Общероссийский математический портал

Г. К. Седов, Стойкость ГОСТ Р 34.11-2012 к атаке поиска прообраза и к атаке поиска коллизий, *Матем. вопр. криптогр.*, 2015, том 6, выпуск 2, 79–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:41:13

УДК: 519.719.2

Стойкость ГОСТ Р 34.11-2012 к атаке поиска прообраза и к атаке поиска коллизий

Г. К. Седов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва

Получено 18.XI.2014

В январе 2013 года национальный стандарт Российской Федерации, ГОСТ Р 34.11-94 определяющий алгоритм и процедуру вычисления хэш-функции, был заменен на новый ГОСТ Р 34.11-2012. В качестве нового стандарта было утверждено семейство хэш-функций Стрибог. В данной работе семейство хэш-функций Стрибог рассмотрено с позиций математической криптографии; доказана его стойкость к атаке поиска прообраза и к атаке поиска коллизий.

Ключевые слова: хэш-функции, математическая криптография, Стрибог, ГОСТ Р 34.11-2012

The security of GOST R 34.11-2012 against preimage and collision attacks

G. K. Sedov

Lomonosov Moscow State University, Moscow

Abstract. In January 2013 the National standard of the Russian Federation GOST R 34.11-94 defining the algorithm and computational procedure for hash function was replaced by GOST R 34.11-2012. A family of hash functions Streebog was approved as a new standard. We analyse the family Streebog from the mathematical cryptography viewpoint and prove that it is secure against preimage and collision attacks.

Key words: hash functions, mathematical cryptography, Streebog, GOST R 34.11-2012

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 79–98 (Russian).

1. Введение

ГОСТ Р 34.11-2012 [1], или Стрибог, — хэш-функции, принятые 1 января 2013 года в качестве национального стандарта Российской Федерации, определяющего алгоритм и процедуру вычисления хэш-функции. Старый стандарт был заменен после успешной атаки Ф. Менделя (F. Mendel) и др., понизившей сложность построения коллизий в 2^{23} раз [2].

Новый стандарт вызвал повышенное внимание криптографического научного сообщества, и в 2013 году появилось несколько работ, посвященных криптоанализу Стрибога. В частности, в работе Р. АльТави (R. AlTawy) и др. [3] описывается процедура построения коллизий и почти коллизий со свободным стартом для сокращенного до 4.5, 5.5 и 7.75 раундов внутреннего шифра функции сжатия, используемой в хэш-функции Стрибог. В этой работе внутренний шифр рассматривался как функция сжатия.

Несколько позже появилась статья З. Ванг (Z. Wang) и др. [4], связанная с построением коллизий для сокращенной до 9.5 раундов функции сжатия со сложностью по времени 2^{176} и необходимым количеством памяти 2^{128} байт. Также в этой работе представлен метод построения k -коллизий для 512-битной версии функции Стрибог.

В дальнейшем Р. АльТави (R. AlTawy) и Амр М. Юссуф (Amr M. Youssef) опубликовали статьи по исследованию стойкости функции Стрибог к нахождению прообраза [7] и по исследованию злонамеренного (malicious) хэширования с помощью функции Стрибог [8]. В [7] был получен псевдопрообраз для сокращенной до 5 раундов функции сжатия со сложностью 2^{448} по времени и с необходимым количеством памяти 2^{64} бит. В работе [8] авторы исследуют функцию Стрибог с измененными раундовыми константами и числом раундов функции сжатия, равным 12, и для такого варианта функции Стрибог описывают двухблоковую коллизию.

Также известна работа Бинкге Ма (Bingke Ma) и др. [9], в которой авторы предлагают атаки, связанные с нахождением прообраза и построением коллизий, на сокращенные версии хэш-функции Стрибог. В этой работе авторы предлагают улучшенный алгоритм построения прообраза для сокращенной до 6 раундов функции Стрибог, а также улучшенный алгоритм построения коллизий для сокращенной до 7,5 раундов функции сжатия Стрибог.

Указанные выше работы по исследованию хэш-функции Стрибог посвящены построению криптографических атак на нее, и, насколько нам известно, в открытой печати нет работ, посвященных обоснованию криптографической стойкости данной хэш-функции.

В январе 2009 года Е. Додис (E. Dodis), Т. Ристенпарт (T. Ristenpart) и Т. Шримптон (T. Shrimpton) [5] вводят для функций общего вида понятие стойкости к атаке на прообраз (preimage awareness) и доказывают стойкость в этом смысле некоторых функций сжатия, а также итеративной схемы Меркля–Дамгарда, используя модель идеального шифра.

В нашей работе рассматривается семейство хэш-функций Стрибог в модели идеального шифра и доказывається его стойкость к атаке поиска коллизий и стойкость к атаке поиска прообраза в определениях работы [5].

2. Определения, обозначения и известные результаты

2.1. Определения

Обозначения. Для двух строк x и y будем обозначать через $x||y$ их конкатенацию, а записью x^n будем обозначать конкатенацию n экземпляров вектора x . Для некоторого множества X запись $X \leftarrow x$ обозначает добавление элемента x в множество X , а запись $y \xleftarrow{\$} X$ означает, что в переменную y следует занести случайно выбранное значение из множества X . Если множество X конечно, то будем рассматривать равномерное распределение, а если $X = \{0, 1\}^\infty$, то будем использовать такое распределение, что для любого подмножества

$$Y_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m} = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in \{0, 1\}^\infty \mid \\ y_{i_k} = \sigma_k, \sigma_k \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, m\}$$

вероятность того, что $Y_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m} \ni \alpha \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\infty$, равна $\frac{1}{2^m}$. Для строки x будем обозначать через $|x|$ ее длину. Записью $m_1, m_2, \dots, m_k \xleftarrow{n} M$ будем обозначать разбиение строки M длины $k \cdot n$ на подстроки длины n .

В дальнейшем при построении моделей защищенности нам потребуется также определение достаточно малой функции. Функция $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *достаточно малой*, если для любого полинома $p(\cdot)$ существуют такие $N \in \mathbb{N}$ и $c \in \mathbb{R}$, что для любого $n > N$

$$|\mu(n)| < \frac{c}{p(n)}.$$

Вероятностные машины Тьюринга (МТ). Определим *вероятностную машину Тьюринга* следующим образом. Пусть помимо обычной ленты с входным словом x , доступной машине Тьюринга M и на чтение, и на запись, имеется дополнительная лента, содержащая строку $r \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\infty$

и доступная M только на чтение. Читающая головка данной ленты в начальный момент времени стоит на первом символе этой строки.

Для машины Тьюринга M кроме основного алфавита входа M_A определим некоторый дополнительный алфавит M_I , который будем называть *алфавитом интерфейсов*. Будем считать, что для каждого $i_k \in M_I$ машина M на слове $i_k||a$, где $a \in M_A$, моделирует работу некоторой машины Тьюринга M_{i_k} на слове a . Каждый символ i из алфавита M_I , а также МТ, моделируемую M на слове a , где $a \in M_A$, будем называть *интерфейсом*.

Взаимодействие МТ A и МТ B будем описывать следующим образом. Будем считать, что помимо своих лент у A и B есть общая лента и каждая из МТ имеет к ней доступ на чтение и на запись. Машина A производит вычисления на своем входном слове x_A , затем записывает некоторое сообщение m_1 на общую ленту и переходит в специальное состояние ожидания, запуская тем самым машину B . Машина B производит некоторые вычисления над своим входным словом x_B и сообщением m_1 , записывает на общую ленту сообщение m_2 и переходит в состояние ожидания, запуская МТ A . Если на входных словах x_A, x_B МТ A и B останавливаются и выдают сообщения y_A и y_B соответственно, то пара y_A, y_B называется результатом взаимодействия машин A и B .

Если во взаимодействии машин A и B необходимо выделить машину A как основную, а машину B как зависимую, взаимодействие машин A и B называется *доступом машины A к машине B* , или считается, что МТ A может делать запросы к МТ B . Иногда в таком случае машина B называется *оракулом*. Для МТ A формула $x \Leftarrow A$ обозначает запись вывода A в переменную x , а формула $x \stackrel{\$}{\Leftarrow} A$ — запись вывода в переменную при условии, что МТ A может быть вероятностной. Возможность доступа некоторой МТ A к МТ $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ обозначается $A^{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots}$. Будем писать $A \Rightarrow a$ для обозначения события, при котором МТ A вывела значение a . Под словами *МТ B запускает МТ A , перенаправляя запросы МТ A к оракулу P_A на вход оракулу P_B* , подразумевается следующий процесс: МТ B имеет доступ к машине A , у которой общая лента с машиной P_A заменена на общую ленту с машиной P_B . *Эффективным по параметру k алгоритмом* называется алгоритм, выполняющийся за полиномиальное по параметру k время. Под словами «алгоритм» и «процедура» в дальнейшем понимается некоторая машина Тьюринга, возможно вероятностная.

Для алгоритма f , получающего на вход строку из некоторого непустого множества $Dom \subseteq \{0, 1\}^*$, определяется $Time(f, m)$ как максимальное время работы алгоритма $f(x)$ для любого такого входа $x \in Dom$, что $|x| \leq m$. Ес-

ли второй аргумент опускается, то $Time(f)$ рассматривается как максимальное время работы для всех возможных входов $x \in Dom$. Под обозначением $Time(f(x))$ понимается время работы f на строке $x \in Dom$. При подсчете времени работы МТ A время ожидания ответа от оракула B будем считать одним тактом работы МТ A .

Идеальные примитивы. Под *идеальным примитивом* подразумевается некоторая (возможно, вероятностная) машина Тьюринга. Данное определение используется, чтобы подчеркнуть использование этой машины Тьюринга в построении более сложных конструкций (см. [5, с. 7]).

Для фиксированных множеств Dom, Rng случайным оракулом $\mathcal{F}_{Dom, Rng}$ называется идеальный примитив, действующий следующим образом. При первом запросе у оракула $\mathcal{F}_{Dom, Rng}$ некоторого значения $x_i \in Dom$ он сопоставляет ему некоторое случайно выбранное значение $y_i \in Rng$ и возвращает y_i . При повторном запросе x_i возвращается соответствующий ему y_i . Если $Dom = \{0, 1\}^n$ или множество $Rng = \{0, 1\}^k$, то соответствующие обозначения в индексе заменяются на n и k соответственно, т. е. вместо $\mathcal{F}_{Dom, Rng}$ пишется $\mathcal{F}_{n, k}$.

Модель идеального шифра. Для любых натуральных n и k обозначим

$$BC(k, n) = \{E: \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}^n: \forall K \in \{0, 1\}^k \\ E(\cdot, K) \text{ является биективным на множестве } \{0, 1\}^n\}.$$

Идеальным шифром называется идеальный примитив $C_{k, n} = (E, D)$ с двумя интерфейсами, реализующими соответственно преобразование $E(x, k) = y$, случайно выбранное из $BC(k, n)$, и обратное ему преобразование $D(y, k) = x$ (см. [5, с. 7]).

Хэш-функции. Пусть $Dom \subseteq \{0, 1\}^*$ — непустое множество строк, а Rng — некоторое непустое множество (обычно $\{0, 1\}^n$). *Хэш-функцией* называется алгоритм, который вычисляет отображение $H: Dom \rightarrow Rng$. В данной статье мы будем рассматривать хэш-функции, использующие некоторый идеальный примитив P . Чтобы подчеркнуть эту зависимость, будем писать H^P . Для некоторых $n, d > 0$ хэш-функцию $f^P: \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^d \rightarrow \{0, 1\}^n$ будем называть *функцией сжатия*.

Семейством хэш-функций будем называть некоторое нумерованное множество хэш-функций $\mathcal{H}$, в котором для любого $n \in \mathbb{N}$ определена хэш-функция $H_n \in \mathcal{H}$, осуществляющая отображение $H_n: Dom \rightarrow \{0, 1\}^n$, где $Dom \subseteq \{0, 1\}^*$.

О противнике. Будем называть *противником* для семейства хэш-функций $\mathcal{H} = \{H_n \mid H_n : Dom \rightarrow \{0, 1\}^n\}$ эффективную по параметру n вероятностную машину Тьюринга A , на вход которой подается параметр n . При рассмотрении работы противника время обращения к другим машинам Тьюринга будем считать равным одному такту работы противника. В зависимости от задачи вывод противника A может различаться.

Напомним некоторые определения, которые Е. Додис, Т. Ристенпарт и Т. Шримптон ввели в работе [5].

Устойчивость к коллизиям (CR). Зафиксируем множество $Dom \subseteq \{0, 1\}^*$, и пусть A — противник, выводящий две строки: $x, x^* \in Dom$ (CR-противник). Пусть P — идеальный примитив. Для семейства хэш-функций $\mathcal{H}^P = \{H_n^P \mid H_n^P : Dom \rightarrow \{0, 1\}^n\}$ и противника A *CR-преимущество* определяется как

$$Adv_{H_n^P, P}^{cr}(A) = Pr \left[(x, x^*) \stackrel{\$}{\leftarrow} A^P : H_n^P(x) = H_n^P(x^*) \wedge x \neq x^* \right].$$

Если $Adv_{H_n^P, P}^{cr}(A)$ как функция от n достаточно мало для любого противника A , то семейство функций $\mathcal{H}^P$ называется *CR-защищенным*, или *устойчивым к коллизиям*. В понимании данного определения может помочь рисунок 1.

Рис. 1. Устойчивость к коллизиям.

Неотличимость. Пусть $\hat{\mathcal{H}}^P$ — семейство хэш-функций, которое использует идеальный примитив P и отображает множество Dom в множество $\{0, 1\}^n$, а $\mathcal{H}^Q$ — другое семейство хэш-функций, которое использует идеальный примитив Q и также отображает множество Dom в множество $\{0, 1\}^n$. Семейство $\hat{\mathcal{H}}^P$ называется *неотличимым (indifferentiable)* от $\mathcal{H}^Q$, если существует такой симулятор (MT) S , симулирующий поведение P , который может делать запросы к Q , что для любого противника A , выводящего 1 или 0

(PRO-противника), *indiff-преимущество*

$$Adv_{\hat{H}_n^P, H_n^Q, S}^{indiff}(A) = \left| Pr \left[A^{\hat{H}_n^P, P} \Rightarrow 1 \right] - Pr \left[A^{H_n^Q, S} \Rightarrow 1 \right] \right|$$

как функция от n достаточно мало для любого противника A . Если преимущество $Adv_{\hat{H}_n^P, H_n^Q, S}^{indiff}(A)$ достаточно мало, то можно использовать $\hat{\mathcal{H}}^P$ вместо $\mathcal{H}^Q$ с точностью до оценки неотличимости.

PRO-защищенность (неотличимость от случайного оракула) семейства хэш-функций $\mathcal{H}^P = \{H_n^P \mid H_n^P : Dom \rightarrow \{0, 1\}^n\}$ определяется следующим образом: заменим в приведенном выше определении $\mathcal{H}^Q$ семейством случайных оракулов $\mathcal{F}_{Dom, n}$, т. е. положим $H_n^Q = Q = \mathcal{F}_{Dom, n}$. Определим PRO-преимущество как $Adv_{H_n^P, S}^{PRO}(A) = Adv_{H_n^P, \mathcal{F}_{Dom, n}, S}^{indiff}(A)$. Иначе говоря,

$$Adv_{H_n^P, S}^{PRO}(A) = \left| Pr \left[A^{H_n^P, P} \Rightarrow 1 \right] - Pr \left[A^{\mathcal{F}_{Dom, n}, S} \Rightarrow 1 \right] \right|,$$

где симулятор S может делать запросы к $\mathcal{F}_{Dom, n}$. Если для любого противника A преимущество $Adv_{H_n^P, S}^{PRO}(A)$ достаточно мало как функция от n , будем называть $\mathcal{H}^P$ неотличимым от случайного оракула, или PRO-защищенным.

PGV-схемы первого типа. В своей работе Мартин Стэм (Martijn Stam) [6] предложил классификацию функций сжатия, основанных на использовании блочных шифров. Он заметил, что эти функции, получая на вход переменную сцепления $v \in \{0, 1\}^n$ и блок сообщения $m \in \{0, 1\}^d$, используют их следующим образом:

$$\begin{aligned} & \boxed{f^E(v, m):} \\ & (k, x) \leftarrow C^{PRE}(v, m); \\ & y \leftarrow E(k, x); \\ & Ret \ w \leftarrow C^{POST}(v, m, y), \end{aligned}$$

где $C^{PRE} : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^d \rightarrow \{0, 1\}^d \times \{0, 1\}^n$ — функция предобработки, $E(k, x)$ — блочный шифр, а $C^{POST} : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^d \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ — функция постобработки. Стэм определил также вспомогательную функцию постобработки $C^{AUX}(k, x, y) : \{0, 1\}^d \times \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$, которая выполняет преобразование $C^{AUX}(k, x, y) = C^{POST}(C^{-PRE}(k, x), y)$, где C^{-PRE} обозначает обратную к C^{PRE} функцию, если C^{PRE} является биективным отображением. В данных обозначениях предполагается существование эффективных по n алгоритмов, реализующих функции C^{PRE} , C^{-PRE} и C^{POST} .

Стэм назвал функцию сжатия *PGV-схемой типа 1*, если:

- 1) C^{PRE} является биективным отображением;
- 2) для любых v, m отображение $C^{POST}(v, m, \cdot)$ является биективным;
- 3) для любых k, y отображение $C^{AUX}(k, \cdot, y)$ является биективным.

Когда выполняются сформулируемые условия, через $C^{-POST}(v, m, \cdot)$ и $C^{-AUX}(k, \cdot, y)$ обозначим функции, обратные к $C^{POST}(v, m, \cdot)$ и $C^{AUX}(k, \cdot, y)$ соответственно.

Стойкость к атаке поиска прообраза. Будем использовать следующее понятие стойкости к атаке поиска прообраза [5]. Зафиксируем множество $Dom \subseteq \{0, 1\}^*$, и пусть A — противник, выводящий строку $x \in Dom$. Рассмотрим $Pr [\mathbf{Exp}_{H,P,\mathcal{E},A}^{pra} \Rightarrow true]$, где процедура $\mathbf{Exp}_{H,P,\mathcal{E},A}^{pra}$ описана следующей последовательностью действий:

$\mathbf{Exp}_{H,P,\mathcal{E},A}^{pra}$	oracle $P(m)$:	oracle $\mathcal{E}x(z)$:
$x \xleftarrow{\$} A^{P,\mathcal{E}x}$	$c \leftarrow P(m)$	$Q[z] \leftarrow 1$
$z \leftarrow H^P(x)$	$\alpha \leftarrow \alpha (m, c)$	$V[z] \leftarrow \mathcal{E}(z, \alpha)$
$Ret ((x \neq V[z]) \ \& \ (Q[z] = 1))$	$Ret \ c$	$Ret \ V[z]$

Противник A (PrA-противник) имеет доступ к двум оракулам. Во-первых, к оракулу P , который предоставляет доступ к идеальному примитиву P и, кроме того, сохраняет все запросы и ответы на запросы в строку состояния α . Если P предоставляет доступ к нескольким примитивам, то из строки состояния понятно, к какому именно примитиву был сделан запрос. Во-вторых, к оракулу $\mathcal{E}x$, который предоставляет доступ к экстрактору $\mathcal{E}$. *Экстрактором* $\mathcal{E}$ называется детерминированный алгоритм, который получает на вход точку $z \in Rng$ и строку состояния α и возвращает точку $x \in Dom \cup \{\perp\}$, где $\perp \notin Dom$ — некоторый символ. Оракул $\mathcal{E}x$ использует два массива $Q[z]$ и $V[z]$, которые в начальный момент времени для любого $z \in Rng$ равны $\perp$. Массив $Q[z]$ определяет уже запрошенные у $\mathcal{E}x$ точки из Rng , а $V[z]$ — результат, который вернул экстрактор $\mathcal{E}$. В дальнейшем мы будем рассматривать «честные» экстракторы, то есть такие, что если x является выводом экстрактора на некотором наборе $(z \in Rng, \alpha)$, то либо $x = \perp$, либо $H^P(x) = z$. Схематически взаимодействие машин Тьюринга можно представить в виде следующего рис. 2.

Для семейства хэш-функций $\mathcal{H}^P = \{H_n^P \mid H_n^P : Dom \rightarrow \{0, 1\}^n\}$, противника A и экстрактора $\mathcal{E}$ авторы статьи [5] определяют *PRA-преимущество*

Рис. 2. Стойкость к атаке поиска прообраза.

как

$$Adv_{H_n,P,\mathcal{E}}^{PrA}(A) = Pr \left[\mathbf{Exp}_{H_n,P,\mathcal{E},A}^{pra} \Rightarrow true \right].$$

Предполагается, что противник никогда не делает запрос за пределы области определения соответствующего оракула. Если существует такой эффективный по n экстрактор $\mathcal{E}$, что для любого возможного противника A преимущество $Adv_{H_n,P,\mathcal{E}}^{PrA}(A)$ достаточно мало как функция от n , то семейство хэш-функций $\mathcal{H}$ называется *стойким к атаке поиска прообраза*, или *PrA-защищенным*.

При рассмотрении данной конструкции будем называть *победой* PRA-противника A событие, в результате которого $\mathbf{Exp}_{H,P,\mathcal{E},A}^{pra} \Rightarrow true$.

2.2. Используемые теоремы

Свойство стойкости к атаке на прообраз является более сильным, чем свойство устойчивости к коллизиям, но более слабым, чем свойство неотличимости от случайного оракула. В работе [5] показано, что, во-первых, устойчивость к коллизиям следует из стойкости к атаке поиска прообраза, а во-вторых, что случайный оракул также является стойким к атаке поиска прообраза. Более формально: имеют место следующие 4 леммы.

Лемма 1 (теорема 3.1 из [5] ($PrA \Rightarrow CR$)). Пусть P — идеальный примитив и $\mathcal{H} = \{H_n \mid H_n : Dom \rightarrow \{0, 1\}^n\}$ — семейство хэш-функций. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторый экстрактор. Пусть A — CR-противник против $\mathcal{H}$, делающий

всего q_P запросов к P и выводящий сообщения длиной не более $l_{\max}$. Тогда существует такой PrA -противник B , что

$$\text{Adv}_{H_n, P}^{cr}(A) \leq \text{Adv}_{H_n, P, \mathcal{E}}^{PrA}(B).$$

При этом $\text{Time}(B) = \text{Time}(A) + \mathcal{O}(q_P) + \text{Time}(H_n, l_{\max})$, B делает не более q_P запросов к P и один запрос к экстрактору.

Лемма 2 (теорема 3.2 из [5] (случайный оракул $\Rightarrow \text{PrA}$)). Пусть $\text{Dom} \subseteq \{0, 1\}^*$ и $n > 0$. Пусть $P_n = \mathcal{F}_{\text{Dom}, n}$. Тогда семейство хэш-функций $\mathcal{H} = \{P_n\}$ является стойким к атаке поиска прообраза. В частности, существует такой экстрактор $\mathcal{E}$, что для любого противника A , делающего q_P запросов к P и q_e запросов к экстрактору $\mathcal{E}$, выполняется неравенство

$$\text{Adv}_{H_n, \mathcal{E}}^{PrA}(A) \leq \frac{q_e q_P}{2^n} + \frac{q_P^2}{2^n}.$$

При этом $\text{Time}(\mathcal{E}) = \mathcal{O}(q_e + q_P)$.

Лемма 3 (теорема 5.1 из [5] (PGV-схема типа 1 $\Rightarrow \text{PrA}$)). Зафиксируем $k, n > 0$, пусть $C_{k, n} = (E, D)$ — идеальный шифр и пусть $\mathcal{H} = \{H^{C_{k, n}}\}$ — семейство PGV-схем типа 1, основанных на блоковом шифре. Тогда существует такой экстрактор $\mathcal{E}$, что для любого противника A , делающего не более q_P запросов к $C_{k, n}$ и q_e запросов к экстрактору $\mathcal{E}$, будет выполняться следующее неравенство:

$$\text{Adv}_{H_n, C_{k, n}, \mathcal{E}}^{PrA}(A) \leq \frac{q_e q_P}{2^n - q_P} + \frac{q_P(q_P + 1)}{2(2^n - q_P)}.$$

При этом $\text{Time}(\mathcal{E}) = \mathcal{O}(q_P(\text{Time}(C^{-PRE}) + \text{Time}(C^{POST})))$.

Лемма 4 (теорема 4.1 из [5]). Пусть P — идеальный примитив и $\mathcal{H}^P$ — семейство хэш-функций. Пусть R — идеальный примитив с двумя интерфейсами, которые предоставляют выполнение P и $\mathcal{R} = \mathcal{F}_{\text{Rng}, \text{Rng}}$. Определим $F_R(M)_n = \mathcal{R}(H_n^P(M))$. Пусть $\mathcal{E}$ — произвольный экстрактор для $\mathcal{H}^P$. Тогда существует такой симулятор (MT) $S = (S_1, S_2)$, что для каждого PRO-противника A , делающего не более (q_0, q_1, q_2) запросов к оракулам (F_R, R, S) , существует такой PrA -противник B , что

$$\text{Adv}_{F_R, S}^{PRO}(A) \leq \text{Adv}_{\mathcal{H}, P, \mathcal{E}}^{PrA}(B).$$

При этом $\text{Time}(S) = \mathcal{O}(q_1 + q_2 \cdot \text{Time}(\mathcal{E}))$. Пусть $l_{\max}$ — максимальная длина (в битах) запроса, сделанного A к своему первому оракулу F_R . Противник B делает $q_1 + q_0 \cdot \text{NumQueries}(\mathcal{H}, l_{\max})$ запросов к идеальному примитиву P , q_2 запросов к экстрактору $\mathcal{E}$ и выводит строку длины не более $l_{\max}$.

При этом $Time(B) = Time(A) + O(q_0 \cdot Time(H_n, l_{\max}) + q_1 + q_2)$. Здесь под $NumQueries(H, l_{\max})$ понимается максимальное количество обращений функции H к примитиву P на входе длины не более $l_{\max}$.

3. ГОСТ Р 34.11-2012

3.1. Определение

Приведем формальное описание хэш-функции ГОСТ Р 34.11-2012 из [1]. Рассмотрим функцию сжатия

$$g_N(v, m) = E(L \circ P \circ S(v \oplus N), m) \oplus v \oplus m \mid \{0, 1\}^{512} \times \{0, 1\}^{512} \rightarrow \{0, 1\}^{512}.$$

Здесь L — умножение слева на некоторую матрицу над полем $GF(2)$, P — некоторая перестановка байт, S — нелинейное биективное отображение байт.

Блочный шифр E определяется следующим образом:

$$E(k, m) = X[K_{13}] \circ \prod_{i=1}^{12} L \circ P \circ S \circ X[K_i](m),$$

где $X[K](m) = m \oplus K$, а раундовые ключи вычисляются по формуле

$$K_i = L \circ P \circ S(C_{i-1} \oplus K_{i-1}),$$

$K_0 = k$, C_i — некоторые константы, описанные в [1].

Процедуру вычисления хэш-значения сообщения M хэш-функцией ГОСТ Р 34.11-2012 можно описать с использованием следующего алгоритма GOST:

```

GOST
 $M_1 \leftarrow M || 1 || 0^{511 - (Len \bmod 512)} || Len || Sum$ 
 $m_1, m_2, \dots, m_k \xleftarrow{512} M_1$ 
 $N = 0; v_1 = IV;$ 
for  $i = 1$  to  $k - 2$  do
     $v_{i+1} = g_N(v_i, m_i)$ 
     $N = N + 512$ 
 $v_k = g_0(v_{k-1}, m_{k-1})$ 
 $v_{k+1} = g_0(v_k, m_k)$ 
return  $v_{k+1}$ 

```

Здесь через $Len \in \{0, 1\}^{512}$ обозначена длина сообщения M , а через $Sum \in \{0, 1\}^{512}$ — сумма блоков длины 512 и оставшегося блока длиной $|M| - (k - 3) \cdot 512$ сообщения M по модулю 2^{512} , при этом используется естественное взаимно-однозначное соответствие элементов множества $\{0, 1\}^{512}$ и кольца вычетов $\mathbb{Z}_{2^{512}}$.

Данная процедура при значении $IV = 0^{512}$ реализует алгоритм хэш-функции ГОСТ Р 34.11-2012 с длиной хэш-кода 512 бит. Для получения длины хэш-кода 256 бит используется значение инициализационного вектора $IV = (00000001)^{64}$, а вместо значения v_{k+1} выдаются его старшие 256 бит.

3.2. Построение семейства хэш-функций $\mathcal{GOST}$

Определим семейство хэш-функций $\mathcal{GOST}$, построенное на основе функции ГОСТ Р 34.11-2012. Для функций $GOST_{512} \in \mathcal{GOST}$ и $GOST_{256} \in \mathcal{GOST}$ положим их равными процедуре GOST с соответствующим размером выходного сообщения и значением IV , при условии замены функции E идеальным шифром. Для остальных натуральных n для построения функций $GOST_n \in \mathcal{GOST}$ рассмотрим семейство функций сжатия

$$\{g_N(v, m)_n\} = \{E(L_n \circ P_n \circ S_n(v \oplus N), m) \oplus v \oplus m \mid \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n\},$$

где L_n, P_n, S_n — некоторые биективные преобразования на $\{0, 1\}^n$, а E — функция, реализуемая первым интерфейсом идеального шифра, отображающая $\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$. На основе этого построим алгоритм, реализующий функцию $GOST_n : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^n$:

```

GOSTn
 $M_1 \leftarrow M || 1 || 0^{n-1-(Len \bmod n)} || Len || Sum$ 
 $m_1, m_2, \dots, m_k \xleftarrow{n} M_1$ 
 $N = 0; v_1 = IV;$ 
for  $i = 1$  to  $k - 2$  do
     $v_{i+1} = g_N(v_i, m_i)_n$ 
     $N = N + n$ 
 $v_k = g_0(v_{k-1}, m_{k-1})_n$ 
 $v_{k+1} = g_0(v_k, m_k)_n$ 
return  $v_{k+1}$ 

```

Здесь через $Len \in \{0, 1\}^n$ обозначена длина сообщения M , а через $Sum \in \{0, 1\}^n$ — сумма блоков длины n и оставшегося блока длиной $|M| - (k - 3) \cdot n$ сообщения M по модулю 2^n , при этом используется естественное

взаимно-однозначное соответствие элементов множества $\{0, 1\}^n$ и кольца вычетов $\mathbb{Z}_{2^{512}}$. Сообщение M_1 в дальнейшем будем называть дополнением сообщения M . Схематически процесс вычисления функции $GOST_n$ можно описать рисунком 3.

Рис. 3. Вычисление функции $GOST_n$.

3.3. Стойкость $GOST$ к атаке поиска прообраза и атаке поиска коллизий

Покажем, что семейство хэш-функций $GOST$ является стойким к атаке поиска прообраза.

Функция $g_0(v, m)_n$ удовлетворяет следующим условиям:

- $C^{PRE}(v, m) = (L_n \circ P_n \circ S_n(v), m)$ является биективным отображением;
- $C^{POST}(v, m, y) = y \oplus v \oplus m$ является биективным отображением относительно переменной y ;
- $C^{AUX}(k, x, y) = y \oplus x \oplus S_n^{-1} \circ P_n^{-1} \circ L_n^{-1}(k)$ является биективным отображением относительно переменной x .

Следовательно, функция сжатия $g_0(v, m)_n$ является PGV-схемой типа 1, а значит, является стойкой к атаке поиска прообраза согласно лемме 3.

В дальнейшем нам также понадобится следующее свойство функции $g_N(\cdot, \cdot)_n$: $g_N(v, m)_n = g_0(v \oplus N, m)_n \oplus N$.

Теорема 3.1. Для любого эффективного по n экстрактора $\mathcal{E}_g$ для семейства функций $\{g_0(v, m)_n\}$ существует такой эффективный по n экстрактор $\mathcal{E}_G$ для семейства функций $GOST$, что для любого PRA-противника A , делающего не более q_p запросов к идеальному примитиву E

и q_e запросов к экстрактору $\mathcal{E}_G$ и при любом n выводящего сообщение длиной не более $l_{\max}(n) \cdot n \leq 2^n$ символов, где $l_{\max}(n)$ — некоторая полиномиальная по n функция, существует такой PRA-противник B , что

$$\text{Adv}_{\text{GOST}_n, E, \mathcal{E}_G}^{\text{PrA}}(A) \leq \text{Adv}_{g_0(v, m)_n, E, \mathcal{E}_g}^{\text{PrA}}(B).$$

При этом противник B делает не более $q_p + l_{\max}(n) + 2$ запросов к идеальному примитиву E и не более $q_e \cdot (l_{\max}(n) + 2)$ запросов к экстрактору $\mathcal{E}_g$.

Доказательство. Построим на основе экстрактора $\mathcal{E}_g$ экстрактор $\mathcal{E}_G$ для семейства функций GOST :

```

 $\boxed{\mathcal{E}_G(z, \alpha)}$ 
 $(v_1, m_1) \leftarrow \mathcal{E}_g(z, \alpha);$ 
if  $(v_1, m_1) = \perp$  then Ret  $\perp$ ;
 $(v_2, m_2) \leftarrow \mathcal{E}_g(v_1, \alpha);$ 
if  $(v_2, m_2) = \perp$  then Ret  $\perp$ ;
 $i = 3; N = m_2 - (m_2 \bmod n);$ 
if  $N > n \cdot (l_{\max}(n) + 2)$  then Ret  $\perp$ ;
while  $N \geq 0$  do
   $(v_i, m_i) \leftarrow \mathcal{E}_g(v_{i-1} \oplus N, \alpha);$ 
  if  $(v_i, m_i) = \perp$  then Ret  $\perp$ ;
   $i = i + 1;$ 
   $v_i = v_i \oplus N;$ 
   $N = N - n;$ 
if  $v_i \neq IV$  then Ret  $\perp$ ;
 $M \leftarrow \text{unpad}(m_i || m_{i-1} || \dots || m_1);$ 
Ret  $M;$ 

```

Рассмотрим данный псевдокод подробнее. Экстрактор $\mathcal{E}_G$ принимает на вход строку $z \in \{0, 1\}^n$ и строку состояния α . Затем он вычисляет $(v_1, m_1) \leftarrow \mathcal{E}_g(z, \alpha)$. Если $\mathcal{E}_g$ возвращает $\perp$, то $\mathcal{E}_G$ выдает $\perp$ и завершает свою работу. Если нет, то вычисляется следующее значение $(v_2, m_2) \leftarrow \mathcal{E}_g(v_1, \alpha)$. Заметим, что в случае удачной работы экстрактора $\mathcal{E}_G$ символ m_1 будет обозначать сумму блоков выводимого сообщения M , а m_2 — длину сообщения M . Если $\mathcal{E}_g$ возвращает $\perp$, то $\mathcal{E}_G$ выдает $\perp$ и завершает свою работу. Иначе $\mathcal{E}_G$ вычисляет $N = m_2 - (m_2 \bmod n)$ и запускает цикл, в котором последовательно вычисляет (v_i, m_i) с помощью свойства $g_N(h, m) = g_0(h \oplus N, m) \oplus N$ и экстрактора $\mathcal{E}_g$ функции сжатия g_0 . Если в какой-то момент $\mathcal{E}_g$ возвращает $\perp$, то $\mathcal{E}_G$ выдает $\perp$ и завершает свою работу. В противном случае $\mathcal{E}_G$ по окончании цикла запускает функцию $\text{unpad}(m_i || m_{i-1} || \dots || m_1)$, которая проверяет,

могло ли получиться сообщение $\hat{M} = (m_i || m_{i-1} || \dots || m_1)$ из некоторого сообщения M в результате процедуры дополнения (padding) входного сообщения, то есть $\hat{M} = (M || 1 || 0^{n-1-(Len \bmod n)} || Len || Sum)$, и возвращает M , если могло, и $\perp$, если нет. По завершении работы функции $unpad(\hat{M})$ экстрактор $\mathcal{E}_G$ возвращает результат ее работы. Экстрактор $\mathcal{E}_G$ является эффективным по n алгоритмом, так как производит не более $l_{\max}(n) + 2$ полиномиальных по n действий в цикле и полиномиален по n вне цикла. Первое утверждение следует из ограничения $N \geq n \cdot (l_{\max}(n) + 2)$ (в противном случае не будет выполняться условие входа в цикл), второе очевидно из построения $\mathcal{E}_G$.

Теперь построим противника B (псевдокод 2), используя противника A и процедуру $Sim\mathcal{E}_G$ (псевдокод 1). В дальнейшем оракулы Ex_A и Ex_B — это оракулы экстракторов, возникающие в экспериментах $Exp_{GOST_n, E, \mathcal{E}_G, A}^{pra}$ и $Exp_{g_0, E, \mathcal{E}_g, B}^{pra}$ соответственно.

$Sim\mathcal{E}_G(z, \alpha)$

$$\begin{aligned}
 &(v_1, m_1) \leftarrow Ex_B(z, \alpha); \\
 &\hat{Q}[z] = 1; \hat{V}[z] = (v_1, m_1); \\
 &if (v_1, m_1) = \perp then Ret \perp; \\
 &(v_2, m_2) \leftarrow Ex_B(v_1, \alpha); \\
 &\hat{Q}[v_1] = 1; \hat{V}[v_1] = (v_2, m_2); \\
 &if (v_2, m_2) = \perp then Ret \perp; \\
 &i = 3; N := m_2 - (m_2 \bmod n); \\
 &if N > n \cdot (l_{\max}(n) + 2) then Ret \perp; \\
 &while N \geq 0 do \\
 &\quad (v_i, m_i) \leftarrow Ex_B(v_{i-1} \oplus N, \alpha); \\
 &\quad \hat{Q}[v_{i-1} \oplus N] = 1; \hat{V}[v_{i-1} \oplus N] = (v_i, m_i); \\
 &\quad if (v_i, m_i) = \perp then Ret \perp; \\
 &\quad v_i = v_i \oplus N; i = i + 1; \\
 &\quad N = N - n; \\
 &if v_i \neq IV then Ret \perp; \\
 &M \leftarrow unpad(m_i || m_{i-1} || \dots || m_1); \\
 &Ret M;
 \end{aligned}$$

Псевдокод 1. Процедура $Sim\mathcal{E}_G$

Рассмотрим подробнее устройство противника B и процедуры $Sim\mathcal{E}_G$. Сначала B запускает противника A , перенаправляя его запросы к оракулу экстрактора Ex_A на вход процедуре $Sim\mathcal{E}_G$. Процедура $Sim\mathcal{E}_G$ действует так же, как и экстрактор $\mathcal{E}_G$, за исключением того, что все запросы к экстрактору $\mathcal{E}_g$

$Adversary\ B^{E, Ex_B}(\mathcal{E})$

$$\begin{aligned}
&M^* \xleftarrow{\$} A^{E, Sim\mathcal{E}_G} \\
&\hat{M}^* \leftarrow M^* || 1 || 0^{n-1-(|M^*| \bmod n)} || |M^*| || Sum \\
&m_k^*, m_{k-1}^*, \dots, m_1^* \xleftarrow{n} \hat{M}^* \\
&N = 0; v_k = IV; \\
&\text{for } i = k \text{ downto } 3 \text{ do} \\
&\quad v_{i-1}^* = g_0(v_i^* \oplus N, m_i^*) \oplus N \\
&\quad \text{if } \hat{Q}[v_{i-1}^* \oplus N] = 1 \text{ and } \hat{V}[v_{i-1}^* \oplus N] \neq (v_i^* \oplus N, m_i^*) \\
&\quad \quad \text{then Ret } (v_i^* \oplus N, m_i^*); \\
&\quad N = N + n; \\
&v_1 = g_0(v_2, m_2); \\
&\text{if } \hat{Q}[v_1^*] = 1 \text{ and } \hat{V}[v_1^*] \neq (v_2^*, m_2^*) \\
&\quad \text{then Ret } (v_2^*, m_2^*); \\
&v_0 = g_0(v_1, m_1); \\
&\text{if } \hat{Q}[v_0^*] = 1 \text{ and } \hat{V}[v_0^*] \neq (v_1^*, m_1^*) \\
&\quad \text{then Ret } (v_1^*, m_1^*); \\
&\text{Ret res } \xleftarrow{\$} Dom;
\end{aligned}$$

Псевдокод 2. Противник B

заменяются запросами к оракулу Ex_B , а результат каждого запроса к этому оракулу сохраняется в массивах $\hat{Q}[\ ]$ и $\hat{V}[\ ]$. Затем B производит хэширование выведенного противником A сообщения, после каждого обращения к функции сжатия проверяя истинность вывода процедуры $\mathbf{Exp}_{g_0, E, \mathcal{E}_g, B}^{pra}$. Докажем теперь, что $Adv_{GOST_n, E, \mathcal{E}_g}^{PrA}(A) \leq Adv_{g_0(v, m)_n, E, \mathcal{E}_g}^{PrA}(B)$.

Обозначим через Ω событие, при котором $A^{E, \mathcal{E}_g}$ выведет сообщение, приводящее к его победе, то есть $\Omega = \{\mathbf{Exp}_{GOST_n, E, \mathcal{E}_g, A}^{pra} \Rightarrow true\}$. Из построения процедуры $Sim\mathcal{E}_G$ и определения стойкости к атаке поиска прообраза следует, что

$$\begin{aligned}
Pr[\Omega] &= Pr[\mathbf{Exp}_{GOST_n, E, \mathcal{E}_g, A}^{pra} \Rightarrow true] = \\
&= Pr[\mathbf{Exp}_{GOST_n, E, Sim\mathcal{E}_G, A}^{pra} \Rightarrow true] = Adv_{GOST_n, E, \mathcal{E}_g}^{PrA}(A).
\end{aligned}$$

Второе равенство в цепочке следует из того, что экстрактор $\mathcal{E}_g$ выдает такой же ответ, как и оракул Ex_B .

Покажем, что $Pr[\Omega] \leq Adv_{g_0(v, m)_n, E, \mathcal{E}_g}^{PrA}(B)$. Рассмотрим элементарное событие $\omega \in \Omega$. Так как $\omega \in \Omega$, то противник A выведет некоторое сообще-

ние M^* , приводящее к его победе, в процессе работы МТ $\text{Exp}_{GOST_n, E, \text{Sim}\mathcal{E}_G, A}^{pra}$. Из условия $\text{Exp}_{GOST_n, E, \text{Sim}\mathcal{E}_G, A}^{pra} \Rightarrow \text{true}$ следует, что $GOST(M^*)$ запрашивалось у $\text{Sim}\mathcal{E}_G$ и было возвращено такое сообщение M , что $M \neq M^*$. Тогда рассмотрим сообщения $\hat{M} = (m_k || m_{k-1} || \dots || m_1)$ и $\hat{M}^* = (m_l^* || m_{l-1}^* || \dots || m_1^*)$ — дополнения сообщений M и M^* соответственно. Из определения семейства хэш-функций $GOST$ следует, что $k > 2$ и $l > 2$. Докажем, что существует такое $s \leq \min\{k, l\}$, что $m_s^* \neq m_s$. Пусть данное условие не выполняется. Тогда $m_1^* = m_1$ и $m_2^* = m_2$, т.е. длины сообщений M и M^* равны, следовательно, $\min\{k, l\} = k = l$. Так как по предположению для каждого $i \leq \min\{k, l\}$ имеет место равенство $m_i = m_i^*$, то сообщения M и M^* совпадают, что противоречит событию ω .

Так как из неравенства $m_s^* \neq m_s$ следует, что для любого $v \in \{0, 1\}^n$ имеет место неравенство $(v, m_s^*) \neq (v, m_s)$, то существует такое $1 \leq s < 3$, что $(v_s^*, m_s^*) \neq (v_s, m_s)$, или существует такое $3 \leq s \leq \min\{k, l\}$, что $(v_s^* \oplus N, m_s^*) \neq (v_s, m_s)$. Пусть r — максимальное из таких значений s . Если $v_{r-1}^* = v_{r-1}$, то возврат пары $(v_r^* \oplus N, m_r^*)$ обеспечивает истинность вывода процедуры $\text{Exp}_{g_0, E, \mathcal{E}_G, B}^{pra}$, потому что v_{r-1} запрашивалось у Ex_B и было возвращено значение (v_r, m_r) , а $(v_r^* \oplus N, m_r^*) \neq (v_r, m_r)$, хотя $g_0(v_r, m_r)_n = g_0(v_r^* \oplus N, m_r^*)_n$. Если же нет, то рассмотрим следующую пару с $r = s - 1$. Тогда $(v_{s-1}^* \oplus N, m_{s-1}^*) \neq (v_{s-1}, m_{s-1})$. Если $v_{s-2}^* = v_{s-2}$, то возврат пары $(v_{s-1}^* \oplus N, m_{s-1}^*)$ снова обеспечивает победу B . В противном случае продолжаем уменьшать индекс r и рассматривать пары (v_r, m_r) . В какой-то момент $v_r^* = v_r$ (в противном случае $GOST(M) \neq GOST(M^*)$, так как $v_0^* = GOST(M^*)$, а $v_0 = GOST(M)$). Тогда возврат пары $(v_{r+1}^* \oplus N, m_{r+1}^*)$ для $r > 1$ или пары (v_{r+1}^*, m_{r+1}^*) для $r \leq 1$ обеспечивает победу B . Изменения в случае $r \leq 1$ связаны с тем, что последние два блока соответствующих сообщений обрабатываются функцией сжатия $g_0(v, m)_n$, а не $g_N(v, m)_n$. Отсюда получаем, что

$$\text{Adv}_{g, E, \mathcal{E}_G}^{PrA}(B) \geq \Pr[\omega] = \text{Adv}_{G, E, \mathcal{E}_G}^{PrA}(A).$$

Теперь докажем эффективность по n построенной нами МТ B . Противник B состоит из двух частей. Первая — это запуск противника A . Так как A по определению противника является эффективным по n алгоритмом, то эта часть эффективна по n . В ходе запуска противника A происходит не более q_p запросов к идеальному примитиву E и не более $q_e \cdot (l_{\max}(n) + 2)$ запросов к экстрактору $\mathcal{E}_g$, так как при каждом запросе противника A к процедуре $\text{Sim}\mathcal{E}_G$ происходит не более $(l_{\max}(n) + 2)$ запросов к Ex_B . Иначе противник A мог бы возвращать сообщение длиной более $l_{\max}(n) \cdot n$, что противоречит условию теоремы. Во второй части МТ B производит хэширование полученного на

первом этапе сообщения M^* длины не более $l_{\max}(n) \cdot n$. Для преобразования с помощью функции сжатия одного блока сообщения и одного вспомогательного блока требуется один запрос к идеальному примитиву E . Так как длина сообщения M^* не больше $l_{\max}(n) \cdot n$, то хэширование потребует не более $(l_{\max}(n) + 2)$ запросов к идеальному примитиву E . Так как противник A может выводить сообщения не более чем полиномиальной по n длины, то и вторая часть B полиномиальна по n . Отсюда получаем полиномиальность противника B по n , что и завершает доказательство.

Теорема 3.2 (ГОСТ является PrA-защищенным). *Семейство хэш-функций $GOST$ является стойким к атаке поиска прообраза и к атаке поиска коллизий.*

Доказательство. Согласно определению PrA-защищенности требуется показать, что существует такой эффективный экстрактор $\mathcal{E}$, что для любого возможного противника A преимущество $Adv_{GOST_n, E, \mathcal{E}}^{PrA}(A)$ достаточно мало как функция от n .

Так как функция $g_0(v, m)_n$ является PGV-схемой типа 1, а следовательно, и PrA-защищенной, то для нее существует такой экстрактор $\mathcal{E}_g$, что для любого возможного противника B преимущество $Adv_{g_0(v, m)_n, E, \mathcal{E}_g}^{PrA}(B)$ достаточно мало как функция от n . Зафиксируем данный экстрактор $\mathcal{E}_g$. Согласно теореме 3.1 существует такой экстрактор $\mathcal{E}_G$ для функции $GOST_n$, что для любого противника A , делающего не более q_p запросов к идеальному примитиву E и q_e запросов к экстрактору $\mathcal{E}_G$ и выводящего сообщение длины не более $l_{\max}(n) \cdot n \leq 2^n$ символов, где $l_{\max}(n)$ — некоторая полиномиальная по n функция, существует такой противник B , что

$$Adv_{GOST_n, E, \mathcal{E}_G}^{PrA}(A) \leq Adv_{g_0(v, m)_n, E, \mathcal{E}_g}^{PrA}(B).$$

Причем противник B делает не более $q_p + l_{\max}(n) + 2$ запросов к идеальному примитиву E и не более $q_e \cdot (l_{\max} + 2)$ запросов к экстрактору $\mathcal{E}_g$.

По лемме 3 преимущество $Adv_{g_0(v, m)_n, E, \mathcal{E}_g}^{PrA}(B)$ может быть ограничено сверху в терминах числа запросов противника A к экстрактору $\mathcal{E}_G$ из теоремы 3.1 и идеального примитива E , то есть

$$Adv_{g_0(v, m)_n, E, \mathcal{E}_g}^{PrA}(B) \leq \frac{q_e(l_{\max} + 2)(q_p + l_{\max}(n) + 2)}{2^n - (q_p + l_{\max}(n) + 2)} + \frac{(q_p + l_{\max}(n) + 2)(q_p + l_{\max}(n) + 3)}{2(2^n - (q_p + l_{\max}(n) + 2))}.$$

Отсюда следует, что существует такой экстрактор $\mathcal{E}_G$ для функции $GOST_n$, что для любого противника A , делающего максимум q_p запросов к идеальному примитиву E и q_e запросов к экстрактору $\mathcal{E}_G$ и выводящего сообщение длиной не более $l_{\max}(n) \cdot n \leq 2^n$ символов, где $l_{\max}(n)$ — некоторая полиномиальная от n функция, выполняется

$$Adv_{GOST_n, E, \mathcal{E}_G}^{PrA}(A) \leq \frac{q_e(l_{\max} + 2)(q_p + l_{\max}(n) + 2)}{2^n - (q_p + l_{\max}(n) + 2)} + \frac{(q_p + l_{\max}(n) + 2)(q_p + l_{\max}(n) + 3)}{2(2^n - (q_p + l_{\max}(n) + 2))}.$$

Следовательно, преимущество $Adv_{GOST_n, E, \mathcal{E}_G}^{PrA}(A)$ достаточно мало как функция от n , а значит, семейство хэш-функций $\mathcal{GOST}$ является стойким к атаке поиска прообраза. Стойкость к атаке поиска коллизий следует из утверждения леммы 1, которое ограничивает сверху CR-преимущество PrA-преимуществом.

Применяя лемму 4 к теореме 3.2, получаем, что семейство хэш-функций $\{\mathcal{F}_{n,n}(GOST_n(M))\}$ является неотличимым от случайного оракула произвольной длины.

4. Заключение

В работе на основе семейства хэш-функций ГОСТ Р 34.11-2012 описано такое семейство хэш-функций $\mathcal{GOST}$, что при одинаковой длине хэш-кода функции семейства $\mathcal{GOST}$ получаются из функций семейства ГОСТ Р 34.11-2012 заменой внутреннего шифра на идеальный. Для остальных функций семейства $\mathcal{GOST}$ использована схожая конструкция. Для построенного семейства $\mathcal{GOST}$ доказаны стойкость к атаке поиска прообраза и устойчивость данного семейства к коллизиям. Данные свойства семейства $\mathcal{GOST}$ косвенно подтверждают стойкость использованной в ГОСТ Р 34.11-2012 конструкции. В дальнейшем планируется исследование семейства хэш-функций $\mathcal{GOST}$ на соответствие свойству неотличимости от случайного оракула, а также, возможно, исследование на удовлетворение понятиям стойкости к атаке поиска прообраза и устойчивости к коллизиям семейства хэш-функций, лучше отображающего свойства функции сжатия, используемой в ГОСТ Р 34.11-2012.

Благодарности

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Карпунину Г. А. за постановку задачи и внимание к работе.

Также автор признателен рецензенту И. В. Лаврикову за важные замечания, способствовавшие улучшению изложения результатов.

Список литературы

- [1] *ГОСТ Р 34.11-2012, Национальный стандарт Российской Федерации. Информационная технология. Криптографическая защита информации. Функция хэширования.*, Стандартинформ, Москва, 2012.
- [2] Mendel F., Pramstaller N., Rechberger C., Kontak M., Szmjdt J., “Cryptanalysis of the GOST hash function CRYPTO’2008”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **5157** (2008), 162–178.
- [3] AlTawy R., Kircanski A., Youssef A. M., “Rebound attacks on Stribog”, *IACR Cryptology ePrint Archive*, 2013, 539.
- [4] Wang Z., Yu H., Wang X., “Cryptanalysis of GOST R hash function”, *IACR Cryptology ePrint Archive*, 2013, 584.
- [5] Dodis Y., Ristenpart T., Shrimpton T., “Salvaging Merkle-Damgård for practical applications”, *IACR Cryptology ePrint Archive*, 2009, 177.
- [6] Stam M., “Blockcipher based hashing revisited”, *IACR Cryptology ePrint Archive*, 2008, 71.
- [7] AlTawy R., Youssef A. M., “Preimage attacks on reduced-round Stribog”, *IACR Cryptology ePrint Archive*, 2014, 319.
- [8] AlTawy R., Youssef A. M., “Watch your constants: malicious Streebog”, *IACR Cryptology ePrint Archive*, 2014, 879.
- [9] Ma B., Li B., Hao R., Li X., “Improved cryptanalysis on reduced-round GOST and Whirlpool hash function (Full version)”, *IACR Cryptology ePrint Archive*, 2014, 375.