Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Аборнев, Нелинейные подстановки, рекурсивно порожденные над кольцом Галуа характеристики 4, *Матем. вопр. криптогр.*, 2014, том 5, выпуск 4, 5–15

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 11:58:06

Нелинейные подстановки, рекурсивно порожденные над кольцом Галуа характеристики 4

А. В. Аборнев

ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Получено 22.IV.2014

Построен класс нелинейных подстановок π_F на пространстве $\text{GF}(2^r)^m$ произвольной размерности $m \geq 3$, рекурсивно-порожденных с законом рекурсии, определяемым многочленом $F(x)$ над кольцом Галуа $\text{GR}(2^{2r}, 4)$. Результаты работы А.А.Нечаева и автора [3] в данной работе обобщаются на случай произвольного кольца Галуа характеристики 4.

Ключевые слова: разрядно-подстановочный многочлен, кольцо Галуа.

Nonlinear permutations recursively generated over the Galois ring of characteristic 4

A. V. Abornev

LLC «Sertification Research Center», Moscow

Abstract. The class of nonlinear permutations π_F of a space $\text{GF}(2^r)^m$ of any dimension $m \geq 3$ is constructed. Each permutation π_F is recursively generated by the characteristic polynomial $F(x)$ over the Galois ring $\text{GR}(2^{2r}, 4)$. Results of the paper by A.A. Nechaev and the author are generalized to an arbitrary Galois ring of characteristic 4.

Keywords: digit-permutable polynomial, Galois ring.

Введение

Пусть $R = \text{GR}(4^r, 4)$ — кольцо Галуа характеристики 4 и мощности 4^r с разрядным множеством $P = \Gamma(R) = \{\beta \in R \mid \beta^q = \beta\}, q = 2^r$. Каждый элемент $a \in R$ имеет разложение

$$a = a_0 + 2a_1, \quad a_s = \gamma_s(a) \in P, \quad s = 0, 1; \quad (1)$$

здесь $\gamma_s : R \rightarrow P$ ($s = 0, 1$) — *разрядные функции в разрядном множестве* P . Алгебра $(P, \oplus, \cdot)$ с умножением, порожденным умножением в кольце R , и операцией сложения $a \oplus b = \gamma_0(a + b)$, $a, b \in P$, является полем из $q = 2^r$ элементов.

На векторном пространстве P^m большой размерности m строятся нелинейные подстановки с использованием семейства $L_R(F)$ линейных рекуррентных последовательностей с характеристическим многочленом

$$F(x) = x^m - f_{m-1}x^{m-1} - \dots - f_1x - f_0 \in R[x]. \quad (2)$$

Рассмотрим линейную рекуррентную последовательность (ЛРП) $u \in L_R(F)$ с характеристическим многочленом $F(x) \in R[x]$. Ее знаки удовлетворяют равенству

$$u(i+m) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k u(i+k). \quad (3)$$

Каждый знак ЛРП u имеет двоичное разложение

$$u(i) = u_0(i) + 2u_1(i), \quad u_0(i), u_1(i) \in P, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Обозначим через $u[\overline{i, j}]$ отрезок $(u(i), u(i+1), \dots, u(j))$ последовательности $u \in L_R(F)$ и через $L'_R(F)$ множество всех таких линейных рекуррентных последовательностей $u \in L_R(F)$, что $u_1[\overline{0, m-1}] = \overline{0}$.

Рассмотрим отображение $\pi_F : P^m \rightarrow P^m$, заданное равенством

$$\pi_F(x^\downarrow) = u_1[\overline{m, 2m-1}]^T, \quad (5)$$

где u_1 строится по $u \in L'_R(F)$, $u_0[\overline{0, m-1}]^T = x^\downarrow$, и T — оператор транспонирования.

Многочлен $F(x) \in R[x]$ степени m , для которого отображение π_F является биекцией, будем называть *разрядно-подстановочным* (или *РП-многочленом*). Будем говорить, что подстановка π_F является *рекурсивно-порожденной* над кольцом R с законом рекурсии $F(x)$. РП-многочлен назовем *нетривиальным*, если подстановка π_F нелинейна. Таким образом,

каждый РП-многочлен естественным образом задает семейство, вообще говоря, нелинейных подстановок на пространстве P^m . Подстановка π_F на $\text{GF}(q)^m$ естественным образом определяет подстановку τ_F на $\text{GF}(2)^{rm}$.

Такой способ построения подстановок на пространстве предложен А.А. Нечаевым в [3], где приведен класс нетривиальных РП-многочленов над кольцом $\mathbb{Z}_4$. Еще один нетривиальный класс таких многочленов описан в [1]. Задача построения нелинейных подстановок на пространстве сколь угодно большой размерности, которые имеют компактное задание, рассматривалась также в [4].

Полученные результаты, как и в [3], применяются к криптографическому примитиву вида τG , где G — регулярное представление группы, порожденной циклом $(0, 1, \dots, q^m - 1)$, в $\mathfrak{S}(\text{GF}(2)^{rm})$. В качестве криптографических характеристик подстановки τ_F может рассматриваться порождаемая ею группа.

1. Основные результаты

Ниже описан класс нетривиальных РП-многочленов $F(x)$, индуцирующих нелинейные подстановки на алфавите P^m сколь угодно большой мощности 2^{rm} . Будем использовать обозначения

$$F_0(x) = x^m \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} \gamma_0(f_i)x^i, \quad F_1(x) = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \gamma_1(f_i)x^i.$$

Теорема 1. Пусть $R = \text{GR}(4^r, 4)$, $F(x) \in R[x]$ — многочлен степени $m \geq 3$. Если $F_0(x) = x^m \oplus x^{m-1} \oplus x \oplus e$, то $F(x)$ является РП-многочленом тогда и только тогда, когда для каждого $\delta \in P$ верно равенство

$$(\delta(x \oplus e) \oplus e \oplus F_1(x), F_0(x)) = e. \quad (6)$$

Доказательство теоремы 1 приводится в п. 2.

Свойства смежного класса по циклической группе. Опишем свойства криптографического примитива, реализующего подстановки из множества τG , где G — регулярное представление циклической группы $(\mathbb{Z}_{q^m}, +)$, порожденной циклом $t = (0, 1, 2, \dots, q^m - 1)$, в $\mathfrak{S}(\text{GF}(2)^{rm})$. отождествим вектор $v^\downarrow = (a_1, \dots, a_{rm})^T \in \text{GF}(2)^{rm}$, $m > 1$, с элементом $a = a_1 + a_2 2 + \dots + a_{rm} 2^{rm-1} \in \mathbb{Z}_{2^{rm}}$. Пусть $F \in R[x]$ — РП-многочлен, и π_F индуцирована многочленом $F(x)$. Тогда

$$\pi_F(y^\downarrow) = (\psi_1(y^\downarrow), \dots, \psi_m(y^\downarrow))^T, \quad y^\downarrow = (y_1, \dots, y_m)^T \in P^m, \quad (7)$$

где $\psi_1, \dots, \psi_m$ — координатные функции. Если зафиксировать базис поля $\text{GF}(q)$ как пространства над $\text{GF}(2)$, то подстановке π_F на $\text{GF}(q)^m$ можно поставить в соответствие подстановку τ_F на $\text{GF}(2)^{rm}$ с координатными функциями $\tau_F(x^\downarrow) = (\xi_1(x^\downarrow), \dots, \xi_{rm}(x^\downarrow))^T$,

Следующее утверждение следует из п. 1 теоремы 8 в [3].

Теорема 2. Пусть при введенных выше обозначениях первая координатная функция ξ_1 подстановки τ_F существенно зависит от переменной x_{rm} . Если $r > 1$, то $\langle \tau_F G \rangle = \mathfrak{S}(\text{GF}(2)^{rm})$.

Теперь рассмотрим свойства координатных функций подстановки π_F из (7).

Предложение 3. РП-многочлен F нетривиален тогда и только тогда, когда вектор $(\gamma_0(f_0), \dots, \gamma_0(f_{m-1}))$ содержит хотя бы два ненулевых элемента.

Доказательство. Из (3) следует, что для первой разрядной последовательности любой ЛРП $u \in L_R(F)$ выполнено равенство

$$u_1(i+m) = \bigoplus_{s=0}^{m-1} \gamma_1(f_s) u_0(i+s) \oplus \bigoplus_{s=0}^{m-1} \gamma_0(f_s) u_1(i+s) \oplus \gamma_1 \left(\sum_{s=0}^{m-1} \gamma_0(f_s) u_0(i+s) \right), \quad (8)$$

где разрядная функция $\gamma_1(x_1 + \dots + x_m)$ имеет вид [2]

$$\gamma_1(x_1 + \dots + x_m) = \sigma_2(x_1, \dots, x_m) = \sum_{1 \leq s < t \leq m} x_s x_t. \quad (9)$$

Следовательно, в (8)

$$\gamma_1 \left(\sum_{s=0}^{m-1} \gamma_0(f_s) u_0(i+s) \right) = \sigma_2(\gamma_0(f_0) u_0(i), \dots, \gamma_0(f_{m-1}) u_0(i+m-1)).$$

□

Опишем количество нелинейных координатных функций подстановки π_F . Обозначим через $T(F_0)$ период многочлена $F_0(x)$.

Предложение 4. Пусть $F(x) \in R[x]$ — разрядно-подстановочный многочлен. Тогда подстановка π_F имеет ровно

$$\min\{m, T(F_0) - m\}$$

нелинейных координатных функций.

Доказательство. Пусть

$$S(F) = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{m-1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

— сопровождающая матрица многочлена $F(x) \in R[x]$. Из определения (5) следует, что действие подстановки π_F можно описать также равенством

$$\pi_F(x^\downarrow) = \gamma_1(S(F)^m x^\downarrow),$$

где функция γ_1 применяется поэлементно.

Кроме того, если $A = S(F)^m = (a(ij)) \in R_{m,m}$ и $a(ij) = a_0(ij) + 2a_1(ij) \in R$, $i, j \in \overline{1, m}$, то

$$\psi_k(x^\downarrow) = \bigoplus_{s=0}^{m-1} a_1(ks)x_s \oplus \gamma_1 \left(\sum_{s=0}^{m-1} a_0(ks)x_s \right), \quad k \in \overline{1, m}.$$

Заметим, что функция $\psi_k(x^\downarrow)$ является нелинейной тогда и только тогда, когда в k -й строке матрицы $A_0 = \gamma_0(A)$ есть хотя бы два ненулевых элемента. Если $m < T(F_0) < 2m$, то из равенства

$$u_0[m, 2m-1]^T = A_0 \circ u_0[0, m-1]^T,$$

где $\circ$ — операция умножения матриц над полем P , получаем, что строки матрицы A_0 с номерами $T(F_0) - m + 1, T(F_0) - m + 2, \dots, m$ являются строками единичной матрицы. Других строк веса 1 в матрице A_0 нет. Следовательно, линейными являются только координатные функции $\psi_k(x^\downarrow)$, $k \in \overline{T(F_0) - m + 1, m}$. $\square$

2. Доказательство теоремы 1

Нам понадобится следующий общий результат. Введем обозначения $S = \gamma_0(S(F))$, $\vec{F}_j = \gamma_j((f_0, f_1, \dots, f_{m-1})) \in P^m$, $j = 0, 1$, и

$$g_1(x^\downarrow) = \sigma_2(\vec{F}_0 \wedge x^\downarrow) \oplus \vec{F}_1 \circ x^\downarrow, \quad (11)$$

где $\wedge$ — операция покоординатного умножения векторов и $x^\downarrow = \vec{x}^T$.

Лемма 5. Унитарный многочлен $F(x) \in R[x]$ степени m является разрядно-подстановочным тогда и только тогда, когда система функций

$$\{h_i(x^\downarrow) = g_1(x^\downarrow \circ (S^T)^{i-1}), \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

над R ортогональна.

Доказательство. Рассмотрим отображение $H = (h_1, \dots, h_m) : P^m \rightarrow P^m$, определенное равенством (12), и отображение $\alpha : P^m \rightarrow P^m$, заданное по правилу

$$\alpha(x_0, \dots, x_{m-1}) = (y_0, \dots, y_{m-1})^T, \quad y_i = x_i \oplus \bigoplus_{k=0}^{i-1} f_{m-1-k,0} x_k. \quad (13)$$

Заметим, что α — биекция. Теперь для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\pi_F = \alpha^{-1} \circ H, \quad (14)$$

где $\circ$ — операция композиции отображений. Используем представление π_F в виде (5). Пусть

$$L'_R(F) = \{u \in L_R(F) : u_1[\overline{0, m-1}] = \vec{0}\}.$$

Тогда в соответствии с (5) отображение π_F полностью определяется условием

$$\forall u' \in L'_R(F) : \pi_F(u'_0[\overline{0, m-1}]^T) = u'_1[\overline{m, 2m-1}]^T. \quad (15)$$

Из (3), используя разложение (1), получаем, что 1-я разрядная последовательность любой последовательности $u' \in L_R(F)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} u'_1(i+m) &= \left(\bigoplus_{k=0}^{m-1} f_{k0} u'_1(i+k) \right) \oplus \\ &\oplus \left(\bigoplus_{k=0}^{m-1} f_{k1} u'_0(i+k) \right) \oplus \gamma_1 \left(\sum_{k=0}^{m-1} f_{k0} u'_0(i+k) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

и поэтому для последовательности

$$v(i) = u'_1(i+m) \oplus \left(\bigoplus_{k=0}^{m-1} f_{k0} u'_1(i+k) \right) \quad (17)$$

выполнено равенство

$$v(i) = \gamma_1 \left(\sum_{k=0}^{m-1} f_{k0} u'_0(i+k) \right) \oplus \bigoplus_{k=0}^{m-1} f_{k1} u'_0(i+k). \quad (18)$$

Заметим, что из (17) и равенства $u'_1[\overline{0, m-1}] = \vec{0}$ следует, что

$$v(i) = u'_1(i+m) \oplus \left(\bigoplus_{k=m-i}^{m-1} f_{k0} u'_1(i+k) \right), \quad i \in \overline{0, m-1},$$

$$v[\overline{0, m-1}]^T = \alpha(u'_1[\overline{m, 2m-1}]^T). \quad (19)$$

С другой стороны, используя (9) и (18), получаем, что

$$v(i) = \sigma_2 \left(\vec{F}_0 \wedge u'_0[\overline{i, i+m-1}] \right) \oplus \vec{F}_1 \circ u'_0[\overline{i, i+m-1}]^T. \quad (20)$$

Из (3) следует, что

$$u'_0[\overline{i, i+m-1}] = u'_0[\overline{0, m-1}] \circ (S^T)^i, \quad i \geq 0.$$

Поэтому (20) дает

$$v(i) = \sigma_2 \left(\vec{F}_0 \wedge (u'_0[\overline{0, m-1}] \circ (S^T)^i) \right) \oplus \vec{F}_1 \circ S^i \circ u'_0[\overline{0, m-1}]^T.$$

Теперь, используя (11), имеем

$$v(i-1) = g_1(u'_0[\overline{0, m-1}] \circ (S^T)^{i-1}) = h_i(u'_0[\overline{0, m-1}]), \quad i = \overline{1, m},$$

$$v[\overline{0, m-1}]^T = H(u'_0[\overline{0, m-1}]^T). \quad (21)$$

Наконец, (14) следует из (19), (21), (15). Лемма 5 доказана. $\square$

Доказательство теоремы. Рассмотрим систему многочленов вида (12) для $F(x)$ и найдем условия, при которых она ортогональна. Ниже мы будем пользоваться тождествами $g_1(x^\downarrow) = g_1(x^\uparrow)$, $\sigma_2(x^\downarrow) = \sigma_2(x^\uparrow)$. Пусть $F_0(x) = x^m \oplus x^{m-1} \oplus x \oplus e$. Тогда

$$S = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e \\ e & e & 0 & \dots & 0 & e \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$S^{i-1} \circ x^\downarrow = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_1 \oplus x_i \oplus x_m \end{pmatrix}, \quad i \in \overline{2, m-1}, \quad S^{m-1} \circ x^\downarrow = \begin{pmatrix} x_m \\ x_1 \oplus x_2 \oplus x_m \\ \vdots \\ x_1 \oplus x_{m-1} \oplus x_m \end{pmatrix}, \quad (23)$$

функция (11) имеет вид

$$g_1(x^\downarrow) = \sigma_2(x_1, x_2, x_m) \oplus \vec{F}_1 \circ x^\downarrow = (x_1 \oplus x_m)(x_1 \oplus x_2) \oplus x_1 \oplus \vec{F}_1 \circ x^\downarrow.$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что система (12) имеет вид

$$\begin{cases} h_1(x^\downarrow) = (x_1 \oplus x_m)(x_1 \oplus x_2) \oplus x_1 \oplus \vec{F}_1 \circ x^\downarrow, \\ h_i(x^\downarrow) = (x_1 \oplus x_m)(x_i \oplus x_{i+1}) \oplus x_i \oplus \vec{F}_1 \circ S^{i-1} \circ x^\downarrow, \quad i \in \overline{2, m-1}, \\ h_m(x^\downarrow) = (x_1 \oplus x_m)(x_1 \oplus x_2) \oplus x_m \oplus \vec{F}_1 \circ S^{m-1} \circ x^\downarrow. \end{cases} \quad (24)$$

Рассмотрим отображение $H = (h_1, \dots, h_m)^T : P^m \rightarrow P^m$ и введем обозначение

$$S_{\vec{F}_1} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_1 \circ S \\ \vdots \\ \vec{F}_1 \circ S^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Рассмотрим также разбиение пространства P^m на непересекающиеся подмножества $\mathcal{A}_\delta = \{x^\downarrow \in P^m : x_1 \oplus x_m = \delta\}$, $\delta \in P$. Тогда из (24) следует, что

$$H(x^\downarrow) = \left(\delta(S \oplus E) \oplus E \oplus S_{\vec{F}_1} \right) \circ x^\downarrow, \quad x^\downarrow \in \mathcal{A}_\delta. \quad (26)$$

Ввиду равенства $S_{\vec{F}_1} = F_1(S)$, полагая $v_\delta(x) = (\delta(x \oplus e) \oplus e \oplus F_1(x))$, мы получаем, что

$$H(x^\downarrow) = v_\delta(S) \circ x^\downarrow, \quad x^\downarrow \in \mathcal{A}_\delta. \quad (27)$$

В соответствии с леммой 5 нам необходимо доказать, что H — биекция тогда и только тогда, когда выполнено условие (6).

Перейдём к непосредственному доказательству теоремы. Положим $e^\downarrow = (e, \dots, e)^T$. Опишем элементы множеств $\mathcal{A}_\delta$, $\delta \in P$.

Лемма 6. *Для каждой $x^\downarrow \in P^m$ и $\delta \in P$ следующие условия равносильны:*

$$(a) \quad x^\downarrow \in \mathcal{A}_\delta;$$

$$(б) (S^{m-1} \oplus E) \circ x^\downarrow = \delta e^\downarrow;$$

$$(в) x^\downarrow = (S \oplus E) \circ y^\downarrow \oplus (\delta, 0, \dots, 0)^T \text{ для некоторого } y^\downarrow \in P^m.$$

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б) Достаточно заметить, что первая строка матрицы $(S^{m-1} \oplus E)$ есть $(e, 0, \dots, 0, e)$.

(б) $\Leftrightarrow$ (в) Каждый вектор вида (в) удовлетворяет условию (б), потому что $(S^{m-1} \oplus E) \circ (S \oplus E) = F_0(S) = 0$. Так как $\text{rank}(S \oplus E) = m - 1$ и $(S^{m-1} \oplus E) \neq 0$, то количество векторов, удовлетворяющих условию (в), равно количеству решений уравнения (б).

(б) $\Rightarrow$ (а) Очевидно, так как в (б) $\delta e = x_1 \oplus x_m$. $\square$

Лемма 7. *Отображение H биективно тогда и только тогда, когда $F_1(e) \neq e$ и для каждого $\delta \in P$ выполнено равенство*

$$H(A_\delta) = A_{\delta(e \oplus F_1(e))}. \quad (28)$$

Доказательство. Очевидно, что если $F_1(e) \neq e$ и выполнены равенства в условии леммы, то H биективно.

Докажем в обратную сторону. Рассмотрим действие отображения H на множествах $\mathcal{A}_\delta$, $\delta \in P$. Пусть $x^\downarrow \in \mathcal{A}_\delta$. По пункту (в) леммы 6

$$\begin{aligned} H(x^\downarrow) &= v_\delta(S) \circ ((S \oplus E) \circ y^\downarrow \oplus (\delta, 0, \dots, 0)^T) = \\ &= v_\delta(S) \circ (S \oplus E) \circ y^\downarrow \oplus v_\delta(S) \circ (\delta, 0, \dots, 0)^T = \\ &= (S \oplus E) \circ (v_\delta(S) \circ y^\downarrow) \oplus v_\delta(S) \circ (\delta, 0, \dots, 0)^T. \end{aligned} \quad (29)$$

Пользуясь определением многочлена $v_\delta(x)$, преобразуем последнее слагаемое:

$$\begin{aligned} v_\delta(S) \circ (\delta, 0, \dots, 0)^T &= (\delta(S \oplus E) \oplus E \oplus F_1(S)) \circ (\delta, 0, \dots, 0)^T = \\ &= \delta(S \oplus E) \circ (\delta, 0, \dots, 0)^T \oplus (E \oplus F_1(S)) \circ (\delta, 0, \dots, 0)^T. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя последнее равенство в (29), получаем, что

$$H(x^\downarrow) = (S \oplus E) \circ (v_\delta(S) \circ y^\downarrow \oplus \delta(\delta, 0, \dots, 0)^T) \oplus (E \oplus F_1(S)) \circ (\delta, 0, \dots, 0)^T. \quad (31)$$

Умножим обе части полученного равенства на матрицу $(S^{m-1} \oplus E)$ и воспользуемся тождеством $(S^{m-1} \oplus E) \circ (S \oplus E) = 0_{m \times m}$. Тогда

$$\begin{aligned} (S^{m-1} \oplus E) \circ H(x^\downarrow) &= (S^{m-1} \oplus E) \circ (E \oplus F_1(S)) \circ (\delta, 0, \dots, 0)^T = \\ &= (E \oplus F_1(S)) \circ (S^{m-1} \oplus E) \circ (\delta, 0, \dots, 0)^T = (E \oplus F_1(S)) \circ e^\downarrow \delta. \end{aligned} \quad (32)$$

Преобразуем последнее равенство. По определению матрицы $F_1(S) = S_{\vec{F}_1}$, и так как $\vec{F}_1 \circ e^\downarrow = F_1(e)$ и $S \circ e^\downarrow = e^\downarrow$, то

$$F_1(S) \circ e^\downarrow = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \circ e^\downarrow \\ \vec{F}_1 \circ S \circ e^\downarrow \\ \vdots \\ \vec{F}_1 \circ S^{m-1} \circ e^\downarrow \end{pmatrix} = F_1(e) e^\downarrow.$$

Отсюда $(S^{m-1} \oplus E) \circ H(x^\downarrow) = \delta(e \oplus F_1(e)) e^\downarrow$. По пункту (б) леммы 6 при любом $F_1(x)$

$$H(\mathcal{A}_\delta) \subset \mathcal{A}_{\delta(e \oplus F_1(e))}, \quad \delta \in P. \quad (33)$$

Если H биективно, то отсюда получаем требуемое условие. $\square$

Заметим, что условие (6) означает, что все матрицы $v_\delta(S)$, $\delta \in P$, обратимы. Теперь, пользуясь доказанной выше леммой, получаем, что если выполнено условие теоремы (6), то H — подстановка. Действительно, при этом выполнено условие $F_1(e) \neq e$, так как $(F_1(x) \oplus e, F_0(x)) = e$.

Обратно, пусть H — биекция. Покажем, что (6) верно. По доказанному выше $H(\mathcal{A}_\delta) = \mathcal{A}_{\delta(e \oplus F_1(e))}$, $\delta \in P$. Очевидно, что тогда $F_1(e) \neq e$. Предположим, что $(v_0(x), F_0(x)) \neq e$. Тогда $v_0(S)$ не обратима, но из (27) имеем $\text{Ker } v_0(S) \cap \mathcal{A}_0 = \{0^\downarrow\}$. Поэтому для некоторого $\delta \in P$ существует такой $\eta^\downarrow \in \mathcal{A}_\delta$, что $v_0(S) \circ \eta^\downarrow = 0^\downarrow$, и из соотношения $v_\delta(S) = \delta(E \oplus S) \oplus v_0(S)$ по лемме 6 получаем:

$$H(\eta^\downarrow) = v_\delta(S) \circ \eta^\downarrow = \delta(E \oplus S) \circ \eta^\downarrow \oplus v_0(S) \circ \eta^\downarrow = \delta(E \oplus S) \circ \eta^\downarrow \in \mathcal{A}_0.$$

Получили противоречие с равенством (28). Следовательно, $(v_0(x), F_0(x)) = e$.

Теперь покажем, что если $\delta \neq 0$, то $(v_\delta(x), F_0(x)) = e$ (т.е. $v_\delta(S)$ обратима). Так как $\mathcal{A}_\delta = \mathcal{A}_0 \oplus \delta E_1^\downarrow$ и $\dim \mathcal{A}_0 = m - 1$, то $\mathcal{A}_\delta$ содержит линейно независимую систему из m векторов. Пусть $w_1^\downarrow, \dots, w_m^\downarrow$ — такая система для множества $\mathcal{A}_{\delta(e \oplus F_1(e))}$. Следовательно, из равенства $v_\delta(S) \circ \mathcal{A}_\delta = \mathcal{A}_{\delta(e \oplus F_1(e))}$ получаем, что существует решение $X \in P_{m,m}$ уравнения $v_\delta(S) \circ X = (w_1^\downarrow, \dots, w_m^\downarrow)$, т.е. $v_\delta(S)$ обратима.

Наконец, заметим, что условие $F_1(e) \neq e$ следует из равенства $(v_0(x), F_0(x)) = e$. Теорема 1 доказана. $\square$

Заключение

Преимуществом рекурсивных методов построения преобразований является простота реализации и компактность задания. Для реализации

подстановки (5) на пространстве $P^{(m)}$ достаточно хранить в памяти лишь набор коэффициентов многочлена $F(x)$. Трудоёмкость вычисления значения подстановки π_F равна трудоёмкости вычисления m подряд идущих знаков линейной рекуррентной последовательности с характеристическим многочленом $F(x)$.

Полученные в работе результаты показывают, что, используя только линейный рекуррентный закон и разрядные функции кольца Галуа, можно строить классы нелинейных подстановок на пространстве сколь угодно большой размерности.

Автор выражает глубокую признательность профессору А.А. Нечаеву за постановку задачи и внимание к проводимым исследованиям.

Список литературы

- [1] Аборнев А. В., “Построение подстановок с использованием разрядно-подстановочных преобразований модуля над кольцом Галуа характеристики 4”, *Прикл. дискр. матем.*, **1** (2014), 9–19.
- [2] Кузьмин А. С., Нечаев А. А., “Линейные рекуррентные последовательности над кольцами Галуа”, *Алгебра и логика*, **34:2** (1995), 169–189.
- [3] Nechaev A. A., Abornev A. V., “Nonlinear permutations on a space over a finite field induced by linear transformations of a module over a Galois ring”, *Математические вопросы криптографии*, **4:2** (2013), 81–100.
- [4] Никонов В. Г., Саранцев А. В., “Методы компактной реализации биективных отображений, заданных регулярными системами однотипных булевых функций”, *Вестник РУДН, Сер. Прикл. и компьют. матем.*, **2:1** (2003), 84–95.