Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Литвиненко, А. В. Тарасов, Классы Шефера, классы Поста и соответствия Галуа, *Матем. вопр. криптогр.*, 2015, том 6, выпуск 1, 81–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:25:14

УДК: 519.716.5

Классы Шефера, классы Поста и соответствия Галуа

В. С. Литвиненко¹, А. В. Тарасов²

¹Лаборатория ТВП, Москва

²Московский государственный технический университет радиотехники,
электроники и автоматики, Москва

Получено 22.IV.2014

Рассматривается универсальная алгебра на множестве булевых функций с операциями конъюнкции функций, проектирования по переменной и перестановки переменных. Определен вид функций, образующих подалгебры этой универсальной алгебры. Отмечено, что подалгебры рассматриваемой алгебры находятся в соответствии Галуа с подалгебрами итеративной алгебры Поста, что связывает результаты статьи с ранее известными работами по классам Поста.

Ключевые слова: булева функция, булев предикат, универсальная алгебра, классы Поста, классы Шефера, соответствия Галуа

Schaefer classes, Post classes and Galois connections

V. S. Litvinenko¹, A. V. Tarasov²

¹*TVP Laboratory, Moscow*

²*Moscow State Technical University of Radio Engineering, Electronics and Automatics, Moscow*

Abstract. An universal algebra on the set of Boolean functions with operations of function conjunction, projection with respect to a variable and transposition of variables is considered. The structure of functions constituting subalgebras of this algebra are described. It is shown that there exists a Galois connection between subalgebras of the algebra considered and subalgebras of iterative Post algebra; this connection links our results with known papers on Post classes.

Key words: Boolean function, Boolean predicate, universal algebra, Post classes, Schaefer classes, Galois connections

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2015, vol. 6, no. 1, pp. 81–107 (Russian).

1. Обозначения

Обозначения введем в соответствии с работами [1, 2]:

P_2 — множество всех булевых функций,

$P_2(n)$ — множество булевых функций, зависящих от n переменных,

V_n — множество n -мерных двоичных векторов,

$E_f = \{\alpha \in V_n : f(\alpha) = 1\}$ — носитель (множество выполняющих векторов) функции $f \in P_2(n)$.

Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется:

1) 0-выполнимой, если $f(0, \dots, 0) = 1$;

2) 1-выполнимой, если $f(1, \dots, 1) = 1$;

3) биюнктивной, если $f \equiv 1$ или существует представление функции f в виде 2-КНФ

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_{i2}}); \quad (1)$$

4) слабо положительной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде

$$f \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_i} \vee x_{s_{i2}} \vee \dots \vee x_{s_{ik_i}}); \quad (2)$$

5) слабо отрицательной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде

$$f \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{a_i} \vee \bar{x}_{s_{i2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{ik_i}}); \quad (3)$$

6) мультиаффинной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t l_i(x_1, \dots, x_n), \quad (4)$$

где $l_1(x_1, \dots, x_n), \dots, l_t(x_1, \dots, x_n)$ — аффинные функции.

Множества всех функций классов 1)–6) обозначим соответственно 0-S, 1-S, Bi, WP, WN, A. Формулы (1)–(4) для функций классов Bi, WP, WN будем называть приведенными представлениями.

Следуя [4], булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем C-замкнутой, если выполнено равенство

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Во избежание пересечения вводимых обозначений с обозначениями работы [9], класс всех таких функций обозначим CL.

Введем некоторые обозначения. Через $WP_{m,2}$ обозначим подкласс класса слабо положительных функций, состоящий из функций, представленных в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (\bar{x}_{s_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}) \bigwedge_{j=1}^p (x_{r_{j,1}} \vee \dots \vee x_{r_{j,m}}).$$

Аналогичным образом введем класс $WN_{m,2}$. Эти классы изучались в [5]. Показано, что они замкнуты относительно операций, задаваемых пороговыми функциями. Кроме того, эти классы функций порождают системы уравнений, для которых задача нахождения вектора, не выполняющего минимальное число уравнений соответствующей F -системы, является APX -полной [4, с. 68].

В качестве их естественных расширений введем классы

$$WP_{\infty,2} = \bigcup_{m=0}^{\infty} WP_{m,2}, \quad WN_{\infty,2} = \bigcup_{m=0}^{\infty} WN_{m,2}.$$

Дополнительно введем обозначения для известных ([10]) классов монотонных (Mon) и антимонотонных ($\overline{Mon}$) функций, являющихся подклассами классов слабо положительных и слабо отрицательных функций. Функции из Mon (из $\overline{Mon}$) представимы в виде КНФ (ДНФ), не содержащих отрицаний. Через Mon_m и $\overline{Mon}_m$ обозначим, соответственно, классы монотонных и антимонотонных функций, в сокращенной КНФ которых каждый сомножитель зависит не более чем от m переменных.

2. Классы Шефера и их пересечения

Пусть $F = \{f_j(x_1, \dots, x_{k_j}) \mid j \in J\}$ — некоторый набор булевых функций, $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Любую систему булевых уравнений вида

$$\left\{ f_{s_i}(x_{s_{i1}}, \dots, x_{s_{ik_i}}) = 1, \quad i = 1, \dots, m, \right. \quad (5)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $f_{s_i} \in F$, $x_{s_{ij}} \in X$ ($i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$), назовем F -системой. Множество всех F -систем назовем классом F -систем и обозначим $[F]_{NC}$. Через $\text{sat}([F]_{NC})$ обозначим задачу распознавания совместности систем из $[F]_{NC}$.

В [1] Т. Шефером доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если для конечного набора булевых функций F выполняется хотя бы одно из включений

$$F \subset 0-S, F \subset 1-S, F \subset A, F \subset Bi, F \subset WP, F \subset WN, \quad (6)$$

то задача $\text{sat}([F]_{NC})$ полиномиальна. В случае, когда не выполняется ни одно из включений (6) и все функции набора F не равны тождественно нулю, задача $\text{sat}([F]_{NC})$ является NP-полной.

В связи с этим результатом классы функций 0-S, 1-S A , Bi , WP , WN называют классами Шефера.

С. П. Горшков в [2] уточнил эту теорему для задачи распознавания совместности систем вида (5) с добавлением уравнений, исключающих тривиальные решения вида $(0, \dots, 0)$ и $(1, \dots, 1)$. Задача распознавания совместности таких систем обозначается $\text{sat}([F])$.

Теорема 2. Если для набора функций F выполняется хотя бы одно из включений

$$F \subseteq A, F \subseteq Bi, F \subseteq WP, F \subseteq WN \quad (7)$$

и, в случае $|F| = \infty$, функции набора F заданы либо соответствующими приведенными представлениями, либо многочленами Жегалкина, либо дизъюнктивными нормальными формами, то задача $\text{sat}([F])$ полиномиальна. В случае невыполнения всех включений (7) задача $\text{sat}([F])$ является NP-полной.

В [3] исследованы пересечения классов A , Bi , WP , WN . Показано, что пересечения этих классов не пусты и что выполняется ряд соотношений, которые мы приведем вместе с обозначениями классов функций:

$$\begin{aligned} M_1 &\stackrel{\text{def}}{=} A \cap WP = A \cap WN = A \cap WP \cap WN = \\ &= A \cap Bi \cap WP = A \cap Bi \cap WN = A \cap Bi \cap WP \cap WN, \\ M_2 &\stackrel{\text{def}}{=} A \cap Bi, \quad M_3 \stackrel{\text{def}}{=} WP \cap WN = Bi \cap WP \cap WN, \\ M_4 &\stackrel{\text{def}}{=} Bi \cap WP, \quad M_5 \stackrel{\text{def}}{=} Bi \cap WN. \end{aligned}$$

В [3] описан также вид функций из классов $M_1 - M_5$ и получены оценки для чисел функций данных классов, зависящих от n переменных. В [6] выведена асимптотическая формула для числа функций класса M_1 . Дополним эти результаты некоторыми очевидными фактами.

Положим,

$$\begin{aligned} A^0 &= 0 - S \cap A, \quad A^1 = 1 - S \cap A, \quad A^{01} = 0 - S \cap 1 - S \cap A, \\ Bi^0 &= 0 - S \cap Bi, \quad Bi^1 = 1 - S \cap Bi, \quad Bi^{01} = 0 - S \cap 1 - S \cap Bi, \\ WP^0 &= 0 - S \cap WP, \quad WP^1 = 1 - S \cap WP, \quad WP^{01} = 0 - S \cap 1 - S \cap WP, \\ WN^0 &= 0 - S \cap WN, \quad WN^1 = 1 - S \cap WN, \quad WN^{01} = 0 - S \cap 1 - S \cap WN. \end{aligned}$$

При описании классов функций мы будем рассматривать формулы, записываемые в виде конъюнкции некоторого числа сомножителей:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t \varphi_l(x_{s_{l,1}}, x_{s_{l,2}}, \dots, x_{s_{l,k_l}}).$$

При этом будем полагать, что $I \subset \{1, \dots, n\}$, $J \subset \{1, \dots, n\}$, $I \cap J = \emptyset$, а индексы вида $s_{l,1}, \dots, s_{l,k_l}$ все различны и не лежат в множествах I и J . Тогда из формул (1)–(4) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ лежит в классе M тогда и только тогда, когда она представима формулой вида:

а) для $M = A^0$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}} \oplus 1);$$

б) для $M = A^1$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}}) \bigwedge_{m=1}^p (x_{r_{m,1}} \oplus x_{r_{m,2}} \oplus \dots \oplus x_{r_{m,q_m}} \oplus 1),$$

где $k_1, \dots, k_t$ нечетны, $q_1, \dots, q_p$ четны;

в) для $M = A^{01}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}} \oplus 1),$$

где $k_1, \dots, k_t$ четны;

г) для $M = B_i^0$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}}^{a_i});$$

д) для $M = B_i^1$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}}^{a_i});$$

е) для $M = B_i^{01}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}});$$

ж) для $M = WP^0$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}});$$

з) для $M = WP^1$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in J} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}}^{a_l} \vee x_{s_{l,2}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}}), \quad 2 \leq k_1, \dots, k_t \leq n;$$

и) для $M = WP^{01}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}} \vee \dots \vee x_{s_{l,k_l}}), \quad 2 \leq k_1, \dots, k_t \leq n;$$

к) для $M = WN^0$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}}^{a_l} \vee \bar{x}_{s_{l,2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{l,k_l}}), \quad 2 \leq k_1, \dots, k_t \leq n;$$

л) для $M = WN^1$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in J} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \vee \bar{x}_{s_{l,2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{l,k_l}}), \quad 2 \leq k_1, \dots, k_t \leq n;$$

м) для $M = WN^{01}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \vee \bar{x}_{s_{l,2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{l,k_l}}), \quad 2 \leq k_l \leq n, \quad l = 1, \dots, t.$$

Введем классы функций, являющиеся пересечениями классов 0-S и 1-S с классами $M_1 - M_5$:

$$M_i^0 = 0-S \cap M_i, M_i^1 = 1-S \cap M_i, M_i^{01} = 0-S \cap 1-S \cap M_i.$$

Аналогично устанавливается следующее утверждение, формулировка которого включает результаты работы [3].

Утверждение 4.

1) Верны равенства:

$$M_1^0 = M_2^0, \quad M_1^1 = M_2^1, \quad M_1^{01} = M_2^{01}, \quad M_3^0 = M_4^0,$$

$$M_3^1 = M_5^1, \quad M_3^{01} = M_4^{01} = M_5^{01} = Bt^{01}.$$

2) Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ лежит в классе $M \in \{M_i, M_i^0, M_i^1, M_i^{01}, i = 1, \dots, 5\}$ тогда и только тогда, когда она представима формулой вида

а) для $M = M_1$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1);$$

б) для $M = M_2$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus a_l);$$

в) для $M = M_3$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}});$$

г) для $M = M_4$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}}^{a_i} \vee x_{s_{l,2}});$$

д) для $M = M_5$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}}^{a_i} \vee \bar{x}_{s_{l,2}});$$

е) для $M = M_1^0 = M_2^0$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1);$$

ж) для $M = M_1^1 = M_2^1$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1);$$

з) для $M = M_1^{01} = M_2^{01}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus 1);$$

и) для $M = M_3^0 = M_4^0$

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}});$$

к) для $M = M_3^1 = M_5^1$

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}});$$

л) для $M = M_3^{01} = M_4^{01} = M_5^{01} = B_i^{01}$

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l,1}} \vee x_{s_{l,2}});$$

м) для $M = M_4^1$

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}}^{a_i} \vee x_{s_{l,2}});$$

н) для $M = M_5^0$

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}}^{a_i} \vee \bar{x}_{s_{l,2}}).$$

Из результатов работы [3] и утверждений 3 и 4 следует, что пересечения классов Шефера образуют 30 классов булевых функций. Используя результаты утверждений 3 и 4, легко показать, что все эти классы различны.

В заключение данного параграфа опишем пересечения указанных классов с классом CL . Сначала заметим, что

$$CL \cap 0 - S = CL \cap 1 - S = CL \cap 0 - S \cap 1 - S.$$

Этот класс функций обозначим через M_6 . Положим также $M_7 = CL \cap B_i$ и $M_8 = CL \cap A$.

Утверждение 5. Для пересечений класса CL с классами Шефера справедливы следующие утверждения:

а) $CL \cap WP = CL \cap WN = M_1^{01}$;

б) класс $M_7 = CL \cap B_i$ состоит из функций вида

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus a_l);$$

в) класс $M_8 = CL \cap A$ состоит из функций вида

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigotimes_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}} \oplus a_l),$$

где $k_1, \dots, k_t$ четны. В частности, $CL \cap A^0 = CL \cap A^1 = A^{01}$.

Доказательство. а) Включения $M_1^{01} \subset CL \cap WP$, $M_1^{01} \subset CL \cap WN$ очевидны.

Пусть $\hat{f}(x_1, \dots, x_n) \in CL \cap WP$. Тогда выполняется равенство

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \hat{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Рассматривая приведенное представление функций $\hat{f}(x_1, \dots, x_n)$ и $\hat{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ вида (2), легко сделать вывод, что $\hat{f} \in CL \cap WP \cap WN \subset M_3$.

б) Пользуясь результатами работы [3], рассмотрим сокращенную КНФ функции $\hat{f}$

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (\bar{x}_{s_{l1}} \vee x_{s_{l2}}).$$

Так как $\hat{f} \in CL$, то

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \hat{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \bigwedge_{i \in I} \bar{x}_i \bigwedge_{j \in J} x_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l1}} \vee \bar{x}_{s_{l2}}),$$

откуда следует, что, во-первых, $I = J = \emptyset$, а во-вторых, что в полученной КНФ каждая элементарная дизъюнкция вида $\bar{x}_{s_{l1}} \vee x_{s_{l2}}$ содержится вместе с дизъюнкцией $x_{s_{l1}} \vee \bar{x}_{s_{l2}}$, что означает

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigotimes_{l=1}^t (x_{s_{l1}} \oplus x_{s_{l2}} \oplus 1),$$

т. е. $\hat{f} \in M_1^{01}$.

Пусть теперь $\hat{f}(x_1, \dots, x_n) \in CL \cap Bi$. Рассмотрим сокращенную КНФ функции $\hat{f}$, содержащую все ее простые имплиценты:

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l1}}^{a_{l1}} \vee x_{s_{l2}}^{a_{l2}}),$$

где множества $I, J, L = \{s_{l1}, s_{l2}, l = 1, \dots, t\}$ попарно не пересекаются. Так как $\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \hat{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, то выполняется равенство

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i \in I} \bar{x}_i \bigwedge_{j \in J} x_j \bigwedge_{l=1}^t (x_{s_{l1}}^{a_{l1} \oplus 1} \vee x_{s_{l2}}^{a_{l2} \oplus 1}).$$

Отсюда сразу следует, что $I = J = \emptyset$. Далее, в полученной КНФ каждая элементарная дизъюнкция вида $x_{s_{l1}}^{a_{l1}} \vee x_{s_{l2}}^{a_{l2}}$ содержится вместе с дизъюнкцией $x_{s_{l1}}^{a_{l1} \oplus 1} \vee x_{s_{l2}}^{a_{l2} \oplus 1}$, и поэтому

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigotimes_{l=1}^t (x_{s_{l1}} \oplus x_{s_{l2}} \oplus a_{l1} \oplus a_{l2}).$$

в) Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима формулой указанного вида, то очевидно, что она лежит в классе $CL \cap A$. Обратно, пусть $f \in CL \cap A$, $f \neq 0$. Рассмотрим произвольное представление функции f вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigotimes_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}} \oplus a_l).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_n) \cdot f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \\ &= \bigotimes_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}} \oplus a_l) \& \bigotimes_{l=1}^t (x_{s_{l,1}} \oplus x_{s_{l,2}} \oplus \dots \oplus x_{s_{l,k_l}} \oplus c_l \oplus a_l), \end{aligned}$$

где $c_l = k_l \bmod 2$, $l = 1, \dots, t$. Если хотя бы одно из значений c_l равно 1, то $f \equiv 0$, что противоречит исходному условию.

3. Классы Поста и соответствия Галуа

На множестве булевых функций P_2 определим два набора операций, на которых впоследствии определим две универсальных алгебры. Первый набор операций определяет итеративную алгебру Поста и состоит из операций ζ , τ , Δ , ∇ и $*$, где ζ и τ — одноместные операции циклической перестановки переменных и транспозиции двух первых переменных, Δ — одноместная операция отождествления двух первых переменных, ∇ — одноместная операция введения первой фиктивной переменной, а « $*$ » — двухместная операция суперпозиции функций (см. [8, 9]):

$$f_1(x_1, \dots, x_n) * f_2(y_1, \dots, y_k) = f_1(f_2(y_1, \dots, y_k), x_2, \dots, x_n).$$

Алгебру $(P_2, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, *)$ обозначим через $\mathcal{M}$. Подалгебры этой алгебры образуют известную решетку замкнутых классов Поста (см. [8, 9, 14]).

В таблице 1 перечислены классы Поста и их базисы, на рис. 1 изображена решетка классов Поста. Обозначения для классов взяты из книги [10].

Таблица 1. Классы Поста и их базисы

Класс Поста	Обозн. Поста	Базис	Класс Поста	Обозн. Поста	Базис	Класс Поста	Обозн. Поста	Базис
P_2	C_1	$\bar{x}, x \vee y$	Mon	A_1	$0, 1, xy, x \vee y$	L	L_1	$1, x \oplus y$
D	S_6	$0, 1, x \vee y$	K	P_6	$0, 1, xy$	U	O_9	$1, \bar{x}$
MU	O_8	$0, 1, x$	C	O_7	$0, 1$	T_1	C_2	$xy, \bar{x} \vee y$
Mon_1	A_2	$1, xy, x \vee y$	L_1	L_2	$x \oplus y \oplus 1$	D_1	S_3	$1, x \vee y$
K_1	P_5	$1, xy$	U_1	O_5	$1, x$	C_1	O_2	1
O^m	F_4^m	$\bar{x} \vee y, \bigvee_{1 \leq i < j \leq m+1} x_i x_j$	MO^m	F_3^m	$1, \bigvee_{1 \leq i < j \leq m+1} x_i x_j$	O^∞	F_4^∞	$x \vee \bar{y}$
MO^∞	F_3^∞	$1, x \vee y \bar{z}$	T_0	C_3	$\bar{x}y, x \vee y$	Mon_0	A_3	$0, xy, x \vee y$
L_0	L_3	$x \oplus y$	D_0	S_5	$0, x \vee y$	K_0	P_3	$0, xy$
U_0	O_6	$0, x$	C_0	O_3	0	I^m	F_8^m	$\bar{x}y, \bigwedge_{1 \leq i < j \leq m+1} (x_i \vee x_j)$
MI^m	F_7^m	$0, \bigwedge_{1 \leq i < j \leq m+1} (x_i \vee x_j)$	I^∞	F_8^∞	$x \bar{y}$	MI^∞	F_7^∞	$0, x(y \vee \bar{z})$
T_{01}	C_4	$xy, x \vee y \bar{z}$	S_{01}	D_1	$\bar{x}y \vee \bar{x}z \vee yz$	Mon_{01}	A_4	$xy, x \vee y$
L_{01}	L_4	$x \oplus y \oplus z$	D_{01}	S_1	$x \vee y$	K_{01}	P_1	xy
U_{01}	O_1	$0, 1, x$	S	D_3	$\bar{x}, xy \vee xz \vee yz$	SM	D_2	$xy \vee xz \vee yz$
SL	L_5	$x \oplus y \oplus z \oplus 1$	SU	O_4	$\bar{x}$	O_0^m	F_1^m	$x \vee y \bar{z}, \bigvee_{1 \leq i < j \leq m+1} x_i x_j$
MO_0^2	F_2^2	$x \vee y, xy \vee xz \vee yz$	MO_0^m	F_2^m	$\bigvee_{1 \leq i < j \leq m+1} x_i x_j$	I_1^m	F_5^m	$x(y \vee \bar{z}), \bigwedge_{1 \leq i < j \leq m+1} (x_i \vee x_j)$
MI_1^2	F_6^2	$xy, xy \vee xz \vee yz$	MI_1^m	F_6^m	$\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m+1} (x_i \vee x_j)$	O_0^∞	F_1^∞	$x \vee y \bar{z}$
MO_0^∞	F_2^∞	$x \vee yz$	I_1^∞	F_5^∞	$x(y \vee \bar{z})$	MI_1^∞	F_6^∞	$x(y \vee z)$

Рис. 1. Решетка классов Поста

Второй набор состоит из операций ζ , τ , Δ , $\exists$, $\&$: операции ζ , τ , Δ определены выше, $\&$ — операция конъюнкции двух булевых функций, а операция $\exists$ является операцией проектирования по первой переменной, т.е. операцией вида

$$\exists x_1 f(x_1, \dots, x_n) = f(0, x_2, \dots, x_n) \vee f(1, x_2, \dots, x_n).$$

Алгебра $(P_2, \zeta, \tau, \Delta, \exists, \&)$ введена в работах [8,9] и обозначается через $\mathcal{N}$. Эту алгебру будем далее называть алгеброй Шефера, поскольку она включает классы Шефера в качестве подалгебр.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, а $g(y_1, \dots, y_r)$ — операция. Сначала заметим, что любая r -местная функция $g(y_1, \dots, y_r)$ индуцирует r -местную операцию $\tilde{g}$ на множестве V_n по следующему правилу: если $\alpha^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})$, $\dots$, $\alpha^{(r)} = (a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \dots, a_n^{(r)})$, то

$$\tilde{g}(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}) = (b_1, \dots, b_n), b_i = g(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(r)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Замечание. В [9, 10] элементы алгебры $\mathcal{M}$ называются функциями, а элементы алгебры $\mathcal{N}$ — предикатами, поскольку эти работы посвящены предикатному описанию замкнутых классов Поста. При этом свойства классов предикатов детально не изучаются. В нашем же случае элементы алгебры $\mathcal{N}$ будем называть *функциями*, а элементы алгебры $\mathcal{M}$ — *операциями*.

Определение 1. ([8,9,10]). Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ *инвариантна относительно операции* $g(y_1, \dots, y_r)$, если для любых r выполняющих векторов $\alpha^{(1)} = (a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})$, $\dots$, $\alpha^{(r)} = (a_1^{(r)}, \dots, a_n^{(r)})$ функции f вектор $\beta = \tilde{g}(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)})$ тоже является выполняющим для f . В этом случае говорят также, что операция g *сохраняет функцию* f , и пишут $\Phi(g, f)$.

Пусть G — произвольное множество операций, а F — множество функций. Через $\text{Inv}(G)$ обозначим множество функций, сохраняемых всеми операциями из G , а через $\text{Pol}(F)$ — множество операций, сохраняющих все функции из F :

$$\text{Inv}(G) = \bigcap_{g \in G} \{f : \Phi(g, f)\},$$

$$\text{Pol}(F) = \bigcap_{f \in F} \{g : \Phi(g, f)\}.$$

Сразу заметим, что для любого множества операций G и множества функций F множества $\text{Inv}(G)$ и $\text{Pol}(F)$ непусты, поскольку первое, очевидно, содержит функции-константы 0 и 1, а второе — операцию $g(y) = y$.

Операторы Inv и Pol являются антиизоморфизмами частично упорядоченных множеств подмножеств алгебр $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, образующими пару соответствий Галуа (см. [11, с. 58]), т.е. соответствий, удовлетворяющих условиям

$$G_1 \subset G_2 \subset \mathcal{M} \Rightarrow \text{Inv}(G_1) \supset \text{Inv}(G_2),$$

$$F_1 \subset F_2 \subset \mathcal{N} \Rightarrow \text{Pol}(F_1) \supset \text{Pol}(F_2),$$

$$G \subset \mathcal{M} \Rightarrow G \subset \text{Pol}(\text{Inv}(G)),$$

$$F \subset \mathcal{N} \Rightarrow F \subset \text{Inv}(\text{Pol}(F)).$$

Исследованию этих соответствий посвящены работы [8, 9, 10, 13] .

Определим далее замыкания множеств в алгебрах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ следующим образом: для $G \subset \mathcal{M}$ положим $[G] = \text{Pol}(\text{Inv}(G))$, а для $F \subset \mathcal{N}$ положим $[F] = \text{Inv}(\text{Pol}(F))$. Данные операторы замыкания носят название *замыканий Галуа*. Подалгебры, порожденные множествами G и F в своих алгебрах, будем обозначать, соответственно, $\langle G \rangle$ и $\langle F \rangle$.

Отметим еще несколько важных свойств операторов Pol и Inv (см. [10]).

Утверждение 6. Пусть G, G_1, G_2 — произвольные множества операций, а F, F_1, F_2 — произвольные множества функций. Верны следующие утверждения:

$$1) \text{Inv}(G_1 \cap G_2) = [\text{Inv}(G_1) \cup \text{Inv}(G_2)];$$

$$2) \text{Inv}(G_1 \cup G_2) = \text{Inv}(G_1) \cap \text{Inv}(G_2);$$

$$3) \text{Pol}(F_1 \cap F_2) = [\text{Pol}(F_1) \cup \text{Pol}(F_2)];$$

$$4) \text{Pol}(F_1 \cup F_2) = \text{Pol}(F_1) \cap \text{Pol}(F_2);$$

5) выполняются включения: $G \subseteq [G], F \subseteq [F]$, где равенства имеют место тогда и только тогда, когда G и F — подалгебры своих алгебр.

Приведем несколько важных утверждений.

Утверждение 7 ([10, с. 52, 56]). Для любой функции $f \in P_2$ множество $\text{Pol}(\{f\})$ является подалгеброй алгебры Поста, содержащей функции $y_i, i = 1, 2, \dots$. Для любой операции $g \in P_2$ множество $\text{Inv}(\{g\})$ является подалгеброй алгебры Шефера, содержащей M_1^{01} . Аналогичные утверждения верны для любых подмножеств $F \subset P_2, G \subset P_2$.

С данным утверждением связаны следующие факты.

Утверждение 8. Для всякого множества операций G и множества функций F верны равенства

$$\text{Inv}(\langle G \rangle) = \text{Inv}(G), \text{Pol}(\langle F \rangle) = \text{Pol}(F).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Поскольку $G \subset \langle G \rangle$, то $\text{Inv}(\langle G \rangle) \subset \text{Inv}(G)$. Докажем обратное включение. Пусть $f \in \text{Inv}(G)$ и операция h получена из элементов G применением операций ζ , τ , Δ , ∇ и $*$. Достаточно рассмотреть случай, когда h получается из элементов множества G применением единственной операции из множества $\{\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *\}$.

Пусть $h(y_1, \dots, y_r) = \zeta(g(y_1, \dots, y_r))$, $g \in G$.

Тогда $h(y_1, \dots, y_r) = g(y_2, \dots, y_r, y_1)$. Для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ включение $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Inv}(G)$ выполняется тогда и только тогда, когда для любых r векторов $\alpha^{(1)} = (a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})$, $\dots$, $\alpha^{(r)} = (a_1^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}) \in E_f$ выполняется включение $\beta = \tilde{g}(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}) \in E_f$. Это равносильно тому, что для любых r векторов $\alpha^{(1)} = (a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})$, $\dots$, $\alpha^{(r)} = (a_1^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}) \in E_f$ верны соотношения

$$\beta' = \tilde{g}(\alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(r)}, \alpha^{(1)}) = \tilde{h}(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}) \in E_f.$$

Аналогичным образом проводятся рассуждения для операций τ , Δ , ∇ . Рассмотрим операцию $*$. Пусть $g(z_1, \dots, z_s)$, $g_1(y_1, \dots, y_k), \dots$, $g_s(y_1, \dots, y_k) \in G$ и

$$h(y_1, \dots, y_k) = g(g_1(y_1, \dots, y_k), \dots, g_s(y_1, \dots, y_k)).$$

Рассмотрим векторы $\alpha_1 = (a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, \alpha_k = (a_1^k, \dots, a_n^k)$ из E_f . Обозначим

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (g_1(a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, g_1(a_n^1, \dots, a_n^1)), \dots, \beta_s = \\ &= (g_s(a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, g_s(a_n^1, \dots, a_n^1)). \end{aligned}$$

Пусть $\beta_i = (b_1^i, \dots, b_n^i)$. Так как $g_1, \dots, g_s \in G$, а $f \in \text{Inv}(G)$, то векторы $\beta_1, \dots, \beta_s \in E_f$. И так как $g \in G$, то вектор $(g(b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, g(b_n^1, \dots, b_n^1))$ также лежит в E_f . Но тогда

$$\begin{aligned} &(g(b_1^1, \dots, b_n^1), \dots, g(b_n^1, \dots, b_n^1)) = \\ &= (g(g_1(a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, g_s(a_n^1, \dots, a_n^1)), \dots, g(g_1(a_n^1, \dots, a_n^1), \dots, g_s(a_n^1, \dots, a_n^1))) = \\ &= (h(a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, h(a_n^1, \dots, a_n^1)) \in E_f \end{aligned}$$

и $\text{Inv}(G) \subset \text{Inv}(\langle G \rangle)$, что и требовалось доказать.

Докажем второе равенство. Очевидно, что $\text{Pol}(\langle F \rangle) \subset \text{Pol}(F)$. Покажем, что верно и обратное включение. Пусть $g(y_1, \dots, y_r) \in \text{Pol}(F)$

и $f(x_1, \dots, x_n) \in \langle F \rangle$. Покажем, что выполнено отношение $\Phi(g, f)$. Для этого достаточно рассмотреть случай, когда функция f получена из функций F применением одной произвольной операции из множества $\{\zeta, \tau, \Delta, \exists, \&\}$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = \zeta(\hat{f}(x_1, \dots, x_n)) = \hat{f}(x_2, \dots, x_n, x_1)$ и

$$\hat{\alpha}^{(1)} = (\hat{a}_1^{(1)}, \hat{a}_2^{(1)}, \dots, \hat{a}_n^{(1)}), \dots, \hat{\alpha}^{(r)} = (\hat{a}_1^{(r)}, \hat{a}_2^{(r)}, \dots, \hat{a}_n^{(r)}) \in E_{\hat{f}}.$$

Поскольку выполнено отношение $\Phi(g, \hat{f})$, то вектор $\hat{\beta} = (\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n) = \tilde{g}(\hat{\alpha}^{(1)}, \dots, \hat{\alpha}^{(r)}) \in E_{\hat{f}}$. Но тогда вектор $\beta = (\hat{b}_2, \dots, \hat{b}_n, \hat{b}_1) = \tilde{g}(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}) \in E_f$, где $\alpha^{(1)} = (\hat{a}_2^{(1)}, \dots, \hat{a}_n^{(1)}, \hat{a}_1^{(1)}), \dots, \alpha^{(r)} = (\hat{a}_2^{(r)}, \dots, \hat{a}_n^{(r)}, \hat{a}_1^{(r)}) \in E_{\hat{f}}$. Аналогично рассматриваются случаи применения операций τ, Δ и $\exists$.

Пусть теперь $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) \& f_2(x_1, \dots, x_n)$, $f_1, f_2 \in F$. Если $\alpha^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}), \dots, \alpha^{(r)} = (a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}) \in E_f$, то

$$\alpha^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}), \dots, \alpha^{(r)} = (a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}) \in E_{f_1},$$

$$\alpha^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}), \dots, \alpha^{(r)} = (a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}) \in E_{f_2}.$$

В силу $\Phi(g, f_1)$ и $\Phi(g, f_2)$ выполняется включение

$$\beta = \tilde{g}(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}) \in E_{f_1} \cap E_{f_2} = E_f,$$

откуда следует $\Phi(g, f)$. Поэтому $g \in \text{Pol}(\langle F \rangle)$ и $\text{Pol}(\langle F \rangle) = \text{Pol}(F)$. $\square$

Утверждение 9. Если G_1, G_2 — Галуа-замкнутые подалгебры алгебры Поста, а F_1, F_2 — Галуа-замкнутые подалгебры алгебры Шефера, то верны равенства

$$\text{Inv}(\langle G_1 \cup G_2 \rangle) = \text{Inv}(G_1 \cup G_2) = \text{Inv}(G_1) \cap \text{Inv}(G_2),$$

$$\text{Pol}(\langle F_1 \cup F_2 \rangle) = \text{Pol}(F_1 \cup F_2) = \text{Pol}(F_1) \cap \text{Pol}(F_2).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Второе доказывается аналогично. Так как $G_1 \cup G_2 \subset \langle G_1 \cup G_2 \rangle$, то $\text{Inv}(\langle G_1 \cup G_2 \rangle) \subset \text{Inv}(G_1) \cap \text{Inv}(G_2)$.

Пусть теперь $f \in \text{Inv}(G_1) \cap \text{Inv}(G_2)$. Тогда для всех $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ выполняются условия $\Phi(g_1, f)$ и $\Phi(g_2, f)$. В этом случае $f \in \text{Inv}(G_1 \cup G_2)$ и, по утверждению 8, $f \in \text{Inv}(\langle G_1 \cup G_2 \rangle)$. Поэтому выполняется обратное включение, что доказывает наше утверждение. $\square$

Теорема 10 ([10, с. 57, теорема 2.1]). *Классы операций, содержащие функции y_i , $i = 1, 2, \dots$, являются Галуа-замкнутыми классами операций.*

В соответствии теоремой 10, подрешетка решетки замкнутых классов Поста, полученная из исходной исключением классов C , C_0 , C_1 , образует решетку Галуа-замкнутых подмножеств алгебры $\mathcal{M}$.

Теорема 11 ([10, с. 59, теорема 2.2]). *Подалгебры F алгебры $\mathcal{N}$, содержащие класс M_1^{01} , являются Галуа-замкнутыми классами функций.*

Из приведенных результатов вытекает очевидное следствие.

Теорема 12. *Операторы Inv и Pol задают взаимно однозначное соответствие между Галуа-замкнутыми подалгебрами алгебр $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.*

Следующие результаты посвящены более глубокому, по сравнению с работами [8, 9, 10], исследованию данного соответствия.

Пользуясь введенными обозначениями, можно следующим образом переформулировать критерии бионктивности, слабой положительности, слабой отрицательности и мультиаффинности [2]:

$$\begin{aligned} Bi &= \text{Inv}(\{y_1 y_2 \oplus y_1 y_3 \oplus y_2 y_3\}), \\ WP &= \text{Inv}(\{y_1 \vee y_2\}), \\ WN &= \text{Inv}(\{y_1 \& y_2\}), \\ A &= \text{Inv}(\{y_1 \oplus y_2 \oplus y_3\}). \end{aligned} \tag{8}$$

Используя результаты [9], равенства (8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \text{Inv}(SM) &= Bi, \\ \text{Inv}(D_{01}) &= WP, \\ \text{Inv}(K_{01}) &= WN, \\ \text{Inv}(L_{01}) &= A. \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку всякая функция замкнута относительно одноместной операции $g(y) = y$, то для наименьших по включению классов Поста $C_0, C, C_1, U_0, U_{01}, U_1, SU, SM, K_{01}, D_{01}, L_{01}$, в дополнение к (9), будут выполняться равенства

$$\begin{aligned} \text{Inv}(U_{01}) &= P_2, \quad \text{Inv}(C_0) = \text{Inv}(U_0) = 0-S, \quad \text{Inv}(C_1) = \text{Inv}(U_1) = 1-S, \\ \text{Inv}(C) &= \text{Inv}(MU) = 0-S \cap 1-S, \quad \text{Inv}(SU) = CL. \end{aligned} \tag{10}$$

Верны и равенства, обратные равенствам (9) и (10):

$$\text{Pol}(Bi) = SM, \text{Pol}(WP) = D_{01}, \text{Pol}(WN) = K_{01}, \text{Pol}(A) = L_{01}, \text{Pol}(P_2) = U_{01}, \\ \text{Pol}(0-S) = U_0, \text{Pol}(1-S) = U_1, \text{Pol}(0-S \cap 1-S) = MU, \text{Pol}(CL) = SU. \quad (11)$$

Теорема 13. *Классы Шефера $0-S$, $1-S$, Bi , WP , WN , A и класс CL являются максимальными подалгебрами алгебры $\mathcal{N}$. Других максимальных подалгебр нет.*

Доказательство. Указанные классы содержат класс M_1^{01} и поэтому являются Галуа-замкнутыми. Пусть $F \in \{0-S, 1-S, Bi, WP, WN, A, CL\}$. Тогда $\text{Pol}(F) \in \{U_0, U_1, SM, D_{01}, K_{01}, L_{01}, SU\}$. Данные классы исчерпывают собой минимальные замкнутые классы, отличные от классов C , C_0 , C_1 и U_{01} . Следовательно, соответствующие им классы являются максимальными подалгебрами и исчерпывают множество максимальных классов. $\square$

Лемма 14. *Верны равенства*

$$\text{Pol}(Mon) = O^\infty, \quad \text{Pol}(\overline{Mon}) = I^\infty.$$

Доказательство. Докажем, что $\text{Pol}(Mon) = O^\infty$. Второе равенство доказывается аналогично. Пусть $g(y_1, \dots, y_r) \in O^\infty$, $f(x_1, \dots, x_n) \in Mon$. По определению класса O^∞ (см. [10, с. 19]) функция g для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ удовлетворяет условию

$$g(y_1, \dots, y_r) \geq y_i.$$

Пусть $\alpha_1 = (a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}), \dots, \alpha_r = (a_1^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}) \in E_f$. Построим вектор

$$\beta = (g(a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(r)}), \dots, g(a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(r)})).$$

Тогда, очевидно, выполняется неравенство $\beta \geq \alpha_i$ и, поскольку f — монотонная функция, $\beta \in E_f$. Таким образом, $\text{Inv}(O^\infty) \supset Mon$ и, следовательно, $O^\infty \subset \text{Pol}(Mon)$.

Предположим, что некоторая функция $g(y_1, \dots, y_r) \in \text{Pol}(Mon) \setminus O^\infty$. Это означает, что для всякого $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ найдется такой вектор $\beta^{(i)} = (b_1^{(i)}, \dots, b_r^{(i)}) \in V_r$, что $g(\beta^{(i)}) < b_i^{(i)}$, т.е. $b_i^{(i)} = 1$ и $g(\beta^{(i)}) = 0$. Построим монотонную функцию, не замкнутую относительно операции $\tilde{g}$. Положим $f(x_1, \dots, x_r) = x_1 \vee \dots \vee x_r$. Для этой функции f векторы вида

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (b_1^{(1)} = 1, b_1^{(2)}, \dots, b_1^{(r)}), \\ \alpha_2 &= (b_2^{(1)}, b_2^{(2)} = 1, \dots, b_1^{(r)}), \\ &\dots \\ \alpha_r &= (b_r^{(1)}, b_r^{(2)}, \dots, b_r^{(r)} = 1) \end{aligned}$$

являются выполняющими.

В этом случае $\tilde{g}(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}) = (g(\beta^{(1)}), \dots, g(\beta^{(r)})) = (0, \dots, 0) \in E_f$, откуда следует, что $g \notin \text{Pol}(\text{Mon})$, что противоречит исходному предположению. Значит, $\text{Pol}(\text{Mon}) = O^\infty$. $\square$

Легко видеть, что классы Mon и $\overline{\text{Mon}}$ являются подалгебрами алгебры Шефера. Однако они не содержат M_1^{01} , поэтому не обязаны быть Галуа-замкнутыми.

Введем классы функций

$$\text{Mon}' = \langle \text{Mon} \cup M_1^{01} \rangle, \quad \overline{\text{Mon}}' = \langle \overline{\text{Mon}} \cup M_1^{01} \rangle.$$

Лемма 15. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ лежит в $\text{Mon}'(\overline{\text{Mon}}')$ тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) f_2(x_1, \dots, x_n), \quad (12)$$

где $f_1(x_1, \dots, x_n) \in M_1^{01}$, $f_2(x_1, \dots, x_n) \in \text{Mon}$ ($f_2(x_1, \dots, x_n) \in \overline{\text{Mon}}$).

Доказательство. Пусть F — класс функций, представимых в виде (12). Очевидно, что $F \subset \text{Mon}'$. С другой стороны, $\text{Mon} \subset F$, $M_1^{01} \subset F$, откуда $\text{Mon}' \subset \langle F \rangle$. Осталось показать, что $\langle F \rangle = F$.

Покажем, что класс F замкнут относительно операций ζ , τ , Δ , $\exists$, $\&$. Замкнутость относительно операций ζ , τ , Δ и $\&$ очевидна. Замкнутость относительно операции $\exists$ следует из замкнутости относительно этой операции классов M_1^{01} и Mon . $\square$

Теорема 16. Верны равенства:

$$\text{Pol}(\text{Mon}') = O^\infty, \text{Pol}(\overline{\text{Mon}}') = I^\infty,$$

$$\text{Inv}(O^\infty) = \text{Mon}', \text{Inv}(I^\infty) = \overline{\text{Mon}}'.$$

Доказательство. Классы Mon' , $\overline{\text{Mon}}'$ — подалгебры в $\mathcal{N}$, содержащие класс M_1^{01} . Следовательно, они являются Галуа-замкнутыми.

Дальнейшее доказательство проведем для класса Mon' , так как вторая часть доказывается аналогично.

Поскольку $\text{Mon} \subset \text{Mon}'$, то $O^\infty = \text{Pol}(\text{Mon}) \supset \text{Pol}(\text{Mon}')$. Значит, $\text{Inv}(O^\infty) = \text{Inv}(\text{Pol}(\text{Mon})) \subset \text{Inv}(\text{Pol}(\text{Mon}')) = \text{Mon}'$. Пусть теперь $g(y_1, \dots, y_r) \in O^\infty$ и $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Mon}'$. Тогда $g(y_1, \dots, y_r) \geq y_i$. Без ограничения общности будем считать, что $g(y_1, \dots, y_r) \geq y_1$. Пусть теперь $\alpha_1 = (a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}), \dots, \alpha_r = (a_1^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}) \in E_f$. Положим $\beta = \tilde{g}(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)})$. Покажем, что $\beta \in E_f$. Представим функцию f в виде (11):

$$f = f_1 \cdot f_2, \quad f_1 \in M_1^{01}, \quad f_2 \in \text{Mon}.$$

По лемме 14 вектор $\beta \in E_{f_2}$. Заметим далее, что множество выполняющих векторов функции f_1 состоит из векторов, содержащих одинаковые значения координат некоторого разбиения на блоки множества $\{1, \dots, n\}$. Поэтому $\beta \in E_{f_1}$, откуда $\beta \in E_f$.

Из результатов работы [10] очевидным образом следуют равенства:

$$\begin{aligned}
 & 1) \text{ Inv}(U) = 1 - S \cap CL = CL^1, \text{ Pol}(CL^1) = U; \\
 & 2) \text{ Inv}(K_0) = WN^0, \text{ Pol}(WN^0) = K_0; \\
 & 3) \text{ Inv}(D_1) = WP^1, \text{ Pol}(WP^1) = D_1; \\
 & 4) \text{ Inv}(D_0) = WP^0, \text{ Pol}(WP^0) = D_0; \\
 & 5) \text{ Inv}(K_1) = WN^1, \text{ Pol}(WN^1) = K_1; \\
 & 6) \text{ Inv}(K) = WN^{01}, \text{ Pol}(WN^{01}) = K; \\
 & 7) \text{ Inv}(D) = WP^{01}; \\
 & 8) \text{ Inv}(L_0) = A^0, \text{ Pol}(A^0) = L_0; \\
 & 9) \text{ Inv}(L_1) = A^1, \text{ Pol}(A^1) = L_1; \\
 & 10) \text{ Inv}(L) = A^{01}, \text{ Pol}(A^{01}) = L; \\
 & 11) \text{ Inv}(SL) = M_8 = CL \cap A, \text{ Pol}(M_8) = SL.
 \end{aligned} \tag{13}$$

В [5] одним из авторов для $m = 3, 4, \dots$ доказаны следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 \text{Inv}(MO_0^m) &= WP_{m,2}, \quad \text{Pol}(WP_{m,2}) = MO_0^m, \\
 \text{Inv}(MI_1^m) &= WN_{m,2}, \quad \text{Pol}(WN_{m,2}) = MI_1^m.
 \end{aligned} \tag{14}$$

На основе равенств (14) с использованием базисов соответствующих классов, приведенных в таблице 1, получаем следующее утверждение.

Утверждение 17. *Верны равенства:*

$$\begin{aligned}
 \text{Inv}(MO^m) &= WP_{m,2} \cap 1 - S = WP_{m,2}^1, & \text{Pol}(WP_{m,2}^1) &= MO^m, \\
 \text{Inv}(MI^m) &= WN_{m,2}^0 \cap 0 - S = WN_{m,2}^0, & \text{Pol}(WN_{m,2}^0) &= MI^m,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где $m = 3, 4, \dots$,

$$\begin{aligned}
 \text{Inv}(MO_0^2) &= Bi \cap WP = M_4, & \text{Pol}(M_4) &= MO_0^2, \\
 \text{Inv}(MI_1^2) &= Bi \cap WN = M_5, & \text{Pol}(M_5) &= MI_1^2,
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Inv}(O^m) &= \overline{Mon'} \cap WP_{m,2} = \overline{Mon'}_m, & \text{Pol}(\overline{Mon'} \cap WP_{m,2}) &= O^m, \\
 \text{Inv}(I^m) &= \overline{Mon'} \cap WN_{m,2} = \overline{Mon'}_m, & \text{Pol}(\overline{Mon'} \cap WN_{m,2}) &= I^m,
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Inv}(O^2) &= \text{Inv}(O^\infty) \cap \text{Inv}(MO_0^m) = \overline{Mon'} \cap Bi, & \text{Pol}(\overline{Mon'} \cap Bi) &= O^2, \\
 \text{Inv}(I^2) &= \text{Inv}(I^\infty) \cap \text{Inv}(MI_1^m) = \overline{Mon'} \cap Bi, & \text{Pol}(\overline{Mon'} \cap Bi) &= I^2,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где $m = 3, 4, \dots$

Доказательство. Сначала докажем (15). Из вида базисов классов MO^m, MI^m (см. табл. 1) следует, что

$$MO^m = \langle MO_0^m, 1 \rangle = \langle MO_0^m \cup U_1 \rangle, \quad MI^m = \langle MI_1^m \cup U_0 \rangle.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Inv}(MO^m) &= \text{Inv}(MO^m) \cap \text{Inv}(U_1) = WP_{m,2} \cap 1-S = WP_{m,2}^1, \\ \text{Inv}(MI^m) &= \text{Inv}(MI^m) \cap \text{Inv}(U_0) = WN_{m,2}^0 \cap 0-S = WN_{m,2}^0. \end{aligned}$$

Равенства $\text{Pol}(WP_{m,2}^1) = MO^m$, $\text{Pol}(WN_{m,2}^0) = MI^m$ следуют из Галуа-замкнутости приведенных классов.

Далее заметим, что

$$MO_0^2 = \langle SM, D_{01} \rangle, \quad MI_1^2 = \langle SM, K_{01} \rangle.$$

Поэтому верны равенства (16). Равенства (17) следуют из соотношений

$$O^m = \langle O^\infty, MO_0^m \rangle, \quad I^m = \langle I^\infty, MI_1^m \rangle.$$

Наконец, равенства (18) следуют из равенств:

$$O^2 = \langle O^\infty, SM \rangle, \quad I^m = \langle I^\infty, SM \rangle. \quad \square$$

Рассмотрим классы $Mon, Mon_0, Mon_1, Mon_{01}$. Исходя из знания их базисов, приведенных в таблице 1, заключаем, что

$$\begin{aligned} Mon_{01} &= \langle K_{01} \cup D_{01} \rangle, \quad Mon_0 = \langle K_{01} \cup D_{01} \cup U_0 \rangle, \\ Mon_1 &= \langle K_{01} \cup D_{01} \cup U_1 \rangle, \quad Mon = \langle K_{01} \cup D_{01} \cup U_0 \cup U_1 \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{Inv}(Mon_{01}) = WP \cap WN = M_3, \quad \text{Pol}(M_3) = Mon_{01} \quad (19)$$

и, соответственно,

$$\text{Inv}(Mon_0) = WP \cap WN \cap 0-S = M_3^0, \quad \text{Pol}(M_3^0) = Mon_0, \quad (20)$$

$$\text{Inv}(Mon_1) = WP \cap WN \cap 1-S = M_3^1, \quad \text{Pol}(M_3^1) = Mon_1, \quad (21)$$

$$\text{Inv}(Mon) = WP \cap WN \cap 0-S \cap 1-S = M_3^{01}, \quad \text{Pol}(M_3^{01}) = Mon. \quad (22)$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} T_0 &= \langle x\bar{y}, x \vee y \rangle = \langle I^\infty \cup D_{01} \rangle, \\ T_1 &= \langle x \vee \bar{y}, xy \rangle = \langle O^\infty \cup K_{01} \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому, используя утверждение 4, получаем:

$$\begin{aligned} \text{Inv}(T_0) &= \text{Inv}(I^\infty) \cap \text{Inv}(D_{01}) = \overline{\text{Mon}'} \cap \text{WP} = M_1^0, \\ \text{Inv}(T_1) &= \text{Inv}(O^\infty) \cap \text{Inv}(K_{01}) = \text{Mon}' \cap \text{WN} = M_1^1. \end{aligned} \quad (23)$$

Обратно,

$$\text{Pol}(M_1^0) = T_0, \quad \text{Pol}(M_1^1) = T_1. \quad (24)$$

Утверждение 18. Верны равенства

$$\begin{aligned} \text{Inv}(S_{01}) &= M_2, \quad \text{Pol}(M_2) = S_{01}, \\ \text{Inv}(S) &= M_7, \quad \text{Pol}(M_7) = S. \end{aligned}$$

Доказательство. Равенства следуют из соотношений

$$S_{01} = \langle SM \cup L_{01} \rangle, \quad S = \langle SL \cup S_{01} \rangle. \quad \square$$

Пользуясь доказанным утверждением и равенством

$$T_{01} = \langle MI^2 \cup MO^2 \cup S_{01} \cup \text{Mon}_{01} \rangle,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Inv}(T_{01}) &= (Bi \cap \text{WN}) \cap (Bi \cap \text{WP}) \cap (Bi \cap A) \cap (\text{WP} \cap \text{WN}) = \\ &= Bi \cap A \cap \text{WP} \cap \text{WN} = M_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Соответственно,

$$\text{Pol}(M_1) = T_{01}. \quad (26)$$

Лемма 19. Класс функций $M_9 = \langle \text{Mon}' \cup M_1^0 \rangle$ состоит из функций вида

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} \bar{x}_i \bigwedge_{j \in J} (x_{s_{j,1}} \oplus x_{s_{j,2}} \oplus 1) g(x_1, \dots, x_n), \quad (27)$$

где функция $g \in \text{Mon}$ и несущественно зависит от переменных $x_i, i \in I$.
Класс функций $M_{10} = \langle \overline{\text{Mon}'} \cup M_1^1 \rangle$ состоит из функций вида

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i \bigwedge_{j \in J} (x_{s_{j,1}} \oplus x_{s_{j,2}} \oplus 1) g(x_1, \dots, x_n), \quad (28)$$

где функция $g \in \overline{\text{Mon}}$ и несущественно зависит от переменных $x_i, i \in I$.

Доказательство. Докажем равенство (27). Равенство (28) доказывается аналогично. Пусть F — класс функций из правой части равенства (27). Включение $F \subset \langle Mon' \cup M_1^0 \rangle$ очевидно. С другой стороны, множество F очевидным образом замкнуто относительно операций алгебры Шефера и содержит классы Mon' и M_1^0 . Следовательно, верно (27). $\square$

Подклассы классов M_9 и M_{10} , в представлениях которых вида (27) и (28) функция g лежит в классе Mon_m или $\overline{Mon}_m$ соответственно, обозначим через $M_{9,m}$ и $M_{10,m}$, $m=2,3,\dots$

Утверждение 20. Верны равенства

$$\text{Inv}(O_0^\infty) = M_9, \quad \text{Pol}(M_9) = O_0^\infty, \quad \text{Inv}(I_1^\infty) = M_{10}, \quad \text{Pol}(M_{10}) = I_1^\infty.$$

Доказательство. Имеем $O_0^\infty = O^\infty \cap T_0$, $I_1^\infty = I^\infty \cap T_1$. Поэтому

$$\text{Inv}(O_0^\infty) = \langle \text{Inv}(O^\infty) \cup \text{Inv}(T_0) \rangle = \langle Mon' \cup M_1^0 \rangle = M_9,$$

$$\text{Inv}(I_1^\infty) = \langle \text{Inv}(I^\infty) \cup \text{Inv}(T_1) \rangle = \langle \overline{Mon'} \cup M_1^1 \rangle = M_{10}. \quad \square$$

Теорема 21. Верны равенства

$$\begin{aligned} \text{Inv}(MO_0^\infty) &= WP_{\infty,2}, & \text{Pol}(WP_{\infty,2}) &= MO_0^\infty, \\ \text{Inv}(MI_1^\infty) &= WN_{\infty,2}, & \text{Pol}(WN_{\infty,2}) &= MI_1^\infty. \end{aligned} \quad (29)$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in WP_{\infty,2}$. Тогда существует КНФ этой функции, в которой все дизъюнкты с отрицаниями имеют длину не более 2. Пусть D — такой дизъюнкт. Без ограничения общности можно считать, что

$$D \in \{x_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \vee x_2, x_1 \vee \dots \vee x_k\}.$$

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

Если $D = x_1$, то у любого вектора из носителя f первая координата равна 1. Значит, если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_f$, то $\alpha_1 = (1, \dots), \alpha_2 = (1, \dots), \alpha_3 = (1, \dots)$. Поэтому при применении операции $g(y_1, y_2, y_3) = y_1 \vee y_2 y_3$ получится вектор, выполняющий дизъюнкт D . Аналогичные рассуждения проводятся для случая $D = \bar{x}_1$.

Если $D = x_1 \vee \dots \vee x_k$, то каждый вектор $\alpha \in E_f$ на координатах с 1-й по k -ю имеет хотя бы одну единицу. Применение операции $g(y_1, y_2, y_3) = y_1 \vee y_2 y_3$ сохраняет это свойство.

Рассмотрим случай $D = \bar{x}_1 \vee x_2$. Если $\alpha \in E_f$, то первые две координаты будут либо 00, либо 01, либо 11. Несложно показать, что применение

операции $g(y_1, y_2, y_3) = y_1 \vee y_2 y_3$ в любом случае даст вектор с таким же началом.

Таким образом, $WP_{\infty,2} \subset \text{Inv}(MO_0^\infty)$. Докажем обратное включение. Заметим, что $D_{01} \subset MO_0^\infty$. Поэтому $\text{Inv}(MO_0^\infty) \subset \text{Inv}(D_{01}) = WP$. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Inv}(MO_0^\infty)$. Выпишем приведенное представление функции f , состоящее из простых имплицентов:

$$f(x_1, \dots, x_n) = D_1 \cdot \dots \cdot D_l.$$

Каждый дизъюнкт в этом разложении имеет вид либо $x_1 \vee \dots \vee x_k$, либо $\bar{x}_1 \vee \dots \vee x_k$. Покажем, что во втором случае $k \leq 2$. Итак, пусть $\bar{x}_1 \vee \dots \vee x_k$ — простая имплицента f . Аналогично доказательству теоремы 3 из [5] убеждаемся в том, что существуют выполняющие векторы функции f вида

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_k, \dots), \\ \alpha_2 &= (\underbrace{1, 1, 0, \dots, 0}_k, \dots), \\ \alpha_3 &= (\underbrace{1, 0, 1, \dots, 0}_k, \dots), \\ &\dots \\ \alpha_k &= (\underbrace{1, 1, \dots, 0, 1}_k, \dots). \end{aligned}$$

Применение операции $g(y_1, y_2, y_3) = y_1 \vee y_2 y_3$ к векторам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ дает вектор $\tilde{g}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\underbrace{1, 0, 0, \dots, 0}_k, \dots)$, не являющийся выполняющим для

дизъюнкта $\bar{x}_1 \vee \dots \vee x_k$. Следовательно, $k \leq 2$. Это означает, что $\text{Inv}(MO_0^\infty) \subset WP_{\infty,2}$, то есть $\text{Inv}(MO_0^\infty) = WP_{\infty,2}$. Равенство $\text{Pol}(WP_{\infty,2}) = MO_0^\infty$ следует из Галуа-замкнутости класса MO_0^∞ . Третье и четвертое равенства доказываются аналогично. $\square$

Исходя из полученных результатов, очевидным образом доказывается следующее утверждение.

Утверждение 22. *Верны равенства*

$$\text{Inv}(O_0^m) = WP_{m,2} \cap M_9 = M_{9,m}, \quad \text{Pol}(M_{9,m}) = O_0^m, \quad m \geq 3, \quad (30)$$

$$\text{Inv}(I_1^m) = M_{10} \cap WN_{m,2} = M_{10,m}, \quad \text{Pol}(M_{10,m}) = I_1^m, \quad m \geq 3, \quad (31)$$

$$\text{Inv}(O_0^2) = M_{9,2}, \quad \text{Pol}(M_{9,2}) = O_0^2, \quad (32)$$

$$\text{Inv}(I_1^2) = M_{10,2}, \quad \text{Pol}(M_{10,2}) = I_1^2, \quad (33)$$

$$\text{Inv}(MO^\infty) = M_9 \cap 1-S = M_9^1, \quad \text{Pol}(M_9^1) = MO^\infty, \quad (34)$$

$$\text{Inv}(MI^\infty) = M_{10} \cap 0-S = M_{10}^0, \quad \text{Pol}(M_{10}^0) = MI^\infty. \quad (35)$$

Доказательство. Равенства (30)–(33) следуют из равенств

$$O_0^m = \langle O_0^\infty \cup MO_0^m \rangle, \quad I_1^m = \langle I_1^\infty \cup MI_1^m \rangle, m = 2, 3, \dots$$

Равенства (34)–(35) следуют из равенств

$$MO^\infty = \langle U_1 \cup O_0^\infty \rangle, \quad MI_1^\infty = \langle U_0 \cup I_1^\infty \rangle.$$

Обобщая результаты, представленные формулами (8)–(35), получаем следующую теорему.

Теорема 23. *Соответствие Галуа между классами Поста (подалгебрами алгебры M) и Галуа-замкнутыми подалгебрами алгебры Шефера (подалгебрами алгебры $\mathcal{N}$) определяется в соответствии с таблицей 2.*

Перечисленные подалгебры алгебры $\mathcal{N}$ образуют полную систему Галуа-замкнутых подалгебр алгебры Шефера (см. рис. 2).

Таблица 2. Соответствие Галуа для классов Поста и подалгебр алгебры Шефера

Класс Поста	Класс функций	Класс Поста	Класс функций	Класс Поста	Класс функций
P_2	M_1^{01}	Mon	M_3^{01}	L	A^{01}
D	WP^{01}	K	WN^{01}	U	CL^1
MU	$0-S \cap 1-S$	C	$0-S \cap 1-S$	T_1	M_1^1
Mon_1	M_3^1	L_1	A^1	D_1	WP^1
K_1	WN^1	U_1	$1-S$	C_1	$1-S$
O^m	Mon'_m	MO^m	$WP_{m,2}^1$	O^∞	Mon'
MO^∞	M_9^1	T_0	M_1^0	Mon_0	M_3^0
L_0	A^0	D_0	WP^0	K_0	WN^0
U_0	$0-S$	C_0	$0-S$	I^m	Mon'_m
MI^m	$WN_{m,2}^0$	I^∞	Mon'	MI^∞	M_{10}^0
T_{01}	M_1	S_{01}	M_2	Mon_{01}	M_3
L_{01}	A	D_{01}	WP	K_{01}	WN
U_{01}	P_2	S	M_7	SM	Bi
SL	M_8	SU	CL	O_0^m	$WP_{m,2}^1$
MO_0^2	M_4	MO_0^m	$WP_{m,2}$	I_1^m	$M_{10,m}$
MI_1^2	M_5	MI_1^m	$WN_{m,2}$	O_0^∞	M_9
MO_0^∞	$WP_{\infty,2}$	I_1^∞	M_{10}	MI_1^∞	$WN_{\infty,2}$

В таблице 2 для классов $O^\infty, MO^\infty, O_0^\infty, I^\infty, MI^\infty, I_1^\infty$ параметр t принимает значения 2, 3, 4, ... Для классов MO_0^∞ и MI_1^∞ параметр t принимает значения 3, 4, ...

Рис. 2. Решетка подалгебр алгебры Шефера¹

¹ В отличие от рисунка 1 на рисунке 2 решетка представлена по нисходящей: минимальная подалгебра сверху, а максимальная — внизу.

Список литературы

1. *Schaefer T.* Complexity of satisfiability problems // Proc. 10th Ann. ACM Symp. Theory of Computing Machinery. — 1978. — P. 216–226.
2. *Горишков С. П.* Применение теории NP-полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений // Обзор. прикл. и промышл. матем., сер. дискр. матем. — 1995. — Т. 2. № 3. — С. 325–398.
3. *Горишков С. П.* О пересечениях классов мультиаффинных, биюнктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций // Обзор. прикл. и промышл. матем., сер. дискр. матем. — 1997. — Т. 4. № 2. — С. 238–259.
4. *Creighnou N., Khanna S., Sudan M.* Complexity classifications of Boolean constraint satisfaction problems. — SIAM Press: Philadelphia, USA, 2001.
5. *Тарасов А. В.* Обобщение критерия биюнктивности Шефера // Дискретная математика. — 2012 — Т. 24. Вып. 2. — С. 91–99.
6. *Сачков В. Н.* Разбиения с поглощениями и противоречивые разбиения множеств // Труды по дискретной математике, т.4. — М.: Физматлит, 2001 — С. 201–222.
7. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1979.
8. *Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.* Теория Галуа для классов Поста. I, II // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10. — № 5. — С. 1–9.
9. *Марченков С. С.* Инварианты классов Поста // Фундам. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4. № 4. — С. 1385–1404.
10. *Марченков С. С.* Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2001. — 126 с.
11. *Кон П.* Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
12. *Оре О.* Теория графов. — М.: Либроком, 2008.
13. *Парватов Н. Г.* Соответствие Галуа для замкнутых классов дискретных функций // Прикл. дискр. матем. — 2010. — № 2(8). — С. 10–15.
14. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. .* Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966. — 119 с.