Общероссийский математический портал

В. П. Чистяков, Об асимптотической нормальности числа пустых ячеек в одной схеме размещения частиц комплектами, *Матем. вопр. криптогр.*, 2014, том 5, выпуск 4, 129–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:32:55

**Об асимптотической нормальности числа пустых
ячеек в одной схеме размещения частиц
комплектами**

В. П. Чистяков

Математический институт им.В.А.Стеклова РАН, Москва

Получено 18.III.2013

Рассматривается схема m -зависимого размещения по ячейкам неравновероятных комплектов частиц. Предполагается, что число комплектов и число ячеек стремятся к бесконечности и имеют одинаковый порядок. Получены асимптотические формулы для математического ожидания и дисперсии, а также достаточные условия асимптотической нормальности числа пустых ячеек в этой схеме.

Ключевые слова: m -зависимые последовательности, размещения комплектами, асимптотическая нормальность, число пустых ячеек.

On the asymptotic normality in a scheme of allocation of non-equiprobable particle sets

V. P. Chistyakov

Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow

Abstract. A scheme of allocation of non-equiprobable m -dependent particle sets into cells is considered. The number of cells and the number of sets of particles are supposed to tend to ∞ and to have the same order of growth. Asymptotic formulas for mathematical expectation and variance of the number of empty cells are obtained along with the sufficient conditions for their asymptotic normality.

Keywords: m -dependent sequences, allocations of sets, asymptotic normality, a number of empty cells

1. Постановка задачи

В классической постановке задачи о размещении частиц комплектами считается, что имеется N ячеек, в которые бросают независимо n комплектов по v частиц в каждом. При этом предполагается, что частицы одного комплекта попадают в разные ячейки и все C_N^v размещений частиц каждого комплекта равновероятны. Эта схема рассматривалась многими авторами (см. [1], гл. VII; [2]). Рассматривались также различные обобщения равновероятной схемы: равновероятная схема с комплектами неодинаковых размеров ([11]), схемы независимого размещения неравновероятных комплектов (см., например, [3]) и т. д. Схемы независимого размещения комплектов случайного объема использовались при исследовании числа решений некоторых систем случайных уравнений ([9, 10]).

Рассмотрим следующую схему m -зависимого размещения частиц комплектами. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех v -элементных подмножеств множества $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$:

$$\mathcal{M} = \{I = (i_1, \dots, i_v) : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_v \leq N\}.$$

Пусть

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_t, \dots, \quad Z_t \in \mathcal{M}, \quad (1)$$

— такая стационарная последовательность m -зависимых случайных подмножеств $I \in \mathcal{M}$, что наборы $(Z_{s-u_1}, \dots, Z_s)$ и $(Z_t, \dots, Z_{t+u_2})$ независимы при любых u_1, u_2, s, t , для которых $t - s > m$.

Случайная величина $\mu_0 = \mu_0(n, N)$, равная числу ячеек, оставшихся пустыми после размещения по N ячейкам частиц всех n комплектов, выражается равенством

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^N \chi(Z_1 \notin K_i, Z_2 \notin K_i, \dots, Z_n \notin K_i),$$

где $\chi(C)$ — индикатор события C , $K_i = \{I : I \in \mathcal{M}, i \in I\}$. В данной работе получены достаточные условия асимптотической нормальности $\mu_0(n, N)$ и асимптотические формулы для $\mathbf{E}\mu_0$, $\mathbf{E}\mu_0^{[2]}$ ($\mu_0^{[2]} = \mu_0(\mu_0 - 1)$), $\mathbf{D}\mu_0$ в предположении, что $n, N \rightarrow \infty$,

$$\frac{n}{N} = \alpha_N, \quad 0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_N \leq \bar{\alpha} < \infty \quad (2)$$

и совместное распределение случайных множеств $Z_1, \dots, Z_n$ меняется так, что при любых $t_1 < \dots < t_l$ и любых $I_1, \dots, I_l \in \mathcal{M}$

$$0 < \underline{c}^l \leq M^l \mathbf{P}(Z_{t_1} = I_1, \dots, Z_{t_l} = I_l) \leq \bar{c}^l, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \underline{c}, \bar{c}$ — некоторые постоянные, $M = |\mathcal{M}| = C_N^v$.

Приведем пример m -зависимых величин (1), для которых выполняется условие (3). Пусть

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_t, \dots \quad (4)$$

— стационарная последовательность независимых случайных элементов множества $\mathcal{M}$. Перенумеруем каким-либо образом элементы множества $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \{I = (i_1, \dots, i_v) : 1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq N\} = \{I_0, I_1, \dots, I_{M-1}\}.$$

Положим

$$\mathbf{P}\{\zeta_t = I_u\} = p_u, \quad u = 0, 1, \dots, M-1.$$

Суммой $I_{k_1} \oplus I_{k_2}$ двух элементов I_{k_1} и I_{k_2} назовем элемент I_k , где $k = k_1 + k_2 \pmod{M}$. Тогда последовательность

$$Z_t = \zeta_t \oplus \zeta_{t+1} \oplus \dots \oplus \zeta_{t+m}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (5)$$

является последовательностью m -зависимых множеств. Если

$$0 < c_0 \leq Mp_u \leq c_1 < \infty, \quad u = 0, 1, \dots, M-1, \quad (6)$$

где c_0, c_1 — некоторые постоянные, то для последовательности (5) выполняется условие (3).

2. Асимптотические формулы для моментов

Покажем, что неравенства вида (3) выполняются для последовательностей

$$\chi_i(1), \dots, \chi_i(n); \quad \chi_{ij}(1), \dots, \chi_{ij}(n), \quad i, j \in \mathcal{N},$$

где

$$\chi_{ij}(t) = \chi(Z_t \in K_i \cup K_j).$$

Лемма 1. Если выполняется условие (3), то при любых $t_1, \dots, t_l$ и любых $i, j \in \mathcal{N}$

$$0 < \underline{c}_1^l \leq N^l \mathbf{E} \chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l) \leq \bar{c}_1^l, \quad 0 < \underline{c}_2^l \leq N^l \mathbf{E} \chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l) \leq \bar{c}_2^l,$$

где $l = 1, 2, \dots$, а $\underline{c}_1, \bar{c}_1, \underline{c}_2, \bar{c}_2$ — некоторые постоянные.

Доказательство. Для элементов множеств K_i и $K_i \cup K_j$ введем обозначения

$$K_i = \{I_1^{(i)}, \dots, I_{|K_i|}^{(i)}\}, \quad K_i \cup K_j = \{I_1^{(i,j)}, \dots, I_{|K_i \cup K_j|}^{(i,j)}\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$|K_i| = C_{N-1}^{v-1}, |K_i \cap K_j| = C_{N-2}^{v-2}, |K_i \cup K_j| = 2C_{N-1}^{v-1} - C_{N-2}^{v-2}$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l) = \\ &= \sum_{u_1, \dots, u_l=1}^{|K_i|} \mathbf{P} \left(Z_{t_1} = I_{u_1}^{(i)}, \dots, Z_{t_l} = I_{u_l}^{(i)} \right) \leq |K_i|^l \left(\frac{\bar{c}}{M} \right)^l = \frac{(v\bar{c})^l}{N^l}, \\ & \mathbf{E}\chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l) = \sum_{u_1, \dots, u_l=1}^{|K_i \cup K_j|} \mathbf{P} \left(Z_{t_1} = I_{u_1}^{(i,j)}, \dots, Z_{t_l} = I_{u_l}^{(i,j)} \right) \leq \\ & \leq |K_i \cup K_j|^l \left(\frac{\bar{c}}{M} \right)^l \leq \frac{(2v\bar{c})^l}{N^l}. \end{aligned}$$

Аналогично получаются нижние оценки. □

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_i &= N\mathbf{E}\chi_i(t), \quad a_{ij} = N\mathbf{E}\chi_{ij}(t), \quad a_{ij}^* = N^2\mathbf{P}(Z_t \in K_i \cap K_j), \\ b_{ij}(u) &= N^2\mathbf{E}\chi_i(t)\chi_j(t+u), \quad b_{ij} = \sum_{u=1}^m b_{ij}(u), \\ B_{ij}(u) &= N^2\mathbf{E}\chi_{ij}(t)\chi_{ij}(t+u), \quad B_{ij} = \sum_{u=1}^m B_{ij}(u). \end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 2. В схеме серий (2) – (3) при любых $i, j \in \mathcal{N}$, $u = 1, \dots, m$,

$$\underline{a} \leq a_i \leq \bar{a}, \quad \underline{a} \leq a_{ij} \leq \bar{a}, \quad \underline{a} \leq b_{ij} \leq \bar{a}, \tag{8}$$

$$a_{ij} = a_i + a_j - \frac{1}{N}a_{ij}^*, \quad B_{ij}(u) = b_{ii}(u) + b_{ij}(u) + b_{ji}(u) + b_{jj}(u) + O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{9}$$

$$B_{ij} = b_{ii} + b_{ij} + b_{ji} + b_{jj} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $\bar{a}, \underline{a}$, $0 < \underline{a} < \bar{a}$, – некоторые постоянные.

Доказательство. Неравенства (8) следуют из леммы 1. Из равенства

$$\mathbf{E}\chi_{ij}(t) = \mathbf{E}\chi_i(t) + \mathbf{E}\chi_j(t) - \mathbf{P}(Z_t \in K_i \cap K_j)$$

следует равенство (9) для a_{ij} .

Представим $\chi_{ij}(t)\chi_{ij}(t+u)$ в виде

$$\mathbf{E}\chi_{ij}(t)\chi_{ij}(t+u) = \mathbf{P}(D_1) + \mathbf{P}(D_2) - \mathbf{P}(D_1 \cap D_2 \cap D), \quad (10)$$

где $D = (Z_{t+u} \in K_i) \cup (Z_{t+u} \in K_j)$,

$$D_1 = (Z_t \in K_i) \cap D, \quad D_2 = (Z_t \in K_j) \cap D.$$

Аналогично доказательству леммы 1 получим

$$\mathbf{P}(Z_t \in K_i \cap K_j \cap D) \leq \frac{C}{N^3},$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Вероятность $\mathbf{P}(D_1)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(D_1) &= \mathbf{P}(Z_t \in K_i, Z_{t+u} \in K_i) + \mathbf{P}(Z_t \in K_i, Z_{t+u} \in K_j) - \\ &\quad - \mathbf{P}((Z_t \in K_i) \cap (Z_{t+u} \in K_i \cap K_j)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{P}(D_1) = \frac{b_{ii}(u)}{N^2} + \frac{b_{ij}(u)}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

Точно так же оценивается вероятность $\mathbf{P}(D_2)$.

Из полученных равенств следует утверждение для $B_{ij}(u)$ и B_{ij} . Лемма доказана. $\square$

Теорема 1. При $n, N \rightarrow \infty$ и некотором δ , $0 < \delta < 1$, в схеме серий (2) – (3)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0(n, N) &= NM_0 - \frac{1}{2}\alpha_N(2m+1)M_2 + \alpha_N M^* + O\left(\frac{1}{N^\delta}\right), \\ \mathbf{E}\mu_0^{[2]}(n, N) &= N^2 M_0 - N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-2\alpha_N a_i} \right) - \\ &\quad - N\alpha_N(2m+1)(M_0 M_2 + M_1^2) + N\alpha_N \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^* e^{-\alpha_N(a_i+a_j)} \right) + \\ &\quad + 2\alpha_N N \left(M_0 M^* + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N b_{ij} e^{-\alpha_N(a_i+a_j)} \right) + O(N^\delta), \end{aligned}$$

где a_i , b_{ij} , a_{ij}^* определены равенствами (7),

$$M_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^k e^{-\alpha_N a_i}, \quad k = 0, 1, 2, \quad M^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_{ii} e^{-\alpha_N a_i}. \quad (11)$$

Доказательство теоремы. Используя равенство

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^N (1 - \chi_i(1))(1 - \chi_i(2)) \dots (1 - \chi_i(n)), \quad (12)$$

получаем

$$\mu_0(n, N) = \sum_{l=0}^n \sum_{t(l) \in T(l)} \xi_l(t(l)), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_i(t) &= \chi(Z_t \in A_i), \quad t(l) = (t_1, \dots, t_l), \\ T(l) &= \{t(l) : 1 \leq t_1 < \dots < t_l \leq n\}, \quad l \geq 1, \\ \xi_l(t(l)) &= (-1)^l \sum_{i=1}^N \chi(Z_{t_1} \in A_i, \dots, Z_{t_l} \in A_i). \end{aligned} \quad (14)$$

Так же, как и в работе [4], используя формулы включения-исключения, представим $\mathbf{E}\mu_0$, $\mathbf{E}\mu_0^{[2]}$ в виде

$$\mathbf{E}\mu_0 = \sum_{i=1}^N P_i, \quad \mathbf{E}\mu_0^{[2]} = \sum_{i \neq j} P_{ij}, \quad (15)$$

где при любом φ , $1 \leq \varphi < N$,

$$\begin{aligned} P_i &= P_i(\varphi) + Q_i(\varphi), \quad P_{ij} = P_{ij}(\varphi) + Q_{ij}(\varphi), \\ P_i(\varphi) &= \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l S_l(i), \quad P_{ij}(\varphi) = \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l S_l(i, j), \\ S_l(i) &= \sum_{t(l) \in T(l)} \mathbf{E}(\chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l)), \quad l \geq 1, \quad S_0(i) = 1, \\ S_l(i, j) &= \sum_{t(l) \in T(l)} \mathbf{E}(\chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l)), \quad S_0(i, j) = 1, \quad i \neq j, \\ |Q_i(\varphi)| &\leq S_\varphi(i), \quad |Q_{ij}(\varphi)| \leq S_\varphi(i, j). \end{aligned} \quad (16)$$

Из этих формул получим следующие представления для моментов:

$$\mathbf{E}\mu_0 = \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l A_l + \tilde{A}_n, \quad \mathbf{E}\mu_0^{[2]} = \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l B_l + \tilde{B}_n, \quad (17)$$

где

$$A_l = \sum_{i=1}^N S_l(i), B_l = \sum_{i \neq j} S_l(i, j), \quad |\tilde{A}_n| \leq A_\varphi, \quad |\tilde{B}_n| \leq B_\varphi. \quad (18)$$

Положим

$$\tau(t) = (t, t+1, \dots, t+m).$$

Множество $T(l)$, определяемое равенством (2), представим в виде объединения трех не пересекающихся множеств:

$$T(l) = T_1(l) \cup T_2(l) \cup T_3(l), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(l) &= \{t(l) : \tau(t_{u_1}) \cap \tau(t_{u_2}) = \emptyset \text{ при любых } u_1 \neq u_2, u_1, u_2 = 1, \dots, l\}, \\ T_2(l) &= \{t(l) : \text{среди } \tau(t_1), \dots, \tau(t_l) \text{ ровно два множества пересекаются}\}, \\ T_3(l) &= T(l) \setminus (T_1(l) \cup T_2(l)). \end{aligned} \quad (20)$$

Так же, как в работах [4], [5] разобьем суммы $S_l(i)$, $S_l(i, j)$ на три части, $S_l(i) = S_l^{(1)}(i) + S_l^{(2)}(i) + S_l^{(3)}(i)$, $S_l(i, j) = S_l^{(1)}(i, j) + S_l^{(2)}(i, j) + S_l^{(3)}(i, j)$, соответствующие разбиениям (19). Отметим, что

$$S_0^{(1)}(i) = S_0^{(1)}(i, j) = 1, \quad S_0^{(u)}(i) = S_0^{(u)}(i, j) = 0, \quad u = 2, 3.$$

Подставив в (18) эти разбиения сумм, представим величины A_l , B_l в виде сумм трех слагаемых каждую:

$$A_l = A_l^{(1)} + A_l^{(2)} + A_l^{(3)}, \quad B_l = B_l^{(1)} + B_l^{(2)} + B_l^{(3)}.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично доказательствам из работ [4], [5]. Отметим изменения, которые нужно внести в доказательства асимптотических формул, приведенных в работе [5]. Необходимо оценить величины

$$\mathbf{E} \chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l) = \mathbf{P}(Z_{t_1} \in K_i, \dots, Z_{t_l} \in K_i),$$

$$\mathbf{E} \chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l) = \mathbf{P}(Z_{t_1} \in K_i \cup K_j, \dots, Z_{t_l} \in K_i \cup K_j),$$

которые входят в суммы (16). Если $t(l) \in T_1(l)$, то

$$\mathbf{E} \chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l) = \left(\frac{a_i}{N} \right)^l,$$

$$\mathbf{E} \chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l) = \left(\frac{a_i + a_j - \frac{1}{N} a_{ij}^*}{N} \right)^l.$$

При

$$t(l) \in T_2^{(u)}(l, k, n) = \\ = \{t(l) : t(l) \in T_l, \quad t_{k+1} - t_k = u, \quad t_{k_1+1} - t_{k_1} \geq m + 1, \quad k_1 \neq k\}$$

нужно воспользоваться следующими из леммы 2 формулами

$$\mathbf{E}\chi_i(t)\chi_i(t+u) = \frac{1}{N^2}b_i(u), \\ \mathbf{E}\chi_{ij}(t)\chi_{ij}(t+u) = \frac{1}{N^2}(b_{ii}(u) + b_{ij}(u) + b_{ji}(u) + b_{jj}(u) + O(1/N)),$$

$u = 1, \dots, m, \quad i, j \in \mathcal{N}$. В случае $t(l) \in T_3(l)$ нужно воспользоваться леммой 1. Остальные выкладки мы опускаем. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. При $n, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (2) – (3)

$$\mathbf{D}\mu_0(n, N) = N\sigma_N^2(\alpha_N) + O(N^\delta), \quad 0 < \delta < 1,$$

где

$$\sigma_N^2(\alpha_N) = M_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-2\alpha_N a_i} - \alpha_N M_1^2 + \alpha_N \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^* e^{-\alpha_N(a_i+a_j)} \right) + \\ + 2\alpha_N \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N e^{-\alpha_N(a_i+a_j)} (b_{ij} - m a_i a_j) \right),$$

a величины $a_i, a_{ij}^*, b_{ij}, M_0, M_1$ определены равенствами (7), (11).

Если объём комплекта $v = 1$, то $a_{ij}^* = 0$, и из этой формулы для $\sigma_N^2(\alpha_N)$ получается формула (30) работы [5].

Для схемы независимых и равновероятных комплектов из [1], используя равенства $b_{ij} = m a_i a_j, a_i = v, a_{ij}^* = v(v-1)$, получаем формулу

$$\sigma_N^2(\alpha_N) = e^{-\alpha_N v} (1 - (1 + \alpha_N v) e^{-\alpha_N v}).$$

3. Асимптотическая нормальность

Для доказательства асимптотической нормальности $\mu_0(n, N)$ удобно воспользоваться теоремой 2 работы [5]. Эта теорема является переформулировкой теоремы 2 работы В.Г. Михайлова [8], которая, в свою очередь, обобщает теорему 2 работы С. Янсона [7].

Так же, как в работах [5], [6], полагаем

$$\varphi = \varphi_N = \left\lceil \frac{(1 + \delta) \ln N}{\ln \ln N} \right\rceil, \quad 0 < \delta < 1. \quad (21)$$

Случайную величину $\mu_0(n, N)$ представим, используя (13) и разбиение (19) множества $T(l)$, в виде

$$\mu_0(n, N) = \mu_1(N) + \mu_2(N) + \mu_3(N) + \Delta_\varphi,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_u(N) &= \sum_{l=0}^{\varphi-1} \sum_{t(l) \in T_u(l)} \xi_l(t_1, \dots, t_l), \quad u = 1, 2, 3, \\ |\Delta_\varphi| &\leq \Delta_1(\varphi) + \Delta_2(\varphi) + \Delta_3(\varphi), \\ \Delta_u(l) &= \sum_{t(l) \in T_u(l)} |\xi_l(t_1, \dots, t_l)|. \end{aligned}$$

Так же, как в работе [6], проверяется, что в схеме серий (2) – (3) при $n, N \rightarrow \infty$ случайная величина $(\mu_0(n, N) - \mu_1(N)) / \sqrt{\mathbf{D}\mu_0}$ стремится к 0 по вероятности, если

$$\sigma_N^2(\alpha_N) \geq \varepsilon > 0. \quad (22)$$

Далее для величины $\mu_1(N)$ проверяются условия теоремы 2 работы [5] и устанавливается асимптотическая нормальность $\mu_1(N)$, а следовательно, и $\mu_0(n, N)$. При проверке условий теоремы 2 из [5] используется лемма 1. Рассуждения, проводимые по этой схеме, приводят к следующей теореме об асимптотической нормальности величины $\mu_0(n, N)$, определенной по последовательности (1).

Теорема 2. *Если в схеме серий (2) – (3) выполнено условие (22), то при $n, N \rightarrow \infty$ распределение величины*

$$(\mu_0(n, N) - \mathbf{E}\mu_0(n, N)) / \sqrt{\mathbf{D}\mu_0(n, N)}$$

сходится к стандартному нормальному распределению.

Замечание. В случае, когда объем комплекта равен единице ($v = 1$), утверждение теоремы 2 превращается в теорему 3 работы [5].

Автор признателен рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., *Случайные размещения*, Наука, Москва, 1976.
- [2] Михайлов В.Г., “Сходимость к многомерному нормальному закону в равновероятной схеме размещения частиц комплектами”, *Матем. сб.*, **111(153)**:2 (1980), 163–186.
- [3] Жуков Е.А., Чистяков В.П., “О схемах размещения комплектов, аппроксимируемых полиномиальной схемой”, *Матем. заметки*, **25**:3 (1979), 455–463.
- [4] Тихомирова М.И., Чистяков В.П. Об асимптотике моментов числа неоявившихся сцепочек, *Дискр. матем.*, **9**:1 (1997), 12–29.
- [5] Тихомирова М.И., Чистяков В.П., “Асимптотическая нормальность числа неоявившихся значений m -зависимых случайных величин”, *Математические вопросы криптографии*, **2**:1 (2011), 119–129.
- [6] Тихомирова М.И., “Асимптотическая нормальность числа неоявившихся несплошных исходов независимых испытаний”, *Дискр. матем.*, **21**:2 (2009), 112–125.
- [7] Janson S., “Normal convergence by higher semi-invariants with applications to sums of dependent random variables and random graphs”, *Ann. Probab.*, **16**:1 (1988), 305–312.
- [8] Михайлов В.Г., “Об одной теореме Янсона”, *Теория вероятн. и примен.*, **36** (1991), 168–170.
- [9] Сачков В.Н., “Случайные неравновероятные покрытия и функциональные уравнения”, *Труды по дискретной математике*, **5** (2002), 205–218.
- [10] Михайлов В.Г., “Оценка точности пуассоновской аппроксимации для числа пустых ячеек при размещении частиц комплектами”, *Труды МИАН*, **282** (2013), 165–180.
- [11] Ватутин В. А., Михайлов В. Г., “Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами”, *Теория вероятн. и примен.*, **28**:4 (1982), 684–692.