Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов, Явные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения числа решений случайных включений, *Матем. вопр. криптогр.*, 2015, том 6, выпуск 1, 57–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 11:54:49

УДК: 519.212

Явные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения числа решений случайных включений

В. А. Копытцев¹, В. Г. Михайлов²

¹Академия криптографии Российской Федерации, Москва

²Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Получено 22.IV.2014

Исследуется точность пуассоновской аппроксимации для распределения числа решений системы случайных включений, принадлежащих заданному множеству попарно не подобных векторов над конечным полем. Приведены численные примеры.

Ключевые слова: системы случайных включений, системы полиномиальных уравнений, пуассоновская аппроксимация

Explicit accuracy estimates for the Poisson approximation to the distribution of the number of solutions of random inclusions

V. A. Kopytcev¹, V. G. Mikhailov²

¹*Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow*

²*Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow*

Abstract. We study the accuracy of the Poisson approximation for the distribution of the number of solutions of the system of random inclusions belonging to a given set of pairwise nonproportional vectors over the finite field. Numerical examples are given.

Key words: systems of random inclusions, systems of polynomial equations, Poisson's approximation

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2015, vol. 6, no. 1, pp. 57–79 (Russian).

1. Введение

Пусть $\xi(D, A, S, B)$ — число решений системы включений

$$x \in D, \quad Ax + S(x) \in B, \quad (1)$$

где A — случайная матрица из элементов поля $K = GF(q)$ размера $T \times n$, $D \subseteq K^n$ и $B \subset K^T$ — некоторые множества n -мерных и T -мерных векторов над этим полем, $S(x)$ — произвольное отображение K^n в K^T .

Исследованию условий сходимости при $n, T \rightarrow \infty$ распределения случайной величины $\xi(D, A, S, B)$ к распределениям пуассоновского типа были посвящены работы [1–4]. Как и в этих работах, будем предполагать, что элементы случайной матрицы $A = (a_{i,j})$ независимы в совокупности и имеют распределения

$$\mathbf{P}\{a_{i,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{i,j}(k)}{q}, \quad k \in K, \quad \sum_{k \in K} \Delta_{i,j}(k) = 0, \quad i, j \geq 1,$$

где

$$\Delta = \max_{i,j,k} |\Delta_{i,j}(k)| < 1. \quad (2)$$

Обозначим через $N(k_1, k_2, k_3, c, D)$ число решений уравнения $k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3 = c$ относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in D^3$, где $k_1, k_2, k_3 \in K \setminus \{0\}$, $c \in K^n$. Пусть $N(D) = \max_{k_1, k_2, k_3, c} N(k_1, k_2, k_3, c, D)$,

$$\rho(D) = N(D)/|D|^2. \quad (3)$$

Так как уравнение $k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3 = c$, где $c \in D$ и $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = -1$, имеет решения вида $(u^1, u^2, u^3) = (c, u, u)$ при всех $u \in D$, то

$$|D|^{-1} \leq \rho(D) \leq 1. \quad (4)$$

Аналогично определим величину $\rho(B)$.

Элементы x и x' множества D назовем *подобными*, если $x' = kx$ при некотором $k \in K \setminus \{0, 1\}$. Отметим, что в случае $K = GF(2)$ подобные векторы отсутствуют.

В работе [4] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $K = GF(q)$, множество D не содержит подобных векторов, отображение $S(x)$ не зависит от матрицы A , распределение элементов матрицы A удовлетворяет условию (2), $0^n \notin D$, и при $n, T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения $|D| \rightarrow \infty$,

$$q^{-T} |D| |B| \rightarrow \lambda \in (0, \infty), \quad T\Delta \rightarrow 0, \quad \rho(D)\rho(B) \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\lim_{n,T \rightarrow \infty} \left| \mathbf{P}\{\xi(D, A, S, B) = r\} - \lambda^r e^{-\lambda}/r! \right| \rightarrow 0, \quad r = 0, 1, \dots,$$

причем эта сходимость равномерна относительно отображений $S(x)$.

В настоящей работе оценивается точность пуассоновской аппроксимации в предельной теореме 1. В предположении, что выполнены «неасимптотические» условия этой теоремы и $\Delta = 0$, ниже в теореме 2 даны оценки сверху для величин

$$\left| \mathbf{P}\{\xi(D, A, S, B) = r\} - \bar{\lambda}^r e^{-\bar{\lambda}}/r! \right|, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\bar{\lambda} = q^{-T}|D||B|$.

Остальной материал статьи связан с приложениями теоремы 2 к системе включений вида

$$x \in K^n \setminus \{0^n\} \quad A_1 x + A_2 f(x) + S(x) \in B, \quad (5)$$

где A_1 и A_2 — случайные матрицы над полем K размеров $T \times n$ и $T \times m$ соответственно, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) : K^n \rightarrow K^m$ — заданное отображение. Класс включений (5) представляет особый интерес, поскольку содержит системы полиномиальных уравнений

$$\sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \in \{0, \dots, q-1\} \\ 1 \leq d_1 + \dots + d_n \leq g_t}} a_{d_1, \dots, d_n}^{(t)} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} = b_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

где $a_{d_1, \dots, d_n}^{(t)}$ — независимые в совокупности случайные величины, а g_t — целые числа в пределах $1 \leq g_t \leq n(q-1)$.

Изучение свойств системы (5) использует следующий прием. Положим $H = K^n \setminus \{0^n\}$, $H_f = \{(x, f(x)) : x \in H\}$. Число решений системы (5) равно числу решений системы включений вида (1.1):

$$y \in H_f, \quad Ay + S'(y) \in B, \quad (6)$$

где $y = (x, f(x))$, $A = (A_1, A_2)$, $S'(y) = S(x)$. Поэтому для исследования точности пуассоновской аппроксимации распределения числа решений системы (5) можно использовать теорему 2, применяя ее к числу решений $\xi(H_f, A, S', B)$ системы (6). При этом оценку величины $\rho(H_f)$ можно свести к оценке для $\rho((K^n)_f)$, где

$$(K^n)_f = \{(x, f(x)) : x \in K^n\}, \quad (7)$$

так как

$$\rho(H_i) \leq \left(\frac{q^n}{q^n - 1} \right)^2 \rho((K^n)_i). \quad (8)$$

В работе приведены оценки сверху и явные выражения для $\rho((K^n)_i)$ и численные примеры, в которых рассмотрены приложения теоремы 2.

2. Формулировки результатов

Пусть $\tilde{\lambda} = q^{-T}|D||B|$.

Теорема 2. Пусть $K = GF(q)$, множество D не содержит подобных векторов, отображение $S(x)$ не зависит от матрицы A , распределение элементов матрицы A удовлетворяет условию (2), где $\Delta = 0$, $0^n \notin D$. Тогда при любых неотрицательных целых числах r и N , удовлетворяющих неравенству $N > r + \tilde{\lambda}$, справедлива оценка

$$\left| \mathbf{P}\{\xi(D, A, S, B) = r\} - \frac{\tilde{\lambda}^r}{r!} e^{-\tilde{\lambda}} \right| \leq \frac{2\tilde{\lambda}^{N+1}}{r!(N+1-r)!} + S_{1,N}(r) + S_{2,N}(r) + S_{3,N}(r), \quad (9)$$

где

$$S_{1,N}(r) = \rho(D) \sum_{k=r}^N \frac{C_k^2 \tilde{\lambda}^k}{r!(k-r)!} \left[\left(q + |D|^{-1} \right)^{k-2} - q^{k-2} \right], \quad (10)$$

$$S_{2,N}(r) = \frac{1}{q^T} \sum_{k=r}^N \frac{k \tilde{\lambda}^{k-1}}{r!(k-r)!}, \quad (11)$$

$$S_{3,N}(r) = \rho(D) \rho(B) \sum_{k=r}^{N+1} \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\tilde{\lambda}^j}{r!(k-r)!}. \quad (12)$$

Замечание 1. Из вида оценки (9) следует, что при заданном r и ограниченном $\tilde{\lambda} < C$ малое значение первого члена в правой части (9) достигается за счет выбора значения N , а малые значения величин $S_{1,N}(r)$, $S_{2,N}(r)$, $S_{3,N}(r)$ при выбранном N — за счет выбора малых значений $\rho(D)$, $|D|^{-1}$ (как функций параметра n), q^{-T} и величины $\rho(D)\rho(B)$ (как функции параметров n и T) соответственно.

Введем предельные значения

$$S_i(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{i,N}(r), \quad i = 1, 2, 3, \quad (13)$$

выражений (10)–(12) при $N \rightarrow \infty$ (ряды, соответствующие суммам в (10)–(12), сходятся).

Первый член в правой части (9) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, что позволяет получить следующую оценку. Положим,

$$\varphi_r(z) = e^{\tilde{\lambda}z} \left(\tilde{\lambda}^{r+2} z^r + 2r \tilde{\lambda}^{r+1} z^{r-1} + (r^2 - r) \tilde{\lambda}^r z^{r-2} \right). \quad (14)$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого $r = 0, 1, 2, \dots$

$$\left| \mathbf{P}\{\xi(D, A, S, B) = r\} - \frac{\tilde{\lambda}^r}{r!} e^{-\tilde{\lambda}} \right| \leq S_1(r) + S_2(r) + S_3(r), \quad (15)$$

где

$$S_1(r) = \frac{\rho(D)}{r!} \left[\varphi_r(q + |D|^{-1}) - \varphi_r(q) \right], \quad (16)$$

$$S_2(r) = \frac{1}{q^T} \frac{\tilde{\lambda}^{r-1}}{r!} (\tilde{\lambda} + r) e^{\tilde{\lambda}}, \quad (17)$$

а величины $S_3(r)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, вычисляются по формулам (с доопределением по непрерывности при $\tilde{\lambda} = 1$)

$$S_3(0) = \rho(D)\rho(B) \frac{1}{\tilde{\lambda} - 1} \left[\left(e^{\tilde{\lambda}} - 1 - \tilde{\lambda} - \frac{\tilde{\lambda}^2}{2} \right) - \tilde{\lambda}^2 \left(e - \frac{5}{2} \right) \right], \quad (18)$$

$$S_3(1) = \rho(D)\rho(B) \frac{1}{\tilde{\lambda} - 1} \left[\tilde{\lambda} \left(e^{\tilde{\lambda}} - 1 - \tilde{\lambda} \right) - \tilde{\lambda}^2 (e - 2) \right], \quad (19)$$

$$S_3(r) = \rho(D)\rho(B) \frac{1}{r!(\tilde{\lambda} - 1)} \left[\tilde{\lambda}^r e^{\tilde{\lambda}} - \tilde{\lambda}^2 e \right], \quad r \geq 2. \quad (20)$$

Для проведения расчетов по формулам (9)–(12) или (15)–(20) необходимо иметь оценку величины $\rho(D)$. Приведем некоторые примеры для величин $\rho((K^n)_f)$ (см. (6)–(8)). Рассмотрим отображение $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, в качестве части координатных функций $f_1(x), \dots, f_m(x)$ которого выступают все произведения вида $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$, где $2 \leq d_1 + \dots + d_n \leq d$, а $d = d(n) \leq (q - 1)n$ — заданное число. В [2] при доказательстве теоремы 5 было показано, что в этом случае

$$\rho((K^n)_f) \leq \left(1 - q^{-4} \right)^{[n/2]}.$$

Этот результат был усилен в [3] (неравенство (3.10)) следующим образом. Введем при $l = 2, 3, \dots$ множества функций

$$Q(d^1, \dots, d^l) = \bigcup_{s=1}^l \{x_1^{d_1^s} \dots x_n^{d_n^s}\}, \quad (21)$$

где $d^s = (d_1^s, \dots, d_n^s) \in \{0, 1\}^n$, $s = 1, \dots, l$, и при этом

$$\|d^s\| \geq 2, \quad s = 1, \dots, l, \quad (22)$$

$$\|(d_1^{s_1} d_1^{s_2}, \dots, d_n^{s_1} d_n^{s_2})\| = 0, \quad 1 \leq s_1 < s_2 \leq l. \quad (23)$$

Согласно условию (23) множества существенных переменных функций $x_1^{d_1^s} \dots x_n^{d_n^s}$ из набора $Q(d^1, \dots, d^l)$ попарно не пересекаются, а по условию (22) степень нелинейности функций $x_1^{d_1^s} \dots x_n^{d_n^s}$ больше единицы.

Теорема 3. Пусть $K = GF(q)$, $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq Q(d^1, \dots, d^l)$, $l \leq m$. Тогда

$$\rho((K^n)_f) \leq \prod_{s=1}^l (1 - q^{-2\|d^s\|}). \quad (24)$$

В настоящей работе будет показано, что в случае, когда K — простое поле, условия теоремы 3 можно ослабить. Рассмотрим некоторое множество $Q_{n,l}$ многочленов $\{\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_l(x_1, \dots, x_n)\}$, удовлетворяющих условиям

$$\deg \varphi_s(x_1, \dots, x_n) \geq 2, \quad s = 1, \dots, l,$$

$$I_{s_1} \cap I_{s_2} = \emptyset, \quad 1 \leq s_1 < s_2 \leq l,$$

где I_s обозначает множество существенных аргументов функции φ_s , $s = 1, \dots, l$.

Теорема 4. Пусть $K = GF(q)$ — простое поле, $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq Q_{n,l}$, $l \leq m$. Тогда

$$\rho((K^n)_f) \leq \prod_{s=1}^l (1 - q^{-2|I_s|}). \quad (25)$$

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 можно применить к системе включений (6), используя оценки (24) и (25), если множество H_f (множество $(K^n)_f$) не содержит подобных векторов (в случае $K = GF(2)$ они заведомо отсутствуют). При $q \geq 3$ это условие выполнено, если, например,

выполнено хотя бы одно из включений $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq Q^{(2)}[x_1, \dots, x_n]$ или $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq Q^{(t_1)}[x_1, \dots, x_n] \cup Q^{(t_2)}[x_1, \dots, x_n]$, $2 < t_1 < t_2$, $\text{НОД}(t_1 - 1, t_2 - 1) = 1$, где

$$Q^{(t)}[x_1, \dots, x_n] = \bigcup_{\substack{d_1, \dots, d_n \in \{0, q-1\} \\ d_1 + \dots + d_n = t}} \{x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}\} \quad (26)$$

— множество всех произведений переменных из набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ степени t . Достаточность приведенных условий легко доказать, принимая во внимание тот факт, что $Q^{(t)}[x_1, \dots, x_n] \supset \{x_1^t, \dots, x_n^t\}$.

Следующая теорема дает нижнюю оценку величины $\rho((K^n)_f)$ в случае, когда $K = GF(2^\alpha)$ — конечное поле характеристики два.

Теорема 5. Пусть $K = GF(q)$, где $q = 2^\alpha$, $\alpha \geq 1$. Тогда при любом $n \geq 1$ и любом отображении $f : K^n \rightarrow K^m$, $m \geq 1$, выполнено неравенство

$$\rho((K^n)_f) \geq 3 \cdot q^{-n} - 2 \cdot q^{-2n}. \quad (27)$$

Далее показывается, что оценка (27) достижима при $q = 2$.

Теорема 6. Пусть $K = GF(2)$, $n \geq 2$, $m \geq C_n^2$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, где

$$\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq \{x_i x_j : 1 \leq i < j \leq n\}. \quad (28)$$

Тогда

$$\rho((K^n)_f) = 3 \cdot 2^{-n} - 2^{1-2n}. \quad (29)$$

В статье также доказаны оценки величины $\rho((K^n)_f)$ в случае, когда множество координатных функций отображения f содержит как все попарные произведения переменных $x_1, \dots, x_n$, так и сами эти переменные во второй степени. Для поля характеристики два получена следующая оценка.

Теорема 7. Пусть $K = GF(q)$, $q = 2^\alpha$, $\alpha \geq 2$, $n \geq 2$, $m \geq n + C_n^2$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, при этом

$$\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq \{x_i x_j : 1 \leq i \leq j \leq n\}. \quad (30)$$

Тогда

$$\rho((K^n)_f) \leq (q+1)q^{-n} - q^{1-2n}. \quad (31)$$

Для поля характеристики, отличной от двух, получена следующая оценка.

Теорема 8. Пусть $K = GF(q)$, $q = p^\alpha$, $p \geq 3$, $\alpha \geq 1$, $n \geq 2$, $m \geq n + C_n^2$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ и выполняется условие (30). Тогда

$$\rho((K^n)_f) \leq (n+1)q^{-n}. \quad (32)$$

Приведем примеры, в которых используются следствие 1 и теоремы 4, 6, 7, 8.

Пример 1. Пусть $K = GF(2)$, $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \supseteq \{x_1 x_2, \dots, x_{l-1} x_l\}$, где $l = \lfloor n/2 \rfloor$. Положим $D = V^n \setminus \{0^n\}$, $n \geq 200$, $|B| = 1$, $T = n$. При $n \geq 200$, согласно формуле (25), имеем $\rho((K^n)_f) \leq (15/16)^{100} = 0,0001$. Используя (16)–(18), получаем следующие значения правых частей неравенств (15):

$r =$	0	1	2	3	4
$\bar{\lambda}^r e^{-\bar{\lambda}}/r! =$	0,368...	0,368...	0,184...	0,061...	0,015...
$ \mathbf{P}\{\xi = r\} - \bar{\lambda}^r e^{-\bar{\lambda}}/r! \leq$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^{-5}$

Здесь $\xi = \xi(H_f, A, S', B)$. Отметим, что основной вклад в значения правых частей (15) вносят величины $S_3(r)$. В нашем случае $\bar{\lambda} = 1 - 2^{-n} < 1$. Поэтому величины $S_3(r)$ мы оценили по формулам

$$S_3(0) \leq S_3(0) |_{\bar{\lambda}=1} = \rho((K^n)_f) (3 - e),$$

$$S_3(1) \leq S_3(1) |_{\bar{\lambda}=1} = \rho((K^n)_f),$$

$$S_3(r) \leq S_3(r) |_{\bar{\lambda}=1} = \rho((K^n)_f) \frac{e(r-1)}{r!}, \quad r \geq 2.$$

Пример 2. Пусть $K = GF(2)$ и выполнено условие (28). Положим $D = K^n \setminus \{0^n\}$, $n \geq 30$, $|B| = 1$, $T = n$. В этом случае, согласно (29), имеем $\rho((K^n)_f) \leq 3 \cdot 2^{-n} \leq 3 \cdot 10^{-9}$. Получим следующие значения:

$r =$	0	1	2	3	4
$\bar{\lambda}^r e^{-\bar{\lambda}}/r! =$	0,368...	0,368...	0,184...	0,061...	0,015...
$ \mathbf{P}\{\xi = r\} - \bar{\lambda}^r e^{-\bar{\lambda}}/r! \leq$	$3,6 \cdot 10^{-9}$	$8,5 \cdot 10^{-9}$	$8,2 \cdot 10^{-9}$	$4,6 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$

В данном случае основной вклад в значения правых частей (15) вносят величины $S_2(r)$, $S_3(r)$.

Отметим, что в примере 2, где использованы теорема 6 и условие $n \geq 30$, верхние границы для значений $|\mathbf{P}\{\xi = r\} - \bar{\lambda}^r e^{-\bar{\lambda}}/r!|$ на четыре порядка меньше соответствующих границ из примера 1, где были использованы теорема 4 и условие $n \geq 200$.

Пример 3. Пусть $K = GF(q)$, $q \geq 3$, и выполнено условие (30). Значения остальных параметров оставим такими же, как в примере 2. Согласно (31) и (32) имеем $\rho((K^n)_f) \leq 1,6 \cdot 10^{-13}$. Получим

$r =$	0	1	2	3	4
$\bar{\lambda}^r e^{-\bar{\lambda}}/r!$	0,368...	0,368...	0,184...	0,061...	0,015...
$ \mathbf{P}\{\xi = r\} - \bar{\lambda}^r e^{-\bar{\lambda}}/r! \leq$	$6 \cdot 10^{-14}$	$1,9 \cdot 10^{-13}$	$2,4 \cdot 10^{-13}$	$1,6 \cdot 10^{-13}$	$6 \cdot 10^{-14}$

В этом примере, как и в примере 2, основной вклад в значения правых частей (15) вносят величины $S_2(r)$, $S_3(r)$.

3. Доказательство теоремы 2

Введем обозначения

$$J = \bigcup_{x \in D} \{(x, b) : b + S(x) \in B\}, \quad \xi = \xi(D, A, S, B).$$

Положим, (используя обозначение $v^i = (x^i, b^i)$)

$$J_k = \{(v^1, \dots, v^k) \in J^k : v^\alpha \neq v^\beta (\alpha \neq \beta)\}.$$

Воспользуемся формулами метода включения–исключения (см., например, [5, гл.IV] или [6, гл.1, §1, п.4]). При любой реализации отображения S получим:

$$\mathbf{P}\{\xi = r\} = \sum_{k=r}^{|J|} (-1)^{k-r} C_k^r B_k, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (33)$$

где

$$B_k = \mathbf{E} C_\xi^k = \frac{1}{k!} \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in J_k} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}. \quad (34)$$

Из (33) и неравенств Бонферрони следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi = r\} = \sum_{k=r}^N (-1)^{k-r} C_k^r B_k + R_{N+1}, \quad (35)$$

где $0 \leq r \leq N \leq |J| - 1$, а

$$|R_{N+1}| \leq C_{N+1}^r B_{N+1}. \quad (36)$$

Далее будут использованы некоторые выкладки из доказательства теоремы 4 работы [4].

Лемма 1. Пусть $x^1, \dots, x^k \in K^n$, $b^1, \dots, b^k \in K^T$ и выполнено равенство $\Delta = 0$. Тогда при всех $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{jT}, \quad (37)$$

если $1 \leq \text{rank}(x^1, \dots, x^k) = j \leq k-1$, а если $\text{rank}(x^1, \dots, x^k) = k$, то

$$\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} = \left(\frac{1}{q}\right)^{kT}. \quad (38)$$

Эта лемма вытекает из леммы 1 в [4].

Положим $D_1 = \emptyset$, $I_1 = \emptyset$, а при $k \geq 2$,

$$D_{k,j} = \{(x^1, \dots, x^k) \in D^k : \text{rank}(x^1, \dots, x^k) = j\}, \quad D_k = \bigcup_{j=1}^{k-1} D_{k,j},$$

$$I_k = \{((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in J_k : (x^1, \dots, x^k) \in D_k\}.$$

Используя множество I_k , представим величину $B_k k!$ в виде суммы

$$B_k k! = \Sigma_{1,k} + \Sigma_{2,k}, \quad (39)$$

где

$$\Sigma_{1,k} = \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in J_k \setminus I_k} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}, \quad (40)$$

$$\Sigma_{2,k} = \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}. \quad (41)$$

Оценим величины $B_k k!$ сверху. Начнем с (41). В [4] было показано, что $\Sigma_{2,1} = \Sigma_{2,2} = 0$ (см. формулу (31) в [4]), а при $k \geq 3$ выполнено неравенство (см. выкладки, следующие после доказательства леммы 3 в [4])

$$\Sigma_{2,k} \leq \rho(J) \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{|J|}{q^T}\right)^j = \rho(J) \sum_{j=2}^{k-1} \tilde{\lambda}^j, \quad k \geq 3, \quad (42)$$

где согласно лемме 4 из [4]

$$\rho(J) \leq \rho(D)\rho(B). \quad (43)$$

Оценим теперь величину (40). Используя формулу (38), получаем, что при всех $(v^1, \dots, v^k) \in J_k \setminus I_k$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} = \prod_{j=1}^k \mathbf{P}\{Ax^j = b^j\} = \left(\frac{1}{q}\right)^{kT}. \quad (44)$$

Поэтому $\Sigma_{1,k} \leq \bar{\lambda}^k$, $k \geq 2$. Из приведенных оценок, в частности, из (39), (42) и (43), получаем соотношения

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \bar{\lambda}^1, \quad 2B_2 \leq \bar{\lambda}^2, \quad (45)$$

$$B_k k! \leq \bar{\lambda}^k + \rho(D)\rho(B) \sum_{j=2}^{k-1} \bar{\lambda}^j, \quad k \geq 3. \quad (46)$$

Сразу отметим, что из (36), (45) и (46) следует оценка для остаточного члена в (35):

$$|R_{N+1}| \leq \frac{\bar{\lambda}^{N+1}}{r!(N+1-r)!} + \rho(D)\rho(B) \sum_{j=2}^N \frac{\bar{\lambda}^j}{r!(N+1-r)!}. \quad (47)$$

Оценим величины $B_k k!$ снизу. Используя (44), получаем

$$\Sigma_{1,k} = \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in J_k \setminus I_k} \prod_{j=1}^k \mathbf{P}\{Ax^j = b^j\} = \bar{\lambda}^k - \Sigma_{1,k}^1 - \Sigma_{1,k}^2, \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,k}^1 &= \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \prod_{j=1}^k \mathbf{P}\{Ax^j = b^j\}, \\ \Sigma_{1,k}^2 &= \sum_{(v^1, \dots, v^k)}' \prod_{j=1}^k \mathbf{P}\{Ax^j = b^j\}, \end{aligned}$$

и последняя сумма берется по всем таким наборам индексов $(v^1, \dots, v^k)$, в которых имеется хотя бы одна пара равных. Нетрудно убедиться, что (см. оценку (3.16) в [7])

$$\Sigma_{1,k}^2 \leq \frac{k}{q^T} \bar{\lambda}^{k-1}. \quad (49)$$

Вместе с этим (см. (28) и замечание 2 в [4])

$$\Sigma_{1,k}^1 \leq \bar{\lambda}^k \frac{1}{|D|^k} \sum_{j=1}^{k-1} |D_{k,j}|. \quad (50)$$

Заметим, что $|D_{k,1}| = 0$, $k = 2, 3, \dots$. Для величин $|D_{k,j}|$ при $k \geq 3$, $2 \leq j \leq k - 1$ в [4] получены оценки (19). Здесь мы воспользуемся более точными оценками.

Лемма 2. Пусть множество D не содержит подобных векторов, тогда при $k \geq 3$, $2 \leq j \leq k - 1$

$$|D_{k,j}| \leq C_k^j C_j^2 (|D|q)^{j-2} |D|^2 \rho(D). \quad (51)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} |D_{k,j}| &\leq C_k^j |\{(x^1, \dots, x^k) \in D^k, \\ \text{rank}(x^1, \dots, x^j) &= j, \text{rank}(x^1, \dots, x^j, x^l) = j, l = j+1, \dots, k\}| \\ &\leq C_k^j |\{(x^1, \dots, x^{j+1}) \in D^{j+1}, \\ \text{rank}(x^1, \dots, x^j) &= j, \text{rank}(x^1, \dots, x^j, x^{j+1}) = j\}| \\ &\leq C_k^j C_j^2 |\{(x^1, \dots, x^{j+1}) \in D^{j+1} : \\ x^{j+1} &= a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_j x^j, a_1, a_2 \in K \setminus \{0\}, a_3, \dots, a_j \in K\}|. \end{aligned} \quad (52)$$

Из (52) и определения величины $\rho(D)$ получаем (51). Лемма 2 доказана.

Из (50), (51) получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,k}^1 &\leq \rho(D) \bar{\lambda}^k \sum_{j=2}^{k-1} C_k^j |D|^{-(k-j)} C_j^2 q^{j-2} \\ &\leq \rho(D) \bar{\lambda}^k C_k^2 \left[\left(q + |D|^{-1} \right)^{k-2} - q^{k-2} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Наконец, отметим, что (см. (35), (39), (48))

$$\sum_{k=r}^N (-1)^{k-r} C_k^r \frac{\bar{\lambda}^k}{k!} = \frac{\bar{\lambda}^r}{r!} \sum_{k=r}^N \frac{(-\bar{\lambda})^{k-r}}{(k-r)!} = \frac{\bar{\lambda}^r}{r!} e^{-\bar{\lambda}} + \bar{R}_{N+1}, \quad (54)$$

где

$$\bar{R}_{N+1} = -\frac{\bar{\lambda}^r}{r!} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-\bar{\lambda})^{k-r}}{(k-r)!}. \quad (55)$$

По условию теоремы $N-r > \bar{\lambda}$. Значит, величины $\bar{\lambda}^{k-r}/(k-r)!$ при $k \geq N+1$ строго убывают с ростом k (и стремятся к нулю). Поэтому $|\bar{R}_{N+1}|$ меньше абсолютной величины первого члена ряда (55) (см. теорему Лейбница для знакопеременных рядов и замечание к ней в [8, раздел 381]):

$$|\bar{R}_{N+1}| \leq \frac{\bar{\lambda}^{N+1}}{r!(N+1-r)!}. \quad (56)$$

С помощью неравенств (35), (39), (48), (54) получаем

$$\left| \mathbf{P}\{\xi = r\} - \frac{\bar{\lambda}^r}{r!} e^{-\bar{\lambda}} \right| \leq |\bar{R}_{N+1}| + |R_{N+1}| + \sum_{k=r}^N \frac{C_k^r}{k!} \left(\Sigma_{1,k}^1 + \Sigma_{1,k}^2 + \Sigma_{2,k} \right). \quad (57)$$

Используя (42), (43), (50), (49), (47), (56), приходим к оценкам

$$\sum_{k=r}^N \frac{C_k^r}{k!} \Sigma_{1,k}^i \leq S_{i,N}(r), \quad i = 1, 2,$$

$$|\bar{R}_{N+1}| + |R_{N+1}| + \sum_{k=r}^N \frac{C_k^r}{k!} \Sigma_{2,k} \leq \frac{2\bar{\lambda}^{N+1}}{r!(N+1-r)!} + S_{3,N}(r).$$

Из этих неравенств и (57) вытекает (9). Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 4

Напомним, что $(K^n)_f$ является образом множества K^n в K^{n+m} при отображении

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow y = (x, f(x)) = (x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Согласно определению

$$\rho((K^n)_f) = \frac{N_f}{q^{2n}},$$

где N_f — максимально возможное при $a_1, a_2, a_3 \in K \setminus \{0\}$, $c \in K^{n+m}$ — число решений уравнения $a_1 y^1 + a_2 y^2 + a_3 y^3 = c$ в K^{n+m} относительно тройки векторов $(y^1, y^2, y^3) \in ((K^n)_f)^3$. Заметим, что одно из чисел $a_1, a_2, a_3 \in K \setminus \{0\}$

можно положить равным единице. Взяв $a_3 = 1$, перепишем это уравнение относительно переменных $x_i^1, x_i^2, x_i^3, i = 1, \dots, n$, как объединение двух систем уравнений: системы из n уравнений

$$a_1 x_i^1 + a_2 x_i^2 + x_i^3 = c_i^1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (58)$$

и системы из m уравнений

$$a_1 f_s(x^1) + a_2 f_s(x^2) + f_s(x^3) = c_s^2, \quad s = 1, \dots, m.$$

В данном случае $c = (c^1, c^2) = (c_1^1, \dots, c_n^1, c_1^2, \dots, c_m^2)$.

Не нарушая общности рассуждений, будем рассматривать функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_l(x)$ из множества $Q_{n,l}$ в качестве первых l координатных функций $f_1(x), \dots, f_l(x)$ отображения $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Заметим, что согласно условию теоремы $m \geq l = |Q_{n,l}|$.

Исключив из второй системы последние $m - l$ уравнений и оставив в ней лишь уравнения, соответствующие функциям из множества $Q_{n,l}$, получим систему:

$$a_1 f_s(x^1) + a_2 f_s(x^2) + f_s(x^3) = c_s^2, \quad s = 1, \dots, l. \quad (59)$$

Максимальное число решений системы (58)–(59) обозначим N_f^* . Очевидно, что

$$N_f^* \geq N_f. \quad (60)$$

Система (58)–(59) состоит из $n + l$ уравнений относительно $3n$ неизвестных элементов $x_i^1, x_i^2, x_i^3, i = 1, \dots, n$, поля K . Ее уравнения можно распределить по $l + 1$ системам следующим образом. Первые l систем имеют вид (здесь $s = 1, \dots, l$)

$$\begin{aligned} a_1 \varphi_s(x_i^1, i \in I_s) + a_2 \varphi_s(x_i^2, i \in I_s) + \varphi_s(x_i^3, i \in I_s) &= c_s^2, \\ a_1 x_i^1 + a_2 x_i^2 + x_i^3 &= c_i^1, \quad i \in I_s. \end{aligned} \quad (s)$$

Напомним, что I_s — множество существенных аргументов функции $\varphi_s(x)$. Поэтому выше использована запись $\varphi_s(x) = \varphi_s(x_i, i \in I_s)$.

Система с номером $(l + 1)$ состоит из $n - |I_1| - \dots - |I_l|$ уравнений системы (58), не вошедших в первые l систем.

Обозначим через $N_f^{(s)}$ максимальное (по всем допустимым вариантам выбора коэффициентов и правых частей уравнений) число решений s -й системы. Так как множества неизвестных, входящих в разные системы, попарно не пересекаются, то

$$N_f^* = \prod_{s=1}^{l+1} N_f^{(s)}. \quad (61)$$

Ниже мы покажем, что

$$N_f^{(s)} \leq q^{2|I_s|} - 1, \quad s = 1, \dots, l. \quad (62)$$

Система с номером $(l + 1)$ позволяет выразить элементы x_i^3 через x_i^1 и x_i^2 для всех $i \in \{1, \dots, n\} \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_l)$, что приводит к равенству

$$N_f^{(l+1)} = q^{2(n-|I_1|-\dots-|I_l|)}. \quad (63)$$

Из (61)–(63) и (60) следуют неравенства

$$N_f \leq N_f^* \leq q^{2n} \prod_{s=1}^l (1 - q^{-2|I_s|}).$$

Поэтому

$$\rho((V^n)_f) \leq \prod_{s=1}^l (1 - q^{-2|I_s|}), \quad (64)$$

что и требовалось доказать. Итак, для завершения доказательства теоремы 4 надо убедиться в справедливости неравенств (62).

Рассмотрим s -ю систему при произвольном $1 \leq s \leq l$. Используя линейные уравнения, выразим неизвестные x_i^3 через x_i^1 и x_i^2 и подставим их в нелинейное уравнение. Полагая $(x_i^1, i \in I_s) = y$, $(x_i^2, i \in I_s) = z$, $(c_i^1, i \in I_s) = \bar{c}_s^1$, получаем уравнение в K

$$a_1 \varphi_s(y) + a_2 \varphi_s(z) + \varphi_s(\bar{c}_s^1 - a_1 y - a_2 z) = c_s^2. \quad (65)$$

Нам достаточно показать, что выражение в левой части (65) как функция от y и z не является тождественной константой. Действительно, тогда найдется пара $(y, z) \in (K^{|I_s|})^2$, не удовлетворяющая уравнению (65). Значит, это уравнение имеет не более $q^{2|I_s|} - 1$ решений.

Пусть множество $I_s = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$ при некоторых $1 \leq k < n$ и $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. Тогда функция $\varphi_s(x)$ может быть выражена формулой (суммирование производится в поле K)

$$\varphi_s(x) = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \in \{0, \dots, q-1\} \\ 0 \leq d_1 + \dots + d_k \leq d}} \omega_{d_1, \dots, d_k}^{(s)} \prod_{u=1}^k x_{j_u}^{d_u}. \quad (66)$$

Согласно условиям теоремы 4, правая часть равенства (66) является многочленом степени $d \geq 2$.

Подставим (66) в (65) и опустим в разложении левой части (65) члены степени меньше d . Получим выражение

$$\sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \in \{0, \dots, q-1\} \\ d_1 + \dots + d_k = d}} \omega_{d_1, \dots, d_k}^{(s)} \Phi_{d_1, \dots, d_k}(y, z), \quad (67)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{d_1, \dots, d_k}(y, z) &= a_1 \prod_{u=1}^k y_{j_u}^{d_u} + a_2 \prod_{u=1}^k z_{j_u}^{d_u} + (-1)^d \prod_{u=1}^k (a_1 y_{j_u} + a_2 z_{j_u})^{d_u} = \\ &= (a_1 + (-a_1)^d) \prod_{u=1}^k y_{j_u}^{d_u} + (a_2 + (-a_2)^d) \prod_{u=1}^k z_{j_u}^{d_u} + \\ &+ (-1)^d \sum_{i_1, \dots, i_k} \prod_{u=1}^k C_{d_u}^{i_u} (a_1 y_{j_u})^{i_u} (a_2 z_{j_u})^{d_u - i_u}. \end{aligned} \quad (68)$$

Отметим три важных свойства, которые будут использованы далее.

1) Все выражения $\prod_{u=1}^k y_{j_u}^{d_u}$, $\prod_{u=1}^k z_{j_u}^{d_u}$, $\prod_{u=1}^k C_{d_u}^{i_u} (a_1 y_{j_u})^{i_u} (a_2 z_{j_u})^{d_u - i_u}$ из всех функций $\Phi_{d_1, \dots, d_k}(y, z)$ содержат разные наборы степеней y переменных (как из множества $\{y_{j_1}, \dots, y_{j_k}\}$, так и из множества $\{z_{j_1}, \dots, z_{j_k}\}$). Поэтому они могут не войти в сумму (67) только при наличии нулевых коэффициентов перед ними.

2) Сумма $\sum_{i_1, \dots, i_k}$ содержит хотя бы одно ненулевое слагаемое. Действительно, число слагаемых в ней равно $(d_1 + 1) \cdot \dots \cdot (d_k + 1) - 2$. Это число отлично от нуля, поскольку $d_1 + \dots + d_k \geq 2$. Все величины $C_{d_u}^{i_u}$ в ней не делятся на простое q при $d_u \in \{0, \dots, q-1\}$ (напомним, что $K = GF(q)$ — простое поле). Значит, все мономы, входящие в сумму $\sum_{i_1, \dots, i_k}$, имеют ненулевые коэффициенты. Следовательно, все функции $\Phi_{d_1, \dots, d_k}(y, z)$ отличны от нуля.

3) Среди коэффициентов $\omega_{d_1, \dots, d_k}^{(s)}$ найдется коэффициент $\omega_{d_1^*, \dots, d_k^*}^{(s)} \neq 0$ при некоторых $d_1^*, \dots, d_k^* \in \{0, \dots, q-1\}$, $d_1^* + \dots + d_k^* = d$.

Согласно 3), достаточно рассмотреть функцию $\Phi_{d_1^*, \dots, d_k^*}(y, z)$ и убедиться, что она отлична от константы. А это следует из свойств 1) и 2).

Значит, выражение (67) и левая часть уравнения (65) отличны от констант. Следовательно, выполнены неравенства (62). Доказательство теоремы 4 завершено.

5. Доказательства теорем 5–8

Доказательство теоремы 5. Пусть $K = GF(q)$, где $q = 2^\alpha$. Согласно определению

$$\rho((K^n)_f) = \frac{N_f}{q^{2n}}, \quad (69)$$

где N_f — максимально возможное при $a_1, a_2 \in K \setminus \{0\}$, $(c^1, c^2) \in K^{n+m}$ число решений системы уравнений

$$a_1x^1 + a_2x^2 + x^3 = c^1, \quad (70)$$

$$a_1f(x^1) + a_2f(x^2) + f(x^3) = c^2, \quad (71)$$

относительно тройки векторов $(x^1, x^2, x^3) \in (K^n)^3$. Используя линейное уравнение (70) этой системы, выразим вектор x^3 через x^1, x^2 и подставим в уравнение (71). Получим

$$a_1f(x^1) + a_2f(x^2) + f(c^1 - a_1x^1 - a_2x^2) = c^2. \quad (72)$$

Очевидно, что уравнение (72) имеет такое же число решений, как и система (70)–(71).

Положим $a_1 = a_2 = 1, c^2 = f(c^1)$. При этом условии все пары n -мерных векторов x^1, x^2 , удовлетворяющие равенству $x^1 = x^2$ (и, следовательно, равенству $x^1 + x^2 = 0^n$), являются решениями уравнения (72). Их число $N^{(1)} = q^n$. Кроме того, согласно условиям $a_1 = a_2 = 1, c^2 = f(c^1)$ и равенствам $f(x) + f(-x) = 0^m$ для всех $x \in K^n$ решениями уравнения (72) являются все пары x^1, x^2 вида

$$x^1 = c^1, \quad x^2 \in K^n \setminus \{c^1\},$$

и все пары x^1, x^2 вида

$$x^1 \in K^n \setminus \{c^1\}, \quad x^2 = c^1.$$

Общее число таких пар $N^{(2)} = 2(q^n - 1)$. Следовательно,

$$N_f \geq N^{(1)} + N^{(2)} = 3 \cdot q^n - 2. \quad (73)$$

Очевидно, что неравенство (73) выполняется при любом $n \geq 1$ и любом отображении $f: K^n \rightarrow K^m, m \geq 1$, где K — конечное поле характеристики два. Из (69), (73) следует неравенство (27). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Пусть $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ — произвольное отображение из K^n в K^m . Обозначим $M[\varphi(x)]$ множество прообразов элемента $\varphi(x)$.

Лемма 3. Пусть $K = GF(q)$, $q = 2^\alpha$, $n \geq 2$, $m = C_n^2$, $f^{(n)} = (f_1, \dots, f_{C_n^2})$, где

$$\{f_1(x), \dots, f_{C_n^2}(x)\} = Q^{(2)}[x_1, \dots, x_n] = \{x_i x_j : 1 \leq i < j \leq n\}. \quad (74)$$

Тогда при $b \neq 0^n$ справедливы неравенства

$$|M[f^{(n)}(x) + f^{(n)}(b + x)]| \leq q \quad \forall x \in K^n. \quad (75)$$

Доказательство леммы проведем с использованием индукции по параметру $n \geq 2$ и формул

$$Q^{(2)}[x_1, x_2] = \{x_1 x_2\}, \quad (76)$$

$$Q^{(2)}[x_1, \dots, x_n] = Q^{(2)}[x_1, \dots, x_{n-1}] + \bigcup_{i=1}^{n-1} \{x_i x_n\}, \quad n \geq 3. \quad (77)$$

Сначала убедимся, что неравенства (75) выполняются при $n = 2$. В этом случае $f^{(2)}(x) = x_1 x_2$, и при заданном $x = (x_1, x_2)$ уравнение $f^{(2)}(\tilde{x}) + f^{(2)}(b + \tilde{x}) = f^{(2)}(x) + f^{(2)}(b + x)$ относительно $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ имеет вид

$$b_1 \tilde{x}_2 + b_2 \tilde{x}_1 = b_1 x_2 + b_2 x_1. \quad (78)$$

Пусть $b_1 \neq 0$, тогда при любом значении $\tilde{x}_1 \in GF(q)$ уравнение (78) имеет для $\tilde{x}_2 = b_1^{-1}(b_2 \tilde{x}_1 + b_1 x_2 + b_2 x_1)$ единственное решение. Значит, в этом случае $|M[f^{(2)}(x) + f^{(2)}(b + x)]| = q$. То же самое получаем при $b_2 \neq 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $n \geq 3$. Пусть задан вектор $b^{(n)} = (b_1, \dots, b_n)$, где $b_1 \neq 0$, а $b^{(n-1)} = (b_1, \dots, b_{n-1})$. Будем использовать обозначения $x^{(k)} = (x_1, \dots, x_k)$, $b^{(k)} = (b_1, \dots, b_k)$,

$$\varphi^{(k)}(x^{(k)}, b^{(k)}) = f^{(k)}(x^{(k)}) + f^{(k)}(b^{(k)} + x^{(k)}), \quad k = n-1, n. \quad (79)$$

Предположение индукции состоит в том, что при некотором $n \geq 3$

$$|M[\varphi^{(n-1)}(x^{(n-1)}, b^{(n-1)})]| \leq q \quad \forall x^{(n-1)} \in K^{n-1}. \quad (80)$$

Покажем, что при этом условии

$$|M[\varphi^{(n)}(x^{(n)}, b^{(n)})]| \leq q \quad \forall x^{(n)} \in K^n. \quad (81)$$

При заданном $x^{(n)}$ рассмотрим в соотношении

$$\varphi^{(n)}(\tilde{x}^{(n)}, b^{(n)}) = \varphi^{(n)}(x^{(n)}, b^{(n)}), \quad (82)$$

представляющем собой систему из C_n^2 уравнений над полем K относительно $\tilde{x}^{(n)} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, уравнение, отвечающее произведению $x_1 x_n$ (см. (77)):

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}_n + (\tilde{x}_1 + b_1)(\tilde{x}_n + b_n) = x_1 x_n + (x_1 + b_1)(x_n + b_n). \quad (83)$$

Из (83) получаем

$$b_1 \tilde{x}_n + b_n \tilde{x}_1 = b_1 x_n + b_n x_1. \quad (84)$$

Согласно условию $b_1 \neq 0$ отсюда следует, что

$$\tilde{x}_n = b_1^{-1}(b_n \tilde{x}_1 + b_1 x_n + b_n x_1). \quad (85)$$

Значит, при каждом $\tilde{x}^{(n-1)}$, удовлетворяющем соотношению

$$\varphi^{(n-1)}(\tilde{x}^{(n-1)}, b^{(n-1)}) = \varphi^{(n-1)}(x^{(n-1)}, b^{(n-1)}), \quad (86)$$

имеется не более одного варианта $\tilde{x}^{(n)} = (\tilde{x}^{(n-1)}, \tilde{x}_n)$, удовлетворяющего соотношению (82). Поэтому из (80) следует (81).

Таким образом, неравенства (75) при $b = (b_1, \dots, b_n)$, где $b_1 \neq 0$, доказаны. Покажем, что перестановка элементов в ненулевом векторе $b = (b_1, \dots, b_n)$ не влияет на результат наших рассуждений.

Возьмем произвольный ненулевой вектор $b' = (b'_1, \dots, b'_n)$ и подстановочную $(n \times n)$ -матрицу G , которая переводит b' в вектор b с $b_1 \neq 0$:

$$Gb' = b \quad (87)$$

(здесь и далее все векторы представляются столбцами). Следуя определению (74) отображения $f^{(n)}(x)$, сопоставим матрице G подстановочную $C_n^2 \times C_n^2$ -матрицу $\tilde{G}$, удовлетворяющую условию

$$\tilde{G}f^{(n)}(x) = f^{(n)}(Gx). \quad (88)$$

Используя (88) и очевидное равенство $M[\varphi(x)] = M[\tilde{G}\varphi(x)]$ при отображении $\varphi : K^n \rightarrow K^{C_n^2}$, получаем

$$\begin{aligned} M[f^{(n)}(x) + f^{(n)}(b' + x)] &= M[\tilde{G}(f^{(n)}(x) + f^{(n)}(b' + x))] = \\ &= M[\tilde{G}f^{(n)}(x) + \tilde{G}f^{(n)}(b' + x)] = M[f^{(n)}(Gx) + f^{(n)}(Gb' + Gx)]. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (87), находим

$$|M[f^{(n)}(x) + f^{(n)}(b' + x)]| = |M[f^{(n)}(Gx) + f^{(n)}(b + Gx)]|.$$

Согласно доказанному ранее, $|M[f^{(n)}(Gx) + f^{(n)}(b + Gx)]| \leq q$ для всех $x \in K^n$. Лемма 3 доказана.

Пусть $K = GF(2)$ и отображение f удовлетворяет условию (28). Тогда, согласно (75) при любом выборе вектора $x^1 \neq c^1$ уравнение (72) (где $a_1 = a_2 = 1$) имеет не более 2 решений для x^2 . Следовательно, для числа N_1 пар (x^1, x^2) , $x^1 \neq c^1$, удовлетворяющих уравнению (72), выполнено неравенство $N_1 \leq 2(2^n - 1)$. Вместе с тем, при выборе $x^1 = c^1$ число решений уравнения (72) относительно переменной x^2 равно $N_2 = 2^n$, если $c^2 = f(c^1)$, и равно нулю, если $c^2 \neq f(c^1)$. Следовательно,

$$N_f = N_1 + N_2 \leq 3 \cdot 2^n - 2. \quad (89)$$

Из (69), (73) и (89) получаем (29). Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Достаточно рассмотреть случай, когда $m = n + C_n^2$,

$$f(x) = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\} = \{x_i x_j : 1 \leq i \leq j \leq n\}. \quad (90)$$

В уравнении (72), выписанном для отображения (90), произведем замену переменных $y = x^1$, $z = x^2$, и запишем векторы c^1 и c^2 как $(c_1, \dots, c_n)$ и $(c_{i,j}, 1 \leq i \leq j \leq n)$ соответственно. Тогда (72) запишется в виде системы уравнений

$$a_1 y_i y_j + a_2 z_i z_j + (c_i - a_1 y_i - a_2 z_i)(c_j - a_1 y_j - a_2 z_j) = c_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (91)$$

относительно неизвестных $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$. Раскроем в уравнениях этой системы скобки и разделим ее на подсистемы

$$(a_2 + a_2^2)z_i^2 - 2a_2(c_i - a_1 y_i)z_i + F_i(a_1; y_i, c_i) = c_{i,i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (92)$$

где $F_i(a_1; y_i, c_i) = a_1 y_i^2 + (c_i - a_1 y_i)^2$, и

$$[(a_2 + a_2^2)z_i - a_2(c_i - a_1 y_i)]z_j - a_2(c_j - a_1 y_j)z_i + F_{i,j}(a_1; y_i, y_j, c_i, c_j) = c_{i,j}, \quad (93)$$

где $1 \leq i < j \leq n$, $F_{i,j}(a_1; y_i, y_j, c_i, c_j) = a_1 y_i y_j + (c_i - a_1 y_i)(c_j - a_1 y_j)$.

Пусть $N_{[a_2 \neq -1]}$ — максимальное (по всем $c^1 \in K^n$, $c^2 \in K^{n+C_n^2}$, $a_1, a_2 \in K \setminus \{0\}$) число решений системы (91) для случая, когда $a_2 \neq -1$. В случае, когда $a_2 = -1$, для этого числа будем использовать обозначение $N_{[a_2 = -1]}$.

Пусть $\text{Char } K = 2$. Тогда подсистема (92) принимает вид

$$(a_2 + a_2^2)z_i^2 + F_i(a_1; y_i, c_i) = c_{i,i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (94)$$

Если $a_2 \neq -1$, то при любом значении переменной $y_i \in K$ уравнение подсистемы (94) с номером $i = 1, \dots, n$ в случае его разрешимости имеет для переменной z_i одно решение (кратное двум). Поэтому

$$N_{[a_2 \neq -1]} \leq q^n. \quad (95)$$

Пусть теперь $a_2 = -1$. В этом случае исходное уравнение (72) после замены переменных $y = x^1, z = x^2$ принимает вид

$$a_1 f(y) + f(z) + f((c^1 + a_1 y) + z) = c^2. \quad (96)$$

Согласно лемме 2 (см. (75)) при любом выборе вектора $y \neq a_1^{-1}c^1$ уравнение (96) имеет не более $q = 2^\alpha$ решений для вектора z . Следовательно, для числа N_1 пар (y, z) , $y \neq a_1^{-1}c^1$, удовлетворяющих уравнению (96), выполнено неравенство $N_1 \leq q(q^n - 1)$. При $y = a_1^{-1}c^1$ число решений уравнения (96) относительно вектора z равно $N_2 = q^n$, если $c^2 = a_1 f(a_1^{-1}c^1)$, и равно нулю в противном случае. Следовательно,

$$N_{[a_2 = -1]} = N_1 + N_2 \leq q^n(q + 1) - q. \quad (97)$$

Из (95), (97) и (69) получаем (31). Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Нам опять достаточно рассмотреть случай, когда $m = n + C_n^2$ и выполнено равенство (90).

Пусть $K = GF(p^\alpha)$, $p \geq 3$. Будем использовать системы уравнений (92), (93). Пусть $a_2 \neq -1$. При $y \in K^n$ и $0 \leq k \leq n - 1$ введем обозначения $H_k(z_1, \dots, z_k)$ и $h_k(z_1, \dots, z_k)$ для множества и числа решений $(z_{k+1}, \dots, z_n)$ системы, составленной из $n - k$ последних уравнений системы (92) и C_{n-k}^2 уравнений системы (93) с номерами (i, j) , $n - k \leq i < j \leq n$, в которых заданы значения неизвестных $z_1, \dots, z_k$ (обозначим ее $(91)_k$). При $k = 0$ аргумент в этом обозначении указывать не будем. Кстати, H_0 и h_0 — это множество и число решений системы (91).

Пусть $k = 0$. В рассматриваемом случае $a_2 + a_2^2 \neq 0$ и, согласно уравнениям (92), при любом значении вектора y каждая переменная z_i , $i = 1, \dots, n$, имеет не более двух решений.

Если переменная z_1 принимает одно значение, то

$$H_0 = \{(z_1, z') : z' \in H_1(z_1)\}, \quad h_0 = h_1(z_1).$$

Если переменная z_1 имеет два решения, то по крайней мере для одного из них выполнено неравенство (см. уравнение (93) для $i = 1, j > 1$) $(a_2 + a_2^2)z_1 - a_2(c'_1 - a_1y_1) \neq 0$, и согласно (93), переменные $z_2, \dots, z_n$ им определяют однозначно. Другому решению для z_1 отвечают либо одно определенное, либо все решения системы $(91)_1$. Следовательно, $h_0 \leq 1 + h_1(z_1)$.

Положим $h_k^* = \max_{z_1, \dots, z_k} h_k(z_1, \dots, z_k)$, $k = 0, \dots, n - 1$. Из приведенных выше рассуждений следует, что $h_0^* \leq 1 + h_1^*$.

Аналогичные рассуждения приводят к неравенствам

$$h_k^* \leq 1 + h_{k+1}^*, \quad k = 1, \dots, n - 2, \quad h_{n-1}^* \leq 2.$$

Следовательно,

$$N_{[a_2 \neq -1]} \leq |K^n| h_0^* \leq q^n(n + 1). \quad (98)$$

Пусть теперь $a_2 = -1$. В этом случае $a_2 + a_2^2 = 0$, и уравнения (92) и (93) принимают вид

$$2(c_i - a_1y_i)z_i + F_i(a_1; y_i, c_i) = c_{i,i}, \quad (99)$$

$$(c_i - a_1y_i)z_j + (c_j - a_1y_j)z_i + F_{i,j}(a_1; y_i, y_j, c_i, c_j) = c_{i,j}. \quad (100)$$

Сопоставим уравнениям (99) и (100) разбиение $K^n = U_1 \cup \dots \cup U_n \cup \{y^0\}$, где $y^0 = (a_1^{-1}y_1, \dots, a_1^{-1}y_n)$ и

$$U_k = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n : c_i = a_1y_i, i = 1, \dots, k - 1, c_k \neq a_1y_k\},$$

$k = 1, \dots, n$.

Пусть $N_{[a_2 = -1]}^{(k)}$ — максимальное число решений системы (91) относительно z при задании неизвестного вектора $y \in U_k$, а $N_{[a_2 = -1]}^{(*)}$ — число решений (y, z) системы (91), у которых $y = y^0$. Тогда

$$N_{[a_2 = -1]} \leq \sum_{k=1}^n |U_k| N_{[a_2 = -1]}^{(k)} + N_{[a_2 = -1]}^{(*)}. \quad (101)$$

Нетрудно проверить, что (здесь $q = p^\alpha$)

$$|U_k| = (q - 1)q^{n-k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

При заданном $y \in U_k$ вектор $z = (z_1, \dots, z_n)$, согласно (99) и (100), может принимать не более q^{k-1} значений (при каждом значении y имеется не более q значений для каждой переменной $z_1, \dots, z_{k-1}$ и одно значение для

каждой переменной $z_k, \dots, z_n$). Значит, $N_{[a_2=-1]}^{(k)} \leq q^{k-1}$, $k = 1, \dots, n$. Очевидно также, что $N_{[a_2=-1]}^{(*)} \leq q^n$. Подставив все эти оценки в (101), получим неравенство

$$N_{[a_2=-1]} \leq n(q-1)q^{n-1} + q^n. \quad (102)$$

Из (98), (102) и (69) получаем (32). Теорема 8 доказана.

Авторы признательны А. М. Зубкову за полезные замечания.

Список литературы

1. *Копытцев В. А., Михайлов В. Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22. Вып. 2. — С. 3–21.
2. *Копытцев В. А., Михайлов В. Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа решений случайных включений // Математические вопросы криптографии. — 2010. — Т. 1. Вып. 4. — С. 63–84.
3. *Копытцев В. А., Михайлов В. Г.* О распределении чисел решений случайных включений // Математические вопросы криптографии. — 2011. — Т. 2. Вып. 2. — С. 55–80.
4. *Копытцев В. А., Михайлов В. Г.* Предельные теоремы пуассоновского типа для обобщенного линейного включения // Дискретная математика. — 2012. — Т. 24. Вып. 3. — С. 108–121.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1984.
6. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978.
7. *Михайлов В. Г.* Явные оценки в предельных теоремах для сумм индикаторов // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 1994. — Т. 1. Вып. 4. — С. 580–617.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969.