Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Камловский, Неабсолютные оценки для неполных тригонометрических сумм от линейных рекуррент и их приложения, *Матем. вопр. криптогр.*, 2014, том 5, выпуск 3, 17–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:36:20

**Неабсолютные оценки для неполных
тригонометрических сумм от линейных рекуррент
и их приложения**

О. В. Камловский

ООО "Центр сертификационных исследований г. Москва

Получено 22.IV.2013

Устанавливаются верхние оценки для некоторых классов неполных тригонометрических сумм над кольцами Галуа. Указываются приложения данных результатов к исследованию коэффициентов кросс-корреляции и частот элементов в линейных рекуррентных последовательностях.

Ключевые слова: линейные рекуррентные последовательности, неполные тригонометрические суммы, кольца Галуа, коэффициенты кросс-корреляции

**Nonabsolute bounds for incomplete exponential sums of elements
of linear recurrent sequences and their applications**

O. V. Kamlovsky

LLC "Certification Research Center", Moscow

Abstract. We establish several upper bounds for some classes of incomplete exponential sums over Galois rings. We apply these results to cross-correlation coefficients and distribution properties of linear recurrent sequences.

Keywords: linear recurrent sequences, incomplete exponential sums, Galois rings, cross-correlation coefficients

1. Введение

Ряд задач, связанных с распределением элементов на отрезках псевдослучайной последовательности u над конечным коммутативным кольцом R , сводится к исследованию так называемых *неполных* тригонометрических сумм, т. е. таких сумм в которых суммирование осуществляется по знакам последовательности u , расположенным на отрезке длины l , меньшей ее периода $T(u)$. Среди таких сумм наиболее простыми и часто используемыми являются суммы вида

$$\sum_{i=0}^{l-1} \chi(u(i)), \quad (1)$$

где χ — аддитивный характер кольца R .

В случае, когда $R = GF(q)$ — поле из q элементов, для модуля таких сумм были получены абсолютные (не зависящие от l) оценки сверху, которые оказались асимптотически неувлучшаемыми (см. [1]–[5]). Первая неабсолютная оценка для тригонометрических сумм вида (1) в случае, когда q — простое число, была получена в [6, теорема 1]. В этой же работе было показано, что при некоторых значениях l она точнее известных неабсолютных оценок. Другой метод получения неабсолютных оценок для сумм вида (1) был предложен в [7] и развивался в большом количестве работ (см., например, обзор литературы в [8]). Он оказался эффективным для некоторых классов последовательностей u , удовлетворяющих условию $T(u) = |R|$. Вопрос об эффективности этого метода для последовательностей, у которых $T(u)$ значительно больше величины $|R|$, остается пока открытым. В данной работе исследуется именно эта ситуация. Рассматривается один класс неполных тригонометрических сумм над кольцом R , включающий в себя суммы вида (1). Для этого класса предлагается общий метод получения неабсолютных оценок, который является развитием идей из [6], [9, § 5], а также статей автора [10]–[12].

В настоящей статье нетривиальные оценки для исследуемого класса тригонометрических сумм устанавливаются в случае, когда R — кольцо Галуа (в частности, конечное поле). Полученные результаты применяются для оценок параметров линейных рекуррент: коэффициентов кросс-корреляции и чисел появлений элементов кольца R на отрезках. Показывается, что в некоторых случаях эти результаты уточняют ранее известные абсолютные оценки исследуемых параметров.

2. Общий подход к исследованию неполных сумм

Пусть R — конечное коммутативное кольцо, χ — нетривиальный характер группы $(R, +)$, $u = (u(i))_{i=0}^{\infty}$ — чисто периодическая последовательность элементов кольца R , а H — некоторое непустое подмножество кольца R . Для каждого элемента $z \in R$ и натурального числа l рассмотрим тригонометрическую сумму

$$\tau_l(z, u, H) = \sum_{a \in H} \chi(-az) \sum_{i=0}^{l-1} \chi(au(i)). \quad (2)$$

Предложим подход, позволяющий оценить сверху модуль рассматриваемой суммы.

Обозначим через $P(u)$ множество всех сдвигов последовательности u , т. е. множество всех последовательностей вида $x^0u, x^1u, x^2u, \dots$, где $x^ju = (u(j), u(j+1), \dots)$, $j \in \mathbb{N}_0$. Если $t = T(u)$ — период последовательности u , то

$$P(u) = \{x^0u, x^1u, x^2u, \dots, x^{t-1}u\}.$$

Заметим, что каждая последовательность $v \in P(u)$ является чисто периодической последовательностью периода t . Обозначим через $s = s(H)$ такое натуральное число, что для всех $j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ и всех $v \in P(u)$ имеют место неравенства

$$|\tau_l(z, v, H) - \tau_l(z, x^jv, H)| \leq sj, \quad |\tau_l(z, v, H) - \tau_l(z, x^{t-j}v, H)| \leq sj. \quad (3)$$

Утверждение 1. *Существует натуральное число s , при котором имеют место неравенства (3), причем его можно подобрать так, что $s \leq 2|H|$.*

Доказательство. Векторы $(v(0), v(1), \dots, v(l-1))$ и $(v(j), v(j+1), \dots, v(j+l-1))$ при $j < l$ имеют по крайней мере $l-j$ общих элементов $v(j), \dots, v(l-1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tau_l(z, v, H) - \tau_l(z, x^jv, H) &= \sum_{a \in H} \chi(-az) \left(\sum_{i=0}^{j-1} \chi(av(i)) - \sum_{k=l}^{l+j-1} \chi(av(k)) \right) = \\ &= \sum_{a \in H} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \chi(a(v(i) - z)) - \sum_{k=l}^{l+j-1} \chi(a(v(k) - z)) \right). \end{aligned}$$

Таким образом величина $\tau_l(z, v, H) - \tau_l(z, x^jv, H)$ равна сумме не более $2|H|j$ значений характера χ , а значит,

$$|\tau_l(z, v, H) - \tau_l(z, x^jv, H)| \leq 2|H|j.$$

Очевидно, это неравенство выполнено и при $j \geq l$. Аналогично в силу того, что векторы $(v(0), v(1), \dots, v(l-1))$ и $(v(t-j), v(t-j+1), \dots, v(t-j+l-1))$ при $j < l$ имеют по крайней мере $l-j$ общих элементов $v(0), \dots, v(l-j-1)$, получим

$$|\tau_l(z, v, H) - \tau_l(z, x^{t-j}v, H)| \leq 2|H|j.$$

Это неравенство выполнено и при $j \geq l$. $\square$

В дальнейшем понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1 ([10]). *Для всех неотрицательных действительных чисел x и всех натуральных чисел s*

$$x^2 + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor x/s \rfloor} (x - sj)^2 \geq \frac{2x^3}{3s},$$

где $\lfloor x/s \rfloor$ — целая часть числа x/s .

Теорема 1. *Пусть R — конечное коммутативное кольцо, H — непустое подмножество в R , u — чисто периодическая последовательность над кольцом R . Тогда для всех $z \in R$ и всех таких натуральных l , что*

$$l < \frac{T(u)s}{2|H|},$$

выполнено неравенство

$$|\tau_l(z, u, H)| \leq \left(\frac{3s}{2} \sum_{v \in P(u)} |\tau_l(z, v, H)|^2 \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Доказательство. Выберем последовательность $v_0 \in P(u)$, имеющую максимальные величины $|\tau_l(z, v, H)|$ среди всех ЛРП $v \in P(u)$. Пусть $\tau = |\tau_l(z, v_0, H)|$. Докажем, что

$$\tau \leq \left(\frac{3s}{2} \sum_{v \in P(u)} |\tau_l(z, v, H)|^2 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4)$$

Отсюда будет следовать справедливость доказываемого неравенства. Пусть $t = T(u)$. Для всех $j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ положим

$$v_j = x^j v_0, \quad v_{-j} = x^{t-j} v_0.$$

Из определения величины $\pi_l(z, v, H)$ следует, что $\tau \leq |H|l$, а значит $[\tau/s] \leq \tau/s \leq |H|l/s < t/2$. Это гарантирует, что все последовательности

$$v_{-[\frac{\tau}{s}]}, \dots, v_0, v_1, \dots, v_{[\frac{\tau}{s}]}$$

являются попарно различными. Согласно неравенствам (3)

$$|\pi_l(z, v_j, H)| \geq \tau - sj, \quad |\pi_l(z, v_{-j}, H)| \geq \tau - sj, \quad j = 0, 1, \dots, t-1,$$

а тогда с использованием леммы 1 получим

$$\sum_{v \in P(u)} |\pi_l(z, v, H)|^2 = \sum_{v \in P(v_0)} |\pi_l(z, v, H)|^2 \geq \tau^2 + 2 \sum_{j=1}^{[\tau/s]} (\tau - sj)^2 \geq \frac{2\tau^3}{3s}.$$

Таким образом неравенство (4) доказано. $\square$

Теорема 1 сводит исследование неполной суммы $\pi_l(z, u, H)$ к исследованию суммы

$$\sum_{v \in P(u)} |\pi_l(z, v, H)|^2 \quad (5)$$

и устанавливает альтернативный способ по сравнению с классическим переходом от исследования неполных тригонометрических сумм к изучению некоторых полных тригонометрических сумм (см. [13, теорема 2]).

3. Оценки тригонометрических сумм

Рассмотрим случай, когда $R = P = GF(q)$, u — ненулевая ЛРП над полем P с характеристическим многочленом $F(x) \in P[x]$. Согласно теореме 1 для оценки суммы $\pi_l(z, u, H)$, определенной равенством (2), достаточно получить оценку сверху суммы, заданной равенством (5). В качестве такой оценки рассмотрим величину

$$\sum_{v \in L_P(F) \setminus \{(0)\}} |\pi_l(z, v, H)|^2, \quad (6)$$

где $L_P(F)$ — множество всех ЛРП над полем P с характеристическим многочленом $F(x)$, а (0) — нулевая последовательность.

Утверждение 2. Пусть $F(x)$ — неприводимый многочлен степени t над полем $P = GF(q)$, $F(x) \neq x$, $t = T(F)$ — период многочлена $F(x)$,

H — подгруппа мультипликативной группы P^* . Тогда для всех $z \in P$ и всех таких натуральных l , что $l \leq t/(t, |H|)$, справедливо равенство

$$\sum_{v \in L_P(F) \setminus \{(0)\}} |\tau_l(z, v, H)|^2 = |H|q^m l - \varkappa(z, H)l^2, \quad (7)$$

где

$$\varkappa(z, H) = \left| \sum_{a \in H} \chi(az) \right|^2. \quad (8)$$

Доказательство. Введем обозначение

$$S_l(z, F, H) = \sum_{v \in L_P(F)} |\tau_l(z, v, H)|^2.$$

Из равенства (2) и соотношения $\chi(-az) = \overline{\chi(az)}$, где черта означает комплексное сопряжение, имеем

$$|\tau_l(z, (0), H)|^2 = \left| \sum_{a \in H} \chi(-az) \right|^2 l^2 = \varkappa(z, H)l^2.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$S_l(z, F, H) = |H|q^m l. \quad (9)$$

Представим элементы последовательности v следующим образом:

$$v(i) = \text{tr}_P^Q(b\alpha^i), \quad i \geq 0,$$

где $Q = GF(q^m)$, tr_P^Q — функция следа из поля Q в поле P , α — корень многочлена $F(x)$ в поле Q , b — однозначно определенный элемент поля Q [2]. Пусть χ' — поднятие характера χ до поля Q , т. е. $\chi'(x) = \chi(\text{tr}_P^Q(x))$ для всех $x \in Q$, тогда согласно равенству (2)

$$\begin{aligned} S_l(z, F, H) &= \sum_{b \in Q} \left(\sum_{c \in H} \chi(-cz) \sum_{i=0}^{l-1} \chi'(cb\alpha^i) \right) \left(\overline{\sum_{d \in H} \chi(-dz) \sum_{j=0}^{l-1} \chi'(db\alpha^j)} \right) = \\ &= \sum_{b \in Q} \sum_{c, d \in H} \chi((d-c)z) \sum_{i, j=0}^{l-1} \chi'(b(c\alpha^i - d\alpha^j)). \end{aligned}$$

Изменив порядок суммирования, получим

$$S_l(z, F, H) = \sum_{c, d \in H} \chi((d - c)z) \sum_{i, j=0}^{l-1} \sum_{b \in Q} \chi'(b(c\alpha^i - d\alpha^j)). \quad (10)$$

С использованием соотношения ортогональности для характеров (см., например, [2, равенство (5.8)]) будем иметь

$$\sum_{b \in Q} \chi'(b(c\alpha^i - d\alpha^j)) = \begin{cases} q^m, & \text{если } c\alpha^i = d\alpha^j, \\ 0, & \text{если } c\alpha^i \neq d\alpha^j. \end{cases}$$

Равенство $c\alpha^i = d\alpha^j$ приводит к соотношению $cd^{-1} = \alpha^{j-i}$, т. е. α^{j-i} будет являться элементом группы H . Это приведет к соотношению $\alpha^{(j-i)|H|} = e$, где e — единица поля P , что возможно только если $t/(t, |H|)$ делит $j - i$. Учитывая, что $i, j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ и $l \leq t/(t, |H|)$, получим: равенство $c\alpha^i = d\alpha^j$ имеет место тогда и только тогда, когда $i = j$ и $c = d$. В итоге из равенства (10) будем иметь $S_l(z, F, H) = |H|q^ml$. $\square$

Отметим, что в общем случае найти точное значение величины $\varkappa(z, H)$, заданной равенством (8), не удастся. Однако в частных случаях это можно сделать, например, если $H = \{e\}$, то

$$\varkappa(z, H) = 1, \quad z \in P, \quad (11)$$

а если $H = P^*$, то

$$\varkappa(z, H) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \neq 0, \\ (q-1)^2 & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (12)$$

При некоторых H получим оценки для сумм $\tau_l(z, u, H)$, определенных равенством (2).

Теорема 2. Пусть $P = GF(q)$, $F(x)$ — неприводимый многочлен степени m над полем P , $F(x) \neq x$, $H = \{e\}$. Тогда для каждой ненулевой ЛРП $u \in L_P(F)$, каждого $z \in P$ и каждого такого натурального числа l , что $l < T(F)$,

$$|\tau_l(z, u, H)| \leq (3(q^ml - l^2))^{\frac{1}{3}}.$$

Доказательство. Согласно утверждению 1 и теореме 1

$$|\tau_l(z, u, H)| = \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(u(i)) \right| \leq \left(3 \sum_{v \in P(u)} |\tau_l(z, v, \{e\})|^2 \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Остается заметить, что по утверждению 2 и равенству (11)

$$\sum_{v \in P(u)} |\pi_l(z, v, \{e\})|^2 \leq S_l(z, F, \{e\}) = q^m l - l^2.$$

□

Отметим, что ранее теорема 2 была доказана в работе [6, теорема 1] для частного случая, когда P — простое поле.

Следующий результат независимо доказан автором и Биляком И.Б. (см. [14]).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 с $H = P^*$, а l удовлетворяет дополнительным условиям $l \leq t/(t, q-1)$ и $l < tq/(2(q-1))$, где $t = T(F)$, тогда

$$|\pi_l(z, u, H)| \leq \left(\frac{3q}{2} ((q-1)q^m l - l^2) \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Доказательство. По теореме 1, утверждению 2 и равенству (12) для всех таких l , что $l < ts/(2(q-1))$, имеем

$$|\pi_l(z, u, H)| \leq \left(\frac{3s}{2} ((q-1)q^m l - \delta(z)l^2) \right)^{\frac{1}{3}},$$

где число s определено соотношениями (3), а $\delta(z)$ — равенствами

$$\delta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \neq 0, \\ (q-1)^2, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

Остается показать, что при $H = P^*$ годится число $s = q$. Пусть $N_l(z, u)$ — число появлений элемента z среди элементов $u(0), u(1), \dots, u(l-1)$. С использованием соотношения ортогональности для характеров получим

$$N_l(z, u) = \frac{1}{q} \sum_{a \in P} \chi(a(u(i) - z)) = \frac{l}{q} + \frac{\pi_l(z, u, H)}{q}.$$

Так как

$$\pi_l(z, x^j v, H) = qN_l(z, x^j v) - l, \quad \pi_l(z, x^{t-j} v, H) = qN_l(z, x^{t-j} v) - l$$

и $|N_l(z, v) - N_l(z, x^j v)| \leq j$, $|N_l(z, v) - N_l(z, x^{t-j} v)| \leq j$, то для всех $j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ и всех $v \in P(u)$ выполнены неравенства

$$|\pi_l(z, v, H) - \pi_l(z, x^j v, H)| \leq qj, \quad |\pi_l(z, v, H) - \pi_l(z, x^{t-j} v, H)| \leq qj.$$

□

Пусть $R = GR(q^n, p^n)$ — кольцо Галуа характеристики p^n , состоящее из q^n элементов, где p — простое число, а $q = p^t$ для некоторого натурального числа t [15]. Рассмотрим такой унитарный многочлен $F(x) \in R[x]$, что его образ $\bar{F}(x)$ при действии естественного эпиморфизма колец $R[x] \rightarrow \bar{R}[x]$ неприводим над полем $\bar{R} = R/pR = GF(q)$ и отличен от x . Назовем такой многочлен *реверсивным многочленом Галуа*. Период $T(F)$ такого многочлена равен $p^\nu T(\bar{F}) = p^\nu(q^m - 1)/d$, где $0 \leq \nu \leq n - 1$, а d — делитель $q^m - 1$ [16].

Обозначим через $L_R(F)$ множество всех ЛРП над кольцом R с характеристическим многочленом $F(x)$. Рассмотрим тригонометрическую сумму $\tau_l(z, u, H)$, определенную равенством (2), в котором $u \in L_R(F)$, а χ — аддитивный характер кольца R , задаваемый равенством

$$\chi(x) = \exp \left\{ 2\pi i \frac{\text{Tr}_{R_0}^R(x)}{p^n} \right\}, \quad x \in R, \quad (13)$$

где i — мнимая комплексная единица, $R_0 = \{0, e, 2e, \dots, (p^n - 1)e\}$ — подкольцо, порожденное единицей e , а $\text{Tr}_{R_0}^R$ — функция следа из кольца R в подкольцо R_0 .

Согласно теореме 1 для оценки сверху модуля суммы $\tau_l(z, u, H)$ необходимо оценить сверху сумму (5). В отличие от случая конечного поля, для оценки сверху последней суммы не имеет смысла использовать величину

$$\sum_{v \in L_R(F) \setminus \{0\}} |\tau_l(z, v, H)|^2,$$

так как получатся тривиальные оценки. Однако можно использовать оценку для сумм Вейля над кольцами Галуа, полученную в [17]. С использованием этой идеи оценки суммы (5) были получены в [11] (для случая $H = \{e\}$) и в [12] (в случае, когда $H = R^*$ — мультипликативная группа кольца R). Приведем два следствия из результатов этих работ.

Теорема 4. Пусть $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени t над кольцом R , u — ненулевая ЛРП из множества $L_R(F)$, $l < T(\bar{F})$, $H = \{e\}$, тогда

$$|\tau_l(z, u, H)| \leq \left(\frac{3p^\nu l}{d} (q^m - l + (l - 1)(dp^{n-1} - 1)q^{\frac{m}{2}}) \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Сравним оценку из теоремы 4 в частном случае, когда $n = 1$ ($R = GR(q, p) = GF(q)$) с оценкой из теоремы 2. Если $d = 1$, то рассматриваемые оценки совпадают, а если $d > 1$, то оценка из теоремы 2 точнее тогда

и только тогда, когда $l > q^{m/2}$. Как будет показано в следующем параграфе, такие значения l являются наиболее важными для приложений, так как при них оценки становятся нетривиальными.

Для ЛРП $u \in L_R(F)$ (элемента $z \in R$) обозначим через $\|u\|$ ($\|z\|$) наибольшее из таких чисел $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, что $u \in p^k L_R(F)$ ($z \in p^k R$).

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4, с $H = R^*$, $\|u\| = k$, $f = q^{n-1}(q-1)$, $t = T(\bar{F})$, $\|z\| \geq k$, $l \leq t/(t, q-1)$ и $l < tq/(2(q-1))$, тогда

$$|\tau_l(z, u, H)| \leq \left(\frac{3p^\nu q^n f l}{2d} (q^{m+k} - \delta_k l + (lf - q^k)(dp^{n-1} - 1)q^{\frac{m}{2}}) \right)^{\frac{1}{3}},$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} q^{2(n-1)}/f, & \text{если } k = n-1, \\ 0, & \text{если } k < n-1. \end{cases}$$

В ситуации, когда $R = GF(q)$ ($n = 1$), оценка из теоремы 5 совпадает с оценкой из теоремы 3 только при $d = 1$, а при $d > 1$ и всех $l \geq 2$ она является менее точной.

Таким образом, теоремы 4 и 5 являются обобщениями на случай произвольного кольца Галуа $R = GR(q^n, p^n)$ теорем 2 и 3 соответственно лишь в классе ЛРП, характеристический многочлен $F(x)$ которых удовлетворяет условию $T(\bar{F}) = q^m - 1$. В случае $T(\bar{F}) < q^m - 1$ оценки из теорем 2 и 3 являются более точными практически для всех интересующих нас значений l .

Нами изучены тригонометрические суммы (2) в частном случае, когда $H = \{e\}$ и $H = R^*$. Исследование этих сумм при других подмножествах $H \subset R$ пока остается открытой проблемой.

4. Коэффициенты кросс-корреляции

Пусть $R = GR(q^n, p^n)$, χ — аддитивный характер кольца R , определенный равенством (13). Коэффициент кросс-корреляции между последовательностями u и v определяется для всех целых неотрицательных чисел j, l равенством

$$C_{u,v}(j, l) = \sum_{i=0}^{l-1} \chi(u(i) - v(i+j)). \quad (14)$$

В случае, когда $u = v$, коэффициент $C_{u,v}(j, l)$ называется коэффициентом автокорреляции. Величина $C_{u,v}(j, l)$ характеризует "близость" отрезков $(u(0), \dots, u(l-1))$ и $(v(j), \dots, v(j+l-1))$. В случае

поля $R = GF(2) = \{0, 1\}$ характер χ задается равенствами $\chi(0) = 1$, $\chi(1) = -1$, и в этом случае

$$C_{u,v}(j, l) = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{u(i)-v(i+j)}. \quad (15)$$

Таким образом коэффициент $C_{u,v}(j, l)$ равен разности числа совпадающих координат в векторах $(u(0), \dots, u(l-1))$, $(v(j), \dots, v(j+l-1))$ и числа несовпадающих координат, т. е. он равен разности l и удвоенного расстояния Хемминга между рассматриваемыми векторами. Чем меньше величина $|C_{u,v}(j, l)|$, тем в большем количестве координат отличаются изучаемые отрезки последовательностей u и v . Формула (14) является обобщением формулы (15) на случай произвольного кольца Галуа.

Теорема 6. Пусть $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом R , $T(F) = p^\nu(q^m - 1)/d$, u , v — ЛРП над кольцом R с характеристическим многочленом $F(x)$. Тогда для любых таких целых неотрицательных j , что $u \neq x^j v$, и каждого такого натурального числа l , что $l < T(\bar{F})$,

$$|C_{u,v}(j, l)| \leq \left(\frac{3p^\nu l}{d} (q^m - l + (l-1)(dp^{n-1} - 1)q^{\frac{m}{2}}) \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (16)$$

Кроме того, при $n = 1$ верна также оценка

$$|C_{u,v}(j, l)| \leq (3(q^m l - l^2))^{\frac{1}{3}}. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть ω — последовательность над кольцом R с элементами $\omega(i) = u(i) - v(i+j)$, $i \geq 0$. По условию ω — ненулевая ЛРП с характеристическим многочленом $F(x)$. Согласно равенствам (2) и (14) для всех $z \in R$ и $H = \{e\}$

$$|C_{u,v}(j, l)| = \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(\omega(i)) \right| = |\pi_l(z, \omega, H)|.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремами 2 и 4. $\square$

Заметим, что для коэффициента кросс-корреляции, определенного формулой (14), справедлива тривиальная оценка: $|C_{u,v}(j, l)| \leq l$. Будем называть верхнюю оценку величины $|C_{u,v}(j, l)|$ *нетривиальной*, если она меньше l . Оценка (17) нетривиальна при $l \geq \sqrt{3}q^{m/2}$, а оценка (16) в частном случае $d = 1$ нетривиальна для всех таких l , что $l \geq 3p^{\nu+n-1}q^{m/2}$.

Ранее для случая $R = GF(q)$, т. е. при $n = 1$, были получены абсолютные оценки коэффициента кросс-корреляции, которые в условиях теоремы 6 имеют вид

$$|C_{u,v}(j, l)| \leq q^{\frac{m}{2}} (a \ln T(F) + b), \quad (18)$$

где $a = 1$, $b = 1$ (см. [1], [13, стр. 73], [3, теорема 1]); $a = 2/\pi$, $b = 7/5$ (см. [4, следствие 4]); $a = 2/\pi$, $b = \ln(4/\pi)$ (см. [5, стр. 686]). Оценка (17) точнее оценки (18) при всех таких l , что

$$l \leq \frac{1}{3} q^{\frac{m}{2}} (a \ln T(F) + b)^3.$$

В [18, теорема 1] для случая $R = \mathbb{Z}_{p^n} = GR(p^n, p^n)$, $\nu = 0$, $d = 1$ была доказана следующая абсолютная оценка:

$$|C_{u,v}(j, l)| < p^{\frac{m}{2} + n - 1} (m \ln p + 1).$$

Оценка (16) уточняет это неравенство при всех таких l , что

$$p^{\frac{m}{2}} \leq l \leq \frac{1}{\sqrt{3}} p^{\frac{m}{2} + n - 1} (m \ln p + 1)^{\frac{3}{2}}.$$

5. Распределение элементов из заданного подмножества

Пусть $R = GR(q^n, p^n)$, M — некоторое непустое подмножество кольца R , u — последовательность элементов кольца R . Рассмотрим вопрос о числе $N_l(M, u)$ таких чисел $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$, при которых $u(i) \in M$. Другими словами, число $N_l(M, u)$ равно количеству появлений элементов из множества M среди элементов $u(0), u(1), \dots, u(l-1)$.

Пусть χ — аддитивный характер кольца R , определенный равенством (13). Зададим следующий параметр:

$$\varkappa(M) = \max_{c \in R \setminus \{0\}} \left| \sum_{b \in M} \chi(cb) \right|. \quad (19)$$

Обозначим через $C_l(F, n)$ правую часть неравенства (16) при $n > 1$ и правую часть неравенства (17) при $n = 1$.

Теорема 7. Пусть $F(x)$ — реверсивный многочлен Галуа степени m над кольцом R . Тогда для каждой ЛРП $u \in L_R(F)$ с $\|u\| = 0$ и каждого натурального числа l , удовлетворяющего условию $l < T(\bar{F})$,

$$\left| N_l(M, u) - |M| \frac{l}{q^n} \right| \leq \frac{q^n - 1}{q^n} \varkappa(M) C_l(F, n).$$

Доказательство. С использованием соотношений

$$\sum_{b \in M} \sum_{c \in R} \chi(c(u(i) - b)) = \begin{cases} 0, & \text{если } u(i) \notin M, \\ q^n, & \text{если } u(i) \in M, \end{cases} \quad (20)$$

получим

$$N_l(M, u) = \frac{1}{q^n} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{b \in M} \sum_{c \in R} \chi(c(u(i) - b)),$$

а значит,

$$N_l(M, u) - |M| \frac{l}{q^n} = \frac{1}{q^n} \sum_{c \in R \setminus \{0\}} \sum_{b \in M} \chi(-cb) \sum_{i=0}^{l-1} \chi(cu(i)). \quad (21)$$

Так как $\|cu\| = \|c\| \neq n$, $\chi(-cb) = \overline{\chi(cb)}$ для всех $c \in R \setminus \{0\}$, $b \in M$, то, переходя в равенстве (21) к исследованию абсолютных величин и используя теоремы 2 и 4, получим

$$\begin{aligned} \left| N_l(M, u) - |M| \frac{l}{q^n} \right| &\leq \frac{q^n - 1}{q^n} \max_{c \in R \setminus \{0\}} \left| \sum_{b \in M} \chi(-cb) \right| \left| \sum_{i=0}^{l-1} \chi(cu(i)) \right| \leq \\ &\leq \frac{q^n - 1}{q^n} \varkappa(M) C_l(F, n). \end{aligned}$$

□

Заметим, что величина $|M|l/q^n$ является "естественным" средним значением для числа появлений элементов из множества M на отрезке длины l в последовательности u .

Имеет место тривиальная оценка $\varkappa(M) \leq |M|$. В общем случае эту оценку не удастся уточнить. Пусть $R = P = GF(q)$. Рассмотрим некоторые подмножества $M \subset P$ для которых это удастся сделать.

Следствие 1. Пусть $R = P$ в условиях теоремы 7, тогда

1) если M — множество всех элементов вида a^k , где $a \in P$, k — делитель $q - 1$, то

$$\left| N_l(M, u) - \frac{(q + k - 1)l}{kq} \right| \leq \frac{(q - 1)(k - 1)}{qk} (\sqrt{q} + 1) (3(q^m l - l^2))^{\frac{1}{3}},$$

2) если $M' = P \setminus M$, где M определено в п. 1), то

$$\left| N_l(M', u) - \frac{(k - 1)(q - 1)l}{kq} \right| \leq \frac{(q - 1)(k - 1)}{qk} (\sqrt{q} + 1) (3(q^m l - l^2))^{\frac{1}{3}},$$

3) если M — подгруппа группы P^* , имеющая порядок $(q-1)/k$, то

$$\left| N_l(M, u) - \frac{(q-1)l}{kq} \right| \leq \frac{(q-1)((k-1)\sqrt{q}+1)}{qk} (3(q^m l - l^2))^{\frac{1}{3}}.$$

Доказательство. 1) Пусть c — произвольный ненулевой элемент поля P , а γ — примитивный элемент поля P , тогда

$$\sum_{b \in M} \chi(cb) = 1 + \sum_{i=0}^{((q-1)/k)-1} \chi(c\gamma^{ki}) = 1 + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{q-2} \chi(c(\gamma^i)^k) = \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{x \in P} \chi(cx^k),$$

Переходя к исследованию абсолютных величин, с использованием оценки для сумм Вейля (см., например, [2, теорема 5.32]), получим

$$\left| \sum_{b \in M} \chi(cb) \right| \leq \frac{1}{k} \left| \sum_{x \in P} \chi(cx^k) \right| + \frac{k-1}{k} \leq \frac{(k-1)\sqrt{q}}{k} + \frac{k-1}{k} = \frac{k-1}{k}(\sqrt{q}+1).$$

2) Оценка непосредственно следует из п. 1) и равенства $N_l(M', u) = l - N_l(M, u)$.

3) В этом случае

$$\sum_{b \in M} \chi(cb) = \frac{1}{k} \sum_{x \in P^*} \chi(cx^k) = \frac{1}{k} \sum_{x \in P} \chi(cx^k) - \frac{1}{k}$$

и, следовательно,

$$\varkappa(M) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \max_{c \in P^*} \left| \sum_{x \in P} \chi(cx^k) \right| \leq \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} \sqrt{q} = \frac{(k-1)\sqrt{q}+1}{k}.$$

□

Отметим, что в [1] и [19] элементы множества M , рассмотренного в п. 3) следствия 1, названы *вычетами* степени k , а элементы множества M' , рассмотренного в п. 2), названы *невычетами* степени k (при этом 0 не относится ни к одному из этих классов). В этой терминологии множество M , рассмотренное в п. 1), состоит из всех вычетов степени k и нулевого элемента. В [1, теорема 2] и [19, стр. 202] получены оценки, аналогичные оценкам из следствия 1, которые отличаются лишь заменой величины $(3(q^m l - l^2))^{\frac{1}{3}}$ множителем $q^{\frac{m}{2}} (\ln T(F) + 1)$. Как было отмечено в предыдущем параграфе, оценки из следствия 1 точнее при всех таких l , что

$$l \leq \frac{1}{3} (\ln T(F) + 1)^3 q^{\frac{m}{2}}.$$

В [20, теорема 4] (см. также [21]) было показано, что в оценках из работ [1] и [19] величину $q^{m/2}$ можно заменить на $q^{(m-1)/2}$, при этом сами оценки выписаны с точностью до главного множителя при $q \rightarrow \infty$, что не позволяет провести их сравнение с оценками из следствия 1. Отметим лишь, что если параметры q и k зафиксированы, а $m \rightarrow \infty$, то для ЛРП и максимального периода $q^m - 1$ оценки из следствия 1 будут точнее рассматриваемых абсолютных оценок при $l = O(m^3 q^{m/2})$.

Обозначим через $D_l(F, n, k)$ правую часть неравенства из теоремы 5 при $n > 1$ и правую часть неравенства из теоремы 3 при $n = 1$.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7, $T(\bar{F}) = t$ и

$$l < \frac{tq}{2(q-1)}, \quad l \leq \frac{t}{(t, q-1)},$$

тогда справедлива оценка

$$\left| N_l(M, u) - |M| \frac{l}{q^n} \right| \leq \frac{|M|}{q^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_l(F, n, k)}{q^k}.$$

Доказательство. Согласно равенствам (2) и (21)

$$\begin{aligned} N_l(M, u) - |M| \frac{l}{q} &= \frac{1}{q^n f} \sum_{a \in R^*} \sum_{c \in R \setminus \{0\}} \sum_{b \in M} \chi(-acb) \sum_{i=0}^{l-1} \chi(acu(i)) = \\ &= \frac{1}{q^n f} \sum_{b \in M} \sum_{c \in R \setminus \{0\}} \tau_l(cb, cu, H), \end{aligned}$$

где $H = R^*$, $f = |R^*| = q^{n-1}(q-1)$. Отсюда

$$N_l(M, u) - |M| \frac{l}{q} = \frac{1}{q^n f} \sum_{b \in M} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{c \in R, \|c\|=k} \tau_l(cb, cu, H).$$

Так как $\|u\| = 0$, то $\|cu\| = \|c\| \leq \|cb\|$ для всех $c \in R \setminus \{0\}$, $b \in M$. Число таких элементов $c \in R$, что $\|c\| = k$, где $k < n$, равно $(q-1)q^{n-k-1}$, поэтому с использованием теорем 3 и 5 получим

$$\left| N_l(M, u) - |M| \frac{l}{q^n} \right| \leq \frac{1}{q^n f} \sum_{b \in M} \sum_{k=0}^{n-1} (q-1)q^{n-k-1} D_l(F, n, k) =$$

$$= \frac{|M|}{q^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_l(F, n, k)}{q^k}.$$

□

Сравним оценки из теорем 7 и 8. Будем предполагать, для удобства сравнения, что величина $\varkappa(M)$ равна $|M|$. Такое предположение выполнено, например, для каждого одноэлементного множества M . Пусть $n = 1$ ($R = GF(q)$), тогда при $q = 2$ оценки совпадают, а при $q \geq 3$ оценка из теоремы 8 является точнее для всех таких l , что $l < q^m/2$. В ситуации, когда $n > 1$, а $d = 1$, несложно показать, что оценка из теоремы 8 является точнее при всех l таких, что $l < (q^m - (p^{n-1} - 1)q^{m/2})/2$.

Список литературы

- [1] *Коробов Н.М.* Распределение невычетов и первообразных корней в рекуррентных рядах // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 88. № 4. — С. 603–606.
- [2] *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля. — М.: Мир, 1988. — 822 с.
- [3] *Нечаев В.И.* Распределение знаков в последовательности прямоугольных матриц над конечным полем // Труды МИАН. — 1997. — Т. 218. — С. 335–342.
- [4] *Niederreiter H.* Distribution properties of feedback shift register sequences // Probl. Control and Inform. Theory. — 1986. — V. 15. № 1. — P. 19–34.
- [5] *Sarwate D.V.* An upper bound on the aperiodic autocorrelation function for a maximal-length sequence // IEEE Trans. Inf. Theory. — 1984. — V. 30. № 4. — P. 685–687.
- [6] *Сидельников В.М.* Оценки для числа появлений знаков на отрезках рекуррентной последовательности над конечным полем // Дискрет. матем. — 1991. — Т. 3. № 2. — С. 87–95.
- [7] *Niederreiter H., Shparlinski I.E.* On the distribution of inversive congruential pseudorandom numbers in path of the period // Math. Comput. — 2001. — V. 70. № 236. — P. 1569–1574.
- [8] *Niederreiter H., Winterhof A.* Multiplicative character sums for nonlinear recurring sequences // Acta Arith. — 2004. — V. 113. № 3. — P. 299–305.

-
- [9] *Burde K.* Verteilungseigenschaften von potenzresten // *J. Reine und Angew. Math.* — 1971. — Band 249. — P. 133–172.
- [10] *Камловский О.В.* Оценки частот появления нулей в линейных рекуррентных последовательностях векторов // *Чебышевский сборник.* — 2005. — Т. 6. Вып. 1. — С. 135–146.
- [11] *Камловский О.В.* Метод В.М. Сидельникова для оценки числа знаков на отрезках линейных рекуррентных последовательностей над кольцами Галуа // *Матем. заметки.* — 2012. — Т. 91. Вып. 3. — С. 371–382.
- [12] *Камловский О.В.* Уточнение оценок для числа появлений элементов в линейных рекуррентных последовательностях над кольцами Галуа // *Фунд. и прикл. матем.* — 2012. — Т. 17. Вып. 7. — С. 97–115.
- [13] *Коробов Н.М.* Тригонометрические суммы и их приложения. — М. : Наука, 1989. — 240 с.
- [14] *Билляк И.Б.* Оценки числа появлений элементов на отрезках линейных рекуррентных последовательностей // *Прикл. дискрет. матем.* — 2013. — № 1(19). — С. 5–13.
- [15] *Нечаев А.А.* Код Кердока в циклической форме. *Дискрет. матем.* — 1989. — Т. 1. № 4. — С. 123–139.
- [16] *Нечаев А.А.* Цикловые типы линейных подстановок над конечными коммутативными кольцами // *Матем. сб.* — 1993. — Т. 184. № 3. — С. 21–56.
- [17] *Kumar P.V., Helleseht T., Calderbank A.R.* An upper bound for Weil exponential sums over Galois rings and applications // *IEEE Trans. Inform. Theory.* — 1995. — V. 41. № 2. — P. 456–468.
- [18] *Shanbhag A.G., Kumar P.V., Helleseht T.* Upper bound for a hybrid sum over Galois rings with applications to aperiodic correlation of some q -ary sequences // *IEEE Trans. Inform. Theory.* — 1996. — V. 42. № 1. — P. 250–254.
- [19] *Нечаев В.И., Степанова Л.Л.* Распределение невычетов и первообразных корней в рекуррентных последовательностях над полем алгебраических чисел // *Успехи матем. наук.* — 1965. — Т. 20. № 3. — С. 197–203.

- [20] *Шпарлинский И.Е.* Распределение невычетов и первообразных корней в рекуррентных последовательностях // Матем заметки. — 1978. — Т. 24. № 5. — С. 603–613.
- [21] *Шпарлинский И.Е.* О распределении значений рекуррентных последовательностей // Проблемы передачи информации. — 1989. — Т. 25. № 2. — С. 46–53.