Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Н. Панков, Асимптотические оценки для чисел двоичных отображений с заданными криптографическими свойствами, *Матем. вопр. криптогр.*, 2014, том 5, выпуск 4, 73–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 05:26:28

Асимптотические оценки для чисел
двоичных отображений с заданными
криптографическими свойствами

К. Н. Панков

Московский государственный технический университет радиотехники,
электроники и автоматики, г. Москва

Получено 22.IV.2013

Уточнена локальная предельная теорема для распределения части вектора весов подфункций и доказана локальная предельная теорема для распределения части вектора спектральных коэффициентов линейных комбинаций координатных функций случайного двоичного отображения. Найдены верхние и нижние асимптотические оценки для числа корреляционно-иммунных и k -эластичных двоичных вектор-функций, а также верхняя оценка для числа платовидных отображений.

Ключевые слова: случайное двоичное отображение, локальная предельная теорема, спектральные коэффициенты, корреляционно-иммунные вектор-функции, устойчивые вектор-функции, платовидные вектор-функции.

Asymptotic estimates for numbers of Boolean mappings with given cryptographic properties

K. N. Pankov

*Moscow State Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation,
Moscow*

Abstract. For linear combinations of coordinate functions of random Boolean mapping a local limit theorem for the distribution of subsets of weights of submappings is improved. Also a local limit theorem for subsets of their spectral coefficients is proved. By means of these theorems we obtain upper and lower asymptotic estimates for numbers of correlation-immune and (n, m, k) -resilient Boolean mappings. Also we obtain an upper asymptotic estimate of the number of plateaued Boolean mappings.

Keywords: random binary mapping, local limit theorem, spectral coefficient, correlation-immune Boolean mapping, resilient Boolean mapping, plateaued Boolean mapping.

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 73–97 (Russian)

©2014 К. Н. Панков

Введение

Некоторые свойства двоичных отображений и определяемые ими классы вектор-функций, как отмечено в монографии [6], выделялись в связи с реальными задачами анализа и синтеза шифров. К таким классам относятся корреляционно-иммунные, устойчивые и, отчасти, платовидные отображения. Например, устойчивые вектор-функции используются в поточных шифрах в качестве комбинирующих функций, обладающих способностью противостоять корреляционному методу криптоанализа, так как их выход статистически не зависит от некоторых комбинаций входов. Согласно [6, с. 308] корреляционно-иммунные функции связаны с простыми ортогональными массивами (таблицами), изучающимися в комбинаторике и статистике при планировании экспериментов, а в криптографии – при построении кодов аутентификации [3, с. 148]. Эти функции связаны также с линейными кодами с (некоторым) дуальным расстоянием, изучающимися в теории кодирования [11, с. 143]. Класс платовидных функций является обобщением класса бент-функций, устойчивых, например, к линейному методу криптографического анализа.

Пусть V_n – множество двоичных векторов размерности n , $|A|$ – мощность множества A , $\overline{1, k} = \{1, \dots, k\}$, $B_n^m = \{f | f : V_n \rightarrow V_m\}$ – множество отображений из V_n в V_m , для $f(x_1, \dots, x_n) \in B_n^m$ будем рассматривать подфункции $f_{i_1, \dots, i_k}^{a_1, \dots, a_k} = \left((f_1)_{i_1, \dots, i_k}^{a_1, \dots, a_k}, \dots, (f_m)_{i_1, \dots, i_k}^{a_1, \dots, a_k} \right) \in B_{n-k}^m$, где $(f_j)_{i_1, \dots, i_k}^{a_1, \dots, a_k}$ – подфункция булевой функции $f_j \in B_n^1$, получающаяся, если у аргумента f_j значения координат с номерами $i_1, \dots, i_k$ положить равными $a_1, \dots, a_k$.

Отображение $f(x_1, \dots, x_n) \in B_n^m$ называется *корреляционно-иммунным порядка k* , если для любых наборов $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, для любых $a_j \in \{0, 1\}$, $j \in \overline{1, k}$, выполняется условие

$$|\{\bar{u} \in V_{n-k} : f_{i_1, \dots, i_k}^{a_1, \dots, a_k}(\bar{u}) = \bar{v}\}| = 2^{-k} |\{\bar{w} \in V_n : f(\bar{w}) = \bar{v}\}|$$

для всех $\bar{v} \in V_m$.

Корреляционно-иммунное порядка k отображение $f(x_1, \dots, x_n) \in B_n^m$ называется *(n, m, k) -устойчивым*, если для любого вектора $\bar{v} \in V_m$ верно равенство

$$|\{\bar{w} \in V_n : f(\bar{w}) = \bar{v}\}| = 2^{n-m}$$

В “Словаре криптографических терминов” вводятся термины “функция корреляционно-иммунная порядка k ” [10, с. 78] в одномерном случае и “отображение k -корреляционно-иммунное” [10, с. 78] в многомерном. Также вводится термин “функция k -эластичная” [10, с. 81], эквивалент-

ный термину “ $(n, 1, k)$ -устойчивое отображение”. В соответствии с логикой “Словаря” в многомерном случае можно вместо термина “ (n, m, k) -устойчивые отображения” использовать “*отображения k -эластичные*”.

В западной литературе k -эластичные функции рассматривались в известной работе Т. Зигенталера [21], и при $m = 1$ назывались k -устойчивыми. В СССР аналогичным образом введенные булевы функции изучались в 70-х годах Л. В. Ларионовым.

Изучению свойств корреляционно-иммунных функций в случае $m = 1$ посвящено множество работ, из которых можно отметить [5, 12, 11, 6], а изучению свойств k -эластичных функций, введенных независимо в работах [19, 15], в случае $m > 1$ были посвящены работы [20, 17, 22, 23]. В работах [1, 2, 7] были найдены асимптотические оценки для мощности множества k -эластичных функций при различных значениях k и $m \in \overline{1, 4}$.

В монографии [6, с. 310] было доказано, что существование k -эластичного отображения эквивалентно существованию покрывающего множества из некоторого количества ортогональных массивов определенного вида.

Согласно [16] k -эластичные отображения связаны с такими областями, как выработка общих ключей для квантово-криптографических каналов и построение генераторов псевдослучайных последовательностей для поточных шифров.

В [13] было доказано, что многие важные свойства двоичного отображения f имеют место, если этими свойствами обладают все ненулевые линейные комбинации координатных функций f , называемых в [16] *компонентными функциями* или *компонентами*. Свойства же компонент можно, в частности, выразить в терминах их коэффициентов Фурье-Уолша-Адамара (спектральных коэффициентов) и весов подфункций.

Далее, как и в работе [7], под обозначением $\psi_m(J)$, где $J = \{j_1, \dots, j_{|J|}\}$ – подмножество множества $\overline{1, m}$, мы будем понимать двоичный вектор из V_m , у которого координаты с номерами $j_1, \dots, j_{|J|}$ равны единице, а остальные – нулю, а под $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 \oplus \dots \oplus x_ny_n$ – скалярное произведение векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из V_m . В терминологии [9] $\psi_m(J)$ называется индикаторным вектором множества J .

Для произвольных подмножества $I = \{i_1, \dots, i_{|I|}\}$ множества $\overline{1, n}$ и непустого подмножества $J = \{j_1, \dots, j_{|J|}\}$ множества $\overline{1, m}$ через $w_I^J(f)$ обозначим вес $\left\| (\psi_m(J), f)_{i_1, \dots, i_{|I|}}^{1, \dots, 1} \right\|$ подфункции $(\psi_m(J), f)_{i_1, \dots, i_{|I|}}^{1, \dots, 1}$ компоненты $(\psi_m(J), f) = f_{j_1} \oplus \dots \oplus f_{j_{|J|}}$ отображения $f = (f_1, \dots, f_n) \in B_n^m$, получаемой, если у аргумента компоненты $(\psi_m(J), f)$ значения координат с номерами $i_1, \dots, i_{|I|}$ положить равными единице.

В таких же условиях для компоненты $(\psi_m(J), f)$ можно определить

спектральный коэффициент Фурье-Уолша-Адамара [8]

$$\begin{aligned}\Delta_I^J(f) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V_n} (-1)^{(\psi_m(J), f)(x) \oplus x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_{|I|}}} = \\ &= 2^{n-1} - \|(\psi_m(J), f)(x) \oplus (\psi_n(I), x)\|,\end{aligned}$$

где $(\psi_n(I), x) = x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_{|I|}}$; согласно [10, с. 71] называется *коэффициентом статистической структуры компоненты* $(\psi_m(J), f)$.

Как уже упоминалось в работе [7], многие свойства двоичных отображений зависят от того, чему равен вектор, состоящий из определенных выше характеристик всех компонент или их части. В частности, двоичное отображение является корреляционно-иммунным порядка k , если набор

$$(w_I^J(f) - 2^{n-|I|-1} : \forall J \subset \overline{1, m}, J \neq \emptyset, \forall I \subset \overline{1, n}, 1 \leq |I| \leq k)$$

или набор

$$(\Delta_I^J(f) : \forall J \subset \overline{1, m}, J \neq \emptyset, \forall I \subset \overline{1, n}, 1 \leq |I| \leq k)$$

состоят из одних нулей [2, 13].

Согласно [6, с. 272] функция из B_n^1 называется *платовидной функцией порядка $2r$* , если квадрат каждого коэффициента ее статистической структуры равен либо $2^{2n-2r-2}$, либо 0.

Изучению класса платовидных функций посвящен ряд работ, из которых можно отметить работы [4, 6, 16]. Из равенства Парсеваля следует, что число ненулевых элементов среди всех коэффициентов этих функций равно 2^{2r} и что $0 \leq r < n/2$.

Согласно [16, с. 418] двоичное отображение $f(x) \in B_n^m$ называется *платовидным*, если платовидны все его компоненты.

Представляется естественным ввести понятие порядка для платовидного отображения. *Порядком платовидного отображения* будем называть вектор $(r_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m})$, составленный из порядков $2r_J$ всех его компонент $(\psi_m(J), f)$, взятых в лексикографическом порядке. В [16, с. 418] величины r_J называются *амплитудами* (amplitude) платовидных компонент $(\psi_m(J), f)$.

Пусть функция f выбирается случайно и равновероятно из множества B_n^m . Это эквивалентно независимому равновероятному выбору ее значений $f(\alpha)$ из множества V_m для всех α из множества V_n . Можно рассматривать значение функции f как вектор размерности m , состоящий из значений ее координатных двоичных функций от n переменных:

$$f(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) : V_n \rightarrow V_m,$$

где $f_i(\alpha) : V_n \rightarrow \{0, 1\}$ для всех $i \in \overline{1, m}$.

Тогда значения $f_i(\alpha)$ выбираются независимо и равновероятно из множества $\{0, 1\}$ для всех α из множества V_n и для всех $i \in \overline{1, m}$.

При случайном выборе f векторы, состоящие из части характеристик компонент отображения, также являются случайными, и возникает вопрос об их распределении. В [8] была доказана асимптотическая нормальность векторов фиксированной размерности, состоящих из коэффициентов статистической структуры и весов подфункций компонент случайной двоичной вектор-функции, с оценкой скорости сходимости, а в [7] – локальная предельная теорема для распределения части вектора весов подфункций двоичного отображения растущей размерности, обобщающая на случай широкого класса значений m результат из [2].

В первом разделе данной работы уточнена локальная предельная теорема для распределения части вектора весов подфункций компонент случайного двоичного отображения при $m = 2, 3$ и найдены асимптотические верхние и нижние оценки для мощности класса k -эластичных двоичных отображений. Во втором разделе получена асимптотическая верхняя оценка для мощности класса корреляционно-иммунных функций. В третьем разделе доказана локальная предельная теорема для распределения части вектора коэффициентов статистической структуры двоичного отображения растущей размерности и найдена асимптотическая верхняя оценка для для мощности класса платовидных отображений при заданных ограничениях на его порядок.

1. Верхние и нижние асимптотические оценки для числа k -эластичных двоичных отображений

Определим случайный вектор

$$\bar{w} = \bar{w}(n, m, k) = (w^J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m}),$$

где $w^J = (w_I^J(f), I \subset \overline{1, n}, 0 \leq |I| \leq k)$, размерности

$$N(n, m, k) = (2^m - 1) L(n, k), \text{ где } L(n, k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}.$$

Согласно следствию 1 [8] веса подфункций двоичного отображения удовлетворяют сравнению

$$\sum_{\emptyset \neq S \subset J} (-1)^{|S|} w_I^S \equiv 0 \pmod{2^{|J|-1}}. \quad (1)$$

Здесь и далее будем использовать обозначения $N = N(n, m, k)$, $\exp_2 x = 2^x$.

В [7] была доказана следующая теорема.

Теорема 1 ([7]). Пусть $n \rightarrow \infty$, $k(n) = o(\sqrt{n})$, $k(n) \geq 1$, $m(n) = o(n)$, $\bar{z}(n) 2^{\frac{n}{2}+m-2}$ – такая последовательность целочисленных вектор-столбцов размерности $N(n, m, k)$, что координаты векторов из последовательности $\mathbf{E}\bar{w} + \bar{z} 2^{\frac{n}{2}+m-2}$ удовлетворяют сравнениям (1). Тогда равномерно относительно $\bar{z} = \bar{z}(n)$ верно равенство

$$\begin{aligned} P(\bar{w} = \mathbf{E}\bar{w} + \bar{z} 2^{\frac{n}{2}+m-2}) &= \left(\sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}(m, N)} \exp[-i\pi(2^{\frac{n}{2}} \vec{r}, \bar{z})] \right) \times \\ &\exp \left(-2^{2m-3} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} \sum_{\substack{I \subset \overline{1, n}, \\ |I| \leq k}} \left(\sum_{K \subset I} (-1)^{|K|} 2^{|K|} z_K^J \right)^2 \right) + O(n^{3k+3} 2^{3m-\frac{n}{2}}) \\ &\times \frac{1}{\exp_2 \left(\frac{(n-k)}{2} \binom{n}{k} (2^m - 1) + N(n, m, k) \log_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)}, \end{aligned}$$

где $\bar{z}$ имеет такую же структуру координат как $\bar{w}$,

$$\mathfrak{R}^{**}(m, N) = \left\{ \vec{r} \in \{0, \dots, 2^{m-1} - 1\}^N : \forall I, \forall s \in \overline{1, m}, \forall \delta \in V_m \sum_{J \subset \overline{1, m}: s \in J} (-1)^{(\delta, \psi_m(J)) \oplus 1} r_I^J \equiv 0 \pmod{2^{m-1}} \right\}. \quad (2)$$

Для упрощения записи полученных далее результатов введем обозначение

$$T(n, m, k) = \frac{n-k}{2} \binom{n}{k} (2^m - 1) + N(n, m, k) \log_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (3)$$

Множество функций, являющихся k -эластичными, обозначим через $R[n, m, k]$. Любая ненулевая комбинация координатных функций этих функций является уравновешенной корреляционно-иммунной функцией.

Также в [7] была доказана асимптотическая формула для мощности множества $R[n, m, k]$ при $n \rightarrow \infty$, $k(n) = o(\sqrt{n})$, $m(n) = o(n)$:

$$|R[n, m, k]| \sim |\mathfrak{R}^{**}(m, N)| \exp_2(m 2^n - T(n, m, k)),$$

где множество $\mathfrak{R}^{**}(m, N)$ определено выше (см. (2)).

Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. Если $\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}^{**}(m, N)$, то для любого $I \subset \overline{1, n}$, $|I| \leq k$ в векторе $(r_I^J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m})$ все координаты имеют одинаковую четность.

Доказательство. Докажем данное утверждение индукцией по m .

Пусть $m = 2$. Тогда $r_I^J \in \{0, 1\}$, а множество $\mathfrak{R}^{**}$ имеет вид

$$\mathfrak{R}^{**} = \left\{ \vec{r} \in \{0, 1\}^{N(n, 2, k)} : \forall I, \forall s \in \overline{1, 2}, \forall \delta \in V_2 \sum_{J \subset \overline{1, 2}: s \in J} (-1)^{(\delta, \psi_2(J)) \oplus 1} r_I^J \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

Рассмотрим систему сравнений

$$\sum_{J \subset \overline{1, 2}: s \in J} (-1)^{(\delta, \psi_2(J)) \oplus 1} r_I^J \equiv 0 \pmod{2} : \forall I \subset \overline{1, n}, |I| \leq k, \forall s \in \overline{1, 2}, \forall \delta \in V_2.$$

Зафиксируем $I \subset \overline{1, n}$, $|I| \leq k$. Тогда одновременно выполняются две системы сравнений

$$\begin{cases} r_I^{\{1\}} + r_I^{\{1, 2\}} \equiv 0 \pmod{2}, \\ r_I^{\{1\}} - r_I^{\{1, 2\}} \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r_I^{\{2\}} + r_I^{\{1, 2\}} \equiv 0 \pmod{2}, \\ r_I^{\{2\}} - r_I^{\{1, 2\}} \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Решением ее являются векторы $(r_I^{\{1\}}, r_I^{\{2\}}, r_I^{\{1, 2\}}) \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ (а также любые векторы, координаты которых имеют одинаковую четность).

Итак, пусть предположение верно при $m = t$.

Тогда решением системы сравнений

$$\sum_{J \subset \overline{1, t} \setminus \{s\}} (-1)^{(\delta, \psi_{t-1}(J))} r_I^{J \cup \{s\}} \equiv 0 \pmod{2^{t-1}} \quad \forall s \in \overline{1, t}, \quad \forall \delta \in V_{t-1},$$

является вектор, все координаты которого имеют одинаковую четность.

Рассмотрим случай, когда $m = t + 1$.

Так как $\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}$, то $\sum_{J \subset \overline{1, t+1}: s \in J} (-1)^{(\delta, \psi_{t+1}(J)) \oplus 1} r_I^J \equiv 0 \pmod{2^t}$ при

любых $s \in \overline{1, t+1}$, $\delta \in V_{t+1}$. Очевидно, что эта система сравнений эквивалентна системе

$$\sum_{J \subset \overline{1, t+1} \setminus \{s\}} (-1)^{(\delta, \psi_t(J))} r_I^{J \cup \{s\}} \equiv 0 \pmod{2^t} \quad \forall s \in \overline{1, t+1}, \forall \delta \in V_t.$$

Пусть $s = 1, \delta = (\delta', \delta_t)$, где $\delta' \in V_{t-1}$, $\delta_t \in \{0, 1\}$; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{J \subset \overline{1, t+1} \setminus \{1\}} (-1)^{(\delta, \psi_t(J))} r_I^{J \cup \{1\}} &= \sum_{J' \subset \overline{1, t} \setminus \{s\}} (-1)^{(\delta, \psi_{t-1}(J'))} r_I^{J' \cup \{1\}} + \\ &+ (-1)^{\delta_t} \sum_{J' \subset \overline{1, t} \setminus \{s\}} (-1)^{(\delta, \psi_{t-1}(J'))} r_I^{J' \cup \{1\} \cup \{t+1\}} \equiv 0 \pmod{2^t}. \end{aligned}$$

Рассмотрев случаи, когда $\delta_t = 0$ и $\delta_t = 1$, получаем, что $\sum_{J' \subset \overline{1, t} \setminus \{s\}} (-1)^{(\delta, \psi_{t-1}(J'))} r_I^{J' \cup \{1\}}$ и $\sum_{J' \subset \overline{1, t} \setminus \{s\}} (-1)^{(\delta, \psi_{t-1}(J'))} r_I^{J' \cup \{1\} \cup \{t+1\}}$ сравнимы с нулем по модулю 2^{t-1} для любого $\delta' \in V_{t-1}$.

Аналогично рассматривается случай, когда $s \in \overline{2, t}$.

Получаем две системы сравнений

$$\sum_{J \subset \overline{1, t} \setminus \{s\}} (-1)^{(\delta, \psi_{t-1}(J))} r_I^{J \cup \{s\}} \equiv 0 \pmod{2^{t-1}} : \forall s \in \overline{1, t}, \forall \delta \in V_{t-1},$$

$$\sum_{J \subset \overline{1, t} \setminus \{s\}} (-1)^{(\delta, \psi_{t-1}(J))} r_I^{J \cup \{s\} \cup \{t+1\}} \equiv 0 \pmod{2^{t-1}} : \forall s \in \overline{1, t}, \forall \delta \in V_{t-1},$$

в решениях которых согласно предположению индукции все координаты имеют одинаковую четность.

Если вместо $J' \subset \overline{1, t} \setminus \{s\}$ суммировать по $J' \subset \overline{1, t+1} \setminus \{s, 2\}$ и рассмотреть все $s \in \overline{1, t+1} \setminus \{2\}$, то мы получим еще две системы сравнений

$$\sum_{J' \subset \overline{1, t+1} \setminus \{s, 2\}} (-1)^{(\delta, \psi_{t-1}(J'))} r_I^{J' \cup \{s\}} \equiv 0 \pmod{2^{t-1}} : \forall \delta \in V_{t-1},$$

$$\sum_{J' \subset \overline{1, t+1} \setminus \{s, 2\}} (-1)^{(\delta, \psi_{t-1}(J'))} r_I^{J' \cup \{s\} \cup \{2\}} \equiv 0 \pmod{2^{t-1}} : \forall \delta \in V_{t-1},$$

в решениях которых согласно предположению индукции также все координаты имеют одинаковую четность. Так как векторы, являющиеся решениями этих систем – следствий исходной системы, попарно пересекаются и содержат все элементы вектора $(r_I^J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m}, |J| \leq k - |I|)$, то обоснование шага индукции завершено. $\square$

С помощью доказанного утверждения можно уточнить формулировку теоремы [7], если $m \in \{2, 3\}$.

Утверждение 2. В условиях теоремы 1 [7], если $m \in \{2, 3\}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{w} = \mathbf{E}\bar{w} + \bar{z}2^{\frac{n}{2}+m-2}) &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\bar{z}^T Q^{-1}\bar{z}\right) + O\left(n^{3k-3}2^{-\frac{n}{2}+3m}\right)}{2^{\frac{n+2m-3}{2}N}2\sqrt{\pi^N \det Q}} |\mathfrak{R}^{**}| = \\ &= \frac{\exp\left(-2^{2m-3} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,m}} \sum_{\substack{I \subset \overline{1,n}, \\ |I| \leq k}} \left(\sum_{K \subset I} (-1)^{|K|} 2^{|K|} z_K^J\right)^2\right) + O\left(n^{3k+3}2^{3m-\frac{n}{2}}\right)}{\exp_2(T(n, m, k) - N(n, 1, k)(4m - 7))}, \end{aligned}$$

где $Q = Q(n, m, k)$ – ковариационная матрица вектора $(\bar{w} - \mathbf{E}\bar{w})2^{-\frac{n}{2}-m+2}$.

Доказательство. При $m = 2$ из утверждения 1 следует, что $(r_I^{\{1\}}, r_I^{\{2\}}, r_I^{\{1,2\}}) \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. Тогда $|\mathfrak{R}^{**}| = \exp_2((n, 1, k))$.

Теперь рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp\left[-i\pi\left(2^{\frac{n}{2}}\vec{r}, \bar{z}\right)\right] &= \\ &= \sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp\left[-i\pi 2^{2-m} \left(\sum_{I \subset \overline{1,n}, |I| \leq k} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,m}} r_I^J \cdot z_I^J 2^{\frac{n}{2}+m-2}\right)\right] = \\ &= \sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp\left[-i\pi \left(\sum_{I \subset \overline{1,n}, |I| \leq k} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,2}} r_I^J \cdot (\mathbf{E}w_I^J + z_I^J 2^{\frac{n}{2}})\right)\right] = \\ &= \prod_{\substack{I \subset \overline{1,n}, \\ |I| \leq k}} \sum_{\substack{(r_I^{\{1\}}, r_I^{\{2\}}, r_I^{\{1,2\}}) \in \\ \{(0,0,0), (1,1,1)\}}} \exp\left[-i\pi \left(\sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,2}} r_I^J \cdot (\mathbf{E}w_I^J + z_I^J 2^{\frac{n}{2}})\right)\right] = \\ &= \prod_{\substack{I \subset \overline{1,n}, \\ |I| \leq k}} \left(1 + \exp\left[-i\pi \left(\sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,2}} (\mathbf{E}w_I^J + z_I^J 2^{\frac{n}{2}})\right)\right]\right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$v_I^J = \mathbf{E}w_I^J + z_I^J 2^{\frac{n}{2}+m-2} = \mathbf{E}w_I^J + z_I^J 2^{\frac{n}{2}} \in \mathbb{Z}.$$

Тогда из того, что v_I^J удовлетворяют сравнениям (1) из следствия 1 [8], следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,2}} \left(\mathbb{E} w_I^J + 2^{n/2} \right) &= v_I^{\{1,2\}} + v_I^{\{1\}} + v_I^{\{2\}} = \\ &= 2 \left(2^{-1} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,2}} (-1)^{|J|} v_I^J \right) + 2v_I^{\{1\}} + 2v_I^{\{2\}} \in 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Значит, $\sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp \left[-i \left(\pi 2^{n/2} \vec{r}, \bar{z} \right) \right] = \exp_2 (L(n, k)) = |\mathfrak{R}^{**}|$.

Теперь пусть $m = 3$. Зафиксируем $I \subset \overline{1, n}$, $|I| \leq k$. Тогда аналогично доказательству утверждения 1 имеем систему из трех систем сравнений

$$\begin{cases} r_I^{\{1\}} + r_I^{\{1,2\}} + r_I^{\{1,3\}} + r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \\ r_I^{\{1\}} - r_I^{\{1,2\}} + r_I^{\{1,3\}} - r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \\ r_I^{\{1\}} + r_I^{\{1,2\}} - r_I^{\{1,3\}} - r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \\ r_I^{\{1\}} - r_I^{\{1,2\}} - r_I^{\{1,3\}} + r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_I^{\{2\}} + r_I^{\{1,2\}} + r_I^{\{2,3\}} + r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \\ r_I^{\{2\}} - r_I^{\{1,2\}} + r_I^{\{2,3\}} - r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \\ r_I^{\{2\}} + r_I^{\{1,2\}} - r_I^{\{2,3\}} - r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \\ r_I^{\{2\}} - r_I^{\{1,2\}} - r_I^{\{1,3\}} + r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_I^{\{3\}} + r_I^{\{1,3\}} + r_I^{\{2,3\}} + r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \\ r_I^{\{3\}} - r_I^{\{1,3\}} + r_I^{\{2,3\}} - r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \\ r_I^{\{3\}} + r_I^{\{1,3\}} - r_I^{\{2,3\}} - r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}, \\ r_I^{\{3\}} - r_I^{\{1,3\}} - r_I^{\{2,3\}} + r_I^{\{1,2,3\}} \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Определим множество векторов

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}' = \{ & (0, 0, 0, 0, 0, 0), (2, 2, 0, 2, 0, 0), (2, 0, 2, 0, 2, 0), (0, 2, 2, 0, 0, 2), \\ & (0, 0, 0, 2, 2, 2), (0, 2, 2, 2, 2, 0), (2, 0, 2, 2, 0, 2), (2, 2, 0, 0, 2, 2) \}. \end{aligned}$$

Путем несложных рассуждений и перебора возможных вариантов можно доказать, что решениями систем будут векторы трех видов:

$$\begin{aligned} 1) \vec{r}_I' &= \left(r_I^{\{1\}}; r_I^{\{2\}}; r_I^{\{3\}}; r_I^{\{1,2\}}; r_I^{\{1,3\}}; r_I^{\{2,3\}}; r_I^{\{1,2,3\}} \right) = (\vec{r}', 0), \text{ где } \vec{r}' \in \\ & \mathfrak{R}'; \text{ обозначим множество таких векторов } \mathfrak{R}_{I, \text{even}, 0}; \end{aligned}$$

- 2) $\vec{r}_I = (2; 2; 2; 2; 2; 2; 2) - \vec{r}''$, где $\vec{r}'' \in \mathfrak{R}_{I,even,0}$; обозначим множество таких векторов $\mathfrak{R}_{I,even,2}$;
- 3) $\vec{r}_I = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) + \vec{r}'''$, где $\vec{r}''' \in \mathfrak{R}_{I,even,0} \cup \mathfrak{R}_{I,even,2} = \mathfrak{R}_{I,even}$; обозначим множество таких векторов $\mathfrak{R}_{I,odd}$.

Пусть $\mathfrak{R}_I = \mathfrak{R}_{I,even} \cup \mathfrak{R}_{I,odd}$. Очевидно, $|\mathfrak{R}_I| = 32$.

Тогда $|\mathfrak{R}^{**}| = 32^{L(n,k)} = 2^{5L(n,k)}$. Теперь рассмотрим, используя уже введенные обозначения, сумму

$$\begin{aligned}
& \sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp \left[-i \left(\pi 2^{\frac{n}{2}} \vec{r}, \vec{z} \right) \right] = \\
& = \sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp \left[-i \frac{\pi}{2} \left(\sum_{\substack{I \subset \overline{1,n}, \\ |I| \leq k-1}} \sum_{\substack{\emptyset \neq J \subset \overline{1,2}, \\ |J| \leq k-|I|}} r_I^J \cdot (\mathbb{E} w_I^J + z_I^J 2^{\frac{n}{2}+1}) \right) \right] = \\
& = \sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \prod_{I \subset \overline{1,n}, |I| \leq k} \exp \left[-i \frac{\pi}{2} \left(\sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,3}} r_I^J \cdot (\mathbb{E} w_I^J + z_I^J 2^{\frac{n}{2}+1}) \right) \right] = \\
& = \left(\prod_{I \subset \overline{1,n}, |I| \leq k} \sum_{\vec{r}_I \in \mathfrak{R}_I} \exp \left[-i \pi \left(\sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,2}} r_I^J \cdot v_I^J \right) \right] \right).
\end{aligned}$$

Используя сравнения (1) из следствия 1 [8], несложно показать, что $\sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp \left[-i \pi \left(2^{n/2} \vec{r}, \vec{z} \right) \right] = 2^{5L(n,k)} = |\mathfrak{R}^{**}|$. $\square$

Утверждение 3. Для мощности множества $\mathfrak{R}^{**}(m, N)$, определенно-го в теореме 1 [7], справедливы двусторонние оценки

$$\begin{aligned}
\exp_2((m-1)N(n, 1, k)) & \leq |\mathfrak{R}^{**}(m, N)| \leq \\
& \leq \exp_2((m-2)N(n, m, k) + N(n, 1, k)).
\end{aligned}$$

Доказательство. Верхняя оценка мощности $\mathfrak{R}^{**}$ следует из того, что при фиксированном I величины r_I^J имеют одинаковую четность согласно утверждению 1.

Чтобы установить нижнюю границу, рассмотрим такие векторы $\vec{r}$ из множества $\{0, \dots, 2^{m-1} - 1\}^N$, что $r_I^J = t_I$, где $t_I \in \{0, \dots, 2^{m-1} - 1\}$, для всех $|I| \leq k$ и для любых $\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}$.

Так как $\sum_{J \subset \overline{1, m}, s \in J} (-1)^{(\delta, \psi_m(J)) \oplus 1} r_I^J \in \{\pm 2^{m-1} t_I, 0\} \in 2^{m-1} \mathbb{Z}$ для всех $s \in \overline{1, m}$ и для всех $\delta \in V_m$, то $\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}$.

Следовательно, мощность $|\mathfrak{R}^{**}|$ не меньше, чем число таких векторов. Значит, $|\mathfrak{R}^{**}| \geq \exp_2((m-1)N(n, 1, k))$. $\square$

Верхняя и нижняя оценки из утверждения 3 при $m = 2$ совпадают и, следовательно, являются достижимыми.

Следующий результат получается с помощью утверждения 10 [7] и оценок из утверждения 3.

Утверждение 4. При $k(n) = o(\sqrt{n})$, $m(n) = o(n)$ и любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует такое $n_0 < \infty$, что для $n > n_0$ верны неравенства

$$(1 - \varepsilon_1) \exp_2(m2^n - T(n, m, k) + (m-1)N(n, 1, k)) < |R[n, m, k]| < (1 + \varepsilon_2) \exp_2(m2^n - T(n, m, k) + (m-2)N(n, m, k) + N(n, 1, k)).$$

2. Оценки для числа корреляционно-иммунных двоичных отображений

Согласно формуле (1) из [1] компонента $(\psi_m(J), f)$ функции f является корреляционно-иммунной порядка k , если существует такая величина $r_J \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}$, что для любого I , мощность которого ограничена неравенством $0 \leq |I| \leq k$, верно равенство $w_I^J = \mathbb{E}w_I^J + r_J 2^{k-|I|}$.

Из следствия 1 [8] получаем, что $2^{1-|J|} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} (-1)^{|S|} w_I^S \in \mathbb{Z}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2^{1-|J|} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} (-1)^{|S|} (\mathbb{E}w_I^S + r_S 2^{k-|I|}) &= \\ &= 2^{n-|J|-|I|} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} (-1)^{|S|} + 2^{k+1-|J|-|I|} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} (-1)^{|S|} r_S = \\ &= -2^{n-|I|-|J|} + 2^{k-|I|-|J|+1} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} (-1)^{|S|} r_S \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Включение $2^{k-|I|-|J|+1} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} (-1)^{|S|} r_S \in \mathbb{Z}$ должно выполняться для всех таких I , что $|I| \leq k$. Достаточно, чтобы оно выполнялось при $|I| = k$.

Отсюда вытекает следующее отношение сравнимости, которому должны удовлетворять все допустимые значения $r_J \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}$ при достаточно больших n :

$$r_J \equiv \sum_{\emptyset \neq S \subset J, S \neq J} (-1)^{|J \setminus S|+1} r_S \pmod{2^{|J|-1}}.$$

Из этого сравнения следует, что вычет r_J по модулю $2^{|J|-1}$ при фиксированном наборе значений r_S для всех $\emptyset \neq S \subset J$, $S \neq J$, определяется однозначно.

Вероятность того, что любая ненулевая комбинация f^J координатных функций функции f является корреляционно-иммунной порядка k , равна

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{f \in K[n, m, k]\} &= \\ &= \sum_{\substack{r_J \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m} \\ r_J \equiv \sum_{\emptyset \neq S \subset J, S \neq J} (-1)^{|J \setminus S|+1} r_S \pmod{2^{|J|-1}}}} \mathbf{P} \{\bar{w} - \mathbf{E}\bar{w} = \bar{r}\bar{z}2^{\frac{n}{2}+m-2}\}, \end{aligned}$$

где $K[n, m, k]$ – множество функций, любая ненулевая комбинация координатных функций которых является корреляционно-иммунной порядка k , $\bar{r}\bar{z} = (r_J \cdot z^J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m})$, $z_I^J = 2^{k-m-|I|-n/2+2}$ для всех таких I , что $0 \leq |I| \leq k$.

Теорема 5. Пусть $n \rightarrow \infty$, $k(n) = o(\sqrt{n})$, $m(n) = o(n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$\begin{aligned} |K[n, m, k]| &< \exp_2 \left(m(2^n - 2^{m-1}) + (2^m - 1)(n - k + 1) - \frac{n}{2} + \right. \\ &\quad \left. - T(n, m, k) + 3m + (3k + 3 + \varepsilon) \log_2 n \right) |\mathfrak{R}^{**}(m, N)|. \end{aligned}$$

Доказательство. Из теоремы 1 [7] следует, что верно неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \bar{w} - \mathbf{E}\bar{w} = \bar{r}\bar{z}2^{n/2+m-2} \right\} &\leq \\ &\leq |\mathfrak{R}^{**}(m, N)| \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \bar{r}\bar{z}^T Q^{-1} \bar{r}\bar{z} \right) + O(n^{3k+3} 2^{3m-n/2})}{2^{\frac{n+2m-3}{2}N} \sqrt{\pi^N \det Q}}. \end{aligned}$$

Также из теоремы 1 [7], проводя доказательство аналогично лемме 6 [7],

и из утверждения 10 [7] можно вывести, что

$$\begin{aligned}
\frac{|K[n, m, k]|}{|B_n^m|} &= \mathbf{P}\{f \in K[n, m, k]\} = \sum \mathbf{P}\{\bar{w} - \mathbf{E}\bar{w} = \bar{r}\bar{z}2^{\frac{n}{2}+m-2}\} \leq \\
&\leq \sum \frac{|R[n, m, k]|}{|B_n^m|} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}(\bar{r}\bar{z})^T Q(\bar{r}\bar{z})\right) + O(n^{3k+3}2^{-\frac{n}{2}+3m}) \right) = \\
&= \sum \frac{|R[n, m, k]|}{|B_n^m|} \left(\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} (r_J)^2 (z^J)^T Q_J(z^J)\right) + \right. \\
&\quad \left. + O(n^{3k+3}2^{-\frac{n}{2}+3m}) \right) = \sum \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} (r_J)^2 (z^J)^T Q_J(z^J)\right) \times \\
&\quad \times \frac{|R[n, m, k]|}{|B_n^m|} + O(n^{3k+3}2^{-\frac{n}{2}+3m}) \frac{|R[n, m, k]|}{|B_n^m|} \sum 1.
\end{aligned}$$

Суммирование в данной цепочке неравенств проводится по всем непустым $J \subset \overline{1, m}$, по всем r_J из множества $\{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}$, для которых выполняется условие $r_J \equiv \sum_{\emptyset \neq S \subset J, S \neq J} (-1)^{|J \setminus S|+1} r_S \pmod{2^{|J|-1}}$.

Проводя доказательство аналогично лемме 7 [7] для любых $\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}$, получаем

$$\begin{aligned}
(z^J)^T Q_J^{-1}(z^J) &= 2^{2m-2} \sum_{I \subset \overline{1, n}, |I| \leq k} \left(\sum_{S \subset I} (-1)^{|S|} 2^{|S|} z_S^J \right)^2 = \\
&= 2^{2m-2} \sum_{I \subset \overline{1, n}, |I| \leq k} \left(\sum_{S \subset I} (-1)^{|S|} 2^{|S|} 2^{k-m-|S|-\frac{n}{2}+2} \right)^2 = \\
&= 2^{2k+2-n} \sum_{I \subset \overline{1, n}, |I| \leq k} \left(\sum_{S \subset I} (-1)^{|S|} \right)^2 = \\
&= 2^{2k+2-n} \times \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \left((-1)^i \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} (-1)^s \right)^2 = 2^{2k-n+2}.
\end{aligned}$$

Данное равенство позволяет преобразовать одно из получившихся выше

выражений следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}, \\ r_J \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \\ r_J \equiv \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset J, \\ S \neq J}} (-1)^{|J \setminus S|+1} r_S \pmod{2^{|J|-1}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} (r_J)^2 (z^J)^T Q_J (z^J) \right) = \\
& = \sum_{\substack{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}, J \neq \overline{1, m}, \\ r_J \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \\ r_J \equiv \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset J, \\ S \neq J}} (-1)^{|J \setminus S|+1} r_S \pmod{2^{|J|-1}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\substack{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}, \\ J \neq \overline{1, m}}} (r_J)^2 2^{2k-n+2} \right) \times \\
& \quad \times \sum_{\substack{r_{\overline{1, m}} \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \\ r_{\overline{1, m}} \equiv \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset \overline{1, m}, \\ S \neq \overline{1, m}}} (-1)^{m-|S|+1} r_S \pmod{2^{m-1}}} \exp \left(- (r_{\overline{1, m}})^2 2^{2k-n+1} \right).
\end{aligned}$$

Зафиксируем r_S по всем $\emptyset \neq S \subset \overline{1, m}$, $S \neq \overline{1, m}$, и рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{r_{\overline{1, m}} \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \\ r_{\overline{1, m}} \equiv \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset \overline{1, m}, \\ S \neq \overline{1, m}}} (-1)^{m-|S|+1} r_S \pmod{2^{m-1}}} \exp \left(- (r_{\overline{1, m}})^2 2^{2k-n+1} \right).$$

Из того, что $r_{\overline{1, m}} \equiv \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset \overline{1, m}, \\ S \neq \overline{1, m}}} (-1)^{m-|S|+1} r_S \pmod{2^{m-1}}$, следует, что

существует такое $k \in \overline{0, 2^{m-1} - 1}$, что $r_{\overline{1, m}} \equiv k \pmod{2^{m-1}}$.

Пусть $k = 0$. Тогда $r_{\overline{1, m}} = 2^{m-1}t$, и суммирование проводится по всем

возможным целочисленным значениям t от -2^{n-k-m} до 2^{n-k-m} :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{r_{\overline{1,m}} \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \\ r_{\overline{1,m}} \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}}} \exp \left(- (r_{\overline{1,m}})^2 2^{2k-n+1} \right) = \\ = \sum_{t=-2^{n-k-m}}^{2^{n-k-m}} \exp \left(- \frac{(2^{m-1}t)^2}{2} 2^{2k-n+2} \right). \end{aligned}$$

Если сделать замену $x_t = 2^{m+k-\frac{n}{2}}t$, то получаем равенство

$$\begin{aligned} \sum_{t=-2^{n-k-m}}^{2^{n-k-m}} \exp \left(- \frac{(2^{m-1}t)^2}{2} 2^{2k-n+2} \right) = \\ = 2^{-m-k+\frac{n}{2}} \sum_{x_t} \exp \left(- \frac{(x_t)^2}{2} \right) (x_{t+1} - x_t). \end{aligned}$$

Сумма $\sum_{x_t} \exp \left(- \frac{(x_t)^2}{2} \right) (x_{t+1} - x_t)$ есть интеграл от ступенчатой функции в пределах от $-2^{\frac{n}{2}}$ до $2^{\frac{n}{2}}$, который при $n \rightarrow \infty$ сходится к интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \frac{t^2}{2} \right) dt = \sqrt{2\pi}$. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{t_S=-2^{n-k-m}}^{2^{n-k-m}} \exp \left(- \frac{(2^{m-1}t_{\overline{1,m}})^2}{2} 2^{2k-n+2} \right) \sim 2^{n/2-k-m} \sqrt{2\pi}.$$

Такая же асимптотика получается для всех возможных значений $k \in \overline{1, 2^{m-1} - 1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\emptyset \neq J \subset \overline{1,m}, \\ r_J \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \\ r_J \equiv \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset J, \\ S \neq J}} (-1)^{|J \setminus S|+1} r_S \pmod{2^{|J|-1}}} } \exp \left(\sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1,m}} - \frac{(r_J)^2}{2} (z^J)^T Q_J (z^J) \right) \sim \end{aligned}$$

$$\sim 2^{\frac{n}{2}-k-m} \sqrt{2\pi} \sum_{\substack{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}, J \neq \overline{1, m}, \\ r_J \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \\ r_J \equiv \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset J, \\ S \neq J}} (-1)^{|J \setminus S|+1} r_S}} \exp \left(\sum_{\substack{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}, \\ J \neq \overline{1, m}}} -\frac{(r_J)^2}{2} 2^{2k-n+2} \right).$$

Теперь последовательно повторяем рассуждения для всех $J \subset \overline{1, m}$, $1 \leq |J| \leq m-1$, начиная с множеств большей мощности. В итоге получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}, r_J \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \\ r_J \equiv \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset J, \\ S \neq J}} (-1)^{|J \setminus S|+1} r_S \pmod{2^{|J|-1}}}} \exp \left(\sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} -\frac{(r_J)^2}{2} (z^J)^T Q_J (z^J) \right) \sim \\ & \sim \prod_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} \left(2^{n/2-k-|J|} \sqrt{2\pi} \right) = \left(2^{n/2-k} \sqrt{2\pi} \right)^{2^m-1} \prod_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} 2^{-|J|} = \\ & = \exp_2 \left(\left(\frac{n+1+\log_2 \pi}{2} - k \right) (2^m - 1) - m 2^{m-1} \right). \end{aligned}$$

Дословно повторяя уже проведенные этапы рассуждений, можно показать, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}, r_J \in \{-2^{n-k-1}, \dots, 2^{n-k-1}\}, \\ r_J \equiv \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset J, S \neq J}} (-1)^{|J \setminus S|+1} r_S \pmod{2^{|J|-1}}}} 1 \sim \prod_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} 2^{n-k-|J|+1} = \\ & = 2^{(n-k+1)(2^m-1)-m2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{|R[n, m, k]|}{|B_n^m|} \left(2^{(\frac{n+1+\log_2 \pi}{2}-k)(2^m-1)-m2^{m-1}} + O \left(n^{3k+3} 2^{-n/2+3m} \right) 2^{-m2^{m-1}} \times \right. \\ & \left. \times 2^{(n-k+1)(2^m-1)} \right) = O \left(\frac{|R[n, m, k]|}{|B_n^m|} n^{3k+3} 2^{(n-k+1)(2^m-1)-m2^{m-1}-n/2+3m} \right). \end{aligned}$$

Из этого равенства следует формулировка теоремы. $\square$

Согласно доказательству утверждения 2 при $m \in \{2, 3\}$ выполняется равенство $|\mathfrak{R}^{**}(m, N)| = 2^N (n, 1, k) (4m-7)$. Это обосновывает следующее утверждение

Следствие 6. Пусть $n \rightarrow \infty$, $k(n) = o(\sqrt{n})$, $m \in \{2, 3\}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$|K[n, m, k]| < \exp_2 \left(m(2^n - 2^{m-1}) + (2^m - 1)(n - k + 1) - \frac{n}{2} + \right. \\ \left. -T(n, m, k) + 3m + (3k + 3 + \varepsilon) \log_2 n + N(n, 1, k)(4m - 7) \right).$$

Следствие 7. Пусть $n \rightarrow \infty$, $k(n) = o(\sqrt{n})$, $m(n) = o(n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$|K[n, m, k]| < \exp_2 \left(m(2^n - 2^{m-1}) + (2^m - 1)(n - k + 1) - \frac{n}{2} + \right. \\ \left. -T(n, m, k) + 3m + (3k + 3 + \varepsilon) \log_2 n + (m - 2)N + N(n, 1, k) \right).$$

Доказательство следствия 7 следует из утверждения 3.

Нижней оценкой для числа корреляционно-иммунных порядка k отображений может служить нижняя оценка числа k -эластичных отображений, полученная в утверждении 4.

Случай $m = 1$ рассматривается аналогично следствию 2 [2].

Утверждение 8. Пусть $n \rightarrow \infty$, $k(n) = o(\sqrt{n})$. Тогда

$$|K[n, 1, k]| \sim |R[n, 1, k]| (\pi 2^{n-2k-1})^{\frac{1}{2}} \sim \\ \sim \exp_2 \left(2^n - T(n, 1, k) + \frac{n}{2} - k + \log_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right).$$

Утверждение 8 соответствует результату, доказанному в [1] для любого фиксированного k , исправляет неточность, допущенную в [2] для $k(n) = o(\sqrt{n})$, и является частным случаем результата, полученного в [18] для $k \leq \left(\frac{\ln 2}{6} - \varepsilon\right) \frac{n}{\ln n}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$.

Полученные в этом параграфе результаты согласуются с точными верхней и нижней оценками числа корреляционно-иммунных булевых функций 1-го порядка, полученными в [14].

3. Оценки для числа платовидных двоичных отображений фиксированного порядка

Рассмотрим вектор

$$\overline{F} = \overline{F}(f, n, m, k) = (\Delta_I^J(f), 0 \leq |I| \leq k, I \subset \overline{1, n}, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m})$$

размерности $N(n, m, k)$, состоящий из части коэффициентов статистической структуры всех компонент отображения f и имеющий такую же структуру, как $\bar{w}$.

Согласно следствию 2 [8] коэффициенты статистической структуры компонент двоичного отображения удовлетворяют следующим сравнениям:

$$\sum_{L \subset I} (-1)^{|L|} \Delta_L^J \equiv 0 \pmod{2^{|I|}}, \quad (4)$$

$$\sum_{\emptyset \neq S \subset J, L \subset I} (-1)^{|L|+|S|} \Delta_L^S \equiv 0 \pmod{2^{|I|+|J|-1}}. \quad (5)$$

Докажем для вектора $\bar{F}(f, n, m, k)$ теорему, аналогичную теореме 1 [7] для вектора $\bar{w}(n, m, k)$.

Везде далее $[[\bar{a}]]$ – евклидова норма вектора $\bar{a}$.

Теорема 9. Пусть $n \rightarrow \infty$, $k(n) = o(\sqrt{n})$, $m(n) = o(n)$. Тогда равномерно относительно векторов $\bar{a}$ размерности $N(n, m, k)$, координаты которых удовлетворяют сравнениям (4) и (5), справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{F} = \bar{a}) &= \frac{\exp\left(-2^{-n+1} [[\bar{a}]]^2\right) + O\left(n^{3k+3} 2^{-\frac{n}{2}+3m}\right)}{\exp_2(T(n, m, k))} \times \\ &\times \sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}(m, N)} \exp \left[-i\pi \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} \sum_{I \subset \overline{1, n}, |I| \leq k} 2^{\frac{n}{2}-|I|} r_I^J \sum_{L \subset I} (-1)^{|L|+1} a_L^J \right], \end{aligned}$$

где $\bar{a}$ имеет такую же структуру координат как $\bar{F}$, а множество $\mathfrak{R}^{**}(m, N)$ определено выше (см. (2)).

Доказательство. Из теоремы 1 [7] и формул связи между весами подфункций компонент функции и их коэффициентами статструктуры

$$\begin{aligned} \Delta_I^J &= \sum_{L \subset I} (-1)^{|L|} \left(2^{n-1} - 2^{|L|} w_L^J \right), \\ w_I^J - 2^{n-|I|-1} &= 2^{-|I|} \cdot \sum_{L \subset I} (-1)^{|L|+1} \Delta_L^J, \end{aligned}$$

доказанных в [2], получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\bar{F} = \bar{a}) = \mathbf{P}(\bar{w} - \mathbf{E}\bar{w} = \bar{z}(\bar{a})) =$$

$$= \frac{\exp \left(- \left(\bar{z}(\bar{a})^T (Q(n, m, k))^{-1} \bar{z}(\bar{a}) \right) 2^{-n-2m+3} \right) + O \left(n^{3k+3} 2^{-\frac{n}{2}+3m} \right)}{\exp_2 (T(n, m, k))} \times$$

$$\times \left(\sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp \left[-i\pi \left(2^{\frac{n}{2}} \vec{r}, \bar{z}(\bar{a}) \right) \right] \right)$$

равномерно относительно таких $\bar{a}$, что вектор $\bar{z}(\bar{a})$ с компонентами

$$z_I^J(\bar{a}) = 2^{-|I|} \sum_{L \subset I} (-1)^{|L|+1} a_L^J$$

целочисленный, что вытекает из сравнения (4).

Согласно сравнению (5) для любых $I, J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m}, I \subset \overline{1, n}, 1 \leq |I| + |J| \leq k$, целыми числами являются выражения $2^{-|I|-|J|+1} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} \sum_{L \subset I} (-1)^{|L|+|S|} a_L^S$, что равносильно сравнениям (1) для весов подфункций, так как

$$2^{-|I|-|J|+1} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} \sum_{L \subset I} (-1)^{|L|+|S|} a_L^S =$$

$$= 2^{1-|J|} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} (-1)^{|S|} 2^{-|I|} \sum_{L \subset I} (-1)^{|L|} a_L^S = 2^{1-|J|} \sum_{\emptyset \neq S \subset J} (-1)^{|S|} z_I^S(\bar{a}).$$

Рассмотрим теперь

$$\bar{z}(\bar{a})^T (Q(n, m, k))^{-1} \bar{z}(\bar{a}) =$$

$$= 2^{2m-2} \sum_{\substack{J \subset \overline{1, m}, \\ J \neq \emptyset}} \sum_{\substack{I \subset \overline{1, n}, \\ |I| \leq k}} \left(\sum_{K \subset I} (-1)^{|K|} 2^{|K|} z_K^J \right)^2 =$$

$$= 2^{2m-2} \sum_{\substack{J \subset \overline{1, m}, \\ J \neq \emptyset}} \sum_{\substack{I \subset \overline{1, n}, \\ |I| \leq k}} \left(\sum_{L \subset I} (-1)^{|L|+1} a_L^J \sum_{L \subset K \subset I} (-1)^{|K|} \right)^2,$$

где сумма $\sum_{L \subset K \subset I} (-1)^{|K|}$ равна $(-1)^{|L|}$, если $I = L$, и равна нулю в противном случае.

Следовательно,

$$\bar{z}(\bar{a})^T (Q(n, m, k))^{-1} \bar{z}(\bar{a}) = 2^{2m-2} \sum_{\substack{J \subset \overline{1, m}, \\ J \neq \emptyset}} \sum_{\substack{I \subset \overline{1, n}, \\ |I| \leq k}} (a_I^J)^2.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp \left[-i\pi \left(2^{\frac{n}{2}} \vec{r}, \bar{z}(\bar{a}) \right) \right] &= \\
&= \sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp \left[-i\pi 2^{\frac{n}{2}} \sum_{\substack{J \subset \overline{1, m}, \\ J \neq \emptyset}} \sum_{\substack{I \subset \overline{1, n}, \\ |I| \leq k}} r_I^J \cdot z_I^J(\bar{a}) \right] = \\
&= \sum_{\vec{r} \in \mathfrak{R}^{**}} \exp \left[-i\pi \sum_{\substack{J \subset \overline{1, m}, \\ J \neq \emptyset}} \sum_{\substack{I \subset \overline{1, n}, \\ |I| \leq k}} 2^{\frac{n}{2} - |I|} r_I^J \sum_{L \subset I} (-1)^{|L|+1} a_L^J \right].
\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 10. В условиях теоремы 9 равномерно относительно векторов $\bar{a}$ размерности $N(n, m, k)$, удовлетворяющих сравнениям (4) и (5) и соотношению

$$[[\bar{a}]]^2 = o\left(2^{n-2} \left((n - 6m) \ln 2 + (6 - 6k) \ln n \right)\right),$$

справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\bar{F} = \bar{a}) \leq \frac{(1 + \varepsilon_n) \exp\left(-2^{-n+1} [[\bar{a}]]^2\right)}{\exp_2(T(n, m, k))} |\mathfrak{R}^{**}|, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

а если $[[\bar{a}]]^2 \neq o\left(2^{n-2} \left((n - 6m) \ln 2 + (6 - 6k) \ln n \right)\right)$, то

$$\mathbf{P}(\bar{F} = \bar{a}) = O\left(n^{3k+3} 2^{-\frac{n}{2} - T(n, m, k) + 3m}\right) |\mathfrak{R}^{**}|.$$

Обозначим через $\Pi(r_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m})$ множество всех платовидных двоичных отображений порядка $(r_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m})$.

Теорема 11. Пусть $n \rightarrow \infty$, $m(n) = o(n)$. Тогда для любого $k(n) = o(\sqrt{n})$ для любого $\varepsilon > 0$ мощность множества $\Pi(r_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m})$, где $\max_J \left(\frac{n}{2} - r_J\right) = o(\ln n)$, ограничена сверху выражением

$$\exp_2(m 2^n - T(n, m, k) + N(n, m, k) \log_2 3 + \varepsilon \log_2 n) |\mathfrak{R}^{**}(m, N)|.$$

Доказательство. Оценим вероятность того, что случайное двоичное отображение является платовидным порядка $(r_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m})$. Обозначим $t_J = \frac{n}{2} - r_J$. При этом $\max_J (t_J) = o(\ln n)$.

Очевидно, что вероятность этого события не превышает вероятности того, что в неполном векторе коэффициентов статструктуры размерности $N(n, m, k)$ все соответствующие координаты равны либо $\pm 2^{n/2+t_J-1}$, либо 0. Обозначим последнее событие через $\Pi(\Delta)$ и используем теорему 9:

$$\mathbf{P}(\Pi(r_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m})) \leq \mathbf{P}(\Pi(\Delta)).$$

При $t_J = o(\ln n)$ величина $L = L(n, k) = N(n, 1, k)$ из определения $N(n, m, k)$ меньше, чем 2^{r_J} , и данные неполные векторы удовлетворяют отношениям сравнимости для коэффициентов статистической структуры.

Пусть в соответствующем неполном наборе коэффициентов статистической структуры в подвекторах, соответствующих линейным комбинациям, сопоставленных множествам J , будет ровно s_J ненулевых координат. Тогда $[[\bar{a}]]^2 = 2^{n-2} \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} s_J 2^{2t_J}$. Каждая из этих координат может

быть как положительной, так и отрицательной. Количество же мест, на которых они могут располагаться, равно $\binom{L}{s_J}$. Поэтому из теоремы 9 следует, что верно неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Pi(\Delta)) \leq & \sum_{(s_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m}) \in (\overline{0, L})^{2^m-1}} \left(\prod_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} 2^{s_J} \binom{L}{s_J} \right) \times \\ & \exp \left(- \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} s_J 2^{2t_J-1} \right) + O(n^{3k+3} 2^{-n/2+3m}) \\ & \times \frac{\exp_2(T(n, m, k))}{\exp_2(T(n, m, k))} |\mathfrak{R}^{**}(m, N)|. \end{aligned}$$

Рассмотрим множество

$$S_0 = \left\{ (s_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m}) \in (\overline{0, L})^{2^m-1} : \sum_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} s_J 2^{2t_J} = o((n - 6m) \ln 2 + (6 - 6k) \ln n) \right\}$$

и обозначим $S_1 = (\overline{0, L})^{2^m-1} \setminus S_0$. Из следствия 10 получаем, что при

$\varepsilon_n \rightarrow 0$ верно неравенство

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(\Pi(\Delta)) \leq \\
& \leq \left(\sum_{(s_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m}) \in S_0} \left(\prod_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} 2^{s_J} \binom{L}{s_J} \exp(-s_J 2^{2t_J-1}) \right) (1 + \varepsilon_n) + \right. \\
& + \sum_{(s_J, \emptyset \neq J \subset \overline{1, m}) \in S_1} \left(\prod_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} 2^{s_J} \binom{L}{s_J} \right) O(n^{3k+3} 2^{-\frac{n}{2}+3m}) \left. \right) \frac{|\mathfrak{R}^{**}(m, N)|}{\exp_2(T(n, m, k))} \leq \\
& \leq \left(\prod_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} \left(\sum_{s_J=0}^L 2^{s_J} \binom{L}{s_J} \exp(-s_J 2^{2t_J-1}) \right) (1 + \varepsilon_n) + \right. \\
& + O(n^{3k+3} 2^{-\frac{n}{2}+3m}) \prod_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} \left(\sum_{s_J=0}^L 2^{s_J} \binom{L}{s_J} \right) \left. \right) \frac{|\mathfrak{R}^{**}(m, N)|}{\exp_2(T(n, m, k))} = \\
& = \left(\prod_{\emptyset \neq J \subset \overline{1, m}} \left((1 + 2 \exp(-2^{2t_J-1}))^L \right) (1 + \varepsilon_n) + \right. \\
& + 3^{L(2^m-1)} O(n^{3k+3} 2^{-\frac{n}{2}+3m}) \left. \right) \frac{|\mathfrak{R}^{**}(m, N)|}{\exp_2(T(n, m, k))} \leq \\
& = \frac{|\mathfrak{R}^{**}(m, N)| 3^N}{\exp_2(T(n, m, k))} (1 + \varepsilon_n + O(n^{3k+3} 2^{-\frac{n}{2}+3m})).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{P}(\Pi(\Delta)) = O\left(\frac{3^{N(n, m, k)} |\mathfrak{R}^{**}(m, N)|}{\exp_2(T(n, m, k))}\right)$. $\square$

Для ограничения сверху мощности множества $\mathfrak{R}^{**}(m, N)$ можно воспользоваться либо утверждением 2 при $m \in \overline{2, 3}$, либо утверждением 3 при больших значениях m .

Учитывая, что $|\mathfrak{R}^{**}(m, N)| = 1$ при $m = 1$, с помощью теоремы 9 из [7] получаем следующее утверждение

Утверждение 12. Для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ число платовидных двоичных функций $f \in B_n^1$ порядка $2r$, где $\frac{n}{2} - r = o(\ln n)$, начиная с некоторого

натурального n , ограничено сверху выражением

$$\exp_2 \left(2^n - \frac{(n - \lfloor n^{-\varepsilon+1/2} \rfloor)}{2} \binom{n}{\lfloor n^{-\varepsilon+1/2} \rfloor} - n + \right. \\ \left. + N \left(n, 1, \lfloor n^{-\varepsilon+1/2} \rfloor \right) \log_2 \sqrt{\frac{18}{\pi}} + \left(5 \lfloor n^{-\varepsilon+1/2} \rfloor + 4 \right) \log_2 n \right),$$

где $\lfloor a \rfloor$ – целая часть a .

Список литературы

- [1] Денисов О. В., “Асимптотическая формула для числа корреляционно-иммунных порядка k булевых функций”, *Дискретная математика*, **3**:2 (1991), 25–46.
- [2] Денисов О. В., “Локальная предельная теорема для распределения части спектра случайной двоичной функции”, *Дискретная математика*, **12**:1 (2000), 82–95.
- [3] Зубов А.Ю., *Математика кодов аутентификации*, М. : Гелиос АРВ, 2007, 480 с.
- [4] Иванов А.В., “Мономиальные приближения платовидных функций”, *Прикл. дискр. матем.*, **1**:1 (2008), 10–14.
- [5] Кузнецов Ю.В., Шкарин С.А., “Коды Риды – Маллера”, *Матем. вопр. киберн.*, 1996, № 6, 5–50.
- [6] Логачев О.А., Сальников А.А., Смышляев С.В., Ященко В.В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*, М. : МЦНМО, 2012, 584 с.
- [7] Панков К.Н., “Локальная предельная теорема для распределения части вектора весов подфункций компонент случайного двоичного отображения”, *Математические вопросы криптографии*, **5**:3 (2014), 49–80.
- [8] Панков К.Н., “Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для совместных распределений части характеристик случайных двоичных отображений”, *Прикл. дискр. матем.*, **5**:4 (2012), 14–30.
- [9] Сачков В.Н., *Курс комбинаторного анализа*, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2013, 336 с.
- [10] *Словарь криптографических терминов*, М. : МЦНМО, 2006, 94 с.
- [11] Таранников Ю.В., “Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии”, 2011, 152 с.
- [12] Таранников Ю.В., “О корреляционно-иммунных и устойчивых булевых функциях”, *Матем. вопр. киберн.*, 2002, № 11, 91–148.
- [13] Ященко В.В., “Свойства булевых отображений, сводимые к свойствам их координатных функций”, *Вестник МГУ, сер. Матем.*, **33**:1 (1997), 11–13.
- [14] Bach E., “Improved asymptotic formulas for counting correlation immune Boolean functions”, *SIAM J. Discrete Math.*, **23** (2009), 1525–1538.
- [15] Bennett C., Brassard G., Robert J., “Privacy amplification by public discussion”, *SIAM J. Comput.*, **17** (1988), 210–229.
- [16] Carlet C., “Vectorial Boolean functions for cryptography”, *Encycl. Math. and its Appl.*, **134** (2010), 780 pp.

- [17] Cheon J., Chee S., “Elliptic curves and resilient function”, *Information Security and Cryptology. — ICISC 2000. Lect. Notes Comput. Sci*, **2015** (2001), 64–72.
- [18] Canfield E. R., Gao Z., Greenhill C., McKay B. D., Robinson R. W., “Asymptotic enumeration of correlation-immune Boolean functions”, *Cryptography and Commun.*, **2:1** (2010), 111–126.
- [19] Chor B., Goldreich O., Hastad J., Friedman J., Rudich S., Smolensky R., “The bit extraction problem or t-resilient functions”, *IEEE Symp. Found. Comput. Sci.*, **26** (1985), 396–407.
- [20] Gopalakrishnan K., Stinson D. R., “Three characterizations of non-binary correlation-immune and resilient functions”, *Des, Codes and Cryptogr.*, **5** (1995), 241–251.
- [21] Siegenthaler, T., “Correlation-immunity of nonlinear combining functions for cryptographic applications”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **30:5** (1984), 776–780.
- [22] Stinson D., Massey J., “An infinite class of counterexamples to a conjecture concerning non-linear resilient functions”, *J. Cryptology*, **8:3** (1995), 167–173.
- [23] Zhang X., Zheng Y., “Cryptographically resilient functions”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **43:5** (1997), 1740–1747.