Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Елизаров, О классах разрешимых колец, *Матем. вопр. криптогр.*, 2010, том 1, выпуск 3, 19–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:04:36

УДК 512.552

О классах разрешимых колец

Елизаров В. П.

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 22.IV.2010

Описан класс всех колец для систем левых линейных уравнений, над которыми необходимое условие разрешимости — согласованность системы относительно правых идеалов кольца — является достаточным.

Ключевые слова: системы линейных уравнений над кольцами, частные идеалы кольца

On classes of solvable rings

V. P. Elizarov

LLC "Certification Research Center", Moscow

Abstract. We describe the class of all rings such that a system of left linear systems of equations over the ring is solvable iff this system is compatible with respect to the right group ideals.

Key words: systems of linear equation over rings, quotients of ideals of a ring

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2010, vol. 1, no. 3, pp. 19–26 (Russian).

1. Введение

Термин «кольцо» означает далее ассоциативное кольцо с единицей, а термин «модуль» — унитарный модуль над кольцом. Запись M_R или ${}_R M$ показывает, что M — правый или соответственно левый модуль над кольцом R . Через $S_{m,n}$ обозначим совокупность всех $m \times n$ -матриц с элементами из множества S и в частных случаях полагаем

$$S_{1,n} = S^n, S_{m,1} = S^{(m)}.$$

Подмодуль модуля M , порожденный подмножеством K , будем обозначать через $\langle K \rangle$.

Если J — правый идеал кольца R , то будем писать $J \triangleleft_r R$. Запись $T < M$ означает, что T — подмодуль модуля M .

Рассматриваются системы линейных уравнений над кольцом R вида

$$AX^\downarrow = B^\downarrow, \quad (1)$$

где $A \in R_{m,n}$ и $B^\downarrow \in R^{(m)}$. Система уравнений (1) называется разрешимой, если она имеет хотя бы одно решение в $R^{(n)}$.

Имеются различные условия, необходимые для разрешимости системы уравнений (1) над произвольным кольцом R . Одно из них — согласованность системы (1) относительно правых идеалов кольца R (*ri*-согласованность): для любых $J \triangleleft_r R$ и $\vec{C} \in R^m$ справедлива импликация

$$(\vec{C}A \in J^n) \Rightarrow (\vec{C}B^\downarrow \in J).$$

Всякая *ri*-согласованная система (1) согласована относительно линейных соотношений (*lc*-согласована): для любого $\vec{C} \in R^m$ справедлива импликация

$$(\vec{C}A = \vec{0}) \Rightarrow (\vec{C}B^\downarrow = 0).$$

Однако в случае произвольного кольца не всякая *lc*-согласованная и даже не всякая *ri*-согласованная система уравнений над ним разрешима (см. [4]).

Кольцо R называется *ri*-разрешимым (*lc*-разрешимым), если всякая *ri*-согласованная (*lc*-согласованная) система уравнений вида (1) над R разрешима. Через $SOL(lc)$ и $SOL(ri)$ обозначим классы всех *lc*-разрешимых и всех *ri*-разрешимых колец соответственно. В [6] была поставлена задача описания этих классов.

В [7] дано описание класса $SOL(lc)$ как класса локально замкнутых справа колец и указаны некоторые его подклассы. Относительно класса

$SOL(ri)$ известно следующее: кольцо $\mathbf{Z}$ целых чисел ri -разрешимое [11, § 106]; всякое кольцо, любая матрица над которым эквивалентна линейно ступенчатой (в частности — диагональной) матрице, ri -разрешимое [4].

В настоящей работе дано описание класса $SOL(ri)$. В п. 2 излагается вспомогательный материал: вводятся понятия частных для правых идеалов кольца R по подмножествам из $R^{(n)}$ и R^n , $n \in \mathbf{N}$, и рассматриваются свойства частных. В п. 3 в терминах свойств частных для правых идеалов кольца R по конечно порожденным подмодулям из $R_R^{(n)}$ дается критерий принадлежности R классу $SOL(ri)$. В п. 4 указаны некоторые подклассы класса $SOL(ri)$.

2. Частные правых идеалов кольца

Пусть R — кольцо, $J \triangleleft_r R$, $n \in \mathbf{N}$, $K \subset R^{(n)}$ и $L \subset R^n$ — непустые подмножества.

Определение 1. Левым частным J по K в R^n и правым частным J по L в $R^{(n)}$ называются соответственно множества

$$[J : K] = \{ \bar{U} \in R^n \mid \bar{U}K \subset J \}$$

и

$$[L : J] = \{ V^\downarrow \in R^{(n)} \mid LV^\downarrow \subset J \}.$$

Ясно, что $[J : K]$ — подгруппа группы $(R^n, +)$, а $[L : J] \subset R_R^{(n)}$. Понятия левого и правого частных для $J \triangleleft_r R$ в R^n и $R^{(n)}$ соответственно обобщают, с одной стороны, при $n=1$ понятия частных J по подмножествам из R (см., например [2, § 95]) и, с другой стороны, при $J = \{0\}$ — понятия левого аннулятора K в R^n и правого аннулятора L в $R^{(n)}$ (см., например, [9, гл. 3]).

Приведем некоторые свойства частных правых идеалов кольца.

Предложение 1. Пусть R — кольцо, $J \triangleleft_r R$, $n \in \mathbf{N}$, K и M — непустые подмножества из R^n . Справедливы соотношения:

а) $(K \subset M) \Rightarrow ([J : K] \supset [J : M]);$

б) $[J : K] = [J : \langle K \rangle];$

в) $[[J : K] : J] \supset \langle K \rangle.$

Доказательство предложения 1 стандартно.

Предложение 2. Пусть R — кольцо, $J \triangleleft_r R$, $n \in \mathbb{N}$ и $S_i < R_R^{(n)}$, $i \in \{1, 2, \dots, t\}$.
Справедливо равенство

$$\left[J : \sum_{i=1}^t S_i \right] = \bigcap_{i=1}^t [J : S_i]. \quad (2)$$

Доказательство. Так как

$$S_j \subset \sum_{i=1}^t S_i$$

при $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, то согласно предложению 1 а) получаем

$$[J : S_j] \supset \left[J : \sum_{i=1}^t S_i \right]$$

при $j \in \{1, 2, \dots, t\}$. Значит, справедливо включение

$$\bigcap_{j=1}^t [J : S_j] \supset \left[J : \sum_{i=1}^t S_i \right].$$

Поскольку обратное включение очевидно, то равенство (2) доказано.

Определение 2. Кольцо R назовем (локально) замкнутым относительно частных правых идеалов ((локально) ЧПИ-замкнутым), если для любых $J \triangleleft_r R$, $t \in \mathbb{N}$ и (конечно порожденного) $K < R_R^{(t)}$ выполняется равенство

$$[[J : K] : J] = K.$$

Ввиду предложения 1в) определение 2 корректно. Поля дают простейшие примеры ЧПИ-замкнутых колец.

Определение 3. Кольцо R назовем (локально) упорядоченным относительно частных правых идеалов ((локально) ЧПИ-упорядоченным), если для любых $t \in \mathbb{N}$ и (конечно порожденных) $K, M < R_R^{(t)}$ справедливо соотношение

$$(K \subset M) \Leftrightarrow (\forall J \triangleleft_r R : [J : K] \supset [J : M]). \quad (3)$$

Предложение 3. Всякое (локально) ЧПИ-замкнутое кольцо R является (локально) ЧПИ-упорядоченным.

Доказательство. Импликация " $\Rightarrow$ " в (3) справедлива ввиду предложения 1а). Покажем справедливость обратной импликации.

Пусть при любом $J \triangleleft_r R$ для (конечно порожденных) $K, M < R_R^{(t)}$ имеет место включение

$$[J : K] \supset [J : M].$$

Тогда по правому аналогу предложения 1а) при любом $J \triangleleft_r R$ справедливо включение

$$[[J : K] : J] \subset [[J : M] : J]. \quad (4)$$

Так как R — (локально) ЧПИ-замкнутое кольцо, то из включений (4) следует $K \subset M$. Значит, R — (локально) ЧПИ-упорядоченное кольцо.

3. Описание класса $SOL(ri)$

Опишем класс $SOL(ri)$ всех ri -разрешимых колец, т. е. колец, любая ri -согласованная система уравнений вида (1) над которыми разрешима. Условие ri -согласованности системы (1) можно сформулировать в терминах левых частных правых идеалов кольца R .

Предложение 4. Система уравнений (1), где

$$A = (A_1^\downarrow, \dots, A_n^\downarrow) \in R_{m,n}$$

ri -согласована тогда и только тогда, когда при любом $J \triangleleft_r R$ справедливо включение

$$[J : \langle A_1^\downarrow, \dots, A_n^\downarrow \rangle] \subset [J : \langle B^\downarrow \rangle]. \quad (5)$$

Доказательство. Справедливость при любых $J \triangleleft_r R$ и $\vec{C} \in R^m$ импликации

$$(\vec{C}A \in J^n) \Rightarrow (\vec{C}B^\downarrow \in J) \quad (6)$$

равносильна справедливости импликации

$$(\vec{C} \in [J : A_k^\downarrow], k \in \{1, 2, \dots, n\}) \Rightarrow (\vec{C} \in [J : B^\downarrow])$$

или, согласно предложению 1б), импликации

$$(\vec{C} \in [J : \langle A_k^\downarrow \rangle], k \in \{1, 2, \dots, n\}) \Rightarrow (\vec{C} \in [J : \langle B^\downarrow \rangle]).$$

Таким образом, критерием ri -согласованности системы уравнений (1) является справедливость при любом $J \triangleleft_r R$ включения

$$\bigcap_{k=1}^n [J : \langle A_k^\downarrow \rangle] \subset [J : \langle B^\downarrow \rangle],$$

которое ввиду предложения 2 можно записать в виде

$$\left[J : \sum_{k=1}^n \langle A_k^\downarrow \rangle \right] \subset \left[J : \langle B^\downarrow \rangle \right],$$

то есть в виде (5).

Теорема 5. *Кольцо R является ri -разрешимым тогда и только тогда, когда оно локально ЧПИ-упорядоченное.*

Доказательство. Пусть R — ri -разрешимое кольцо, $t \in \mathbb{N}$, $K = \langle K_1^\downarrow, \dots, K_u^\downarrow \rangle < R_R^{(t)}$, $M = \langle M_1^\downarrow, \dots, M_s^\downarrow \rangle < R_R^{(t)}$ и для любого $J \triangleleft_r R$ имеет место включение

$$[J : K] \supset [J : M].$$

Учитывая предложение 2, запишем соотношения

$$\forall J \triangleleft_r R \left(\bigcap_{i=1}^u [J : \langle K_i^\downarrow \rangle] \supset [J : M] \right).$$

Таким образом, при $i \in \{1, 2, \dots, u\}$ справедливы соотношения

$$\forall J \triangleleft_r R \left([J : \langle K_i^\downarrow \rangle] \supset [J : M] \right). \quad (7)$$

Обозначим через $(M_1^\downarrow, \dots, M_s^\downarrow)$ матрицу, составленную из векторов, порождающих модуль M , и рассмотрим системы уравнений

$$(M_1^\downarrow, \dots, M_s^\downarrow) X^\downarrow = K_i^\downarrow, \quad (8)$$

где $i \in \{1, 2, \dots, u\}$. Согласно предложению 4 соотношения (7) означают, что все системы уравнений (8) ri -согласованы. По условию они разрешимы. Следовательно, $K_i^\downarrow \in M$ при $i \in \{1, 2, \dots, u\}$ и поэтому $K \subset M$. Значит, R — локально ЧПИ-упорядоченное кольцо.

Обратно, пусть R — локально ЧПИ-упорядоченное кольцо и система уравнений (1) ri -согласована. По предложению 4 при любом $J \triangleleft_r R$ справедливо включение (5), из которого по определению 3 получаем включение

$$\langle A_1^\downarrow, \dots, A_n^\downarrow \rangle \supset \langle B^\downarrow \rangle,$$

означающее разрешимость системы уравнений (1). Стало быть, R — ri -разрешимое кольцо.

4. Некоторые классы ri -разрешимых колец

Укажем некоторые подклассы класса $SOL(ri)$.

Очевидно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 6. *Имеет место соотношение*

$$SOL(lc) \subset SOL(ri).$$

Напомним описание класса $SOL(lc)$.

Определение 5. Кольцо R называется локально замкнутым справа, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого конечно порожденного $K < R_R^{(n)}$ выполняется равенство

$$\text{Ann}_{R^{(n)}} \text{Ann}_{R^n} K = K,$$

то есть равенство $[[0:K]:0] = K$.

Предложение 7. *Класс $SOL(lc)$ — это в точности класс всех локально замкнутых справа колец [7, теорема 3].*

Предложение 8. *Класс локально ЧПИ-замкнутых колец является подклассом класса $SOL(ri)$.*

Доказательство. Согласно предложению 3 локально ЧПИ-замкнутое кольцо R является локально ЧПИ-упорядоченным. По теореме 5 оно ri -разрешимое.

Пусть R — кольцо. Матрицы $A, F \in R_{m,n}$ называются эквивалентными, если существуют такие обратимые матрицы $U \in R_{m,m}$ и $V \in R_{n,n}$, что выполняется равенство $F = UAV$ (см. [1, гл. 2, § 6]).

Определение 6. Кольцо R назовем диагональным, если любая матрица над R эквивалентна некоторой диагональной матрице. Класс всех диагональных колец обозначим через $DIAG$.

Предложение 9. *Имеет место соотношение*

$$DIAG \subset SOL(ri).$$

Доказательство. Пусть $R \in DIAG$. По теореме 8 из [4] всякая ri -согласованная система уравнений над R вида (1) разрешима. Значит, R — ri -разрешимое кольцо.

Диагональным кольцом является, например, всякая область целостности главных правых и главных левых идеалов (см. [10] или [3, гл. 3]). Большое число примеров таких областей приведено в [8]. Ясно, что класс $DIAG$ замкнут относительно прямых сумм и гомоморфных образов.

В заключение отметим, что понятия lc -согласованности и ri -согласованности введены в [5] и для систем линейных уравнений над левыми R -модулями. В [7] описан класс lc -разрешимых R -модулей. Большинство из приведенных выше результатов может быть перенесено на класс ri -разрешимых R -модулей, но это предмет отдельной работы.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Алгебра: алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра. — М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.
2. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1976.
3. Джекобсон Н. Теория колец. — М.: ГИИЛ, 1947.
4. Елизаров В. П. Условия совместности систем линейных уравнений над кольцами. — Фундам. и прикл. матем., 2000, т. 6, № 3, с. 777–788.
5. Елизаров В. П. Системы линейных уравнений над модулями. — Фундам. и прикл. матем., 2002, т. 8, № 4, с. 979–991.
6. Елизаров В. П. Условия, необходимые для разрешимости системы линейных уравнений над кольцом. — Дискретн. матем., 2004, т. 16, в. 2, с. 44–53.
7. Елизаров В. П. Разрешимые и локально замкнутые модули и кольца. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, в. 1, с. 30–39.
8. Родосский К. А. Алгоритм Евклида. — М.: Наука, 1988.
9. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.
10. Asano K. Über Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hypercomplexem Operatorenring und ihre Anwendungen. — Jap. J. Math., 1939, v. 15, N. 4, p. 231–253.
11. Van der Waerden B. L. Moderne Algebra. Teil II. — Berlin: Springer, 1931.