравенства $(\bar{a}_i, x^0) \geq 1$, $(\bar{a}_j, x^0) \geq 1$, с вероятностью p^2 исходными неравенствами были $(\bar{a}_i, x^0) \leq -1$, $(\bar{a}_j, x^0) \leq -1$, а с одинаковой вероятностью $p(1-p)$ в системе присутствовали неравенства $(\bar{a}_i, x^0) \leq -1$, $(\bar{a}_j, x^0) \geq 1$ или неравенства $(\bar{a}_i, x^0) \geq 1$, $(\bar{a}_j, x^0) \leq -1$. С учётом этого находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(\bar{a}_i + \bar{a}_j, x^0) \leq 4\} &= (1-p)^2 C_{2k+1}^k (C_{2k+1}^k + 2C_{2k+1}^{k-1}) / 2^{4k} + \\ &+ 2p(1-p) \mathbf{P}\{(\bar{a}_i + \bar{a}_j, x^0) \leq 4 | (\bar{a}_i, x^0) \leq -1, (\bar{a}_j, x^0) \geq 1\} + p^2, \\ \mathbf{P}\{(\bar{a}_i, x^0) \leq 4 - (\bar{a}_j, x^0) | (\bar{a}_i, x^0) \leq -1, (\bar{a}_j, x^0) \geq 1\} &= \\ &= 4 \sum_{l \geq 1, h \geq 1, h \leq 4+l} \mathbf{P}\{(\bar{a}_i, x^0) = -l\} \cdot \mathbf{P}\{(\bar{a}_j, x^0) = h\}. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Балакин Г. В. О возможности решения систем линейных целочисленных уравнений методом выделения и оценки отдельных неизвестных. — Дискрет. матем., 1994, т. 6, в. 1, с. 116–126.
2. Вероятность и математическая статистика. — Энциклопедия. — Москва, 1999.
3. Балакин Г. В. О вероятностном подходе к решению систем уравнений с целочисленными неизвестными. — Дискрет. матем., 1995, т. 7, в. 1, с. 88–98.